جان ب. فرالی

نخستین درس در جبر مجرد

جلد اول

ترجمهٔ مسعود فرزان

نخستین درس در جبر مجرد

جلد اول

جان ب. فرالی

ترجمهٔ مسعود فرزان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۴۰

مرکز نشر دانشگاهی
۳۵۱

A First Course in Abstract Algebra
John B. Fraleigh
Third Edition
Addison-Wesley, 1982

نخستین درس در جبر مجرد
جلد اول
تألیف جان ب. فرالی
ترجمهٔ دکتر مسعود فرزان
ویراستهٔ دکتر مهدی بهزاد
مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۷
مرکز نشر دانشگاهی، چاپ پنجم ۱۳۷۷
تعداد ۴۰۰۰
حروفچینی : بینش‌نو
لیتوگرافی : کیان
چاپ و صحافی : معراج
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

فرالی، جان Fraleigh, John B.
نخستین درس در جبر مجرد / جان ب. فرالی؛ ترجمهٔ مسعود فرزان. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷ـ
ج. : مصور، جدول، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۳۵۱. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۴۰)
ISBN 964-01-0351-9(v.1)
ISBN 964-01-8117-x (set)
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی : A first course in abstract algebra.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
ج. ۱ (چاپ پنجم: ۱۳۷۷).
۱. جبر مجرد. الف. فرزان، مسعود، ۱۳۲۲ ـ ۱۳۶۸، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
۳ ن ۴ ف/QA۱۶۲ ۵۱۲/۰۲
۱۳۶۷
کتابخانهٔ ملی ایران ۱۶۴۷ ـ ۶۷ م*

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار مترجم	هشت
پیشگفتار ویرایش سوم	۱
پیشگفتار ویرایش نخست	۲
فصل صفر چند پیشنیاز	۵
۱.۰ نقش تعریف	۵
۲.۰ مجموعه	۶
۳.۰ افراز و نسبتهای هم‌ارزی	۸
فصل ۱ عمل دوتایی	۱۳
۱.۱ انگیزه	۱۳
۲.۱ تعریف و خواص	۱۴
۳.۱ جدول	۱۶
۴.۱ چند نکتهٔ تحذیری	۱۷
فصل ۲ گروه	۲۳
۱.۲ انگیزه	۲۳
۲.۲ تعریف و خواص مقدماتی	۲۵
۳.۲ گروه متناهی و جدول گروه	۲۹
فصل ۳ زیرگروه	۳۶
۱.۳ نمادها و اصطلاحات	۳۶
۲.۳ زیر مجموعه و زیر گروه	۳۷
۳.۳ زیر گروه دوری	۴۰

عنوان	صفحه

فصل ۴ جایگشت I	۴۶
۱.۴ تابع و جایگشت	۴۶
۲.۴ گروههای جایگشت	۴۹
۳.۴ دو مثال مهم	۵۲
فصل ۵ جایگشت II	۵۸
۱.۵ دور و نمادگذاری دوری	۵۸
۲.۵ جایگشتهای فرد و زوج	۶۱
۳.۵ گروههای متناوب	۶۳
فصل ۶ گروه دوری	۶۷
۱.۶ خواص مقدماتی	۶۷
۲.۶ طبقه‌بندی گروههای دوری	۷۰
۳.۶ زیر گروههای گروههای دوری متناهی	۷۲
فصل ۷ ایزومورفیسم	۷۷
۱.۷ تعریف و خواص مقدماتی	۷۷
۲.۷ چگونه نشان دهیم که گروهها ایزومورف هستند	۷۸
۳.۷ چگونه نشان دهیم که گروهها ایزومورف نیستند	۸۱
۴.۷ قضیهٔ کیلی	۸۳
فصل ۸ حاصلضرب مستقیم	۹۰
۱.۸ حاصلضرب مستقیم خارجی	۹۰
*۲.۸ حاصلضرب مستقیم داخلی	۹۵
فصل ۹ گروه‌آبلی متناهیاً تولید شده	۱۰۱
۱.۹ مولد و تاب	۱۰۱
۲.۹ قضیهٔ اساسی	۱۰۳
*۳.۹ کاربرد	۱۰۶
***فصل ۱۰ گروه در هندسه و آنالیز**	۱۱۱
*۱.۱۰ گروه در هندسه	۱۱۱

عنوان	صفحه

۲.۱۰ گروه درآنالیز ۱۱۷

فصل ۱۱ گروه همدسته‌ها ۱۲۱

۱.۱۱ مقدمه ۱۲۱

۲.۱۱ همدسته ۱۲۲

۳.۱۱ کاربرد ۱۲۸

فصل ۱۲ زیرگروه نورمال وگروه خارج قسمت ۱۳۲

۱.۱۲ ملاکهایی برای وجود یك گروه همدسته ۱۳۲

۲.۱۲ اتومورفیسم داخلی و زیر گروه نورمال ۱۳۴

۳.۱۲ گروه خارج قسمت ۱۳۶

۴.۱۲ گروه ساده ۱۳۹

*۵.۱۲ کاربرد ۱۴۰

فصل ۱۳ همومورفیسم ۱۴۸

۱.۱۳ تعریف و خواص ابتدایی ۱۴۸

۲.۱۳ قضیهٔ اساسی همومورفیسم ۱۵۱

۳.۱۳ کاربرد ۱۵۳

فصل ۱۴ سری گروهها ۱۵۸

۱.۱۴ سریهای زیر نورمال و نورمال ۱۵۸

۲.۱۴ قضیهٔ ژوردان ـ هولدر ۱۶۰

*۳.۱۴ مرکز و سری مرکزی فزاینده ۱۶۳

***فصل ۱۵ قضیه‌های ایزومورفیسم ؛ اثبات قضیهٔ ژوردان ـ هولدر** ۱۶۶

*۱.۱۵ قضیه های ایزومورفیسم ۱۶۶

*۲.۱۵ لم ساسنهاوس (پروانه‌ای) ۱۶۹

*۳.۱۵ اثبات قضیهٔ شرایر ۱۷۱

***فصل ۱۶ کنش گروه بر یك مجموعه** ۱۷۷

*۱.۱۶ مفهوم کنش گروه ۱۷۷

عنوان	صفحه

*۲.۱۶ مجموعهٔ پایا و زیرگروه همروندی ۱۸۰
*۳.۱۶ مدار ۱۸۱

***فصل ۱۷ کاربرد G ـ مجموعه در شمارش** ۱۸۶

***فصل ۱۸ قضیه‌های سیلو** ۱۹۲

*۱.۱۸ p - گروه ۱۹۲
*۲.۱۸ قضیه‌های سیلو ۱۹۵

***فصل ۱۹ کاربردهای نظریهٔ سیلو** ۲۰۱

*۱.۱۹ کاربرد در p - گروهها و تساوی همادی ۲۰۱
*۲.۱۹ کاربردهای دیگر ۲۰۳

***فصل ۲۰ گروه‌آبلی آزاد** ۲۱۰

*۱.۲۰ گروه‌آبلی‌آزاد ۲۱۰
*۲.۲۰ اثبات قضیهٔ اساسی ۲۱۳

***فصل ۲۱ گروه‌آزاد** ۲۲۱

*۱.۲۱ کلمه‌ها و کلمه‌های مختصر ۲۲۱
*۲.۲۱ گروه‌آزاد ۲۲۲
*۳.۲۱ همومورفیسمهای گروههای‌آزاد ۲۲۴
*۴.۲۱ نگاهی دیگر به گروه‌آبلی‌آزاد ۲۲۵

***فصل ۲۲ نمایش‌گروه** ۲۳۰

*۱.۲۲ تعریف ۲۳۰
*۲.۲۲ نمایشهای ایزومورف ۲۳۲
۳.۲۲ کاربرد ۲۳۳

پیوست ۲۴۰

عنوان	صفحه
پاسخها و توصیه‌ها	۲۴۵
نمادها	۲۵۸
کتابنامه	۲۶۱
فرهنگ انگلیسی به فارسی	۲۶۵
فرهنگ فارسی به انگلیسی	۲۶۹
فهرست راهنما	۲۷۳

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

پیشگفتار مترجم

کتاب نخستین درس درجبرمجرد تألیف ج. ب. فرالی درسالهای اخیر یکی ازموفقترین کتابهای درسی جبر بوده است. این کتاب در دو بخش تدوین یافته است. بخش نخست به نظریهٔ گروهها اختصاص دارد و بخش دوم نظریه حلقه و میدان را مورد مطالعه قرار می‌دهد. کتاب حاضر، که اینك تقدیم علاقه‌مندان می‌شود، ترجمهٔ بخش نخست از ویرایش سوم کتاب فرالی است. این بخش به خوبی می‌تواند دریك نیمسال تدریس شود.

مسعود فرزان

پیشگفتار ویرایش سوم

دراین ویرایش نیزهمچون ویرایشهای پیشین هدف من این است که تا آنجایی که دریك درس مقدماتی ممکن است ، مطالب هرچه بیشتری دربارهٔ گروهها ، حلقه‌ها ومیدانها به دانشجویان آموخته شود.

چهارفصل ستاره‌دار مربوط به توپولوژی جبری موجود در ویرایشهای قبل حذف شده‌اند. فکرمی‌کنم که این چهارفصل به‌ندرت در کلاس تدریس می‌شده‌اند. نسخه‌هایی از ویرایشهای پیشین درکتابخانه‌ها موجودند. اینك هرکس که بخواهد آن مدخل شهودی مختصربه توپولوژی جبری را بخواند، می‌تواند به سراغشان برود.

برخی‌ازمدرسان به نیاوردن برهان قضیه‌های مهمی‌ازنظریهٔ گروهها که صرفاً صورت آن قضایا در بخشهای بدون ستارهٔ ویرایشهای قبل ذکر شده بود، ایراد گرفته‌اند. از این‌رو بخشهای ستاره‌داری را به منظور اثبات آن قضیه‌ها افزوده‌ام. همچنین در زمینهٔ کنش یك گروه بریك مجموعه وبه دنبالش کاربرد موضوع درقضیه‌های سیلو وشمارشی برنساید چند فصل گنجانیده‌ام و برهانهای کاملشان را نیزآورده‌ام. درباب استقرای ریاضی نیزضمیمه‌ای افزوده شده است.

تعدادی تمرین نیزاضافه‌کرده‌ام. در پاسخ به توصیه‌ها، جوابهای تمرینهایی راکه شمارهٔ زوج دارند و نیز جوابهای تمرینهایی را که طالب برهان هستند حذف کرده‌ام. تمرین دربارهٔ برهان ، اگر یافتن آن برهان فقط به چند ثانیه وقت نیاز داشته باشد، نسبتاً بی‌معنی است.

واکنشهای دانشجویان دورهٔ کارشناسی وهیأت علمی‌ونیزدانشجویان دوره‌های بالاتر از کارشناسی که خودرا برای امتحانات کلی آماده می‌کرده‌اند، نسبت‌به ویرایشهای اول و دوم ، موجب خرسندی من است. امیدوارم که ویرایش سوم نیز همچنان مورد استفاده قرار گیرد.

درطی این سالها، پیشنهادها وتصحیحات زیادی به دستم رسیده‌اند که ازبابت آنها بسیار سپاسگزارم. به‌ویژه مایلم از جورج برگمن که برمبنای تجربه‌اش ازتدریس متن در کلاس، دوازده صفحهٔ فشردهٔ تایپ شده حاوی یادآوریها ، پیشنهادها و چند مطالب تکمیلی برایم ارسال داشته‌است تشکر کنم. نظریات وی دراین تجدیدنظر تأثیرزیادی داشته است.

ج. ب. ف.

کینگستن، ردایلند

دسامبر ۱۹۸۱

پیشگفتار ویرایش نخست

اولین هدف این کتاب، ارائه متنی است که دانشجویان متوسط رشتهٔ ریاضی با استفاده از آن بتوانند تاجایی که بامطالعهٔ یك درس مقدماتی ممکن است، ادراك عمیقی ازجبرمجرد، بدون جبرخطی، به‌دست آورند. چون غالباً اولین تماس دانشجو بایك نظام مجرد ریاضی، در درس جبر صورت می‌گیرد، هدف دوم، افشانیدن بذری است که نحوهٔ تفکر ریاضی جدیدی بتواند ازآن بروید. تسلط براین متن باید بنیانی استوار برای مطالعات تخصصی‌تر درجبرفراهم آورد، ونیز کمك بزرگی برای سایرمطالعات اصل موضوعی در ریاضی باشد. درراستای هدف دومی که ذکرشد، کتاب با یك بخش مقدماتی آغاز می‌شود که به نقش تعاریف در ریاضیات می‌پردازد. این نقش بسیاربه‌ندرت تذکرداده می‌شود. برای تأکید بر اهمیت تعاریف، درسراسرمتن هراصطلاحی درتعریف خودباحروف سیاه یا ایرانیك ظاهرمی‌شود.

قسمت I دربارهٔ گروه است. درمبحث گروهها ودرواقع تمام مباحث متن، تاسرحد امکان، انگیزش مفاهیم در ذهن خواننده با توجه به تجربهٔ گذشتهٔ دانشجواز جبرصورت گرفته است. درك مفهوم مهم گروه خارج‌قسمت اغلب برای دانشجو دشوار است. ازاین‌رو بحث دربارهٔ گروه خارج قسمت و همومورفیسم را به وقتی موکول کرده‌ایم که دانشجو اندك تصوری از مفهوم گروه پیدا کرده باشد، تازه در آن وقت هم موضوع را به‌طور تدریجی ومشروح مورد بحث قرارداده‌ایم.

در بخشهای بدون ستارهٔ قسمت I، احکام متعدد ومهمی، با توضیحات نسبتاً زیاد و مثالهای کافی ولی بدون اثبات، عرضه شده‌اند. به نظرمن باتوجه به وسعت دامنهٔ ریاضی، مهم این است که دانشجورا طوری تربیت کنیم که بتواند احکام به‌دست آمده رابفهمد وبه‌کار ببرد، بدون آنکه احساس کند همهٔ جزئیات براهین را بدواً باید خود بررسی کند. البته ریاضیدانان حرفه‌ای هم سالهاست که این‌کار را می‌کنند. چنین روشی با این هدف من که دانشجودرك عمیقی ازجبر به‌دست آورد سازگاراست، بالاخص که بسیاری ازدانشگاهها هم تنها یك ترم به مواد این‌کتاب اختصاص می‌دهند.

درقسمت II به حلقه‌ها ومیدانها پرداخته شده‌است. سعی فراوان شده‌است که تناظر آنها با مطالب قبلی در زمینهٔ گروه خاطرنشان شود. درقسمت II تأکید اصلی برنظریهٔ میدان است که به نظریهٔ گالوا منجر و آن را شامل می‌شود. بحث دربارهٔ فضای برداری بسیارمختصراست، وصرفاً جهت عرضهٔ مفاهیم استقلال خطی و بعدکه درنظریهٔ میدان مورد

نیازند مطرح می‌شود. چون دانشجویان غالباً نظریهٔ میدان را بسیار دشوار می‌یابند، سعی کرده‌ام مطلب را به‌تدریج بیان کنم و همواره روشن سازم که چه می‌خواهیم بکنیم وچگونه می‌خواهیم کار را به انجام برسانیم.

خواص اعداد گویا که دانشجویان با آنها آشنا هستند، ولو اینکه ممکن است هرگز توجیه دقیق آنها را ندیده باشند، درطول متن بدون هیچ گونه تذکر یا توضیح مورد استفاده قرار می‌گیرند. من دریافته‌ام که دانشجوی متوسط، مشکل می‌تواند بفهمد که چرا باید نتایجی را که سالهاست با آنها آشنایی دارد، مورد مطالعهٔ صوری قرار دهد. ولی پس از به‌دست آوردن تصویری کلی ازماهیت دستگاههای جبری، دانشجو با دید تازه‌ای به این خواص می‌نگرد. این روش با این هدف من که دانشجودرك نسبتاً عمیقی ازیك درس نخستین به‌دست آورد، نیز سازگار می‌باشد.

به‌خاطر علاقه‌ام به‌اینکه دانشجو وادارشود مطالب هرچه بیشتری ازجبررا فرابگیرد، مطالب مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها را به صورت بسیار شهودی وفقط درحدلزوم موردبحث قرارداده‌ام. دو راه برای به‌دست‌آوردن معلومات عملی ازمطالب مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد: مطالعهٔ فی‌حد ذاتهٔ موضوع یا غرقه شدن درآن وبه کاربردن آن درحد نیاز. تجربهٔ من حاکی است که «نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان پیشنیاز» درآغاز یك درس جبر دلسردکننده‌ترین قسمت ازتمام درس است. روش من دراین مورد منعکس‌کنندهٔ این تمایل من در سراسر کتاب است که درچنین درسی، زیبایی عرضهٔ مطالب ریاضی و گاهی روانی بیان باید فدای فهم مطلب شود.

این کتاب متضمن مطلب کافی برای یك درس دو ترمی در یك کلاس متوسط است، ولی، بخشهای بدون ستاره دقیقاً برای یك درس یك ترمی در نظر گرفته شده‌اند. این بخشها خودکفا هستند و در آنها هیچ استفاده‌ای از بخشهای ستاره‌دار نمی‌شود. این قسمتها معرف کوشش من برای ارائه مطالب نسبتاً عمیقی از جبر، از جمله نظریهٔ گالوا، در یك کلاس متوسط و در یك ترم هستند. البته می‌توان درسهای یك ترمی گوناگون دیگری با استفاده از موضوعات این کتاب ارائه داد. برخی از فصلهای ستاره‌دار به عنوان تکلیف برای مطالعهٔ خارج از کلاس کاملا مناسب‌اند، مخصوصاً فصلهای ۱۰، ۳۷، ۳۹ و ۴۸. اگر فرصت اتمام نظریهٔ میدان موجود دراین متن نباشد، آنگاه یا فصل ۳۵ که شامل قضیهٔ کرونکراست وکاملا همگانی شده است، یافصل ۳۹، بخش اختتامی رضایتبخشی محسوب می‌شوند. به‌نظرمن درصورتی که فرصت اتمام مطالب بدون ستاره نباشد، با شروع فصل ۴۰ چیززیادی عاید نخواهد شد.

تمرینهای پایان هرفصل، معمولا باخطی افقی، به دو دسته تقسیم می‌شوند. آنهایی که دربالای خط قرار دارند، برای یك کلاس متوسط توصیه می‌شوند وگاهی خود مؤلف هم در دانشگاه ردایلند آنها را به عنوان تکلیف به دانشجویان می‌دهد. برای آنکه گذار دانشجواز ریاضیات مجرد تا آنجایی که ممکن است به سهولت انجام بگیرد، تمرینهای دستهٔ اول راطوری درنظر گرفته‌ام که عمدتاًمحاسباتی باشند. دانشجویان متوسط درمواجهه بایك دسته تمرین که همه با کلمات ثابت کنید یا نشان دهید شروع می‌شوند، خود را

می‌بازند. البته تربیت دانشجو درتوانایی اثبات مهم است. اولین دسته از تمرینها معمولا شامل تمرینهایی است که باعلامت بعلاوه مشخص می‌شوند، واثباتی راطلب می‌کنند روش مؤلف این است که حل شدهٔ این تمرینهای علامت‌دار را از دانشجویان بگیرد، آنها را بخواند، و درصورت لزوم از دانشجویان بخواهد که آنها را بازنویسی کنند، تا یاد بگیرند که ریاضی بنویسند ونه مهملات. تمرینهای دستهٔ دوم معمولا شامل تعداد زیادی تمرینهای اثباتی هستند، و نیز تمرینهایی که ماهیت محاسباتی دارند. علامت ستاره در جلو تمرین مشکل بودن تمرین را نشان نمی‌دهد، بلکه نشان می‌دهد که تمرین به مطالب ستاره دار متن مربوط است. به مناسبت علاقه‌ای که به‌ایجاد یك طرزتفکرصحیح ریاضی دارم، برخی ازتمرینها، مخصوصاً تمرینهای اوایل متن را طوری برگزیده‌ام که ماهیتشان تا حدی فراریاضی باشد. پاسخها و یا راهنماییهای مربوط به تقریباً همهٔ تمرینهایی که برهانی نمی‌خواهند، درپایان متن آورده شده است. برهانهای خواسته شده درتمرینها، دربخش پاسخها نیامده‌اند. فکرنمی‌کنم از نظرآموزشی صحیح باشد که چنین برهانهایی به این آسانی در دسترس دانشجو قرارگیرد.

پیشنویس‌اولیهٔ متن به‌صورت پلی‌کپی درترم بهارهٔ سال ۱۹۶۶، دردانشگاه ردایلند مورد استفاده قرارگرفته است. دراینجا، دین خودرا نسبت‌به جورج ای. مارتین، که یکی ازبخشهای درس راتدریس کرده است ابراز می‌دارم. تذکرات و پیشنهادهای او درآماده‌سازی این ویرایش برای انتشار، ارزش زیادی برای من داشته است.

ج. ب. ف.

کینگستن، ردایلند

سپتامبر ۱۹۶۶

◆

چند پیشنیاز

۱.۰ نقش تعریف

بسیاری از دانشجویان متوجه اهمیت شگرف تعریف در ریاضی نیستند. این اهمیت تا حدودی از نیاز ریاضیدانها به ارتباط بایکدیگر در رابطه باکارشان منشأ می گیرد. دوشخص که می‌خواهند دربارهٔ چیزی صحبت کنند، اختلاف نظر آنها درمورد اصطلاح فنی معینی می‌تواند به سوءتفاهم، برخورد یا حتی خونریزی منجرشود. وضع ناجور یك قصاب را تصور کنیدکه بامشتری لجبازی مواجه شده باشدکه بخواهد آنچه را همه راسته می‌نامند بخرد واصرارداشته‌باشد آن را فیله بنامد. متأسفانه به نظر نمی‌رسدکه، حتی درعلم آنچنان دقیقی چون ریاضی، استانداردکردن کامل واژه‌ها، به صورت ایده‌آل تخیلی میسر باشد. برای مثال، در ریاضی‌وقتی صحبت‌ازتابع می‌شود، ریاضیدانهای مختلف برای واژهٔ دامنه دومعنی متفاوت قائل می‌شوند. نتیجتاً، اکنون این تمایل وجود داردکه از به‌کاربردن این واژهٔ ابهام‌آمیز احتراز شود و تصویر یاحوزهٔ مقادیر به‌جای‌آن به‌کار رود. در ریاضی، باید برای جلوگیری از ابهام تلاش شود.

یکی از عناصر بسیار مهم خلاقیت ریاضی توانایی درتنظیم تعاریف مفید است، تعاریفی که مارا به‌نتایج جالبی‌هدایت کنند. یك دانشجوی ریاضی که دورهٔ پس‌ازکارشناسی (بعدازلیسانس) را آغاز می کند، ممکن است دریابدکه دربارهٔ تعاریف زمان زیادی را صرف‌بحث‌باسایر دانشجویان می کند. هنگامی که مؤلف دورهٔ بعدازلیسانس‌را می گذراند، یك دانشجوی بعدازلیسانس فیزیك به او گله‌کردکه هنگام صرف شام دانشجویان ریاضی دایماً کنارهم می‌نشینند و با یکدیگرجدل می کنند وموضوع بحث آنها همیشه یك تعریف است. درامتحانات شفاهی، معمولاازدانشجویان بعداز لیسانس خواسته می‌شودکه چندین

تعریف را بیان کنند. اگر آنها نتوانند معنی اصطلاحی را بیان کنند، احتمالا نمی‌توانند به پرسشهای مربوط به آن مفهوم هم پاسخ معقولی بدهند.

هر تعریف به صورت یك گزارهٔ اگر و فقط اگر فهمیده می‌شود؛ گرچه متداول است که فقط اگر آن را پنهان‌سازند. ازاینرو می‌توان تعریف کرد که « یك مثلث **متساوی‌الساقین** است اگر دو ضلع با طول مساوی داشته باشد »، و واقعاً بدین معنی است که یك مثلث متساوی‌الساقین است اگر و فقط اگر دو ضلع با طول مساوی داشته باشد. بدین ترتیب نباید احساس کنید که شما باید یك تعریف را کلمه به کلمه حفظ کنید. مسألهٔ مهم درك مفهوم است چنان که بتوانید دقیقاً همان مفهوم را با کلمات خودتان بیان کنید. پس تعریف « یك مثلث **متساوی‌الساقین** مثلثی است که دوضلع متساوی داشته باشد » کاملا صحیح است. تعریف « یك مثلث **متساوی‌الساقین** مثلثی است که دو زاویهٔ متساوی داشته باشد» هم صحیح است، چون درتمام این تعریفها دقیقاً یك جورمثلث است که متساوی‌الساقین نامیده می‌شود.

توجه به‌این مطلب خیلی مهم است که اگرمفهومی تازه تعریف شده باشد واز شما خواسته شود که مطلبی را دربارهٔ آن مفهوم ثابت کنید، شما باید آن تعریف را به عنوان بخش اصلی اثبات به‌کار بگیرید. بلافاصله پس از آنکه مفهومی تعریف شد، این تعریف تنها اطلاعی است که شخص دربارهٔ آن مفهوم دارد.

درتمام این کتاب، هرجا اصطلاحی باحروف **سیاه** یا ایرانیك ظاهرشود درهمان‌جاهم تعریف می‌شود. به طور خاص برای مفاهیم اصلی جبری مورد بحث خود از تعریفهای عنوان‌دار استفاده خواهیم کرد. بسیاری ازاصطلاحات دیگر هم، بااستفاده از حروف سیاه، خارج ازتعریفهای عنوان‌دار، تعریف می‌شوند. لذا مفاهیمی‌را خواهد یافت که بدین‌طریق درپاراگرافها، قضیه‌ها وتمرینها تعریف می‌شوند.

۲.۰ مجموعه

اهمیت بنیادی تعاریف در ریاضی یك ضعف ساختاری نیزمی‌باشد بدین‌دلیل که هرمفهومی را نمی‌توان تعریف کرد. مثلا فرض کنیم شخصی اصطلاح مجموعه را به صورت « یك **مجموعه** گردایه‌ای مشخص ازاشیاء است » تعریف کند. طبیعتاً سؤال می‌شود که منظور از گردایه چیست؟ شاید آنگاه بگوید « یك **گردایه** انبوهی است ازچیزها ». سپس انبوه چیست؟ زبان ما متناهی است، بنابراین پس از مدتی کلمات جدید تمام می‌شوند و مجبور می‌شویم یکی ازکلماتی را که قبلا مورد سؤال قرارگرفته است تکرارکنیم. تعریف ما آنگاه دوری می‌شود ومسلماً بدون ارزش است. ریاضیدانها تشخیص می‌دهند که باید چند مفهوم اولیه یاتعریف نشده وجود داشته باشد. درحال حاضرموافقت کرده‌اند که مجموعه چنین مفهوم اولیه‌ای باشد. ما مجموعه را تعریف نخواهیم کرد، اما صرفاً امیدواریم که وقتی عباراتی‌ازقبیل «مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی» یا « مجموعهٔ اعضای سازمان ملل‌متحد» بیان می‌شوند، ایده‌های متفاوت مردم ازآنچه که مورد نظراست به قدرکافی مشابهت داشته باشند که ارتباط را میسرسازد.

اینك برخی ازچیزهایی را کــه صرفاً دربارهٔ مجموعه فرض می‌شوند بــه اختصار فهرست می کنیم.

۱. مجموعه‌ای چون S از **عضو** تشکیل می‌شود، اگر a یکی از این عضوها باشد، این مطلب رابه صورت $a \in S$ نمایش می‌دهیم.

۲. دقیقاًیك مجموعهٔبدون عضو وجود دارد. این، **مجموعهٔ تهی** است که به‌صورت $\varnothing$ نمایش داده می‌شود.

۳. یك مجموعه را ممکن‌است یا با ارائهٔ خاصیت مشخصهٔ عضوهایش توصیف کرد، مانند «مجموعهٔ تمام اعضای سازمان ملل متحد»، یا بـا فهرست‌کردن عضوهایش. روش متعارف برای توصیف یك مجموعه توسط فهرست کـردن اعضایش چنین است کــه اسامی اعضاء رابین دوآکولاد قرار می‌دهند وآنها را بـا چند کاما ازهم جدا می‌سازند؛ مثلا، $\{۱,۲,۱۵\}$. اگریك مجموعه باخاصیت مشخصهٔ $P(x)$ ازعضوی چون x ازآن توصیف بشود، غالباً نماد آکولادی $\{x|P(x)\}$ را بــه کار می‌برند، و می‌خوانند «مجموعهٔ تمام xهایی‌که گزارهٔ $P(x)$ دربارهٔ x درست باشد.» بنابراین

$$\{۲,۴,۶,۸\}=\{x|\ x \text{ عددی صحیح مثبت وزوج باشد } x\leqslant ۸\}$$
$$=\{۲x|x=۱,۲,۳,۴\}$$

۴. یك مجموعه **خوشتعریف** است، بدین معنی است که اگر S مجموعه‌ای باشد و a شیئی، آنگاه یابه‌طورقطع a در S است،که به‌صورت $a \in S$ نموده می‌شود، یابه‌طور قطع a در S نیست، که به‌صورت $a \notin S$ نوشته می‌شود. پس هرگز نباید گفت «مجموعهٔ S متشکل از برخی ازاعداد مثبت را درنظرمی گیریم» زیرا به‌طور قطع مشخص نیست که $۲ \in S$ یا $۲ \notin S$. ازطرف دیگر، می‌توان مجموعهٔ T متشکل ازتمام اعـداد اول مثبت را درنظر گرفت. هرعدد صحیح مثبت قطعاً یــا اول است یــا اول نیست. بنابراین $۵ \in T$ و $۱۴ \notin T$. ممکن است واقعاً تعیین این‌که شیئی دریك مجموعه هست‌یانه مشکل باشد. مثلا، درهنگام چاپ این‌کتاب، معلوم نیست‌که آیا $۲^{(۲^{۱۷})}+۱$ عضو T هست یانه. به هرحال، قطعاً $۲^{(۲^{۱۷})}+۱$ یا اول است یا اول نیست.

برای دانشجویانی‌که این‌کتاب را می‌خوانند امکان ندارد‌که مبنای هرتعریفی را به مفهوم مجموعه بر گردانند. مؤلف به خوبی‌آگاه است‌که مخصوصاً درآغازمتن، بنا را بر مبنای تعاریفی بسیار ساده می گذارد. نخستین تعریفی‌کــه درفصل ۱ بــا آن برمی‌خوریم می گوید، «**یك عمل دوتایی دریك مجموعه** قاعده‌ای است که ...». در روی کرهٔ زمین چه چیزی قاعده است؟

درتمام‌کتاب بیشترکار، درمورد مجموعه‌هایی ازاعداد خواهد بودکـه با آنها آشنا هستیم. یك بار وبرای همیشه درنماد این مجموعه‌ها دقت کنیم.

$\mathbf{Z}$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیح است (یعنی، اعداد درست: مثبت، منفی وصفر).

$\mathbf{Z}^+$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت است (شامل صفر نیست).

$\mathbf{Q}$ مجموعهٔ تمام اعداد گویاست (یعنی اعدادی که می‌توانند به‌صورت خارج قسمت m/n از اعداد صحیح، باشرط $n \neq ۰$، بیان شوند).
$\mathbf{Q}^+$ مجموعهٔ تمام اعداد گویای مثبت است.
$\mathbf{R}$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است.
$\mathbf{R}^+$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی مثبت است.
$\mathbf{C}$ مجموعهٔ تمام اعداد مختلط است.

۳.۰ افراز و نسبتهای هم‌ارزی

تازه $\mathbf{Q}$ را به عنوان مجموعهٔ تمام اعدادی که می‌توانند به صورت خارج قسمت m/n از اعداد صحیح، که $n \neq ۰$، بیان شوند، توصیف کردیم. درست نخواهد بود اگر $\mathbf{Q}$ را به‌صورت مجموعهٔ S متشکل از تمام «عبارات کسری» به‌صورت m/n برای m و n در $\mathbf{Z}$ و $n \neq ۰$ توصیف کنیم. زیرا مسلماً ۲/۳ و ۴/۶ عبارات کسری متمایزی هستند، اما می‌دانیم که یك عدد گویا را معرفی می‌کنند. درواقع، هرعضو $\mathbf{Q}$ باتعدادی نامتناهی از اعضای S نمایش داده می‌شود. هنگام محاسبه، درذهن خود تمام اعضایی از S را که عضو ثابتی از $\mathbf{Q}$ را نمایش می‌دهند یکی می‌گیریم.

مثال پاراگراف قبل نمونه‌ای است از وضعیتهای متعددی که در آنها اعضای متمایزی از یك مجموعه را از نظر حساب یا از نظر جبر هم‌ارز می‌گیریم، و درنتیجه مجموعهٔ مورد نظرمان به قطعه‌هایی افراز می‌شود، وهریك ازاین قطعه‌ها را به عنوان یك موجود حسابی یاجبری واحد درنظرمی‌گیریم. اگر b عضوی ازچنین مجموعه‌ای باشد، $\bar{b}$ قطعهٔ متشکل از تمام اعضایی راکه با b یکی گرفته می‌شوند معرفی می‌کند. مثلا، درمجموعهٔ قبلی S متشکل ازکسرهای صوری، داریم

$$\overline{۲/۳} = \left\{ \frac{۲}{۳}, \frac{-۲}{-۳}, \frac{۴}{۶}, \frac{-۴}{-۶}, \frac{۶}{۹}, \frac{-۶}{-۹}, \cdots \right\}$$

$$= \left\{ \frac{۲n}{۳n} \middle| n \in \mathbf{Z} \text{ و } n \neq ۰ \right\}.$$

اجازه دهید تعریف دقیقی ازچنین افرازی را ارائه کنیم.

تعریف یك افراز یك مجموعه تجزیه‌ای از مجموعه است به قطعاتی که هرعضو مجموعه در دقیقاً یکی ازقطعه‌ها باشد.

دو قطعه (یا مجموعهٔ) بدون عضومشترك **مجزا** هستند. بنابراین قطعه‌های هرافراز یك مجموعه، مجزا هستند.

ازکجا می‌دانیم که دو عبارت کسری m/n و r/s در مجموعهٔ S فوق‌الذکردریك

قطعه هستند؛ یعنی، یك عددگویا را معرفی می‌کنند؟ یك راه تشخیص آن است که هردو کسر را بـه ساده‌ترین صورت تحویل کنیم. انجام ایـن کار ممکن است آسان نبـاشد؛ مثلا، ۱۹۰۹/۴۸۹۷ و ۱۴۰۳/۳۵۹۹ یك عددگویا را معرفی می‌کنند، زیرا

$$\frac{۱۹۰۹}{۴۸۹۷}=\frac{۲۳۰۸۳}{۵۹۰۸۳} \quad \text{و} \quad \frac{۱۴۰۳}{۳۵۹۹}=\frac{۲۳۰۶۱}{۵۹۰۶۱}.$$

به هرحال، به‌دست آوردن این تجزیه‌ها، حتی بایك ماشین حساب دستی هم کارآزمایش و خطای، تاحدودی، خسته‌کننده‌ای است. اما، چنانکه می‌دانید، در حساب کسرها، داریم $m/n=r/s$ اگروفقط اگر $ms=nr$. این، روش کاراتری برای مسئله است، زیرا

$$(۱۹۰۹)(۳۵۹۹)=(۴۸۹۷)(۱۴۰۳)=۶۸۷۰۴۹۱۰$$

فرض کنید $a\sim b$ دلالت کند براین که درافرازی ازیك مجموعهٔ شامل a و b، a درهمان قطعهٔ شامل b قراردارد. به‌وضوح خواص زیرهمیشه برقرارند:

$a\sim a$. عضو a درهمان قطعهٔ شامل خودش است.
اگر $a\sim b$ آنگاه $b\sim a$. اگر a در قطعهٔ شامل b باشد، b هم در قطعهٔ شامل a است.
اگر $a\sim b$ و $b\sim c$ آنگاه $a\sim c$. اگر a در قطعهٔ شامل b و b درقطعهٔ شامل c باشند، آنگاه a درقطعهٔ شامل c است.

قضیه‌ای کـه می‌آید بنیادی است. این قضیه حکم می‌کند کـه نسبتی چون $\sim$ بین اعضای یك مجموعه که درسه شرط مذکور صدق کند افرازی طبیعی بـه مجموعه می‌دهد. عرضهٔ نسبتی بااین‌خصوصیات اغلب مناسبترین‌روش برای توصیف افرازی ازیك مجموعه است، وبدین دلیل است که اکنون این مطلب را مطرح می‌سازیم.

قضیهٔ ۱.۰ فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی بـاشد و فرض کنیم $\sim$ نسبتی بیـن اعضای S باشد که واجد خواص زیر است.
۱. (انعکاسی) به ازای هر a از S، $a\sim a$.
۲. (تقارنی) اگر $a\sim b$ آنگاه $b\sim a$.
۳. (تعدی) اگر $a\sim b$ و $b\sim c$، آنگاه $a\sim c$.
آنگاه $\sim$ افرازی طبیعی به S می‌دهد، و به ازای هر a از S،

$$\bar{a}=\{x\in S \mid x\sim a\}$$

قطعهٔ شامل a است. به عکس، هر افراز S به نسبتی طبیعی چون $\sim$ واجد خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی می‌انجامد در صورتی که $a\sim b$ به معنی $a\in\bar{b}$ تعریف بشود.

برهان. ما قبلا قسمت «عکس» قضیه را ثابت کرده‌ایم.

برای قسمت اول، تنها باید نشان دهیم که قطعه‌های تعریف شدهٔ با $\bar{a}=\{x\in S|x\sim a\}$ حتماً افرازی برای S تشکیل می‌دهند؛ بدین معنی که، هرعضو S در دقیقاً یك قطعه است. فرض کنیم $a\in S$. دراین‌صورت بنا به شرط (۱)، $a\in\bar{a}$، وازاینرو a در حداقل یك قطعه است.

اکنون فرض کنیم که a درقطعه‌ای چون $\bar{b}$ هم باشد. باید نشان دهیم که به عنوان دو مجموعه $\bar{a}=\bar{b}$؛ این‌نشان خواهد دادکه a نمی‌تواند دربیش ازیك‌قطعه‌باشد. این‌کار را بانشان دادن این کـه هرعضو $\bar{a}$ در $\bar{b}$ است وهرعضو $\bar{b}$ در $\bar{a}$ انجام می‌دهیم. فـرض کنیم $x\in\bar{a}$. آنگاه $x\sim a$. اما، $a\in\bar{b}$، پس $a\sim b$. اکنون بنابه شرط تعدی (۳)، $x\sim b$ و لذا $x\in\bar{b}$. بنابراین $\bar{a}$ جزء $\bar{b}$ است. اکنون فرض می‌کنیم $y\in\bar{b}$. آنگاه $y\sim b$. اما $a\in\bar{b}$، ازاینرو $a\sim b$ و، بنابه‌خاصیت تقارنی (۲)، $b\sim a$. سپس بنا به‌خاصیت تعدی، $y\sim a$ و لذا $y\in\bar{a}$. بنابراین $\bar{b}$ هم جزء $\bar{a}$ است، و ازاینرو $\bar{b}=\bar{a}$ واثبات کامل‌است.□

تعریف نسبتی چون $\sim$ دریك مجموعهٔ S واجد خواص انعکاسی، تقارنی وتعدی توصیف‌شده درقضیهٔ ۱.۰ یك‌نسبت هم‌ارزی در S است هـرقطعهٔ $\bar{a}$ درافرازطبیعـی ارائه شده توسط یك‌نسبت هم‌ارزی یك همادهم ارزی است

نماد $\sim$ معمولا برای یك نسبت هم‌ارزی به‌کار می‌رود. نماد $\mathcal{R}$ را برای نسبتی بین اعضای یك مجموعهٔ S به‌کار می‌بریم که لزوماً یك نسبت هم‌ارزی نباشد.

واژهٔ طبیعی که درقضیهٔ ۱.۰ دوبار به‌کار رفت دارای اهمیت زیراست. اگراز یك نسبت هم‌ارزی‌آغاز کنید، افراز به همادهای هم‌ارزی راتشکیل دهید وسپس‌نسبت به‌دست آمده ازاین افراز رابررسی کنید، به همان نسبت هم‌ارزی نخستین خواهید رسید. به همین ترتیب، با آغاز ازیك افراز، پیدا کردن نسبت هم‌ارزی و سرانجام تشکیل دادن همادهای هم‌ارزی، افراز اولیه رابه‌دست می‌دهد.

مثال ۱.۰ مستقیماً نشان می‌دهیم که

$$m/n\sim r/s \text{ اگروفقط اگر } ms=nr$$

نسبتی هم‌ارزی درمجموعهٔ S متشکل‌ازعبارتهای کسری صوری است که قبلا بررسی کردیم.

انعکاسی. $m/n\sim m/n$ زیرا $mn=nm$.
تقارنی. اگر $m/n\sim r/s$، آنگاه $ms=nr$، در نتیجه $rn=sm$ و از اینرو $r/s\sim m/n$.
تعدی. اگر $m/n\sim r/s$ و $r/s\sim u/v$، آنگاه $ms=nr$ و $rv=su$. باتغییر ترتیب‌وجایگزینی، به‌دست‌می‌آوریم که $mvs=vms=vnr=nrv=nsu=nus$.
چون $s\neq 0$، نتیجه می‌گیریم که $mv=nu$، ازاینرو $m/n=u/v$.

هرهماد هم‌ارزی S یك عدد گویا محسوب می‌شود. □

بحث ما دربارهٔ مجموعهٔ S متشکل ازعبارات کسری صوری، که به مثال ۱.۰ منجر شد، حالت خاص کاری است که درفصل ۲۶ انجام خواهیم داد.

مثال ۲.۰ نسبتی چون $\mathcal{R}$ درمجموعهٔ $\mathbf{Z}$ را به صورت $n\mathcal{R}m$، اگروفقط اگر $nm \geqslant 0$، تعریف وتعیین می کنیم که آیا $\mathcal{R}$ نسبتی هم‌ارزی است یانه.

انعکاسی. $a\mathcal{R}a$، زیرا به‌ازای هر a از $\mathbf{Z}$، $a^2 \geqslant 0$.
تقارنی. اگر $a\mathcal{R}b$، آنگاه $ab \geqslant 0$، ازاینرو $ba \geqslant 0$ و $b\mathcal{R}a$.
تعدی. اگر $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$، آنگاه $ab \geqslant 0$ و $bc \geqslant 0$. پس $ab^2c = acb^2 \geqslant 0$.
اگرمی‌دانستیم $b^2 > 0$ می‌توانستیم نتیجه بگیریم $ac \geqslant 0$ وازآنجا $a\mathcal{R}c$. باید $b = 0$ را جداگانه امتحان کنیم. یك لحظه تأمل نشان می‌دهد که $0\mathcal{R}-3$ و $0\mathcal{R}5$ اما $-3\mathcal{R}5$، ازاینرونسبت $\mathcal{R}$ متعدی‌نیست وبنابراین‌نسبتی هم‌ارزی نمی‌باشد. □

بـه ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، نسبت هم‌ارزی بسیار مهمی در $\mathbf{Z}$ وجود دارد؛ **همنهشتی به هنگ** n. برای $h, k \in \mathbf{Z}$، بنابه تعریف h **همنهشت است با** k **به هنگ** n، و نوشته می‌شود $h \equiv k \pmod{n}$، درصورتی که $h-k$ بر n بخشپذیر باشد؛ بدین معنی کـه به‌ازای عددی مـانند s از $\mathbf{Z}$، $h-k=ns$. مثـلا $17 \equiv 33 \pmod{8}$، زیـرا $17-33=8(-2)$. **همادهای هم‌ارزی** برای همنهشتی به‌هنگ n **همادهای مانده‌ای به‌هنگ** n هستند. هریك ازاین همادهای مانده‌ای شامل تعدادی نامتناهی عضواست. برای مثال، درمورد همنهشتی به هنگ ۸، به سادگی می‌توانید خـود را متقاعد سازیدکه هماد مانده‌ای شامل هم ۱۷ وهم ۳۳ عبارت است از

$$\{\ldots, -47, -39, -31, -23, -15, -7, 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, \ldots\}.$$

این هماد مانده‌ای شامل یك عدد از هرهشت عدد، باشروع از ۱ می‌باشد. در واقع هفت هماد مانده‌ای دیگردرافراز ایجاد شدهٔ به وسیلهٔ همنهشتی به‌هنگ ۸ وجود دارد.

ازشمامی‌خواهیم‌نشان دهیدکه همنهشتی به‌هنگ n در واقع یك‌نسبت هم‌ارزی است وبه همادهای مانده‌ای دیگردرتمرین ۱۸.۰ هم نگاه‌کنید.

تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۴، مجموعه را با فهرست‌کردن اعضای آن توصیف کنید.

۱.۰ $\{x \in \mathbf{R} | x^2 = 3\}$

۲.۰ $\{m \in \mathbf{Z} | m^2 = 3\}$

۳.۰ $\{m \in \mathbf{Z} | mn = 60$، به‌ازای n از $\mathbf{Z}\}$

۴.۰ $\{m \in \mathbf{Z} | m^2 - m < 115\}$

در تمرینهای ۵ تا ۱۰، تعیین کنید آیا آنچه که توصیف شده، واقعاً مجموعه است (خوشتعریف است). برای هر مجموعه تعریف دیگری هم ارائه کنید.

۵.۰ $\{n \in \mathbf{Z}^+ |$ n عددی بزرگ است$\}$

۶.۰ $\{n \in \mathbf{Z} | n^۲ < ۰\}$

۷.۰ $\{n \in \mathbf{Z} | ۳۹ < n^۳ < ۵۷\}$

۸.۰ $\{x \in \mathbf{Q} |$ مخرج x از ۱۰۰ بزرگتر است$\}$

۹.۰ $\{x \in \mathbf{Q} |$ x را بتوان بامخرج بزرگتر از ۱۰۰ نوشت$\}$

۱۰.۰ $\{x \in \mathbf{Q} |$ x را بتوان بامخرج کوچکتر از ۳ نوشت$\}$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۹، تعیین کنید آیا نسبت داده شده یك نسبت هم‌ارزی در مجموعهٔ مفروض هست یا نه. افراز ایجاد شده به وسیلهٔ هر نسبت هم‌ارزی را توصیف کنید.

۱۱.۰ در $\mathbf{Z}$، $n \mathcal{R} m$ اگر $nm > ۰$.

۱۲.۰ در $\mathbf{R}$، $x \mathcal{R} y$ اگر $x \geqslant y$.

۱۳.۰ در $\mathbf{R}$، $x \mathcal{R} y$ اگر $|x| = |y|$.

۱۴.۰ در $\mathbf{R}$، $x \mathcal{R} y$ اگر $|x - y| \leqslant ۳$.

۱۵.۰ در $\mathbf{Z}^+$، $n \mathcal{R} m$ اگر تعداد ارقام n و m درمبنای معمول ۱۰ مساوی باشند.

۱۶.۰ در $\mathbf{Z}^+$، $n \mathcal{R} m$ اگر آخرین رقم n و m درمبنای معمول ۱۰ مساوی باشند.

۱۷.۰ در $\mathbf{Z}^+$، $n \mathcal{R} m$ اگر $n - m$ به ۲ بخشپذیر باشد.

۱۸.۰ فرض کنید n عددمشخصی از $\mathbf{Z}^+$ باشد. نشان دهید که همنهشتی به‌هنگ n یك نسبت هم‌ارزی در $\mathbf{Z}$ است. هـ ادهای مانده‌ای درمورد $n = ۱, ۲, ۳$ را توصیف کنید.

۱۹.۰ مطلب زیر یك استدلال غلط مشهور است. خطای آن را بیابید. «شرط انعکاسی در شرایط نسبت هم‌ارزی زاید است» زیرا از $a \sim b$ و $b \sim a$ (تقارنی) بنا به خاصیت تعدی نتیجه می‌شود که $a \sim a$.

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۴، تعداد نسبتهای هم ارزی متفاوت در مجموعه‌ای چون S با تعداد عضو داده شده را به‌دست‌آورید. (از قضیهٔ ۱.۰ استفاده کنید.)

۲۰.۰ ۱ عضو.

۲۱.۰ ۲ عضو.

۲۲.۰ ۳ عضو.

۲۳.۰ ۴ عضو.

۲۴.۰ ۵ عضو.

۱

عمل دوتایی

۱.۱ انگیزه

چه چیزی محتوای اصلی جبررا تشکیل می‌دهد؟ اولین برخوردکودك بـا جبر زمانی رخ می‌دهدکه جمع وضرب اعداد به‌اوآموخته می‌شود. سعی کنیم آنچه راکـه دراینجا اتفاق می‌افتد تحلیل کنیم.

فرض کنید شما ازتمدنی بیگانه در دنیایی بیگانه دیدار، و مشاهده می کنیدکه یکی ازمخلوقات این دنیا با گروهی ازهمنوعانش تمرین‌جمع اعداد می کند. همچنین فرض کنید به شما گفته نشده است کـه کلاس مشغول آموزش جمع است، و نـاگهان به عنوان یك مشاهده گر در جایی کـه این‌کار درجریان است قرارداده شده‌اید. از شما خواسته می‌شود آنچه را کـه اتفاق می‌افتد دقیقاً گزارش کنید. معلم آواهایی راکه به نظرشما تقریباً مانند گلوپ و پویت است ادا می کند. کلاس جـواب می‌دهد بیمت . بعـد معلم می گوید امت ، گافت وکلاس با پویت پاسخ می گوید. اینها چه‌کار می کنند؟ شما نمی‌توانیدگزارش کنید که اینها مشغول جمع کردن اعداد هستند. چـه حتی نمی‌دانید که این‌آواها معرف اعـداد هستند. البته، تشخیص می‌دهیدکـه ارتباطی درجریان است. تنها چیزی کـه با درجه‌ای از اطمینان می‌توانید بگویید این است‌که این‌مخلوقات قاعده‌ای را می‌دانندکه وقتی درزبان خودشان جفت معینی ازاشیاء ، یکی پس از دیگری مانند گلوپ و پویت ، معرفی می‌شود می‌توانند روی جوابی چون بیمت توافق‌کنند. همین واقعه موقع تمرین جمع درکلاسهای اول ابتدایی هم درجریان است ؛ زمانی کـه معلم می گوید، چهار و هفت ، وکلاس پاسخ می‌دهد یازده.

درسعی خود برای تحلیل جمع وضرب اعداد ، بدین نتیجه می‌رسیم‌که جمع صرفاً

قاعده‌ای است که مردم می‌آموزند تا قادر شوند به دو عدد با ترتیبی مفروض، عددی را به‌عنوان جواب نسبت دهند. ضرب نیز چنین قاعده‌ای است، منتها متفاوت است با جمع. سرانجام، توجه کنید در اجرای این بازی با دانش‌آموزان، آموزگار باید کمی دقت کند که چه دو چیزی را برای جمع به کلاس بگوید. اگر یك معلم کلاس اول ابتدایی ناگهان ده و آسمان را مطرح کند، کلاس بیچارهٔ وی خیلی گیج خواهد شد. این قاعده تنها برای زوجهایی از مجموعه‌های مشخصی تعریف می‌شود.

۲.۱ تعریف وخواص

به رسم ریاضیدانها، سعی کنیم لب این ایده‌های اصلی را در یك تعریف مفید گرد آوریم. همان‌طور که در فصل مقدماتی خاطرنشان کردیم در تعریف مجموعه سعی نخواهیم کرد.

تعریف عملی دوتایی چون * دریك مجموعه قاعده‌ای است که به هرزوج مرتب ازاعضای مجموعه، عضوی ازمجموعه را منسوب کند.

کلمهٔ مرتب دراین تعریف بسیارمهم است، چون این امکان را به وجود می‌آورد که عضومنسوب شدهٔ به زوج (a,b) بتواند با عضومنسوب شدهٔ به زوج (b,a) متفاوت باشد. به‌علاوه، دقت داشتیم نگوییم که به هرزوج مرتب ازاعضا، عضو دیگری یا عضو ثالثی منسوب شود، برای اینکه می‌خواهیم حالتهایی چون حالتی که در جمع اعداد به زوج $(۲,۵)$ عدد ۲ منسوب می‌شود هم مجاز باشد.

درچند فصل اولیه، $a*b$ عضوی خواهد بود که به وسیلهٔ عمل * به زوج (a,b) منسوب می‌شود. اگر دریك بحث همزمان، ازعملهای دوتایی متفاوتی صحبت شود، برای تمایز آنها از * با زیروند یا زبروند استفاده خواهیم کرد. مهمترین روش توصیف عمل دوتایی خاصی چون * درمجموعه‌ای مفروض این است که با خاصیتی که برحسب a و b تعریف می‌شود، $a*b$ منسوب شدهٔ به هرزوج a و b را مشخص کنیم.

مثال ۱.۱ در Z^+، عمل دوتایی * را چنین تعریف کنید که $a*b$ مساوی باشد با کوچکترین a و b یامقدارمشترك آنها اگر $a=b$. بنابراین $۲*۱۱=۲$؛ $۱۰*۱۰=۱۵$؛ و $۳*۳=۳$. □

مثال ۲.۱ در Z^+، عمل دوتایی $*'$ را با $a*'b=a$ تعریف کنید. بنابراین $۲*'۳=۲$؛ $۱۰*'۲۵=۲۵$؛ و $۵*'۵=۵$. □

مثال ۳.۱ در Z^+، یك عمل دوتایی $*''$ راچنین تعریف کنید که $a*''b=(a*b)+۲$، و * همان باشد که درمثال ۱.۱ تعریف شده است. بنابراین $۶*''۷=۴$؛ $۱۱*''۹=۲۵$؛ و $۸*''۶=۶$. □

ممکن‌است به نظرتان برسدکه این مثالها ازهیچ اهمیتی برخوردارنیستند، اما برای یك لحظه تأمل کنید. فرض کنید به فروشگاهی می‌روید تـا یك تکه شکلات عالی بزرگ خوشمزه‌بخرید. فرض کنید دوتکه‌شکلات یکسان درکنارهم می‌بینیدکه برچسب قیمت یکی ۹۴ ریال و برچسب قیمت دیگری ۹۹ریال است. البته شما آن رابرمی‌داریدکه ۹۴ریال قیمت دارد. علم بدین‌که‌کدام یکی را می‌خواهید بدین بستگی داردکه زمانی در زندگی خود عمل دوتایی $*'$ ازمثال ۱.۱ را آموخته باشید. این عمل بسیار مهمی است. به‌همین منوال، عمل دوتایی $*'$ ازمثال ۲.۱ مسلماً به تشخیص ترتیب بستگی دارد. مثالی‌که اغلب برای نشان دادن اهمیت ترتیب‌آورده می‌شود، درهمریختگی ناشی ازآن است‌که‌بکوشید ابتدا کفشهایتان راپپوشید وسپس جورابهایتان را! بنابراین نباید در رد اعمالی دوتایی به خاطرکم اهمیت بودنشان شتاب به خرج بدهید. البته عملهای دوتایی معمولی جمع و ضرب اعداد دارای اهمیت کاربردی هم هستندکه برهمه روشن است.

مثالهای ۱.۱ و ۲.۱ انتخاب شده‌اند تانشان دهندکـه یك عمل دوتایی ممکن است به ترتیب زوج مورد نظر بستگی داشته یا نداشته بـاشد. بنابراین ، در مثال ۱.۱ به‌ازای هر a و b از $\mathbf{Z}^+$ ، $a*b=b*a$ ولـی در مثـال ۲.۱ این طور نیست، برای این که $۵ *' ۷ = ۵$ اما $۷ *' ۵ = ۷$.

اکنون فرض کنید شخصی می‌خواهد عبارتی به صورت $a*b*c$ را بررسی کند. عمل دوتایی چون $*$ شمارا قادرمی‌سازدکه تنها دوعضو را باهم ترکیب کنید ولی‌دراینجا سه‌عضودارید. راههای‌بدیهی‌برای ترکیب سه‌عضو، تشکیل یکی‌ازدوصورت $(a*b)*c$ یا $a*(b*c)$ است. درمورد $*$ ازمثال۱.۱، $۹ * (۵ * ۲)$ بدین‌صورت محاسبه می‌شود کـه $۲ * ۵ = ۲$ و $۹ * ۲ = ۲$. به همین ترتیب $۲ * (۹ * ۵)$ بـا $۹ * ۵ = ۵$ وسپس $۲ * ۵ = ۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین $۲ * (۹ * ۵) = ۹ * (۵ * ۲)$، و به‌سهولت ملاحظه می‌شودکه برای این عمل $*$، همواره

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

بنابراین درنوشتن $a*b*c$ ابهامی وجود ندارد. اما درمورد $*''$ ازمثال۳.۱ ،

$$(۲ *'' ۵) *'' ۹ = ۴ *'' ۹ = ۶ ,$$

درحالی‌که

$$۲ *'' (۵ *'' ۹) = ۲ *'' ۷ = ۴ .$$

بنابراین لازم نیست‌که $(a *'' b) *'' c$ با $a *'' (b *'' c)$ برابرباشد وبدین جهت عبارت $a *'' b *'' c$ خالی ازابهام نیست.

تعریف عملی دوتایی چون $*$ درمجموعهٔ S تعویضپذیر است اگر(وفقط اگر) برای هر a و b از S ، $a*b=b*a$. عمل $*$ شرکتپذیر است اگر(وفقط اگر) برای هر a، b و c از S ،

$$(a*b)*c=a*(b*c) .$$

همانطور که درفصل مقدماتی خاطرنشان کردیم، در ریاضیات حذف کلمات و فقط اگر از تعریف متداول است. تعریفها همواره به‌صورت گزاره‌های اگر و فقط اگر فهمیده می‌شوند. قضیه‌ها همواره گزاره‌های اگر و فقط اگر نیستند و چنین قراردادی هرگز برای قضیه به‌کار نمی‌رود.

نشان دادن این که اگر $*$ شرکتپذیر باشد، عبارتهای طولانی‌تری چون $a*b*c*d$ مبهم نیستند، مشکل نیست. به‌منظور محاسبه، پرانتزها را به‌هرصورتی می‌توان درج کرد؛ نتیجهٔ نهایی هردوچنین محاسبه‌ای یکسان خواهد بود.

۳.۱ جدول

درمورد مجموعه‌ای متناهی، یك عمل دوتایی درمجموعه می‌تواند با استفاده ازیك جدول هم تعریف شود. مثال بعدی نشان می‌دهد که دراین کتاب این کارچگونه انجام می‌پذیرد.

مثال ۴.۱ جدول ۱.۱، عمل دوتایی $*$ را درمجموعهٔ $S=\{a,b,c\}$ چنین تعریف می‌کند:

(درآیهٔ j م در سطر فوقانی) $*$ (در آیهٔ i م در ستون سمت چپ)
درآیهٔ در سطر i م و ستون j م متن جدول $=$

بنابراین $a*b=c$ و $b*a=a$؛ درنتیجه $*$ تعویضپذیر نیست. □

جدول ۱.۱

$*$	a	b	c
a	b	c	b
b	a	c	b
c	c	b	a

دانشجومی‌تواند به سهولت دریابد که عمل دوتایی تعریف شده به‌وسیلهٔ یك جدول تعویضپذیر است اگر و فقط اگر درآیه‌های جدول نسبت به قطری که از گوشهٔ بالای سمت چپ جدول شروع و به گوشهٔ پایین سمت راست آن ختم می‌شود متقارن باشند. همواره فرض می‌کنیم که اعضای مجموعه به همان ترتیبی درسطر بالای جدول نوشته می‌شوند که درستون سمت چپ.

غیرازمثال ۴.۱، سایرمثالهای عملهای دوتایی درمجموعه‌های اعداد تعریف شده‌اند. درك این‌امرمهم است که عملهای دوتایی می‌توانند درهرمجموعه‌ای تعریف شوند. درواقع

عملهای دوتایی مهم بسیاری را درمجموعه‌هایی که اعضایشان عدد نیستند هم مورد مطالعه قرارخواهیم داد. بعضی ازمثالهایی که ذیلا ارائه می‌شوند درمورد مجموعه‌هایی هستند که اعضای آنها تابع می‌باشند. فرض براین است که دانشجو باتوابع معینی از درس حساب دیفرانسیل وانتگرال یادرسهای دیگرآشنایی دارد. متوجه هستیم کـه ممکن است درحال حاضر دانشجو مفهوم تابع را درك نکند و لذا بعداً دربارهٔ آن بیشترصحبت خواهیم کرد. باری، مشتاقیم مفاهیمی را که معرفی می‌کنیم با ریاضیاتی که دانشجوقبلا فراگرفته است در پیوند باشد.

۴.۱ چند نکتهٔ تحذیری

مؤلف باتوجه به تجربهٔ شخصی خودش‌متوجه هست که وقتی مجموعه‌ای به‌دانشجویی داده واز وی خواسته می‌شود که درآن عملی دوتایی تعریف کند، چه‌اشکالهایی پیش‌خواهدآمد. ملاحظه‌کنید هنگام تعریف عملی دوتایی چون * دریك مجموعهٔ S، باید مطمئن شویدکه:

۱) به هر زوج مرتب ممکن از اعضای S، دقیقاً یك عضو منسوب شود.
۲) عضوی که به هر زوج مرتب از اعضای S منسوب می‌شود خود در S باشد.

درمورد شرط (۱)، دانشجواغلب قاعده‌ای را ارائه می‌کندکه بـه اکثرزوجهای مرتب S عضوی از S منسوب می‌شود، ولی به چندتایی ازآنها هم عضوی تخصیص داده نمی‌شود. دراین صورت * **تعریف نشده است**. ممکن است هم اتفاق بیفتدکه قاعدهٔ ارائه شده بـه بعضی از زوجها چند عضو S را منسوب سازد؛ یعنی، ابهام وجود داشته باشد. در هر نوعی از ابهام، * **خوشتعریف نیست**. اگرشرط (۲) رعایت نشود آنگاه S تحت * **بسته نیست**.

اکنون چندین نمونه ازتلاش جهت تعریف یك عمل دوتایی را ارائه می‌کنیم. نشان خواهیم دادکه بعضی ازاین تلاشها بی‌حاصل‌است. چون بین عملها مقایسه‌ای درکارنیست، همهٔ آنهارابا * نمایش خواهیم داد.

مثال ۵.۱ در $\mathbf{Q}$، * را با ضابطهٔ $a*b=a/b$ «تعریف» می‌کنیم. دراین صورت * تعریف نشده است، برای این‌که بـا این قاعده عددی‌گویا بـه زوج مرتب (۲,۰) منسوب نمی‌شود. □

مثال ۶.۱ در $\mathbf{Q}^+$، * رابا ضابطهٔ $a*b=a/b$ تعریف می‌کنیم. دراین جا هردوشرط (۱) و (۲) برقرارند و * در $\mathbf{Q}^+$ عملی دوتایی است. □

مثال ۷.۱ در $\mathbf{Z}^+$، * رابا ضابطهٔ $a*b=a/b$ «تعریف» می‌کنیم. دراین‌جا شرط (۲) به‌هم می‌خورد، زیرا ۳ * ۱ در $\mathbf{Z}^+$ نیست. بنابراین * در $\mathbf{Z}^+$ یك عمل دوتایی نمی‌باشد، چون‌که $\mathbf{Z}^+$ تحت * بسته نیست. □

مثال ۸.۱ فرض کنیم S مجموعهٔ تمام توابع بامقدارحقیقی باشدکه به‌ازای هرعددحقیقی تعریف شده‌اند. عمل $*$ راهمان جمع عادی توابع تعریف می‌کنیم؛ یعنی $f * g = h$ با این‌شرط که برای هر f و g از S وهر x از $\mathbf{R}$، $h(x) = f(x) + g(x)$. بااین تعریف، $*$ درهردوشرط (۱) و (۲) صدق می‌کند وازاینرو عملی دوتایی در S است. □

مثال ۹.۱ فرض‌کنیم S همان مجموعهٔ مذکور درمثال ۸.۱ باشد و $*$ را ضرب معمولی توابع تعریف می‌کنیم؛ یعنی $f * g = h$ که درآن $h(x) = f(x)g(x)$. این هم تعریف خوبی است وعملی دوتایی در S تعریف می‌کند. □

مثال ۱۰.۱ فرض‌کنیم S همان مجموعهٔ مذکور در ۸.۱ باشد و $*$ را چنین «تعریف» می‌کنیم‌که خارج قسمت معمولی f بر g رابه دست دهد؛ یعنی $f * g = h$ که درآن $h(x) = f(x)/g(x)$. دراین‌جا شرط (۲) به هم می‌خورد، زیرا توابع در S باید برای همهٔ اعداد حقیقی‌تعریف بشوند، ولی تابعی مانند g در S هست‌که به‌ازای برخی ازمقادیر x از $\mathbf{R}$، $g(x)$ صفرخواهد شد و بنابراین به ازای این مقادیر x از $\mathbf{R}$، $h(x)$ تعریف نخواهد شد. برای مثال، اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = x^2$ آنگاه $h(0)$ تعریف نمی‌شود وازاینرو $h \notin S$. □

مثال ۱۱.۱ فرض‌کنیم S مجموعهٔ مذکور درمثال ۸.۱ باشد و $*$ با $f * g = h$ که در آن h تابعی بزرگترازهم f وهم g است «تعریف» شود. این «تعریف» کاملا بی‌ارزش است. در وهلهٔ اول، این مفهوم را که تابعی ازتابع دیگر بزرگترباشد تعریف نکرده‌ایم. حتی اگرآن را تعریف هم‌کرده بودیم، هرتعریف معقولی در این مورد منجر به وجود توابع بسیاری، بزرگتر از هم f و هم g، می‌شد و در این صورت باز $*$ خوشتعریف نمی‌شد. □

مثال ۱۲.۱ فرض‌کنیم S مجموعه‌ای متشکل از ۲۰ نفرباشدکه هیچ دونفری ازآنهادارای قد یکسان نیستند. عمل $*$ رابا $a * b = c$ که c بلندترین شخص در S است تعریف کنید. این عمل دوتایی‌کاملا خوبی در S است؛ گرچه عمل خیلی جالبی نیست. □

مثال ۱۳.۱ فرض‌کنیم S مجموعهٔ مذکور درمثال ۱۲.۱ باشد و $*$ رابا $a * b = c$، که درآن c کوتاهترین شخصی است‌که از هردو a و b بلندترباشد، «تعریف» کنید. این $*$ تعریف نشده است، چون‌که اگر a یا b بلندترین شخص درمجموعهٔ S باشند، $a * b$ نامعین است. □

تمرین

۱.۱ فرض‌کنید عمل دوتایی $*$ درمجموعهٔ $S = \{a, b, c, d, e\}$ با جدول ۲.۱ تعریف شده باشد.

جدول ۲.۱

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

ا) با استفاده ازجدول $b*d$ ، $c*c$ و $[(a*c)*e]*a$ راحساب کنید.
ب) با استفاده ازجدول $(a*b)*c$ و $a*(b*c)$ راحساب کنید. آیا می‌توانید براساس این محاسبه بگویید که $*$ شرکتپذیراست یا نه؟
ج) باکمك جدول، هریك‌از $(b*d)*c$ و $b*(d*c)$ راحساب کنید.
آیا می‌توانید براساس این محاسبه بگویید که $*$ شرکتپذیراست یا نه؟
د) آیا $*$ تعویضپذیراست؟ چرا؟

۲.۱ به منظور تعریف عمل دوتایی تعویضپذیری چون $*$ درمجموعهٔ $S=\{a,b,c,d\}$ ، جدول ۳.۱ را کامل کنید.

جدول ۳.۱

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	
b	b	d		c
c	c	a	d	b
d	d			a

۳.۱ جدول ۴.۱ را می‌توان طوری کامل کرد که عمل شرکتپذیری چون $*$ را درمجموعهٔ

$S=\{a,b,c,d\}$ تعریف کند. فرض کنید که این کار ممکن است و در آیه‌های افتاده را حساب کنید.

جدول ۴.۱

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

۴.۱ تعیین کنید که آیا هریك از تعریفهای زیر برای $*$، عمل دوتایی درمجموعهٔ داده شده تعریف می‌کند یا نه. درحالتهایی که $*$ عمل دوتایی نباشد، مشخص کنید که آیا شرط (۱)، شرط (۲) یا هردوشرط بیان شدهٔ درمتن، برقرار نیستند.

ا) در $\mathbf{Z}^+$، $*$ باتعریف $a*b=a-b$.

ب) در $\mathbf{Z}^+$، $*$ باتعریف $a*b=a^b$.

ج) در $\mathbf{R}$، $*$ باتعریف $a*b=a-b$.

د) در $\mathbf{Z}^+$، $*$ باتعریف $a*b=c$، که درآن c کوچکترین عدد صحیح بزرگتراز هم a وهم b است.

ه) در $\mathbf{Z}^+$، $*$ باتعریف $a*b=c$ که درآن c دست‌کم ۵ تا از $a+b$ بزرگتراست.

و) در $\mathbf{Z}^+$، $*$ با تعریف $a*b=c$ که در آن c بزرگترین عدد صحیح کوچکتراز حاصلضرب a و b است.

$^+$**۵.۱** ثابت کنید که‌اگر $*$ عملی شرکتپذیروتعویضپذیردر مجموعه‌ای‌چون S باشد، آنگاه به‌ازای هر a، b، c و d از S

$$(a*b)*(c*d)=[(d*c)*a]*b.$$

بنا به‌تعریف، شرکتپذیری رافقط درمورد سه‌تاییها فرض کنید؛ یعنی تنها فرض کنید که برای هر x، y، z از S

$$(x*y)*z=x*(y*z).$$

۶.۱ برای هرعمل دوتایی $*$ تعریف‌شده، تعیین کنید که آیا $*$ تعویضپذیراست یا نه و آیا

شرکتپذیر است یا نه.

ا) در $\mathbf{Z}$ ، $*$ با تعریف $a*b=a-b$.

ب) در $\mathbf{Q}$ ، $*$ با تعریف $a*b=ab+1$.

ج) در $\mathbf{Q}$ ، $*$ با تعریف $a*b=ab/2$.

د) در $\mathbf{Z}^+$ ، $*$ با تعریف $a*b=2^{ab}$.

ه) در $\mathbf{Z}^+$ ، $*$ با تعریف $a*b=a^b$.

۷.۱ درستی یا نادرستی هریك از گزاره‌های زیررا مشخص کنید.

— ا) اگر $*$ عملی دوتایی درمجموعه‌ای مانند S باشد، آنگاه برای هر a از S، $a*a=a$.

— ب) اگر $*$ عمل دوتایی تعویضپذیری درمجموعه‌ای چون S باشد، آنگاه برای هر a، b و c از S

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

— ج) اگر $*$ عمل دوتایی شرکتپذیری در S باشد، آنگاه برای هر a، b و c از S

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

— د) تنها عملهای دوتایی حائزاهمیت آنهایی هستندکه درمجموعه‌های اعداد تعریف می‌شوند.

— ه) عمل دوتایی $*$ در S تعویضپذیراست، اگروفقط اگراعضایی چون a و b از S وجود داشته باشند به‌طوری‌که $a*b=b*a$.

— و) هرعمل دوتایی تعریف شدهٔ در مجموعه‌ای یك عضوی هم تعویضپذیراست و هم شرکتپذیر.

— ز) هرعمل دوتایی درمجموعه‌ای چون S ، به هرزوج مرتب ازاعضای S حداقل یك عضواز S را منسوب می‌کند.

— ح) هرعمل دوتایی در مجموعه‌ای مانند S ، به هرزوج مرتب ازاعضای S حداکثر یك عضو S را منسوب می‌کند.

— ط) هرعمل دوتایی درمجموعه‌ای مانند S ، به هرزوج مرتب از اعضای S دقیقاً یك عضواز S را منسوب می‌کند.

— ی) یك عمل دوتایی در مجموعه‌ای مانند S ، می‌تواند به برخی از زوجهای مرتب ازاعضای S بیش ازیك عضورا منسوب سازد.

۸.۱ مجموعه‌ای ارائه‌کنیدکه مجموعه‌ای ازاعداد نباشد وبا مجموعه‌های ارائه شدهٔ در متن متفاوت‌باشد. دوعمل دوتایی $*$ و $'*$ دراین مجموعه تعریف ودقت‌کنیدکه‌مجموعه‌تان خوشتعریف باشد.

۹.۱ فرض‌کنید S مجموعه‌ای با دقیقاً یك عضو باشد. چند عمل دوتایی متفاوت می‌توان

در S تعریف کرد؟ همین سؤال رادرمورد مجموعه‌های بادقیقاً دوعضو، سه عضو و nعضو پاسخ دهید.

۱۰.۱ چند عمل دوتایی تعویضپذیرمتفاوت می‌توان دریك مجموعهٔ ۲ عضوی تعریف کرد؟ دریك مجموعهٔ ۳ عضوی؟ دریك مجموعهٔ n عضوی؟

۱۱.۱ مشاهده کنید که عملهای دوتایی $*$ و $*'$ که درمجموعهٔ $\{a,b\}$ با جدولهای

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

و

$*'$	a	b
a	a	b
b	b	b

داده شده‌اند به مجموعهٔ $\{a,b\}$ یك نوع ساختار جبری می‌دهند: بدین معنی که اگر جدول $*'$ به صورت

$*'$	b	a
b	b	b
a	b	a

بازنویسی شود، آنگاه باتعویض نقش a و b، جدول $*'$ عیناً مانند جدول $*$ خواهد بود،

ا) سعی کنید تعریفی طبیعی از این مفهوم که دوعمل دوتایی $*$ و $*'$ در مجموعه‌ای مفروض ساختار جبری یکسان به مجموعه می‌دهند ارائه کنید به‌طوری که تعمیم مشاهدهٔ فوق باشد.

ب) به وسیلهٔ ۱۶ عمل دوتایی متفاوت ممکن دریك مجموعهٔ ۲عضوی، چند نوع ساختار جبری متفاوت به مجموعه داده می‌شود؟

۲

گروه

۱.۲ انگیزه

به تحلیل تجربهٔ گذشته‌مان ازجبرادامه می‌دهیم. پس ازاین‌که مشکلات محاسباتی جمع و ضرب رایادگرفتیم، آمادگی پیداکردیم که این‌عملهای دوتایی‌را درحل مسأله به‌کاربندیم. مسائل غالباً به معادله‌هایی منتهی می‌شوند مشتمل برتعدادی مجهول چون x که بایستی‌تعیین شوند. ساده‌ترین آنها عبارتند ازمعادله‌های خطی درجهٔ اول ازنوع $a+x=b$ درمورد عمل‌جمع؛ واز نوع $ax=b$ درمورد عمل ضرب. معادلهٔ خطی جمعی همواره جوابی عددی دارد ومعادلهٔ خطی ضربی به شرط آن‌که $a\neq 0$ جواب دارد. درواقع نیازبه‌حل معادله‌های خطی جمعی چون $5+x=2$ انگیزهٔ خوبی است برای معرفی اعداد منفی. همچنین، نیازبه اعدادگویا بامعادله‌هایی ازقبیل $2x=3$ نشان داده می‌شود ونیاز به‌عدد مختلط i بامعادلهٔ $x^2=-1$.

برای ما ضروراست که بتوانیم معادله‌های خطی مشتمل برعملهای دوتایی را حل کنیم. بااین وجود، این‌کار درمورد هرعمل دوتایی میسرنیست. مثلا درمورد عمل دوتایی * ازمثال ۴.۱، معادلهٔ $a*x=a$ درمجموعهٔ $S=\{a,b,c\}$ جواب‌ندارد. ببینیم درست چه خواصی ازعمل جمع دراعداد صحیح $\mathbf{Z}$ ما را قادرمی‌سازندکه معادلهٔ $5+x=2$ راحل کنیم. نباید به تفریق رجوع‌کنیم، زیرا باجوابی سروکار داریم که عبارتی است برحسب یك عمل دوتایی؛ ودراین جا جمع. مراحل حل معادله عبارتند از:

$۵+x=۲$	معادلهٔ داده شده
$-۵+(۵+x)=-۵+۲$	افزایش (-۵)
$(-۵+۵)+x=-۵+۲$	شرکتپذیری جمع
$۰+x=-۵+۲$	محاسبهٔ $-۵+۵$
$x=-۵+۲$	خاصیت ۰
$x=-۳$	محاسبهٔ $-۵+۲$.

دقیقتر بگوییم ، دراین جا نه‌تنها نشان داده‌ایم ۳— یك جواب است، بلکه نشان داده‌ایم تنهاجواب ممکن هم هست. برای این‌کـه نشان دهیم ۳— جوابی ازمعادلـه است، کافی است $۵+(-۳)$ راحساب کنیم. برای حل‌معادلهٔ $۲x=۳$ دراعداد گویامی‌توان تحلیل مشابهی ارائه کرد:

$۲x=۳$	معادلهٔ مفروض،
$\frac{۱}{۲}(۲x)=\frac{۱}{۲}\cdot ۳$	ضرب در $\frac{۱}{۲}$،
$\left(\frac{۱}{۲}\cdot ۲\right)x=\frac{۱}{۲}\cdot ۳$	شرکتپذیری ضرب،
$۱\cdot x=\frac{۱}{۲}\cdot ۳$	محاسبهٔ $\frac{۱}{۲}\cdot ۲$،
$x=\frac{۱}{۲}\cdot ۳$	خاصیت ۱،
$x=\frac{۳}{۲}$	محاسبهٔ $\frac{۱}{۲}\cdot ۳$.

مجموعه‌ای چون S وعملی دوتایی چون $*$ در S باید دارای چه خواصی باشند تا ازاین روش بتوان برای حل معادلهٔ $a*x=b$ ، $a,b\in S$ ، تقلیدکرد؟ برای ایـن روش، وجود عضوی مانند e در S که به ازای هر x از S ، $e*x=x$ اساسی است. درمورد مثال جمعی‌فوق، ۰ نقش e را ایفا کرد ودرموردمثال ضربی۱ این نقش را داشت. آنگاه به عضوی مانند a' نیاز داریم‌که $a'*a=e$. در مثال جمعی، ۵— نقش a' را داشت و ۱/۲ همان نقش را درمثال ضربی ایفا کرد. سرانجام بـه قانون شرکتپذیری نیز نیازمندیم. بقیهٔ کارها صرفاً محاسبه هستند. دانشجویان به سهولت می‌توانند خود را متقاعد کنندکه به منظورحل معادلهٔ $x*a=b$ (یادتان باشد لزومی نداردکه $a*x$ مساوی با

$x*a$ باشد) نیازمند عضوی مانند e در S هستیم که برای هر x از S ، $x*e=x$ و نیز باید عضوی مانند a' در S وجود داشته باشد که $a*a'=e$. با وجود تمام این خاصیتهای $*$ است که می‌توان به توانایی درحل معادله‌های خطی اطمینان داشت. اینها چیزی جزخواص گروه نیستند.

۲.۲ تعریف وخواص مقدماتی

تعریف یك گروه $\langle G,*\rangle$ عبارت است از یك مجموعهٔ G همراه باعمل دوتایی $*$ در G به‌طوری که اصول زیر برقرار باشند.

گ ۱. عمل‌دوتایی $*$ شرکتپذیر است.

گ ۲. عضوی‌چون e در G وجود داردبه‌طوری که برای هر x از G، $e*x=x*e=x$.
(این عضو e یك عضو همانی G نسبت به عمل $*$ است.)[1]

گ ۳. برای هر a از G عضوی چون a' از G وجود دارد به طوری که $a'*a=a*a'=e$. عضو a' معکوس a نسبت به $*$ است.

بسیاری از کتابها اصل موضوع دیگری نیزبرای گروه دارند وآن عبارت ازاین است که G **نسبت به عمل $*$ بسته باشد**، یعنی به‌ازای هر a و b از G ، $(a*b)\in G$. برای ما این امرنتیجهٔ تعریفمان درمورد عمل دوتایی است.

درهمین‌جا تذکر بدهیم که درنمادگذاری تسامح بخرج خواهیم داد. ملاحظه کنید که یك گروه تنهایك مجموعه نیست. گروهی چون $\langle G,*\rangle$ مشتمل بردوچیزاست ، مجموعهٔ G وعمل دوتایی $*$ که در G تعریف می‌شود. هر گروه متشکل ازدوجزء است ونمایش گروه تنها بانماد مجموعه‌ای G منطقاً غلط است. معهذا ، وقتی درنظریه پیشرفت حاصل شود ، گسترشهای منطقی‌نماد $\langle G,*\rangle$ به‌حدی خسته کننده می‌شوند که عملا مطالعهٔ متن به دشواری می‌انجامد. دیریازود تمام مؤلفین خسته می‌شوند و، بااندکی تسامح، گروه رابایك حرف G نمایش می‌دهند. ما این را تشخیص می‌دهیم وازآغاز مسامحه می کنیم . درهرصورت ، تأکید می کنیم که وقتی ازیك گروه مشخص صحبت می کنیم باید عمل آن گروه را هم روشن کنیم، چون یك مجموعه محتملامی‌تواند عملهای گوناگونی‌داشته‌باشد و گروههای متفاوتی رابه دست دهد. به خاطروضوح دربحث است که گاهی به‌نماد $\langle G,*\rangle$ باز می گردیم.

قضیهٔ ۱.۲ فرض کنیم G گروهی با عمل دوتایی $*$ باشد. در G **قوانین حذف از چپ و راست برقرارند**؛ یعنی به ازای هر a ، b و c از G ، از $a*b=a*c$ نتیجه می‌شود $b=c$ و از $b*a=c*a$ هم نتیجه می‌شود $b=c$.

---

۱. عضو همانی برای یك عمل دوتایی $*$ در مجموعه‌ای چون S عضوی مانند e است که به ازای هر x از S ، $e*x=x*e=x$.

برهان. فرض کنیم که $a*b=a*c$. بنابر گ ۳ عضو a' وجود دارد. و

$$a'*(a*b)=a'*(a*c).$$

بنا به قانون شرکتپذیری

$$(a'*a)*b=(a'*a)*c.$$

بنا به تعریف a' در گ ۳ ، $a'*a=e$ وبنابراین

$$e*b=e*c.$$

بنا به تعریف e در گ ۲

$$b=c.$$

عیناً از $b*a=c*a$ باضرب کردن طرفین ازسمت راست در a' وبا استفاده از اصول موضوعهٔ گروه می‌توان نتیجه گرفت که $b=c$. □

توجه کنید در اثبات این قضیه چگونه مجبور به استفاده از تعریف گروه شدیم.

قضیهٔ ۲.۲ اگر G با عمل دوتایی $*$ یك گروه باشد، و a و b دو عضو دلخواه از G باشند، آنگاه هر یك از معادله‌های خطی $a*x=b$ و $y*a=b$ یك جواب منحصر به فرد دارد.

برهان. توجه کنید که

$a*(a'*b)=(a*a')*b$	بنا به قانون شرکتپذیری
$=e*b$	بنا به تعریف a'
$=b$	بنا به خاصیت e

بنابراین $x=a'*b$ یك جواب $a*x=b$ است. بـه همین منوال ، معلوم می‌شود کـه $y=b*a'$ یك جواب $y*a=b$ است.

برای اثبات این که y منحصر به‌فرداست، فرض کنیم که $y*a=b$ و $y_1*a=b$. بنابراین $y*a=y_1*a$ و بنابـه قضیهٔ ۲.۱ ، $y=y_1$ یکتایی x نیز همین‌طور ثابت می‌شود. □

البته، برای اثبات یکتایی درقضیهٔ اخیرمی‌توانستیم همان روشی رابه‌کار ببریم که در ایجاد انگیزه برای معرفی گروه به‌کار بردیم. یعنی بانشان دادن این‌که اگـر $a*x=b$ ، آنگاه $x=a'*b$. با این وجود، روش متعارف اثبات یکتایی را جهت روشن ساختن‌آن بر گزیدیم. فرض می‌کنیدکه دوچنین چیزی وجود دارند وسپس ثابت می‌کنیدکه باید مثل

هم باشند. توجه کنید لزومی ندارد که جوابهای $x=a'*b$ و $y=b*a'$ برابر باشند، مگر این که $*$ تعویضپذیر باشد.

تعریف گروه G آبلی است درصورتی که عمل دوتایی $*$ آن تعویضپذیر باشد.

اکنون مثالهایی می‌آوریم ازچند مجموعه با اعمالی دوتایی که برخی گروه هستند و برخی گروه نیستند.

مثال ۱.۲ مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ باعمل $+$ گروه نیست. نسبت به $+$ مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ عضوهمانی ندارد. □

مثال ۲.۲ مجموعهٔ تمام اعداد صحیح نامنفی (شامل ۰) باعمل $+$ هنوزهم گروه نیست. عضو همانی ۰ وجود دارد، اما ۲ عضومعکوس ندارد. □

مثال ۳.۲ مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ باعمل $+$ یك گروه هست. تمام شرایط تعریف برقرارند. این گروه آبلی است. □

مثال ۴.۲ مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ با عمل ضرب گروه نیست. عضوهمانی ۱ وجود دارد، اما عضو معکوسی برای ۳ وجود ندارد. □

مثال ۵.۲ مجموعهٔ $\mathbf{Q}^+$ باعمل‌ضرب یك گروه است. تمام شرایط تعریف برقرارند. این گروه آبلی است. □

مثال ۶.۲ در $\mathbf{Q}^+$ عمل $*$ رابا $a*b=ab/۲$ تعریف می‌کنیم. اکنون

$$(a*b)*c=\frac{ab}{۲}*c=\frac{abc}{۴}$$

وعیناً

$$a*(b*c)=a*\frac{bc}{۲}=\frac{abc}{۴}$$

بنابراین $*$ شرکتپذیراست. بداهتاً برای هر a از $\mathbf{Q}^+$

$$۲*a=a*۲=a$$

ازاینرونسبت به $*$ عدد ۲ عضوهمانی است. سرانجام

$$a*\frac{۴}{a}=\frac{۴}{a}*a=۲$$

پس $a'=۴/a$ معکوس a است. ازاینرو $\mathbf{Q}^+$ باعمل $*$ یك گروه است. □

خاصیت دیگری هم در گروه هست که مایلیم آن را درهمین بخش ثابت کنیم.

قضیهٔ ۳.۲ در گروه G باعمل $*$، فقط یك عضو همانی e وجود دارد به طوری که به ازای هر x از G

$$e * x = x * e = x .$$

همین طور، برای هر a از G، فقط یك عضو a' هست به طوری که

$$a' * a = a * a' = e$$

به طور خلاصه، در هر گروه عضو همانی و اعضای معکوس منحصر به فرد هستند.

برهان. فرض کنیم به‌ازای هر x از G، $e * x = x * e = x$ ونیز $e_1 * x = x * e_1 = x$. اعضای e و e_1 را به رقابت وامی‌داریم. بادرنظر گرفتن e به‌عنوان عضوهمانی، $e * e_1 = e_1$. اما با درنظر گرفتن e_1 به‌عنوان عضوهمانی $e * e_1 = e$. ازاینرو

$$e_1 = e * e_1 = e .$$

اکنون فرض کنیم $a' * a = a * a' = e$ و $a'' * a = a * a'' = e$. بنابراین

$$a * a'' = a * a' = e$$

وبنابه قضیهٔ ۱.۲

$$a'' = a'$$

ازاینرو معکوس عضو a در گروه منحصر به فرد است. □

برای اطلاع دانشجویان، خاطرنشان می کنیم که ساختارهای جبری متشکل از یك مجموعه همراه با عملی دوتایی که درمورد آنها برخی از اصول موضوع گروه برقرار نمی‌باشند هم به تفصیل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در بین این ساختارهای ضعیفتر، شاید **نیمگروه**، متشکل ازیك مجموعه همراه باعملی شرکتپذیر، بیش ازسایرین توجه افراد را جلب کرده باشد. اخیراً به مطالعهٔ ساختارهای جبری ناشرکتپذیرنیز پرداخته‌اند.

سرانجام، امکان دارد اصول موضوع ظاهراً ضعیفتری را نیز برای گروه $(G, *)$ وضع کرد؛ وآنها عبارتند از:

۱) عمل دوتایی $*$ در G شرکتپذیر است.
۲) یك‌عضو**همانی چپ** e در G هست به‌طوری که به‌ازای هر x از G، $e * x = x$.
۳) برای هر a از G، یك **معکوس چپ** a' در G وجود دارد به‌طوری که $a' * a = e$.

می‌توان ثابت کرد که‌ازاین تعریف یك جهته نتیجه می‌شود که عضوهمانی چپ عضو همانی راست نیزهست وعضومعکوس‌چپ عضومعکوس راست هم می‌باشد. بنابراین، نباید

این اصول موضوع راضعیفترنامید، زیرا دقیقاًهمان ساختاری رابه دست می‌دهندکه گروه نامیده می‌شود. قابل‌تصوراست‌که دربعضی حالات بررسی برقراری اصول موضوع چپ از بررسی برقراری اصول موضوع دو جهته ساده‌تر باشد. البته، با استفاده ازتقارن، بدیهی است‌که اصول موضوع راست نیز برای‌گروه وجود دارند.

۳.۲ گروه متناهی و جدول‌گروه

تااینجاتمام‌مثالهای ما از گروههای نامتناهی بوده‌است، یعنی‌گروههایی‌که مجموعه G آنها نامتناهی است. ممکن است این سؤال برای دانشجو مطرح شودکه آیا ممکن است مجموعه‌ای متناهی هم ساختارگروهی داشته باشد. جواب مثبت است و درحقیقت چنین گروههایی بسیاراهمیت دارند.

چون هر گروه باید حداقل یك عضوداشته باشدکه همان عضوهمانی است، کوچکترین‌مجموعه‌ای‌که می‌توان بدان ساختارگروهی داد مجموعهٔ یك‌عضوی $\{e\}$ است. تنها عمل دوتایی ممکن $*$ در $\{e\}$ به وسیلهٔ $e*e=e$ تعریف می‌شود. دانشجو می‌تواند فوراً امتحان‌کندکه هرسه اصل موضوع گروه برقرارند. در هر گروه عضوهمانی همواره معکوس خودش است.

اکنون سعی‌کنیم به مجموعه‌ای دوعضوی یك ساختارگروهی بدهیم. چون یکی از دوعضو باید نقش عضوهمانی را داشته باشد، می‌توان مجموعه را به صورت $\{e,a\}$ هم فرض‌کرد. اکنون کوشش می‌کنیم جدولی برای عملی دوتایی چون $*$ در $\{e,a\}$ پیدا کنیم‌که بدان ساختارگروهی بدهد. هنگام عرضهٔ جدولی برای یك عمل گروهی، همواره اعضا رابه همان ترتیبی در سطرفوقانی جدول می‌نویسیم که در ستون سمت چپ جدول. عضوهمانی را هم همواره اول می‌نویسیم؛ مانند جدول ذیل:

$*$	e	a
e		
a		

چون e باید عضوهمانی باشد، پس برای هر x از $\{e,a\}$

$$e*x=x*e=x$$

بنابراین اگرقرار باشد $*$ عمل یك‌گروه باشد مجبوریم جدول رابه صورت زیر پرکنیم:

$*$	e	a
e	e	a
a	a	

ازطرف دیگر، a باید عضومعکوسی چون a' داشته باشد به‌طوری‌که

$$a * a' = a' * a = e$$

دراین مورد، a' باید یا a ویا e باشد. $a' = e$ بداهتاً غیرممکن است، پس $a' = a$، و بنابراین جدول به صورت زیرکامل می‌شود.

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

تمام اصول موضوع گروه برقرارند، مگراحیاناً قانون شرکتپذیری. بعداً درحالتی کلیتر خواهیم دیدکه شرکتپذیری هم برقراراست. دانشجومخیراست‌که یا شرکتپذیری را فعلا بپذیرد یازحمت امتحان‌کردن طولانی باحالات متعددآن را تقبل‌کند.

بااین مثالهابه‌عنوان زمینهٔ فکری حتماً قادرهستیم بعضی‌ازشرایط لازمی راکه جدول حاصل ازیك عمل دوتایی درمجموعه‌ای متناهی باید داشته باشد، تا بـه مجموعه ساختار گروهی بدهد، فهرست‌کنیم. باید عضوی ازمجموعه وجود داشته باشدکه چون عضوهمانی عمل‌کند، ومی‌توان‌آن رابه e نمایش‌داد. شرط $e * x = x$ بدین‌معنی است‌که سطرمقابل عضو e ازستون سمت چپ باید عیناً مـانند سطرفوقانی جدول و بـه همان ترتیب باشد. همچنین شرط $x * e = x$ بدین معنی است‌که ستون زیرعضو e ازسطرفوقانی جدول هم باید عیناً مانند ستون سمت چپ وبه همان تـرتیب باشد. این مطلب‌که هرعضو a دارای معکوس راست وچپ‌است‌بدین معنی است‌که هم درسطرمقابل a از ستون سمت چپ وهم درستون زیر a ازسطرفوقانی باید عضو e ظاهرشود. بنابراین درهرسطرودرهرستون‌عضو e باید ظاهرگردد. حتی می‌توان بهتراز این عمل‌کرد. بنا بـه قضیهٔ ۲.۲، نه‌تنها هریك از معادله‌های $a * x = e$ و $y * a = e$ جواب‌منحصربه‌فردی دارند،بلکه هریك‌ازمعادله‌های $a * x = b$ و $y * a = b$ نیزچنین‌اند. بابیانی مشابه آنچه‌گذشت، ازاینجا نتیجه می‌شود که هرعضو b از گروه بـاید در هر سطر، و نیز در هر ستون جدول، یـك و فقط یك بار ظاهر شود.

فرض‌کنیم به عکس، جدول یك عمل دوتایی درمجموعه‌ای متناهی طوری است‌که درآن یکی ازاعضا مانند عضوهمانی عمل می‌کند وبه‌علاوه هرعضو درهرسطرودرهرستون یك وفقط یك‌بار می‌آید. می‌توان ملاحظه‌کردکه مجموعه ساختار گروهی دارد، اگروفقط اگرقانون شرکتپذیری برقرارباشد. اگرعمل دوتایی $*$ به وسیلهٔ جدول تعریف شده‌باشد، بررسی برقراری شرکتپذیری عموماً طولانی است. اگرعمل $*$ بـا خاصیت مشخصه‌ای برای $a * b$ تعریف شده بـاشد ، قانون شرکتپذیری معمولا بـه‌راحتی بررسی می‌شود. خوشبختانه این حالت دوم است‌که عموماً به وقوع می‌پیوندد.

ملاحظه کردیم که اساساً فقط یك گروه دوعضوی وجود دارد، بدین معنی که اگر اعضای مجموعه e و a نامیده شوند وعضو همانی e اول بیاید، جدول باید به صورت زیر باشد.

*	e	a
e	e	a
a	a	e

فرض کنیم که مجموعه‌ای سه عضودارد. مانند قبل، می‌توان مجموعه را با $\{e,a,b\}$ هم نمایش داد. برای این‌که e عضوهمانی باشد، یك عمل * دراین مجموعه باید جدولی به صورت جدول ۲.۱ داشته باشد. تااینجا چهارمحل می‌ماندکه پرشوند. دانشجومی‌تواند به سرعت ملاحظه کندکه اگرقرارباشد هرعضودقیقاً یك‌بار درهرستون ونیزیك‌بار درهرسطر ظاهرشود، جدول باید به صورت جدول ۲.۲ کامل شود. مجدداً ازشما خواسته می‌شود بدون اثبات بپذیریدکه این عمل شرکتپذیراست. بنابراین * به $G=\{e,a,b\}$ ساختار گروهی می‌دهد.

جدول ۱.۲

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

جدول ۲.۲

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

اکنون فرض کنیم که G' گروه دیگری است باسه عضو و تصورکنیم جدولی برای G' داده شده باشدکه درآن عضوهمانی اول آمده است. چون پرکردن جدول برای $G=\{e,a,b\}$، تنها به یك صورت امکان داشت، ملاحظه می‌کنیم که اگرعضو همانی G' را e، عضوبعدی G' را که درجدول آمده است a وعضوسوم را b نامگذاری کنیم جدول G' همان جدول G خواهد شد. به‌عبارت دیگر، G و G' از لحاظ ساختاری عیناً مانند هم هستند، وباتجدید نامگذاری اعضا، می‌توان هریك راکاملا شبیه دیگری درآورد. بنابراین هر دوگروه سه عضوی از لحاظ ساختاری یکی هستند. این مقدمه‌ای است برمفهوم ایزومورفیسم. گروههای G و G' ایزومورف هستند. این مفهوم گاهی کمی برای دانشجو ثقیل

است. فعلا بیش‌ازاین دربارهٔ آن سخن نمی‌گوییم، ولی بعداً آن را دقیقتر بیان خواهیم کرد.

تمرین

۱.۲ برای هرعمل دوتایی * تعریف شده درهریك ازمجموعه‌های زیر، مشخص کنید که آیا * به مجموعه ساختار گروهی می‌دهد یا خیر. در هر موردکه گروه حاصل نمی‌شود، به‌ترتیب گ ۱، گ ۲ و گ ۳ نخستین اصل موضوعی راکه برقرارنیست مشخص کنید.

ا) عمل * در $\mathbf{Z}$ باتعریف $a*b=ab$.

ب) عمل * در $\mathbf{Z}$ باتعریف $a*b=a-b$.

ج) عمل * در $\mathbf{R}^+$ باتعریف $a*b=ab$.

د) عمل * در $\mathbf{Q}$ باتعریف $a*b=ab$.

ه) عمل * درمجموعهٔ تمام اعداد حقیقی نامنفی باتعریف $a*b=ab$.

و) عمل * در $\mathbf{C}$ باتعریف $a*b=a+b$.

۲.۲ اصول موضوع گ ۱، گ ۲ و گ ۳ درمورد یك گروه را درنظر بگیرید. این اصول به ترتیب گ ۱، گ ۲ و گ ۳ ارائه شده‌اند. سایرترتیبهای قابل‌تصوراین اصول عبارتند از گ ۱ گ ۳ گ ۲ ، گ ۲ گ ۱ گ ۳ ، گ ۲ گ ۳ گ ۱ ، گ ۳ گ ۱ گ ۲ و گ ۳ گ ۲ گ ۱. ازاین ۶ صورت، تنها سه صورت برای تعریف قابل قبولند. کدام سه صورت قابل قبول نیستند، وچرا؟ (این رابه خاطربسپارید. اغلب مدرسین حداقل در یك امتحان از دانشجومی‌خواهندکه گروه را تعریف کند.)

۳.۲ بامحاسبه وبا استفاده ازقضیهٔ ۳.۲ نشان دهیدکه اگر G یك گروه باعمل دوتایی * باشد، آنگاه برای هر a و b از G، $(a*b)'=b'*a'$. عبارت مشابه آن برای $(a*b'*c)'$ چیست؟

۴.۲ با تعقیب مطالب ذیل، نشان دهیدکه روی هرمجموعهٔ چهارعضوی دونوع متفاوت ساختار گروهی وجود دارد. فرض کنیم مجموعه $\{e,a,b,c\}$ باشد و عضوهمانی گروه e. جدول گروه‌باید به‌صورتی که درجدول ۳.۲ نشان‌داده شده‌است آغازشود. مربع‌مشخص‌شدهٔ باعلامت سؤال نمی‌تواند با a پرشود. بایدآن رایاباهمانی e ویا باعضوی متفاوت با a و e پر کرد. درحالت اخیر، بدون خلل به‌کلیت مسأله فرض می‌کنیم این عضو b باشد. اگراین محل با e پرشود آنگاه جدول می‌تواند به دوصورت پرشود تا گروه به‌دست آید. این دوجدول را پیداکنید. (نیازی به امتحان قانون شرکتپذیری ندارید.) اگردراین‌محل b نوشته شود، آنگاه برای به‌دست‌آوردن گروه، جدول رافقط می‌توان به‌یك صورت‌کامل کرد. آن را پیداکنید. (مجدداً به امتحان شرکتپذیری نیاز ندارید.) از سه جدولی که فعلا دارید، دوتا یك نوع ساختار گروهی به مجموعه می‌دهند. این دوتا را تعیین کنید ونشان دهیدکه چگونه باید اعضای یك جدول را تغییرنام داد تا دو جدول یکسان به‌دست‌آیند. آیا تمام‌گروههای چهارعضوی تعویضپذیرهستند؟

جدول ۳.۲

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	?		
b	b			
c	c			

+**۵.۲** نشان دهید که اگر G گروهی متناهی باعضوهمانی e باشد وتعداد اعضای G زوج باشد، آنگاه عضوی چون a ، $a \neq e$ ، در G هست به‌طوری که $a * a = e$.

۶.۲ درستی یا نادرستی هریك از گزاره‌های زیررا تعیین کنید.

— ا) یك گروه می‌تواند بیش ازیك عضوهمانی داشته باشد.

— ب) هردو گروه سه عضوی ایزومورف هستند.

— ج) درهر گروه، هرمعادلهٔ خطی جواب دارد.

— د) برخوردصحیح بایك تعریف آن است که آن را طوری به خاطر بسپاریم که بتوانیم آن را مو به مو مانندکتاب بازگو کنیم.

— ه) هرتعریفی که شخصی برای گروه ارائه دهد درست است، مشروط به این که هر چیز با این تعریف گروه بود با تعریف متن نیز گروه باشد.

— و) هرتعریفی که شخصی برای گروه ارائه دهد درست است، مشروط به این که هرچه درتعریف اوصدق کند درتعریف کتاب نیزصدق کند وبه‌عکس.

— ز) هرگروه متناهی باحداکثرسه عضوآبلی است.

— ح) هرعبارت به‌صورت $a * x * b = c$ دریك گروه همواره جوابی منحصر به‌فرد دارد.

— ط) مجموعهٔ تهی را نیزمی‌توان یك گروه تصور کرد.

— ی) درمتن هنوزهیچ مثالی از گروههای ناآبلی آورده نشده است.

۷.۲ جدولی برای یك عمل‌دوتایی درمجموعهٔ سه‌عضوی $\{e,a,b\}$ بنویسید که درشرایط گ ۲ و گ ۳ گروه صدق کند ولی در گ ۱ صدق نکند.

۸.۲ بنابه تمرین ۹.۱، درهرمجموعهٔ دوعضوی ۱۶ عمل دوتایی می‌توان تعریف کرد. چندتا ازاینها به مجموعه ساختارگروهی می‌دهند؟ چندتا از ۱۹۶۸۳ عمل دوتایی ممکن در یك مجموعهٔ سه عضوی بدان ساختارگروهی می‌دهند؟

۹.۲ فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بجز ۱ — باشد وعمل $*$ در S باضابطهٔ

$$a*b=a+b+ab$$

تعریف می‌شود.

ا) نشان دهید که $*$ در S یك عمل دوتایی تعریف می‌کند.

ب) نشان دهید که $\langle S, *\rangle$ یك گروه است.

ج) در S، جواب معادلهٔ $۲*x*۳=۷$ را پیدا کنید.

۱۰.۲ فرض کنید $\mathbf{R}^*$ مجموعهٔ تمام اعدادحقیقی ناصفر باشد. در $\mathbf{R}^*$ عمل $*$ راباضابطهٔ $a*b=|a|b$ تعریف کنید.

ا) نشان دهید $*$ عمل دوتایی شرکتپذیری را در $\mathbf{R}^*$ به‌دست می‌دهد.

ب) نشان دهید که نسبت به $*$ در $\mathbf{R}^*$ عضوهمانی چپ وجود دارد و هرعضودارای عضو معکوس راست نیز می‌باشد.

ج) آیا $\mathbf{R}^*$ با این عمل دوتایی یك گروه است؟

د) فایدهٔ این تمرین رابیان کنید.

۱۱.۲ اگردرمجموعه‌ای چون S ، $*$ عمل دوتایی باشد، آنگاه عضو x از S را نسبت به $*$ **خود نما** می‌نامیم درصورتی که $x*x=x$. ثابت کنید که هر گروه دقیقاً یك عضو خودنما دارد. (ازهرقضیه‌ای که تاکنون درمتن ثابت شده‌است می‌توانید استفاده کنید.)

۱۲.۲ نشان دهید که هر گروه G با عضو همانی e که درآن به‌ازای هر x از G ، $x*x=e$ ، آبلی است. [راهنمایی : $(ab)^۲$ را بررسی کنید.]

۱۳.۲ ثابت کنید مجموعه‌ای چون G باعملی دوتایی چون $*$ در G که دراصول موضوع چپ (۱) ، (۲) و (۳) که در پایان بخش ۳.۲ مطرح شد، صدق کند یك گروه است.

۱۴.۲ ثابت کنید هرمجموعهٔ ناتهی G با عمل دوتایی شرکتپذیری چون $*$ در G ، واجد این خاصیت که به‌ازای هر a و b از G معادله‌های

$$y*a=b \quad \text{و} \quad a*x=b$$

در G دارای جواب باشند، یك گروه است. [راهنمایی : تمرین ۱۳.۲ رابه‌کاربرید.]

۱۵.۲ «تعریف»های زیر برای گروه مو به مو، شامل املاء ونقطه گذاری ، از ورقه‌های امتحانی دانشجویان گرفته شده‌است. آنها را تصحیح کنید.

ا) گروه عبارت است ازمجموعه‌ای از اعضاباعملی دوتایی‌چون $*$ به‌طوری که درشرایط زیرصدق کند

$*$ شرکتپذیراست

$e\in G$ وجود دارد به‌طوری که

$e*x=x*e=x=$ همانی .

برای هر $a \in G$ یك عضو a' (معکوس) وجود دارد به‌طوری‌که

$$a \cdot a' = a' \cdot a = e$$

ب) یك گروه مجموعه‌ای است مانند G به طوری‌که
عمل در G شرکتپذیر است.
در G یك عضوهمانی (e) وجود دارد.
برای هر $a \in G$ ، یك عضو a' (معکوس عضو) وجود دارد

ج) یك گروه مجموعه‌ای است با یك عمل دوتایی به‌طور
عمل دوتایی تعریف شده‌است
یك معکوس وجود دارد
یك عضوهمانی وجود دارد

د) مجموعه‌ای چون G یك گروه نامیده می‌شود روی عمل دوتایی $*$ به طوری‌که برای تمام $a, b \in G$
عمل دوتایی $*$ تحت جمع شرکتپذیر است
عضوی چون $\{e\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$a * e = e * a = e$$

برای هرعضو a عضوی چون a' وجود دارد به‌طوری‌که

$$a * a' = a' * a = e$$

۳

زیرگروه

۱.۳ نمادها و اصطلاحات

زمان آن فرا رسیده است که برخی ازنمادها واصطلاحات مرسوم نظریهٔ گروهها را بیان کنیم. یك جبردان برای عملهایی که با جمع وضرب عادی متفاوت باشند ضرورتاً نماد * را به کارنمی‌برد. او به همان نمادهای جمع یاضرب سنتی وفادار می‌ماند و برحسب مورد عمل را به همان نام‌جمع یاضرب هم می‌نامد. نمادجمع‌البته «+» است وضرب‌درصورتی که منجر به سوء تفاهم نشود، با پشت سرهم قرار دادن بدون نقطه نمایش داده‌می‌شود. بنابراین به‌جای عبارت $a*b$ از $a+b$ ،که خوانده می‌شود « مجموع a و b » ،یاab ، که خوانده می‌شود « حاصلضرب a و b » استفاده خواهیم کرد. نوعی توافق محترمانه هم وجود داردکه‌نماد+ فقط برای عملهای تعویضپذیر به‌کار رود. مشاهدهٔ «$a+b \neq b+a$» برای یك جبردان بسیارناراحت کننده است. بدین مناسبت، در گسترش نظریهٔ گروهها به حالات کلی که عمل ممکن است تعویضپذیر باشد یا نباشد، همواره از نمادگذاری ضربی استفاده می کنیم.

ریاضیدانها غالباً نماد«۰» رابرای‌عضوهمانی‌جمع‌ونماد«۱» رابرای‌عضوهمانی‌ضرب به‌کارمی‌برند؛ گرچه ممکن است این نمادها عملا معرف اعداد ۰ و ۱ نباشند. البته اگر شخصی درعین حال ازاعداد هم صحبت کند، برای جلوگیری ازسوءتفاهم، ممکن است نمادهایی‌چون «e»یا«u» را نیزبه‌کارببرد. بنابراین جدول یك‌گروه سه‌عضوی‌ممکن‌است‌به صورت جدول ۱.۳، یا به علت تعویضپذیر بودن به صورت جدول ۲.۳ نوشته شود. در حالتهای کلی ما به استفاده از e برای عضوهمانی گروه ادامه خواهیم داد.

متداول‌است که درنمادگذاری ضربی معکوس a رابه‌صورت a^{-1} ودرنمادگذاری

جدول ۱.۳

	۱	a	b
۱	۱	a	b
a	a	b	۱
b	b	۱	a

جدول ۲.۳

+	۰	a	b
۰	۰	a	b
a	a	b	۰
b	b	۰	a

جمعی معکوس a را به صورت $-a$ بنویسند. ازاین پس ما نیزهمین نمادها را به جای a' به‌کارخواهیم برد.

اصطلاح دیگری را نیز بیان می‌کنیم که بـه سبب کثرت استعمال تعریفی خاص را سزاوار است.

تعریف اگر G یك‌گروه متناهی باشد، آنگاه $|G|$ ، یعنی مرتبهٔ G ، عبارت است ازتعداد اعضای G. به‌طور کلی برای هرمجموعهٔ متناهی S، $|S|$ عبارت است از تعداد اعضای S.

سرانجام، به‌جای عبارت با عمل دوتایی ما ازکلمهٔ تحت استفاده می‌کنیم. ازاینرو عبارت «گروه $\mathbf{R}$ باعمل دوتایی جمع» تبدیل می‌شود به «گروه $\mathbf{R}$ تحت جمع».

۲.۳ زیرمجموعه و زیرگروه

ممکن است توجه‌کرده باشیدکه گاهی بـه‌گروههایی برخوردکرده‌ایم کـه جزء گـروه بزرگتری بوده‌اند. برای مثال، گروه $\mathbf{Z}$ تحت‌جمع جزء گروه $\mathbf{Q}$ تحت جمع است که خود جزء گروه $\mathbf{R}$ تحت‌جمع‌می‌باشد.وقتی گروه $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ رابه‌عنوان‌جزئی‌ازگروه $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ درنظرمی گیریم، توجه بدین نکته بسیارمهم است‌که عمل $+$ روی دوعدد صحیح m و n به‌عنوان اعضای $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ همان عضو $m+n$ را به دست می‌دهدکـه m و n به عنوان اعضای $\langle \mathbf{R}, + \rangle$. بنابراین نباید $\langle \mathbf{Q}^+, \cdot \rangle$ راجزء $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ درنظربگیرید، هرچندکه به‌عنوان یك مجموعه، $\mathbf{Q}^+$ جزء $\mathbf{R}$ هست. دراین‌مورد در $\langle \mathbf{Q}^+, \cdot \rangle$ داریم $۲ \cdot ۳ = ۶$، درحالی‌که در $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ داریم $۲+۳=۵$. ما نه‌تنها لازم می‌دانیم‌که مجموعهٔ گـروه کوچکترجزءمجموعه‌گروه‌بزرگتر باشد، بلکه‌می‌خواهیم‌عمل گروه‌روی‌مجموعهٔ کوچکتر به‌هر دوعضوازمجموعهٔ کوچکترهمان عضوی رامنسوب کندکه عمل گروه روی مجموعهٔ بزرگتر. حال چند تعریف پشت سرهم می‌آوریم تااین مفاهیم را دقیقاً بیان کرده باشیم.

تعریف مجموعهٔ B زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ A است، وبه صورت $B \subseteq A$ یا $A \supseteq B$ نوشته می‌شود، هرگاه هرعضو B عضو A نیزباشد. نمادهای $B \subset A$ یا $A \supset B$ به معنی $B \subseteq A$ و $B \neq A$ به‌کارخواهند رفت.

توجه کنید که طبق این تعریف، به‌ازای هرمجموعهٔ A، خود A و $\varnothing$ هر دو زیر مجموعه‌های A هستند.

تعریف به‌ازای هرمجموعهٔ A، A زیر مجموعهٔ غیر واقعی A است. هرزیرمجموعهٔ دیگر A یك زیر مجموعهٔ واقعی A است.

تعریف فرض کنیم G یك گروه و S زیرمجموعه‌ای از G باشد. اگر به‌ازای هر a و b از S، حاصلضرب ab که در G محاسبه می‌شود نیز در S باشد، آنگاه می‌گوییم S تحت عمل G بسته است. عملی دوتایی که بدین طریق در S تعریف می‌شود عمل القایی به S از G نام دارد.

اکنون می‌توان این مفهوم راکه یك گروه جزء گروه دیگری باشد دقیقاً بیان کرد.

تعریف اگر H زیرمجموعه‌ای ازگروه G وتحت عمل G بسته‌باشد و H خود با عمل‌القایی از G یك گروه‌باشدآنگاه H یك زیرگروه G نامیده‌می‌شود. ما $H \leqslant G$ یا $G \geqslant H$ را بـه معنی H زیر گروهی از G است به‌کار می‌بریم و $H < G$ یـا $G > H$ رابه معنی $H \leqslant G$ و $H \neq G$.

بنابرآنچه گفته شد، $\langle \mathbf{Z}, + \rangle < \langle \mathbf{R}, + \rangle$، امـا $\langle \mathbf{Q}^+, \cdot \rangle$ زیـر گروهی از $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ نیست؛ هرچند به‌عنوان مجموعه، $\mathbf{Q}^+ \subset \mathbf{R}$. هرگروه G حداقل دارای دو زیر گروه است، خود G و $\{e\}$ که e عضوهمانی G است.

تعریف اگر G یك‌گروه باشد، آنگاه G زیر گروه غیر واقعی G است. تمام زیـر گروههای دیگر زیرگروههای واقعی هستند. همچنین $\{e\}$ زیر گروه بدیهی G است. تمام زیر گروههای دیگرنابدیهی هستند.

به چند مثال می‌پردازیم

مثال ۱.۳ $\mathbf{Q}^+$ تحت ضرب یك زیرگروه واقعی $\mathbf{R}^+$ تحت ضرب می‌باشد. □

مثال ۲.۳ دونوع ساختارگروهی متفاوت از مـرتبهٔ ۴ وجود دارد (تمرین ۲.۴ ملاحظه شود). ما آنها را با جداولشان توصیف می‌کنیم (جدولهای ۳.۳ و ۴.۳). گروه V بـه ۴ـگروه‌کلاین موسوم است ونماد V ازلغت آلمانی *Viergruppe* گرفته شده‌است.

جدول ۴.۳

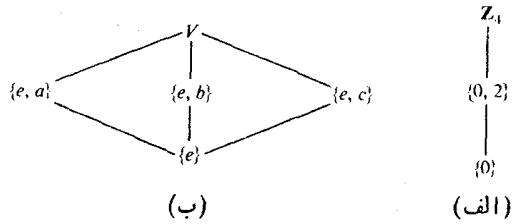
Z_4 : +	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۰
۲	۲	۳	۰	۱
۳	۳	۰	۱	۲

جدول ۳.۳

V :	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

تنهازیرگروه نابدیهی Z_4 عبارت است از $\{۰, ۲\}$. توجه داشته‌باشید که $\{۰, ۳\}$ یك زیرگروه Z_4 نیست. چون $\{۰, ۳\}$ تحت عمل $+$ بسته نیست؛ مثلا، $۳+۳=۲$ و $۲ \notin \{۰, ۳\}$. ازطرف دیگر، V دارای سه زیرگروه نابدیهی است؛ $\{e, a\}$، $\{e, b\}$ و $\{e, c\}$. دراین مورد $\{e, a, b\}$ زیرگروه نیست، چون تحت عمل V بسته نیست. مثلا، $ab=c$ و $c \notin \{e, a, b\}$. □

عموماً رسم نمودار لاتیس زیرگروههای یك گروه مفیداست. درچنین نموداری رسم یك خط به طرف پایین ازیك گروه G به یك گروه H بدین‌معنی است که H زیرگروه G است. بنابراین ازهردو گروه، گروه بزرگتر به‌بالای نمودارنزدیکتراست. شکل۱.۳ نمودار لاتیسهای Z_4 و V ازمثال ۲.۳ رانشان می‌دهد.



شکل ۱.۳ (ا) نمودارلاتیس Z_4 (ب) نمودارلاتیس V.

توجه کنید که اگر $H \leqslant G$ و $a \in H$ آنگاه بنا به قضیهٔ ۲.۲ معادلهٔ $ax=a$ باید جوابی منحصربه‌فرد داشته‌باشد وآن عضوهمانی H است. اما این معادله را می‌توان به عنوان معادله‌ای در G هم درنظر گرفت وازاین نظراین جواب منحصربه فرد باید عضو همانی G نیزباشد. با بیانی مشابه درمورد معادلهٔ $ax=e$ درهردو گروه H و G، نتیجه می‌شود که a^{-1}، معکوس a در G، همان‌معکوس a در زیرگروه H می‌باشد.

مناسب است محك ساده‌ای برای تعیین این که آیا زیرمجموعه‌ای از یك گروه G زیر گروهی از آن هست یا نه داشته باشیم. قضیهٔ بعد چنین محکی را به دست می‌دهد. درحالی که محکهای فشرده‌تر شامل فقط یك شرط هم وجود دارند، ما این قضیه را که شهودی‌تر است برای نخستین درس ترجیح می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۳ زیر مجموعهٔ H از گروه G یك زیر گروه G است اگر و فقط اگر:

۱) H تحت عمل G بسته باشد؛

۲) عضو همانی e از G به H تعلق داشته باشد؛

۳) برای هر a از H عضو a^{-1} به H نیز تعلق داشته باشد.

برهان. این امر که اگر H زیر گروه G باشد شرایط (۱)، (۲) و(۳) باید برقرار باشند بلافاصله ازتعریف زیر گروه وتذکرات قبل ازصورت قضیه حاصل می‌شود.

به‌عکس، فرض کنیم H یك زیرمجموعهٔ G باشد وشرایط (۱)، (۲) ,(۳) برقرار باشند. بنابه (۲) بلافاصله نتیجه می‌گیریم که گ ۲ برقراراست. همچنین بنابه (۳)، گ ۳ برقراراست. تنها می‌ماند بررسی برقراری اصل موضوع شرکتپذیری، گ ۱. اما برای هر aوbوc از H مسلم است که تساوی $a(bc)=(ab)c$ در H برقراراست، زیرا می‌توان این را به عنوان یك تساوی در G، که درآن قانون شرکتپذیری برقراراست پنداشت. بنابراین $H \leqslant G$. □

۳.۳ زیرگروه دوری

درمثال ۲.۳ خاطرنشان ساختیم که $\{0, 3\}$ زیرگروه $\mathbf{Z}_4$ نیست. ببینیم اگرزیرگروهی از $\mathbf{Z}_4$ بخواهد شامل ۳ باشد چقدر باید بزرگ باشد. این زیرگروه باید شامل عضوهمانی ۰ ومعکوس ۳ یعنی ۱ باشد. همچنین H باید $3+3$ را که ۲ است شامل باشد. بنابراین تنها زیرگروه شامل ۳ از $\mathbf{Z}_4$ خود $\mathbf{Z}_4$ است.

این استدلال رادریك حالت کلی تکرارمی کنیم. همچنان که قبلا تذکرداده‌ایم، در حالات کلی ازنمادگذاری ضربی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم G یك گروه باشد و $a \in G$. بنابه قضیهٔ ۱.۳ هرزیر گروه شامل a باید شامل aa، که آن رابه‌صورت a^2 می‌نویسیم، نیزباشد. پس ازآن باید شامل a^2a، که ما آن رابه صورت a^3 می‌نویسیم، هم باشد. به‌طورکلی این زیر گروه باید شامل a^n، که نتیجهٔ محاسبهٔ حاصلضرب a باخودش به‌تعداد n دفعه است، به‌ازای هرعدد طبیعی n، باشد. (درنمادگذاری جمعی این عضورابه‌صورت na می‌نویسیم.) این توانهای طبیعی a مسلماً مجموعه‌ای راتشکیل می‌دهندکه نسبت به عمل گروه بسته‌است. بااین وجود ممکن است این مجموعه شامل‌معکوس a نباشد. البته هرزیر گروه شامل a باید شامل a^{-1} ودرنتیجه شامل $a^{-1}a^{-1}$، که به صورت a^{-2} نوشته می‌شود، وبه‌طور کلی شامل هر a^{-m}، $m \in \mathbf{Z}^+$، نیزباشد. همچنین باید شامل عضو

همانی $e=aa^{-1}$ هم باشد. به خاطر تشابه نماد، قرارمی گذاریم که a^0 همان e باشد. به‌طور خلاصه، نشان دادیم که اگر زیرگروهی از G شامل a باشد باید، به‌ازای هر عدد صحیح m، شامل a^m (یا ma در حالت گروههای جمعی) هم باشد. یعنی، هرزیر گروه شامل a باید شامل $\{a^n|n\in \mathbf{Z}\}$ نیز باشد. توجه داشته باشید، لزومی ندارد که این توانهای a^n متمایز باشند. برای مثال، در گروه V ازمثال ۲.۳،

$$a^2=e\ ،\ a^3=a\ ،\ a^4=e\ ،\ a^{-1}=a\ ،\ \text{وغیره}.$$

مشاهدهٔ این که قانون معمولی توانها، یعنی به‌ازای هردوعدد صحیح m و n، $a^m a^n=a^{m+n}$، برقراراست سهل است. اگر $n\in \mathbf{Z}^+$ و m، مطلب بدیهی است. برای حالات دیگربا یك مثال آن را روشن می‌سازیم.

$$a^{-2}a^5=a^{-1}a^{-1}aaaaa=a^{-1}(a^{-1}a)aaaa=a^{-1}aaaa$$
$$=(a^{-1}a)aaa=aaa=a^3\ .$$

جزئیات خسته‌کنندهٔ اثباتی دقیق برای حالت کلی رابه دانشجویی که به خستگی وقتی نمی گذارد واگذارمی کنیم. ما تاحدود زیادی قضیه بعد را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۲.۳ فرض کنیم G یك گروه باشد و $a\in G$. دراین صورت

$$H=\{a^n|n\in \mathbf{Z}\}$$

زیر گروهی از G است و کوچکترین زیر گروه G شامل a است، بدین معنی که هر زیر گروه شامل a شامل H هم هست.[1]

برهان. سه شرطی راکه برای زیر گروه بودن یك مجموعه درقضیهٔ ۱.۳ بیان کردیم امتحان می کنیم. چون به‌ازای هر r و s از $\mathbf{Z}$، $a^r a^s=a^{r+s}$، ملاحظه می کنیم که حاصلضرب هردوعضو H به H تعلق دارد. همچنین $e=a^0\in H$، ونیزبرای هر a^r از H، بدیهی

---

۱. ممکن است مواردی پیش بیایند که باید بین اصطلاحات مینیمال و کوچکترین وقتی که درمورد زیرمجموعه‌های واجد شرایطی‌خاص ازیك مجموعه به‌کارگرفته شوند تمیزقایل شد. زیر مجموعهٔ H نسبت بدان خاصیت مینیمال است اگر H دارای آن خاصیت باشد وهیچ زیرمجموعهٔ K از H، $K\neq H$، دارای آن خاصیت نباشد. اگر H واجد خاصیت باشد وبه‌ازای هرزیر مجموعهٔ واجدآن خاصیت مانند K، $H\subseteq K$، آنگاه H کوچکترین زیرمجموعهٔ واجد آن خاصیت است. ممکن است زیرمجموعه‌های مینیمال بسیاری وجود داشته باشد اما فقط یك کوچکترین زیرمجموعه می‌تواند وجود داشته‌باشد. برای روشن‌شدن، $\{e,a\}$، $\{e,b\}$ و $\{e,c\}$ همه زیرگروههای نابدیهی مینیمال ازگروه V هستند. (شکل ۱.۳ ملاحظه شود.) اما، V کوچکترین زیرگروه نابدیهی ندارد.

است که $a^{-r} \in H$ و $a^r a^{-r} = a^0 = e$. بنابراین شرایط برقرارند و $H \leqslant G$.

بحث قبل از بیان صورت قضیه نشان می‌دهد که هرزیرگروهی از G که شامل a باشد باید شامل H هم باشد. بنابراین H کوچکترین زیرگروه شامل a است. □

تعریف زیرگروه H مذکور درقضیهٔ ۲.۳ را زیرگروه G تولید شده به وسیلهٔ a می‌نامیم و آن را به صورت $\langle a \rangle$ می‌نویسیم.

تعریف درصورتی که $G = \langle a \rangle$ آنگاه عضو a از G گروه G را تولید می‌کند، ویك مولدآن است. گروه G دوری است درصورتی که عضوی از G وجود داشته باشد که G را تولید کند.

مثال ۳.۳ فرض کنیم $\mathbf{Z}_۴$ و V گروههای مذکور درمثال ۲.۳ باشند. گروه $\mathbf{Z}_۴$ دوری است وهریك از ۱ و ۳ یك مولدآن هستند، یعنی

$$\langle ۱ \rangle = \langle ۳ \rangle = \mathbf{Z}_۴ .$$

اما، V دوری نیست، چون $\langle a \rangle$ ، $\langle b \rangle$ و $\langle c \rangle$ هریك متشکل ازدوعضواست و زیرگروهی واقعی از V است. البته $\langle e \rangle$ زیرگروه بدیهی یك عضوی است. □

مثال ۴.۳ گروه $\mathbf{Z}$ تحت جمع، گروهی دوری است. هردو ۱ و ۱ — مولدهای گروه هستند. □

مثال ۵.۳ گروه $\mathbf{Z}$ تحت جمع را در نظرمی گیریم و $\langle ۳ \rangle$ رامحاسبه می کنیم. دراینجا نمادگذاری، جمعی است و $\langle ۳ \rangle$ باید شامل

$$۳, \quad ۳+۳=۶, \quad ۳+۳+۳=۹, \quad \cdots$$

$$۰, \quad -۳, \quad (-۳)+(-۳)=-۶, \quad (-۳)+(-۳)+(-۳)=-۹, \cdots$$

باشد. به عبارت دیگرزیرگروه دوری تولیدشده به‌وسیلهٔ ۳ تشکیل‌می‌شوداز تمام مضربهای مثبت، منفی وصفراز ۳. این زیرگروه به صورت $۳\mathbf{Z}$ ونیز بـه صورت $\langle ۳ \rangle$ نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب زیرگروه دوری $\langle n \rangle$ از $\mathbf{Z}$ رابـه صورت $n\mathbf{Z}$ هـم می‌نویسند. ملاحظه کنید که $۶\mathbf{Z} < ۳\mathbf{Z}$. □

تمرین

۱.۳ تعیین کنید از زیرمجموعه‌های ذیل ازمجموعهٔ اعداد مختلط ، کدام تحت جمع زیر گروهی از گروه $\mathbf{C}$ ازاعداد مختلط تحت جمع است.

ا) $\mathbf{R}$ ب) $\mathbf{Q}^+$ ج) $7\mathbf{Z}$

د) مجموعهٔ $i\mathbf{R}$ متشکل ازاعداد موهومی محض و ۰،

ه) مجموعهٔ $\pi\mathbf{Q}$ متشکل ازمضربهای گویای π،

و) مجموعهٔ $\{\pi^n | n \in \mathbf{Z}\}$.

۲.۳ گروههای ذیل‌مفروضند. فهرست کاملی ازتمام روابط هر گروه‌به عنوان زیر گروهی از یکی ازگروههای داده شده را ارائه کنید.

$G_1 = \mathbf{Z}$ تحت جمع

$G_2 = 12\mathbf{Z}$ تحت جمع

$G_3 = \mathbf{Q}^+$ تحت ضرب

$G_4 = \mathbf{R}$ تحت جمع

$G_5 = \mathbf{R}^+$ تحت ضرب

$G_6 = \{\pi^n | n \in \mathbf{Z}\}$ تحت ضرب

$G_7 = 3\mathbf{Z}$ تحت جمع

$G_8 =$ مجموعهٔ تمام مضارب صحیح ۶ تحت جمع

$G_9 = \{6^n | n \in \mathbf{Z}\}$ تحت ضرب

۳.۳ حداقل پنج عضو ازهریك ازگروههای دوری زیر را بنویسید

ا) $25\mathbf{Z}$ تحت جمع

ب) $\{(\frac{1}{2})^n | n \in \mathbf{Z}\}$ تحت ضرب

ج) $\{\pi^n | n \in \mathbf{Z}\}$ تحت ضرب .

۴.۳ ازگروههای زیر کدام دوری هستند ؟ تمام مولدهای هرکدام را که دوری است بنویسید.

$G_1 = \langle \mathbf{Z}, + \rangle \quad G_2 = \langle \mathbf{Q}, + \rangle \quad G_3 = \langle \mathbf{Q}^+, \cdot \rangle \quad G_4 = \langle 6\mathbf{Z}, + \rangle$

$G_5 = \langle \{6^n | n \in \mathbf{Z}\}, \cdot \rangle$

$G_6 = \langle \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbf{Z}\}, + \rangle$

۵.۳ جدول گروه $\mathbf{Z}_4$ ازمثال ۲.۳ رادرنظربگیرید.

جدول ۵.۳

$Z_۶$:

+	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۲	۲					
۳	۳					
۴	۴					
۵	۵					

ا) بامقایسه، جدول ۵.۳ راطوری‌کامل کنید که یك گروه دوری $Z_۶$ متشکل از ۶ عضو به دست آید. (نیازی به‌اثبات شرکتپذیری نیست.)

ب) هریك از زیر گروههای ⟨۱⟩ ، ⟨۲⟩ ، ⟨۳⟩ ، ⟨۴⟩ و ⟨۵⟩ ازگروه $Z_۶$ مذکور در بند (ا) رامحاسبه کنید.

ج) چه اعضایی، مولدی برای گروه $Z_۶$ مذکور دربند (ا) هستند؟

۶.۳+ نشان دهیدکه اگر H و K زیرگروههایی ازگروهی آبلی چون G باشند، آنگاه $\{hk|h \in H, k \in K\}$ زیرگروهی از G است.

۷.۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیررا تعیین کنید.

— ا) در هرگروه قانون شرکتپذیری برقراراست.

— ب) ممکن است‌گروهی هم باشدکه درآن قانون حذف برقرارنباشد.

— ج) هرگروه، زیرگروهی ازخودش است.

— د) هرگروه دقیقاً دو زیرگروه غیرواقعی دارد.

— ه) در هرگروه دوری، هرعضو یك مولد است.

— و) هنوز دراین متن مثالی ازگروهی ناآبلی ارائه نشده‌است.

— ز) هرمجموعه ازاعدادکه تحت جمع گروه باشد، تحت ضرب نیزگروه است.

— ح) یك زیرگروه را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ای ازیك گروه تعریف کرد.

— ط) $Z_۴$ یك‌گروه دوری است.

— ی) هرزیرمجموعهٔ یك‌گروه تحت عمل القایی یك زیرگروه است.

۸.۳ نقص استدلال زیررا پیدا کنید: « شرط (۲) ازقضیهٔ ۱.۳ زاید است، چون می‌توان آن را از (۱) و (۳) به دست آورد. فرض کنیم $a \in H$ ، دراین صورت بنابه (۳) ، $a^{-1} \in H$ وبنابه (۱)، $aa^{-1} = e$ عضوی از H است وازاینجا (۲) نتیجه می‌شود. »

۹.۳ نشان دهید که هرزیرمجموعهٔ ناتهی H از گروهی چون G یك زیرگروه G است اگروفقط اگربرای هر a و b از H، $ab^{-1} \in H$. (این یکی‌از محکهای فشرده‌تری است که قبل ازقضیهٔ ۱.۳ بدان اشاره شد.)

۱۰.۳ ثابت کنید که هر گروه دوری باتنهایك مولد، حداکثردوعضودارد.

۱۱.۳ ثابت کنید که اگر G گروهی آبلی باعضوهمانی e باشد، آنگاه مجموعهٔ H متشکل ازتمام عضوهایی چون x از G که درمعادلهٔ $x^2 = e$ صدق می‌کنند یك زیرگروه G است.

۱۲.۳ تمرین ۱۱.۳ رادرحالت کلی که H مجموعهٔ تمام جوابهای x ازمعادلهٔ $x^n = e$ در گروهی آبلی چون G باعضوهمانی e، به‌ازای عددطبیعی ثابتی مانند n، باشد تکرار کنید.

۱۳.۳ نشان دهید که اگر a عضوی ازگروه متناهی G باعضوهمانی e باشد آنگاه عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $a^n = e$.

۱۴.۳ فرض کنیم زیرمجموعهٔ ناتهی‌ومتناهی H از گروه G تحت عمل G بسته‌باشد. ثابت کنید که H یك زیر گروه G است.

۱۵.۳ فرض کنیم G یك گروه و a عضوثابتی از G باشد. نشان دهید که

$$H_a = \{x \in G | xa = ax\}$$

زیرگروهی از G است.

۱۶.۳ به‌عنوان تعمیم تمرین۱۵.۳، فرض کنیم S زیرمجموعهٔ دلخواهی ازگروه G باشد.
ا) نشان دهید که $H_s = \{x \in G | \forall s \in S\ (sx = xs)\}$ زیر گروهی از G است.
ب) باتوجه به‌بند (ا)، زیرگروه H_G مرکز G است. ثابت کنید که H_G گروهی آبلی‌است.

۱۷.۳ فرض کنید H زیرگروهی ازگروهی چون G باشد. به‌ازای a و b از G، فرض کنید $a \sim b$ اگروفقط‌اگر $ab^{-1} \in H$. نشان دهید که $\sim$ یك نسبت هم‌ارزی در G است.

۱۸.۳ به‌ازای هردو مجموعهٔ H و K، مقطع H و K که به‌صورت $H \cap K$ نوشته می‌شود عبارت است از

$$H \cap K = \{x | x \in H,\ x \in G\}.$$

نشان دهید که اگر $H \leqslant G$ و $K \leqslant G$ آنگاه $H \cap K \leqslant G$.

۱۹.۳ بایك مثال، نشان دهید که درگروهی چون G باعضوهمانی e معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 = e$ می‌تواند بیش از دوجواب هم داشته باشد.

۴

جایگشت I

۱.۴ تابع و جایگشت

دراین فصل وفصل بعد، گروههایی را مطالعه می‌کنیم که اعضای آنها اشیایی‌هستند موسوم به جایگشت. این گروهها اولین مثال از گروههایی راکه آبلی نیستند به‌ما عرضه می‌کنند. درواقع، دریکی ازفصلهای آتیه نشان خواهیم دادکه هرگروه از لحاظ ساختاری همانند گروهی ازجایگشتهاست. متأسفانه، این نتیجه، که بسیار توانا هم به نظر می‌رسد، استفادهٔ چندانی برای‌ما دربرندارد.

شما احتمالا بامفهوم جایگشتی ازیك مجموعه به‌معنی تجدیدآرایش اعضای آن‌آشنا هستید. بنابراین برای‌مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، یك تجدیدآرایش‌اعضا می‌تواند به‌صورتی که درشکل ۱.۴ دیده و به‌نظم جدید $\{۴,۲,۵,۳,۱\}$ منجر می‌شود عرضه‌گردد. می‌توان نمودارشکل ۱.۴ را به‌عنوان تعریف‌یك نگاشت درنظر گرفت‌که هرعضوستون سمت چپ را به‌عضو منحصربه‌فردی (اما نه‌لزوماً متفاوت) ازهمان اعداد می‌برد. بنابراین، ۱ به ۴ برده می‌شود، ۲ به ۲ نگاشته می‌شودونظایرآن. علاوه‌براینها، برای این‌که جایگشت باشد، این نگاشت باید طوری باشدکه درستون سمت راست، هرعضویك وفقط یك‌بارظاهرشود. مثلا، نمودارشکل ۲.۴ یك جایگشت را تعریف نمی‌کند، برای این‌که درسمت راست ۳ دوبار دیده می‌شود و ۱ اصلا دیده نمی‌شود. مایك جایگشت را به‌عنوان چنین نگاشتی تعریف خواهیم‌کرد. به‌هرحال، این مفهوم‌کلی که به‌هرعضو ازیك مجموعه عضوی ازهمان مجموعه، یا احیاناً ازمجموعه‌ای دیگر، منسوب شودآنقدردرکارما پیش می‌آیدکه ابتدا تعریف جداگانه‌ای برای آن ارائه می‌کنیم. این مفهوم تابع است، مفهومی‌که قبلا هم‌باآن مواجه شده‌اید.

۱ ⟶ ۴	۱ ⟶ ۳
۲ ⟶ ۲	۲ ⟶ ۲
۳ ⟶ ۵	۳ ⟶ ۴
۴ ⟶ ۳	۴ ⟶ ۵
۵ ⟶ ۱	۵ ⟶ ۳

شکل ۱.۴ **شکل ۲.۴**

تعریف یك تابع یا نگاشت ϕ از مجموعه‌ای چون A بتوی مجموعه‌ای چون B قاعده‌ای است که به‌هرعضو a از A درست یك‌عضو از B رامنسوب‌می کند. دراین صورت می گوییم که ϕ عضو a را به b می‌نگارد و نیز مجموعهٔ A را بتوی B می‌نگارد .

نماد مرسوم برای بیان این‌که ϕ عضو a را به b می‌نگارد عبارت است از

$$\phi(a)=b.$$

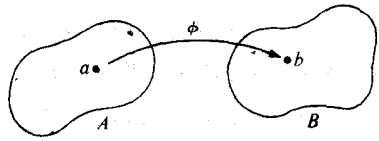
لیکن، ما معمولا نماد

$$a\phi=b$$

را به‌کارخواهیم برد. در متون، نماد $a^{\phi}=b$ نیز دیده می‌شود. عضو b **تصویر** a **تحت** ϕ نامیده می‌شود. این مطلب که ϕ مجموعهٔ A را بتوی B می‌نگارد و به‌طور صوری به‌شکل زیر نوشته می‌شود

$$\phi: A \longrightarrow B .$$

تجسم یك تابع با کمك شکل ۳.۴ ممکن است برای دانشجویان مفید باشد. برای بیان این‌که ϕ عضو a را به b می‌نگارد، در بین سه نماد ارائه شدهٔ بعد از تعریف، دانشجویان در درسهای قبلی خود $\phi(a)=b$ را دیده‌اند. جبردانها به دلیل ذیل هرروز بیش‌ازپیش‌نمادهای «$a\phi=b$» و «$a^{\phi}=b$» را به‌کارمی‌برند. اگر ϕ و ψ توابعی‌باشند که $\phi: A\longrightarrow B$ و $\psi: B\longrightarrow C$، آنگاه به‌طورطبیعی تابعی وجود دارد که طبق شکل ۴.۴ A



شکل ۳.۴

را بتوی C می‌نگارد. بدین معنی که، با استفاده از ϕ و ψ ازطریق B می‌توان از A به C رسید. این تابع که A را بتوی C می‌نگارد تابع مرکب متشکل از ϕ و به‌دنبال آن ψ می‌باشد. با استفاده از نماد مرسوم، $\phi(a)=b$ و $\psi(b)=c$، بنابراین

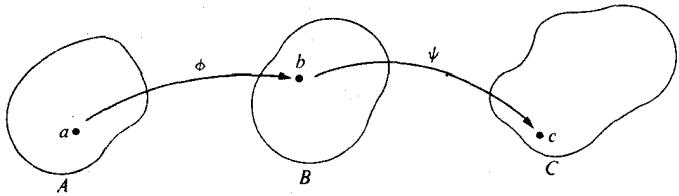
$$\psi(\phi(a))=c$$

وازاینروتابع مرکب به‌صورت $\phi\psi$ نمایش داده می‌شود. نماد $\phi\psi$، برای تابع مرکب حاصل از ϕ و به‌دنبال آن ψ، باید ازراست به‌چپ خوانده شود. با استفاده از نمادهای جدیدتر، داریم $a\phi=b$ و $b\psi=c$ وبنابراین

$$a(\phi\psi)=(a\phi)\psi=c$$

یا $a^{\phi}=b$ و $b^{\psi}=c$ ودرنتیجه

$$a^{(\phi\psi)}=(a^{\phi})^{\psi}=c.$$



شکل ۴.۴

بنابراین تابع مرکب با این نمادها $\phi\psi$ است و ازچپ به‌راست خوانده می‌شود. پیشنهاد می‌کنیم دانشجویان هریك ازنمادهای «$a\phi=b$» و «$a^{\phi}=b$» را به‌صورت «تصویر a توسط ϕ می‌شود b» بخوانند. ملاحظه می‌کنید که تمام این تفصیلات دربارهٔ مفاهیم موردنظرنیست، بلکه دربارهٔ نمادگذاری است. درهرصورت، انتخاب بدی از نمادگذاری می‌تواند لطمهٔ بزرگی به‌پیشرفت نظریهٔ ریاضی بزند.

با بازگشت به جایگشتها، ملاحظه می‌کنیم که شکل ۲.۴ معرف تابعی است از $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ بتوی خودش. ولی‌ما نمی‌خواهیم این نوع توابع را جایگشت بنامیم. ما می‌خواهیم توابعی را انتخاب کنیم که به هر عضو مجموعه دقیقاً یك عضو نگاشته شود. مجدداً، برای حالتی عمومیتر اصطلاحی وجود دارد.

تعریف یك تابع ازمجموعه‌ای چون A بتوی مجموعه‌ای چون B یك به یك نامیده می‌شود درصورتی که به‌هرعضو B حداکثریك عضو A نگاشته شود و برو نامیده می‌شود هرگاه به‌هرعضو B حداقل یك عضو A نگاشته شود.

با استفاده ازشکل ۳.۴، تابع $\phi: A\longrightarrow B$ یك به‌یك است درصورتی که به‌هرعضو B حداکثر یك پیکان وارد شود. برای اینکه بگوییم ϕ برو است باید به‌هرعضو از B

حداقل یك پیکان وارد شود. چون عموماً احتیاج داریم ثابت کنیم که تابع بخصوصی یك به‌یك یا برو یا واجد هردوشرط است، ارزش دارد که فن اثبات هریك را بیان کنیم.

۱. برای اثبات این که ϕ یك‌به‌یك است نشان می‌دهیم که از $a_1\phi = a_2\phi$ نتیجه می‌شود $a_1 = a_2$.

۲. برای اثبات این‌که ϕ برو است نشان می‌دهیم که برای هر b از B عضوی چون a از A هست به‌طوری‌که $a\phi = b$.

سرانجام، خاطرنشان می‌کنیم که برای تابع ϕ، $\phi : A \to B$، مجموعهٔ A **حوزهٔ تعریف** ϕ، مجموعهٔ B **حوزهٔ مقادیر** ϕ و مجموعهٔ $A\phi = \{a\phi | a \in A\}$ **تصویر** A **تحت** ϕ نامیده می‌شود.

چون درمورد جایگشتها، می‌خواهیم که هرعضو A تصویرحداکثریك عضو وحداقل یك عضو از A باشد، به‌تعریف زیرمی‌رسیم.

تعریف یك جایگشت از مجموعهٔ A عبارت است ازتابعی از A بتوی A که هم یك‌به‌یك و هم برو باشد. به‌عبارت دیگر، یك جایگشت از A تابعی است یك‌به‌یك از A بروی A.

ما گاهی این مطلب راکه ϕ یك تابع یك‌به‌یك وبرو است به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$\phi : A \xrightarrow[\text{برو}]{1-1} B .$$

ازشما خواسته می‌شودکه باصرف کمی وقت، سعی کنید این مفاهیم را بفهمید. این کار، مطالب درطول درس را برایتان ساده‌تر خواهدکرد. گرچه این اصطلاحات هنوز هم مرسوم هستند ولی اصطلاحات دیگری روزبروز به‌وسیلهٔ شاگردان ن. بوربا کی متداول‌تر می‌شوند. بااین‌که ما این اصطلاحات را به‌کارنخواهیم برد، آنها را در اینجا ارائه می‌کنیم تا اگر درمتون دیگر بدانها برخوردکردید معانی آنها رابفهمید. برحسب اصطلاحات جدید نگاشت یك به‌یك **انژکسیون**، نگاشت برو **سورژکسیون** ونگاشتی که‌هم یك به‌یك وهم برو باشد **بیژکسیون** نامیده می‌شوند.

۲.۴ گروههای جایگشتها

به‌طورطبیعی عملی دوتایی، موسوم به‌ضرب جایگشتها، درمجموعهٔ جایگشتهای یك‌مجموعه تعریف می‌شود. فرض‌کنیم A یك مجموعه و σ و τ جایگشتهایی از A باشند، بنابراین σ و τ هردوتوابعی یك به‌یك هستندکه A را برروی A می‌نگارند. تابع مرکب $\sigma\tau$، به‌مصداق شکل ۴.۴ بافرض $B = C = A$، $\phi = \sigma$ و $\psi = \tau$ نگاشتی است از A بتوی A. اکنون $\sigma\tau$ جایگشتی از A است‌هرگاه یك‌به‌یك وبروی A باشد. مانماد نوشتن تابع در

سمت راست متغیر را به کار می‌بریم و بنابراین $\sigma\tau$ را از چپ بـه راست می‌خوانیم. ابتدا نشان می‌دهیم که $\sigma\tau$ یك به‌یك است. اگر

$$a_1(\sigma\tau)=a_2(\sigma\tau)$$

آنگاه

$$(a_1\sigma)\tau=(a_2\sigma)\tau\ .$$

باتوجه به‌این که τ یك به‌یك است پس $a_1\sigma=a_2\sigma$. اما، چون σ یك به‌یك است، $a_1=a_2$. بنابراین $\sigma\tau$ یك به‌یك است. برای اثبات این که $\sigma\tau$ بروی A است، فرض کنیم a عضوی از A باشد. باتوجه به‌این که τ بروی A است پس عضوی چون a' از A وجود دارد که $a'\tau=a$. باتوجه به‌این که σ بروی A است، عضو a'' از A هم هست به‌طوری که $a''\sigma=a'$. پس

$$a=a'\tau=(a''\sigma)\tau=a''(\sigma\tau)$$

وبنابراین $\sigma\tau$ بروی A است.

برای روشن شدن، فرض کنیم که

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

و σ جایگشت داده شدهٔ درشکل ۱.۴ باشد. σ را با نماد متداول‌تر زیر نشان می‌دهیم.

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

ازاینرو $1\sigma=4$ ، $2\sigma=2$ وغیره. فرض کنیم

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

دراین صورت

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

برای مثال

$$1(\sigma\tau)=(1\sigma)\tau=4\tau=2\ .$$

اکنون نشان می‌دهیم که گردآیهٔ تمام جایگشتهای مجموعه‌ای ناتهی چون A باعمل ضرب جایگشتی تشکیل یك گروه می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۴ فرض‌کنیم A مجموعه‌ای ناتهی و S_A گردآیهٔ متشکل ازتمام جایگشتهای A باشد. دراین صورت S_A باعمل ضرب جایگشتی یك گروه است.

برهان. سه اصل موضوع داریم که باید امتحان شوند. باتوجه به این‌که هرجایگشت یك تابع است، برای نشان دادن این‌که برای هرسه جایگشت σ ، τ و μ داریم

$$(\sigma\tau)\mu=\sigma(\tau\mu),$$

کافی است ثابت‌کنیم که تعداد هردوجایگشت طرفین تساوی بالا به‌ازای هرعضو a از A باهم برابرند. به عبارت دیگر باید نشان دهیم که برای هر a از A

$$a[(\sigma\tau)\mu]=a[\sigma(\tau\mu)].$$

می‌دانیم که

$$a[(\sigma\tau)\mu]=[a(\sigma\tau)]\mu=[(a\sigma)\tau]\mu=(a\sigma)(\tau\mu)=a[\sigma(\tau\mu)].$$

یعنی که $(\sigma\tau)\mu$ و $\sigma(\tau\mu)$ هرعضو a از A را بـه همان $[(a\sigma)\tau]\mu$ می‌نگارند واز اینرو باهم برابرند. باتوجه به این کـه دراین استدلال ازیك به یك وبرو بودن جایگشتها استفاده‌نکردیم، پس درحقیقت اثبات کرده‌ایم کـه ترکیب توابع شرکتپذیر است. به هرحال گ۱ برقراراست.

جایگشت ι ، که به‌ازای هر a از A ؛ $a\iota=a$ ، بداهتاً نقش عضوهمانی را دارد؛ بنابراین گ۲ نیز برقراراست.

برای جایگشتی σ، σ^{-1} راجایگشتی تعریف می‌کنیم که جهت نگاشت σ رامعکوس می‌سازد، یعنی $a\sigma^{-1}$ عضو a' از A است که به‌ازای آن $a=a'\sigma$. وجود دقیقاً یك چنین عضو a' نتیجهٔ یك به‌یك‌بودن‌وبرو بودن σ به‌عنوان یك‌تابع است (تمرین ۱۸.۴ را ببینید). بدیهی است که همواره

$$a\iota=a=a'\sigma=(a\sigma^{-1})\sigma=a(\sigma^{-1}\sigma)$$

وهمچنین

$$a'\iota=a'=a\sigma^{-1}=(a'\sigma)\sigma^{-1}=a'(\sigma\sigma^{-1}).$$

پس هردو $\sigma^{-1}\sigma$ و $\sigma\sigma^{-1}$ برابربا ι هستند. بنابراین گ۳ برقراراست. □

درتعریف یك جایگشت‌لزومی برمتناهی بودن مجموعهٔ A وجود نداشت. اما، اغلب مثالهای ما درمورد گروه جایگشتها مربوط به جایگشت مجموعه‌های متناهی خواهد بـود. بدیهی است‌که اگر A و B به‌تعداد مساوی عضوداشته‌باشند آنگاه گروه تمام جایگشتهای A ازلحاظ ساختاری مانندگروه جایگشتهای B خواهد بود. هرگروه را می‌توان تنها بـا تغییرنام اعضا ، از دیگری به‌دست آورد. این مجدداً مفهوم گروههای ایزومورف است‌کـه درفصل۲ بدان اشاره شد ومبدأ هم دربارهٔ آن بیشترصحبت خواهد شد.

تعریف اگر A مجموعـهٔ متناهی $\{1, 2, \ldots, n\}$ بـاشد ، آنگاه گـروه تمام

جایگشتهای A گروه متقارن روی n حرف است و با S_n نمایش داده می‌شود.

توجه داشته باشید که S_n دارای $n!$ عضو است که

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\cdots(۳)(۲)(۱).$$

۳.۴ دو مثال مهم

مثال ۱.۴ یك مثال جالب برای ما گروه $S_۳$ است با $۳! = ۶$ عضو. فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳\}$. برای هریك ازجایگشتهای A نامی‌ازحروف یونانی بازیروند انتخاب می‌کنیم. دلایل انتخاب این اسامی وسایه زدن جدول بعداً روشن خواهد شد.

$$\rho_۰ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} \qquad \mu_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$\rho_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix} \qquad \mu_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

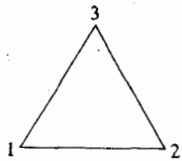
$$\rho_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \qquad \mu_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

جدول ۱.۴

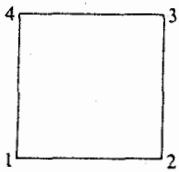
	$\rho_۰$	$\rho_۱$	$\rho_۲$	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$\mu_۳$
$\rho_۰$	$\rho_۰$	$\rho_۱$	$\rho_۲$	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$\mu_۳$
$\rho_۱$	$\rho_۱$	$\rho_۲$	$\rho_۰$	$\mu_۲$	$\mu_۳$	$\mu_۱$
$\rho_۲$	$\rho_۲$	$\rho_۰$	$\rho_۱$	$\mu_۳$	$\mu_۱$	$\mu_۲$
$\mu_۱$	$\mu_۱$	$\mu_۳$	$\mu_۲$	$\rho_۰$	$\rho_۲$	$\rho_۱$
$\mu_۲$	$\mu_۲$	$\mu_۱$	$\mu_۳$	$\rho_۱$	$\rho_۰$	$\rho_۲$
$\mu_۳$	$\mu_۳$	$\mu_۲$	$\mu_۱$	$\rho_۲$	$\rho_۱$	$\rho_۰$

شما می‌توانید امتحان کنید که جدول ۱.۴ صحیح است. توجه کنید که این گروه آبلی نیست! این اولین مثال از این قبیل است. ملاحظه کرده‌ایم که هر گروه با حداکثر ۴ عضو آبلی است. بعداً خواهیم دید که هر گروه ۵ عضوی نیز آبلی است. از اینرو، این «کوچکترین» مثال ممکن از گروههای ناآبلی است. □

تناظری طبیعی وجود دارد بین اعضای S_3 از مثال ۱.۴ وصورتهایی که می‌توان دو نسخه از یك مثلث متساوی‌الاضلاع بارأسهای ۱، ۲ و ۳ (شکل ۵.۴) را برهم نهاد به‌طوری که بر یکدیگر منطبق شوند. بدین‌دلیل، S_3 **گروه** D_3 **از تقارنهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع** نیز می‌باشد. به‌زبان ساده، ρ_i را برای دوران مثلث حول مرکز و μ_i را برای تصویر آینه‌ای نسبت به نیمساز زاویه‌ها به‌کار برده‌ایم. نماد D_3 از نام سومین گروه دو وجهی گرفته شده است. n **مین گروه دو وجهی** D_n گروه تقارنهای یك n ضلعی منتظم می‌باشد.



شکل ۵.۴



شکل ۶.۴

مثال ۲.۴ حال اگر D_4 از جایگشتهای متناظر با صورتهایی که می‌توان دو نسخه از یك مربع بارأسهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را برهم نهاد تشکیل می‌دهیم (شکل ۶.۴ ملاحظه شود). بنابر-این گروه D_4، **گروه تقارنهای مربع** خوانده می‌شود. این گروه، **گروه هشتین** نیز نامیده می‌شود. مجدداً اسامی به ظاهر دلخواهی را برای اعضای گروه انتخاب می‌کنیم وقسمتهایی از جدول را سایه می‌زنیم ولی دلایل آنها را بعداً بیان خواهیم کرد. به زبان ساده، ρ_i را برای دوران، μ_i را برای تصویر آینه‌ای حول عمودمنصف اضلاع و δ_i را برای برگرداندن حول قطرها به‌کار می‌بریم. هشت جایگشت در اینجا مطرح است. فرض کنیم:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

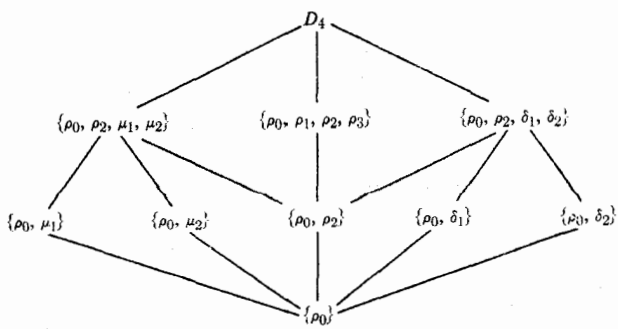
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\qquad \delta_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

شمامی‌توانید درستی جدول D_4 ارائه‌شدهٔ درجدول ۲.۴ را امتحان کنید. توجه‌داشته‌باشید که D_4 هم ناآبلی‌است. این گروه خیلی زیباست. این گروه مثال خوبی‌است برای همهٔ مفاهیمی که درنظریهٔ گروهها ارائه خواهیم کرد. به تقارنهای قشنگ جدول آن توجه کنید.

جدول ۲.۴

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0



شکل ۷.۴ نمودارلاتیس D_4

سرانجام، درشکل ۷.۴ نمودارلاتیس زیرگروههای D_4 را ارائه می‌کنیم. می‌توانید درستی آن را امتحان کنید. □

تمرین

۱.۴ سه جایگشت زیراز S_6 رادرنظربگیرید.

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}، \quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&3&6&5\end{pmatrix}، \quad \mu=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&2&4&3&1&6\end{pmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ

ا) $\sigma\tau$ ب) $\sigma\tau^2$ ج) $\sigma^2\tau$ د) $\tau\sigma^{-2}$ ه) $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

۲.۴ کدام‌یك ازتوابع زیراز $\mathbf{R}$ بتوی $\mathbf{R}$ ، یك جایگشت از $\mathbf{R}$ است؟

ا) $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ باتعریف $f_1(x)=x+1$

ب) $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ باتعریف $f_2(x)=x^2$

ج) $f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ باتعریف $f_3(x)=-x^3$

د) $f_4:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ باتعریف $f_4(x)=e^x$

ه) $f_5:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ باتعریف $f_5(x)=x^3-x^2-2x$

۳.۴ گروه S_3 مذکور درمثال ۱.۴ را درنظربگیرید.

ا) زیرگروههای دوری $\langle\rho_1\rangle$ ، $\langle\rho_2\rangle$ و $\langle\mu_1\rangle$ از S_3 را پیدا کنید.

ب) تمام زیرگروههای S_3 ، واقعی وغیرواقعی ، را پیداکنید ونمودارلاتیس آنها را رسم کنید.

۴.۴ جدول ضرب زیرگروه دوری از S_5 راکه به وسیلهٔ جایگشت

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

تولیدمی‌شود رسم کنید. شش‌عضوخواهد داشت، آنهارا ρ ، ρ^2 ، ρ^3 ، ρ^4 ، ρ^5 و $\rho^6=\rho^0$ بنامید. آیا این گروه با S_3 ایزومورف است؟

+ **۵.۴** فرض کنید A یك مجموعه و a عضوثابتی ازآن باشد. فرض کنید T_a مجموعهٔ تمام جایگشتهایی از A باشدکه $a\sigma=a$. نشان دهیدکه T_a زیرگروهی است از گروه S_A متشکل ازتمام جایگشتهای مجموعهٔ A ، که درقضیهٔ ۱.۴ شرح آن آمد.

۶.۴ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) هرجایگشت، یك تابع یك‌به‌یك است.
— ب) هرتابع یك جایگشت است اگروفقط اگر یك‌به‌یك باشد.
— ج) هرتابع ازیك مجموعهٔ متناهی به‌روی خودش باید یك‌به‌یك باشد.
— د) درمتن هنوز مثالی از گروههای ناآبلی داده نشده است.
— ه) هرزیرگروه ازیك‌گروه آبلی خودآبلی است.
— و) هرعضو یك گروه، زیرگروهی دوری ازآن گروه را تولید می‌کند.
— ز) گروه متقارن S_{10} دارای ۱۰ عضواست.
— ح) گروه متقارن S_3 دوری است.
— ط) به‌ازای هیچ nی، S_n دوری نیست.
— ی) هرگروه با گروهی ازجایگشتها ایزومورف است.

۷.۴ بایك مثال‌نشان دهیدکه هرزیرگروه واقعی‌از گروهی ناآبلی ممکن‌است‌آبلی‌باشد.

۸.۴ برای جایگشتهای σ، τ و μ ازتمرین ۱.۴، مطلوب است محاسبهٔ

ا) $|\langle\sigma\rangle|$، ب) $|\langle\tau^2\rangle|$، ج) σ^{100}، د) μ^{100}.

۹.۴ باقیاس به مثالهای ۱.۴ و ۲.۴ یك n ضلعی منتظم مسطح را بـرای $n \geqslant 3$ درنظر بگیرید. هرصورتی‌که بتواند دونسخه ازچنین n ضلعی را برهم منطبق سازد بـا جایگشت مشخصی ازرأسها متناظراست. مجموعهٔ این جایگشتها، باعمل ضرب جایگشتی گروهی‌است که n **مین‌گروه دووجهی**، D_n، نامیده می‌شود. مرتبهٔ این‌گروه را بیابید. بایك استدلال هندسی، نشان دهیدکه‌این گروه زیرگروهی داردکه درست به‌اندازهٔ نصف تعداداعضای خودگروه عضودارد.

۱۰.۴ مکعبی رادرنظربگیریدکه درست داخل یك جعبهٔ مکعبی‌شکل مشخصی‌قرارمی‌گیرد. مانند مثالهای ۱.۴ و ۲.۴، صورتهایی‌که مکعب را بتوان درجعبه قرارداد باگروه معینی‌از جایگشتهای رأسهای مکعب تناظردارد. این گروه، **گروه‌حرکتهای صلب مکعب** نـامیده می‌شود. (با گروه تقارنهای مکعب، که درفصل ۱۰ بررسی خواهدشد، اشتباه نشود.) این گروه چند عضو دارد؟ با استدلالی هندسی، نشان دهیدکـه این‌گروه حداقل ۳ زیرگروه متمایزاز مرتبهٔ ۴ وحداقل ۴ زیرگروه متمایزاز مرتبهٔ ۳ دارد.

۱۱.۴ نشان دهیدکه برای $n \geqslant 3$، S_n گروهی ناآبلی است.

۱۲.۴ جهت قویترکردن تمرین۱۱.۴، ثابت‌کنیدکه اگر $n \geqslant 3$، آنگاه تنها عضو σ از S_n که به‌ازای هر γ از S_n در $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ صدق می‌کند $\sigma = \iota$، یعنی‌جایگشت همانی‌است.

۱۳.۴ فرض‌کنید A مجموعه‌ای، B زیرمجموعه‌ای ازآن و b عضومعینی از B باشند. ازموارد زیرکدام زیرگروهی از S_A هستند؟

ا) $\{\sigma \in S_A | b\sigma = b\}$ ب) $\{\sigma \in S_A | b\sigma \in B\}$

ج) $\{\sigma \in S_A | B\sigma \subseteq B\}$ د) $\{\sigma \in S_A | B\sigma = B\}$

۱۴.۴ فرض کنید A یك مجموعه باشد و $\sigma \in S_A$. برای هرعضو ثابت a از A، مجموعهٔ

$$\mathcal{O}_{a,\sigma} = \{a\sigma^n | n \in \mathbf{Z}\}$$

مدار a تحت σ نامیده می‌شود. مدار ۱ تحت هریك ازجایگشتهای مثال۱.۴ راپیدا کنید.

۱۵.۴ بامراجعه به‌مفهوم تعریف شدهٔ درتمرین ۱۴.۴، نشان دهیدکه اگر به‌ازای $a, b \in A$، دومدار $\mathcal{O}_{a,\sigma}$ و $\mathcal{O}_{b,\sigma}$ عضومشترکی داشته‌باشند آنگاه $\mathcal{O}_{a,\sigma} = \mathcal{O}_{b,\sigma}$.

۱۶.۴ اگر A مجموعه‌ای باشد، آنگاه زیرگروه H از S_A **روی A متعدی** است در صورتی‌که برای هر a و b از A عضوی چون σ از H وجود داشته باشد به طوری‌که $a\sigma = b$. نشان دهیدکه‌اگر A مجموعه‌ای ناتهی‌ومتناهی باشد، آنگاه زیر گروهی دوری ومتناهی چون H از S_A وجود داردکه $|H| = |A|$ و H روی A متعدی باشد.

۱۷.۴ بامراجعه به‌تمرینهای۱۴.۴ و ۱۶.۴، نشان دهیدکه برای هر σ از S_A، $\langle\sigma\rangle$ روی A متعدی است اگروفقط اگر به‌ازای عضوی مانند a از A، $\mathcal{O}_{a,\sigma} = A$.

تمرین زیر طبیعتی نظریهٔ مجموعه‌ای دارد. از شما خواسته شده‌است چیزی را ثابت کنید که از آن در متن به صورتی شهودی گذشتیم.

۱۸.۴ فرض کنید $\phi : A \to B$. نگاشتی چون $\phi^{-1} : B \to A$ **یك معکوس ϕ** نامیده می‌شود اگر به ازای هر x از A، $(x\phi)\phi^{-1} = x$ و به ازای هر y از B، $(y\phi^{-1})\phi = y$.

ا) نشان دهیدکه ϕ یك بیژکسیون است اگروفقط اگر ϕ معکوسی داشته‌باشد.

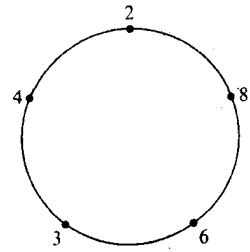
ب) نشان دهیدکه معکوس هر بیژکسیون منحصر به‌فرد است.

۵

جایگشت II

۱.۵ دور و نمادگذاری دوری

نماد دیگری هم برای جـایگشتها وجود دارد که اغلب به‌کار می‌رود. فرض کنیم پنج عدد ۲،۴،۳،۶و۸ به‌فواصل متساوی روی پیرامون یك‌دایره، طبق شکل ۱.۵، جای گرفته باشند. فرض کنیم که دایره به‌اندازهٔ $2\pi/5$ رادیان درخلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران داده



شکل ۱.۵

شود به‌طوری‌که ۲ به‌محلی که قبلا به‌وسیلهٔ ۴ اشغال شده‌بود منتقل شود، ۴ به‌محل اشغالی ۳، و الی آخر. فرض کنیم σ جـایگشتی از S_8 بـاشدکه ۱،۵ و ۷ را ثابت نگهدارد و برباقیماندهٔ اعضا توسط دوران دایره به‌صورتی‌که بیان شد عمل کند. آنگاه

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۱ & ۴ & ۶ & ۳ & ۵ & ۸ & ۷ & ۲ \end{pmatrix}.$$

این جایگشت یك دور به طول ۵ است و نماد جدید فشرده‌تر

$$\sigma=(۲, ۴, ۳, ۶, ۸)$$

را برای آن معرفی می‌کنیم. این نماد جدید نماد دوری نامیده می‌شود. هرعضوی که در $(۲, ۴, ۳, ۶, ۸)$ دیده می‌شود به‌عضو بعدی آن نگاشته می‌شود، مگر آخرین عضو که به اولین عضو. اعضای ظاهرنشدهٔ درنماد، توسط جایگشت ثابت نگهداشته می‌شوند.

تعریف جایگشتی چون σ از یك مجموعهٔ A، یك دور به‌طول n است، هرگاه اعضایی چون $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n از A وجود داشته باشند به‌طوری که

$$a_۱\sigma=a_۲,\ a_۲\sigma=a_۳\cdots,\ a_{n-۱}\sigma=a_n,\ a_n\sigma=a_۱$$

و به‌ازای هر x از A که $x\notin\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، $x\sigma=x$. دراین صورت می‌نویسیم $\sigma=(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$. وقتی ازنماد دوری استفاده می‌کنیم باید مجموعهٔ A ازمضمون واضح باشد.

مثال ۱.۵ اگر $A=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ آنگاه

$$(۱, ۳, ۵, ۴)=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۲ & ۵ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

مشاهده کنید که

$$(۱, ۳, ۵, ۴)=(۳, ۵, ۴, ۱)=(۵, ۴, ۱, ۳)=(۴, ۱, ۳, ۵).\ \square$$

البته، چون دورها هم نوعی‌خاص ازجایگشتها هستند، هردو دور را همچون هردو جایگشت می‌توان‌درهم‌ضرب کرد. اما، حاصلضرب دو دورلزومی‌ندارد که خود یك‌دور باشد.

مثال ۲.۵ فرض کنیم که $(۱, ۴, ۵, ۶)$ و $(۲, ۱, ۵)$ دورهایی از گروه $S_۶$، متشکل از تمام جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشند. دراین‌صورت

$$(۱, ۴, ۵, ۶)(۲, ۱, ۵)=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۴ & ۱ & ۳ & ۲ & ۶ & ۵ \end{pmatrix}$$

و

$$(۲, ۱, ۵)(۱, ۴, ۵, ۶)=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۶ & ۴ & ۳ & ۵ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

هیچ یك ازاین دوجایگشت دورنیستند. $\square$

دورهای گردایه‌ای از دورها **مجزا** هستند در صورتی که هیچ عضوی از A در نماد دو دورمتفاوت آن گردایه دیده نشود؛ یعنی درصورتی که هیچ عضوی از A به‌وسیلهٔ دو دورمتمایز گردایه تغییرجا ندهد. به‌زبان نگاشتها، اگرقرار باشد گردایه‌ای از دورها مجزا باشد، باید هرعضو A به‌وسیلهٔ تمام دورها، مگراحیاناً یك دور موجود درگردایه، ثابت نگهداشته شود.

توافق می‌کنیم که هر دور به طول ۱ جایگشت همانی را نمایش دهد.

می‌خواهیم ثابت کنیم که هرجایگشت از یك‌مجموعهٔ متناهی برابراست باحاصلضرب چند دورمجزا. اثباتی‌راکه ارائه خواهیم کرد، سازنده‌است؛ بدین معنی که مراحل اثبات را می‌توان برای به‌دست آوردن نمایشی ازجایگشت‌داده‌شده به‌صورت‌حاصلضرب‌دورهای‌مجزاهم به‌کاربرد. مامعتقدیم که شماازاین‌اثبات بیشترمطلب خواهیدآموخت تاازیك اثبات‌صوریتر وزیباتراستقرایی. ابتدا بایك مثال روش‌کاررا روشن می‌کنیم.

مثال ۳.۵ جایگشت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۶ & ۵ & ۲ & ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

را درنظرمی‌گیریم. سعی می‌کنیم آن را به‌صورت حاصلضرب دورهای مجزا بنویسیم. نخست، چون ۱ به ۶ برده می‌شود، و ۶ به۱، دور (۱,۶) به‌دست می‌آید. سپس ۲ برده می‌شود به ۵، ۵ برده می‌شود به۳ و۳ برده می‌شود به۲ وازاینجا دور(۲, ۵, ۳) حاصل می‌شود. تااینجا تکلیف همهٔ‌اعضا روشن شد مگر۴که ثابت باقی می‌ماند. پس

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۶ & ۵ & ۲ & ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix} = (۱, ۶)(۲, ۵, ۳).$$

ضرب دورهای مجزا بداهتاً تعویضپذیراست، بنابراین ترتیب‌نوشتن (۱, ۶) و(۲, ۵, ۳) مهم نیست. □

قضیهٔ ۱.۵ هر جایگشت σ از مجموعه‌ای متناهی چون A حاصلضربی است از دورهای مجزا.

برهان. به‌کلیت‌مطلب‌خللی‌واردنمی‌شود اگرفرض‌کنیم $A=\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$. اعضای

$$۱, ۱\sigma, ۱\sigma^{۲}, ۱\sigma^{۳}, \ldots$$

را درنظرمی‌گیریم. چون A متناهی‌است، این‌اعضا همه‌نمی‌توانند متمایز باشند. فرض‌کنیم $۱\sigma^{r}=۱$ اولین جملهٔ این دنباله‌باشد که‌تکراریکی ازجملات قبلی‌است. دراین‌صورت $۱\sigma^{r}=۱$، زیرا اگر $۱\sigma^{r}=۱\sigma^{s}$ و $۰<s<r$ آنگاه خواهیم داشت $۱\sigma^{r-s}=۱$، با $r-s<r$،

که خلاف تعریف r است. قرارمی‌دهیم

$$\tau_1 = (1,\ 1\sigma,\ 1\sigma^2,\ \ldots,\ 1\sigma^{r-1}).$$

ملاحظه می‌شود که τ_1 همان اثر σ را برتمام اعضای A که در این نماد دوری τ_1 دیده می‌شوند دارد.

فرض‌کنیم i اولین عضو A باشدکه دراین نمـاد دوری برای τ_1 نیامده‌است. با تکرارآنچه گفته شد، درمورد دنبالهٔ

$$i,\ i\sigma,\ i\sigma^2,\ \ldots$$

هم به‌دوری چون τ_2 می‌رسیم. اکنون دورهای τ_2 و τ_1 مجزا هستند، چه‌اگردارای عضو مشترکی چون j از A باشندآنگاه τ_1 و τ_2 برابرخواهندبود زیرا هردو دور را می‌توان باکاربرد مکررجایگشت σ باآغاز از j به‌دست‌آورد.

کار را ادامه می‌دهیم، اولین عضو S راکه درنمادهای دوری τ_1 و τ_2 ظاهر نشده است انتخاب می‌کنیم وازاینجا τ_3 را می‌سازیم و قس‌علیهذا. چون A متناهی است، این روند باید بایك τ_mی خاتمه پذیرد. حاصلضرب

$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

همان اثری را برهرعضو A داردکه σ وبنابراین

$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m. \quad \square$$

شما می‌توانید به‌سهولت خودرا متقاعدکنیدکه نمایش یك جایگشت به حاصلضرب دورهای مجزا، قطع نظراز وجود دورهای به‌طول ۱ وترتیب دورها، منحصر به‌فرداست.

۲.۵ جایگشتهای فرد و زوج

تعریف هر دور به‌طول ۲ یك ترانهش نامیده می‌شود.

بنابراین، هرترانهش، تمام‌اعضای مجموعه به‌جزدوعضوراثابت‌نگه‌می‌دارد وهریك‌از این دوعضورا به‌دیگری می‌نگارد. محاسبه نشان می‌دهدکه

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = (a_1,\ a_2)(a_1,\ a_3)\cdots(a_1,\ a_n)$$

بنابراین هردورحاصلضربی‌ازچند ترانهش‌است. سپس‌نتیجهٔ زیرازقضیهٔ ۱.۵ حاصل‌می‌شود.

نتیجه هرجایگشت از یك مجموعهٔ متناهی بـا حداقل دو عضو حاصلضرب تعدادی ترانهش است

به‌زبان ساده، این‌نتیجه بیان می‌کندکه هرتغییر نظم n چیزرا می‌توان با تعویضهای

متوالی دو به‌دوآنها به‌دست آورد.

مثال ۴.۵ به دنبال توضیحات قبل از این نتیجه، ملاحظه می‌کنیم که (۲, ۵, ۳) (۱, ۶) برابر است با حاصلضرب (۲, ۳)(۲, ۵)(۱, ۶) از ترانهشها. □

ملاحظه کرده‌ایم که هر جایگشت مجموعه‌ای متناهی با حداقل دوعضو حاصلضربی است از ترانهشها. این ترانهشها ممکن است مجزا نباشند و چنین نمایشی از جایگشت منحصر به فرد نیست. برای مثال، در ابتدای هر چنین تجزیه‌ای همواره می‌توان دوبار ترانهش (a, b) را اضافه کرد چون $(a, b)(a, b)$ جایگشت همانی است. اما واقعیت این است که تعداد ترانهشهای به‌کار رفته برای نمایش جایگشتی مفروض باید یا همواره فرد باشد یا همواره زوج. این واقعیت مهمی است و اثبات معمولی آن که در ویرایش اول این کتاب هم آمده بود تاحدودی تصنعی است. در ۱۹۷۱ ویلیام ای. میلر[1] اثباتی از آن را منتشر ساخت که به‌نظر ما به‌مراتب بهتر است و آن را در اینجا نقل می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۵ هیچ جایگشتی از یك مجموعهٔ متناهی نمی‌تواند هم به‌صورت حاصلضربی از تعداد زوجی ترانهش و هم به‌صورت حاصلضربی از تعداد فردی ترانهش بیان شود.

برهان. به کلیت مطلب خللی وارد نمی‌شود اگر فرض کنیم که $A=\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $n \geqslant ۲$ تا ترانهش وجود داشته باشد.

نخست حالت خاص جایگشت همانی ι را بررسی می‌کنیم. بدیهی است که ι را می‌توان به‌حاصلضرب تعداد زوجی ترانهش تجزیه کرد، زیرا $\iota=(۱, ۲)(۱, ۲)$. باید نشان دهیم که اگر

$$\iota=\tau_۱\tau_۲\cdots\tau_k \qquad (۱.۵)$$

و هر τ_i یك ترانهش باشد، آنگاه k باید زوج باشد. عدد صحیحی چون m را که در حداقل یکی از ترانهشهای تساوی (۱.۵) آمده باشد انتخاب و فرض می‌کنیم از چپ به راست، τ_j اولین ترانهش شامل m باشد. بدیهی است که $j\neq k$، وگرنه m توسط ι ثابت نگهداشته نخواهد شد. اکنون $\tau_j\tau_{j+۱}$ باید ناچار به‌شکل طرف چپ یکی از تساویهای واضح زیر باشد:

$$\begin{aligned}(m, x)(m, x)&=\iota\\(m, x)(m, y)&=(x, y)(m, x)\\(m, x)(y, z)&=(y, z)(m, x)\\(m, x)(x, y)&=(x, y)(m, y).\end{aligned} \qquad (۲.۵)$$

1. William I. Miller, "Even and Odd Permutations" *Mathematics Associations of Two-Year Colleges, Journal* 5 (1971): 32.

اگر تساوی درست از (۲.۵) را به‌جای $\tau_j\tau_{j+1}$ در (۱.۵) قراردهیم یاازتعداد ترانهشهای موجود در ۱.۵ دوتاکم می‌شود یااولین مورد وقوع m یك مرحله به‌سمت راست حرکت داده می‌شود. این‌کارزا تکرارمی‌کنیم تاسرانجام m ازتساوی (۱.۵) حذف شود؛ به‌خاطر داشته‌باشید به‌حالتی‌نخواهیم رسیدکه اولین وقوع m درترانهش نهایی‌باشد. پس‌بالاخره باید به‌اولین تساوی (۲.۵) برسیم تا m کلا حذف گردد. سپس‌ازA عدد دیگری راکه در صورت خلاصه شدهٔ (۱.۵) ظاهرمی‌شود انتخاب می‌کنیم و با تکرارعمل فوق‌آن عضورا نیزحذف‌می‌کنیم وبه‌این کارادامه می‌دهیم‌تاطرف راست تساوی (۱.۵) به‌صورت ι $u \cdots$ خلاصه‌شود باتوجه بدین‌که تعداد ترانهشها درهرجانشینی یکی ازتساویهای(۲.۵) یاتغییر نمی‌کند یا ۲ تاکم می‌شود ملاحظه می‌کنیم‌که k باید زوج بوده باشد.

اکنون اثبات قضیه بااستفاده ازحالت خاص ι سهل است. فرض‌کنیم که

$$\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_r = \tau'_1\tau'_2 \cdots \tau'_s \ .$$

چون هرترانهش معکوس خودش‌هم هست، نتیجه می‌گیریم که

$$\iota = \sigma\sigma^{-1} = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_r(\tau'_1\tau'_2 \cdots \tau'_s)^{-1} = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_r\tau'_s \cdots \tau'_2\tau'_1 .$$

اکنون حالت خاص نشان می‌دهدکه $r+s$ عددی است زوج وبنابراین r و s یاهردو زوج هستند یاهردوفرد. □

تعریف یك جایگشت ازمجموعه‌ای متناهی زوج یا فرد است برحسب این‌که تعداد ترانهشهای هرتجزیهٔ‌آن به‌حاصلضرب ترانهشها به‌ترتیب زوج یافرد باشد.

۳.۵ گروههای متناوب

ادعا می‌کنیم که‌اگر $n \geqslant 2$ آنگاه تعداد جایگشتهای زوج S_n برابراست باتعداد جایگشتهای فرد S_n ، یعنی S_n به دو دستهٔ متساوی هریك یا $n!/2$ عضوتقسیم می‌شود. برای نشان دادن این‌مطلب، فرض‌کنیم A_n مجموعهٔ جایگشتهای زوج در S_n و B_n مجموعهٔ جایگشتهای فرد در S_n باشد و $n \geqslant 2$. ما به دنبال تعریف تناظری یك به یك بین A_n و B_n هستیم. این دقیقاً همان چیزی است که نشان خواهد داد تعداد اعضای A_n و B_n متساوی هستند.

فرض‌کنیم τ ترانهشی ثابت از S_n باشد. وجود τ از $n \geqslant 2$ نتیجه می‌شود. می‌توانیم فرض‌کنیم $\tau = (1, 2)$. تابعی چون

$$\lambda_\tau : A_n \longrightarrow B_n$$

را باضابطهٔ

$$\lambda_\tau(\sigma) = \tau\sigma$$

تعریف می‌کنیم، بدین معنی‌که σ از A_n به‌وسیلهٔ λ_τ به $(1, 2)\sigma$ نگاشته می‌شود. ملاحظه

کنید که چون σ زوج است، جایگشت $(۱, ۲)\sigma$ به‌حاصلضرب تعدادی‌فرد(عددی زوج + ۱) ازترانهشها تجزیه می‌شود و بنابراین $(۱, ۲)\sigma$ واقعاً بـه B_n تعلق دارد. اگر به‌ازای دو جایگشت σ و μ از A_n داشته‌باشیم $\sigma\lambda_\tau = \mu\lambda_\tau$ آنگاه

$$(۱, ۲)\sigma = (۱, ۲)\mu$$

وچون S_n گروه است، نتیجه‌می‌شود که $\sigma = \mu$. بنابراین λ_τ تابعی‌است یك به‌یك. بالاخره

$$\tau = (۱, ۲) = \tau^{-۱}.$$

پس اگر $p \in B_n$ آنگاه

$$\tau^{-۱}p \in A_n$$

و

$$(\tau^{-۱}p)\lambda_\tau = \tau(\tau^{-۱}p) = p.$$

پس λ_τ بروی B_n است. بنابراین یك تناظر یك‌به‌یك بین A_n و B_n وجود دارد و تعداد اعضای A_n برابر است با تعداد اعضای B_n.

توجه کنید که حاصلضرب دوجایگشت زوج جایگشتی‌است زوج. به‌علاوه، چون $n \geqslant ۲$، A حداقل دوعضوچون a و b داردو $\iota = (a, b)(a, b)$ جایگشت زوجی‌است. بالاخره، اگر σ را به‌صورت حاصلضرب تعدادی تـرانهش بنویسیم، $\sigma^{-۱}$ برابراست با حاصلضرب همان ترانهشها، منتها به‌ترتیب عکس. پس اگر σ جایگشتی زوج باشد $\sigma^{-۱}$ نیززوج است. بامراجعه به‌قضیهٔ ۱.۳، ملاحظه می‌کنیم که قضیهٔ زیررا ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۳.۵ اگر $n \geqslant ۲$ آنگاه گردآیهٔ تمام جایگشتهای زوج هر مجموعهٔ متناهی n عضوی زیرگروهی ازمرتبهٔ $n!/۲$ ازگروه متقارن S_n را تشکیل می‌دهد.

تعریف. زیر گروه S_n متشکل ازتمام جایگشتهای زوج n حرف گروه متناوب A_n روی n حرف نامیده می‌شود.

هردوگروه S_n و A_n بسیاراهمیت دارند. ما متذکرشده‌ایم، هرچندبدون اثبات، که هرگروه متناهی ازلحاظ ساختاری بازیرگروهی از گروه S_n، به‌ازای یك عدد طبیعی n، ایزومورف است. اهمیت گروه A_n هم بعداً معلوم خواهد شد.

تمرین

۱.۵ حاصلضرب دورهای زیرراکه‌جایگشتهایی ازمجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ هستند حساب کنید.

ا) $(۱, ۴, ۵)(۷, ۸)(۲, ۵, ۷)$ ب) $(۱, ۳, ۲, ۷)(۴, ۸, ۶)$

ج) $(۱, ۲)(۴, ۷, ۸)(۲, ۱)(۷, ۲, ۸, ۱, ۵)$

۲.۵ ابتدا هریك ازجایگشتهای زیر از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ را به صورت حاصلضرب دورهای مجزا بنویسید و سپس هریك را به حاصلضرب ترانهشها تجزیه کنید.

ا) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۸ & ۲ & ۶ & ۳ & ۷ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۴ & ۱ & ۸ & ۲ & ۵ & ۷ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۷ & ۲ & ۵ & ۸ & ۶ \end{pmatrix}$

+۳.۵ احکام زیررا درمورد S_n ثابت کنید، $n \geqslant ۲$.

ا) هرجایگشت از S_n را می‌توان به‌صورت حاصلضربی ازحداکثر $n-۱$ ترانهش نوشت.

ب) هرجایگشت‌از S_n راکه یك‌دور نباشد می‌توان به‌صورت حاصلضربی ازحداکثر $n-۲$ ترانهش نوشت.

ج) هرجایگشت فرد از S_n را می‌توان به‌صورت حاصلضربی از $۲n+۳$ ترانهش وهر جایگشت زوج را به‌صورت حاصلضربی از $۲n+۸$ ترانهش نوشت.

۴.۵ کدام یك از جایگشتهای $S_۳$ از مثال ۱.۴ زوج هستند؟ جدول گروه متناوب $A_۳$ را بنویسید.

۵.۵ عضوی چون a از گروه G باعضوهمانی e، **ازمرتبهٔ** r بزرگتراز ۰ نامیده می‌شود درصورتی که r کوچکترین عدد طبیعی باشدکه $a^r = e$. اکنون گروه $S_۸$ ازتمرین ۱.۵ را در نظربگیرید.

ا) مرتبهٔ دور $(۱, ۴, ۵, ۷)$ چند است؟

ب) صورت قضیه‌ای راکه ازقسمت (۱) استنباط می‌شود بنویسید.

ج) مرتبهٔ هریك از $\sigma = (۴, ۵)(۲, ۳, ۷)$ و $\tau = (۱, ۴)(۳, ۵, ۷, ۸)$ چند است؟

د) مرتبهٔ هریك ازجایگشتهای مذکور درتمرین ۲.۵ را، باتوجه به‌تجزیهٔ آن به‌حاصلضرب دورهای مجزا، پیدا کنید.

ه) صورت قضیهٔ مستنبط ازقسمتهای (ج) و (د) را بنویسید. [راهنمایی: کلمات مهمی را که جستجومی‌کنید عبارتند از کوچکترین مضرب مشترك.]

۶.۵ درستی یا نادرستی گزاره‌های ذیل را تعیین کنید.

— ا) هرجایگشت یك دوراست.

— ب) هردور یك جایگشت‌است.

— ج) تعریف جایگشتهای زوج وفرد را می‌توانستیم قبل ازبیان قضیهٔ ۲.۵ هم بیان کنیم.

— د) هرزیر گروه نابدیهی از $S_۹$ که شامل جایگشت فردی باشد شامل ترانهشی‌هم هست.

— ه) $A_۵$ دارای ۱۲۰ عضواست.

— و) به‌ازای هرعدد طبیعی n، گروه S_n دوری نیست.
— ز) A_4 گروهی تعویض‌پذیر است.
— ح) گروه S_7 با آن زیرگروه از S_8 که اعضایش عدد ۸ را ثابت نگه می‌دارند ایزومورف است.
— ط) گروه S_7 با آن زیرگروه از S_8 که اعضایش عدد ۵ را ثابت نگه می‌دارند ایزومورف است.
— ی) جایگشتهای فرد S_8 یك زیرگروه از S_8 را تشکیل می‌دهند.

۷.۵ نشان دهید که برای هرزیرگروه H از S_n، $n \geqslant 2$، یا تمام جایگشتهای H یا دقیقاً نصف آنها زوج هستند.

۸.۵ فرض کنید σ جایگشتی از مجموعهٔ A باشد. می‌گوییم «σ عضو $a \in A$ را **حرکت می‌دهد**» درصورتی که $a\sigma \neq a$. اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد. به وسیلهٔ دور σ به طول n از S_A چند عضو حرکت داده می‌شوند؟

۹.۵ فرض کنید A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. فرض کنیم H مجموعهٔ تمام جایگشتهای σ از S_A باشد که تعدادی متناهی عضو A را حرکت می‌دهند (تمرین ۸.۵ ملاحظه شود). ثابت کنید H زیرگروهی از S_A است.

۱۰.۵ فرض کنید A مجموعه‌ای نامتناهی و K مجموعهٔ تمام جایگشتهای σ از S_A باشد که حداکثر ۵۰ عضو A را حرکت می‌دهند (تمرین ۸.۵ را ملاحظه کنید). آیا K زیرگروهی از S_A است؟ چرا؟

۱۱.۵ با استفاده از استقرا روی تعداد اعضایی که به‌وسیلهٔ σ حرکت داده می‌شوند (تمرین ۸.۵) اثباتی برای قضیهٔ ۱.۵ ارائه کنید که از اثبات داده شدهٔ درمتن جالبتر باشد.

۱۲.۵ گروه S_n را برای $n \geqslant 2$ درنظر بگیرید و فرض کنید σ جایگشت فرد ثابتی از S_n باشد. نشان دهید که هر جایگشت فردی از S_n برابر است با حاصلضرب σ درعضوی از A_n.

۱۳.۵ نشان دهید که اگر σ یك دور باشد، σ^2 نیز، به‌شرط آن‌که طول σ عدد طبیعی فرد باشد، یك دور است.

۱۴.۵ درتعقیب خط فکری که توسط مسألهٔ ۱۳.۵ مطرح شد، عبارت زیر را با شرطی مشتمل بر n و r کامل کنید تا گزارهٔ حاصل یك قضیه باشد:
«اگر σ یك دور به‌طول n باشد، آنگاه σ^r نیز یك دور است اگر و فقط اگر . . .»

۱۵.۵ فرض کنید G یك گروه و a عضو ثابتی از G باشد. نشان دهید که نگاشت $\lambda_a : G \to G$ با تعریف $g\lambda_a = ag$ به ازای $g \in G$، جایگشتی از مجموعهٔ G است.

۱۶.۵ با مراجعه به تمرین ۱۵.۵، نشان دهید که $H = \{\lambda_a | a \in G\}$ زیرگروهی از S_G، گروه تمام جایگشتهای G، است.

٦

گروه دوری

۱.۶ خواص مقدماتی

ازفصل ۳ مطالب زیررا خاطرنشان می‌کنیم.

اگر G یك گروه باشد و a عضوی از G ، آنگاه

$$H=\{a^n|n\in \mathbf{Z}\}$$

زیرگروهی‌از G است (قضیهٔ ۲.۳). این زیر گروه، **زیرگروه دوری G تولیدشده توسط a** می‌باشد. همچنین، به‌ازای گروه مفروض G وعضوی چون a از G اگر

$$G=\{a^n|n\in \mathbf{Z}\}$$

آنگاه a را **مولدی برای G** و $G=\langle a\rangle$ را **دوری** می‌نامیم.

دراین فصل قصد ما این است‌که تمام گروههای دوری وتمام زیر گروههای‌آنها را طبقه‌بندی‌کنیم .

قضیهٔ ۱.۶ هر گروه دوری آبلی است.

برهان. فرض‌کنیم‌که G گروهی دوری و a مولدی ازآن باشد، بنابراین

$$G=\langle a\rangle=\{a^n|n\in \mathbf{Z}\}\cdot$$

اگر g_1 و g_2 دوعضو دلخواه از G باشند ، آنگاه دو عدد صحیح r و s وجود دارند به‌طوری‌که $g_1=a^r$ و $g_2=a^s$. ازاین‌رو

$$g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s . a^r = g_2 g_1$$

وبنابراین G آبلی است. □

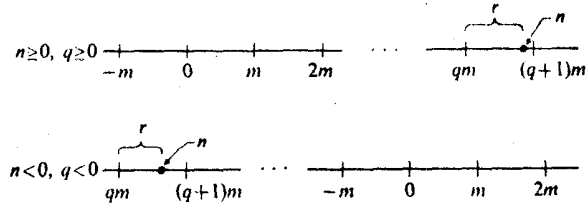
هرچند گروههای دوری آبلی هستند معهذا در گروههای دوری همان نمادگذاری ضربی را برای کارهای کلی خود به‌کارخواهیم برد.

عکس قضیهٔ ۱.۶ درحالت ضعیفتری که خود قضیه‌ای بسیارمهم است برقرارمی‌باشد وبعداً باتفصیل بیشتری موردبحث قرارخواهدگرفت. این مطلب بدین صورت است که هر گروه آبلی « به‌اندازهٔ کافی کوچك » را می‌توان با روش خاصی ازگروههای دوری پدید آورد. بنابراین گروههای دوری درمطالعهٔ گروههای آبلی نقشی بسیار بنیادی دارند. گروههای دوری را می‌توان نوع ابتدایی گروههای آبلی تلقی نمود. انتظارمی‌رود که قسمتی از یك نوع ابتدایی ، خود هم ازنوع ابتدایی باشد. قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که واقعیت همین است . نخست نتیجهٔ ظاهراً واضح ولی بسیار مهمی از نظریهٔ اعداد را نقل می‌کنیم.

لم ۱.۶ (الگوریتم تقسیم برای Z) به‌ازای هر عدد طبیعی m و هر عدد صحیح n، دو عدد صحیح و منحصر به‌فرد q و r وجود دارند به طوری که

$$n = mq + r, \quad 0 \leqslant r < m.$$

برهان. دراینجا به کمك نمودارهای زیرتوضیحی شهودی برای مطلب می‌آوریم . روی محوراعدادحقیقی x ازهندسهٔ تحلیلی‌مضربهای صحیح m ونیزجای n رامشخص می‌کنیم. اکنون، یا n روی یکی از مضربهای m ، مثلا qm ، قرارمی‌گیردکه دراین صورت r می‌تواند صفرگرفته شود و یا این‌که n بین دوتا ازمضربهای m واقع می‌شود. درحالت اخیرفرض‌کنیم qm اولین‌مضرب m درسمت چپ n باشد. دراین صورت r همان است که درشکل ۱.۶ نشان داده‌شده‌است. توجه کنیدکه $0 \leqslant r < m$. با قدری تأمل ملاحظه خواهیدکردکه منحصربه فرد بودن q و r به‌کمك شکل واضح است. □



شکل ۱.۶

قضیهٔ ۲.۶ هر زیر گروه یك گروه دوری، خود دوری است.

برهان. فرض کنیم کـه G یك گروه دوری تولید شده به وسیلهٔ a و H زیرگروهی ازآن‌باشد. اگر $H=\{e\}$، آنگاه $H=\langle e\rangle$ دوری‌است. اگر $H\neq\{e\}$، آنگاه به‌ازای عددی طبیعی‌چون n، $a^n\in H$. فرض کنیم که m کوچکترین عددطبیعی باشدکه $a^m\in H$. ادعا می‌کنیم که $c=a^m$ مولد H است؛ یعنی

$$H=\langle a^m\rangle=\langle c\rangle\,.$$

باید نشان دهیم که هرعضو H توانی است از c. چون $b\in H$ و $H\leqslant G$ به‌ازای عـدد صحیحی مانند n، $b=a^n$. باکمك لم ۱.۶، q و r را پیدا می‌کنیم که

$$n=mq+r,\quad 0\leqslant r<m.$$

اکنون

$$a^n=a^{mq+r}=(a^m)^q\,.\,a^r,$$

بنابراین

$$a^r=(a^m)^{-q}a^n\,.$$

حال، چون $a^n\in H$، $a^m\in H$ و H یك‌گروه است، $(a^m)^{-q}$ و a^n هردوعضو H هستند. بنابراین

$$(a^m)^{-q}a^n\in H\text{، یعنی } a^r\in H.$$

چون m کوچکترین عدد طبیعی بودکـه $a^m\in H$ و $0\leqslant r<m$، باید داشته بـاشیم $r=0$. درنتیجه $n=mq$ و

$$b=a^n=(a^m)^q=c^q$$

وازاین‌رو b توانی است از c. □

به‌دلایلی قضیهٔ ۲.۶ اغلب درامتحانی ازاین درس، درامتحانی شفاهی بـرای درجهٔ فوق لیسانس ونظایرآن، مورد سؤال واقع می‌شود. گرچه این قضیه ساده است، اما، نشان می‌دهدکه آیا دانشجوقدرتی در درك ودر ارائهٔ اثبات‌دارد یا نه. ابتدا توجه کنیدکه چون قضیه مربوط به گروههای دوری است وما عملاً هنوزچیزی دربارهٔ آنها ثابت نکرده‌ایم، پس باید تعریف گروههای دوری مورداستفاده قرار گیرد. می‌خواهید نشان دهیدکه هرزیرگروه یك‌گروه دوری خود دوری است. پس باید تشخیص دهیدکه دوری بودن G بدین معنی است‌که عضوی چون a از G وجود دارد به طوری‌که هرعضو G به‌صورت a^n، $n\in\mathbf{Z}$، می‌باشد ونیزباید بین اعضایی نامرئی عضوی چون c از H بیابیدکه همان نقش a را بـرای H داشته‌باشد. همهٔ اینها تنها از تعریف گروههای دوری حاصل می‌شود. در پیداکردن c است‌که به فراست نیازاست. ولی بدین مناسبت‌که این عضوتقریباً تنها عضو H است‌که شما می‌توانیدآن را برحسب a به‌دست آورید، انتخابی طبیعی دارد. آنگاه باید نشان دهیدکه c به‌دردخوراست؛ یعنی این‌که c زیرگروه H را تولید می‌کند.

همان طوری که درمثالهای ۴.۳ و ۵.۳ تذکرداده شد، $\mathbf{Z}$ تحت جمع دوری است، وبه‌ازای هرعددطبیعی n، مجموعهٔ $n\mathbf{Z}$ متشکل‌ازتمام مضربهای n، تحت جمع زیرگروهی از $\mathbf{Z}$، زیرگروه دوری تولید شده توسط n، است. قضیهٔ ۲.۶ نشان می‌دهد که این زیرگروههای دوری تنها زیرگروههای گروه $\mathbf{Z}$ تحت جمع هستند. این مطلب به صورت نتیجهٔ زیر بیان می‌شود.

نتیجه: زیرگروههای $\mathbf{Z}$ باعمل جمع دقیقاًگروههای $n\mathbf{Z}$ باعمل جمع هستند، $n \in \mathbf{Z}$.

۲.۶ طبقه‌بندی گروههای دوری

فرض‌کنیم که G یك‌گروه دوری بامولد a باشد. دوحالت درنظرمی‌گیریم.

حالت اول. G نامتناهی است، یعنی مرتبهٔ G بینهایت است. دراین حالت ادعا می‌کنیم که برای هیچ دوعدد صحیح ومتمایز h و k اعضای a^h و a^k برابرنیستند. چراکه، اگر $a^h = a^k$ ومثلا $h > k$ آنگاه

$$a^h a^{-k} = a^{h-k} = e,$$

e عضوهمانی است و $h-k > 0$. فرض‌کنیم m کوچکترین عدد طبیعی باشد $a^m = e$ (تشابه بااثبات قضیهٔ ۲.۶ را توجه‌کنید). دراین صورت، ادعا می‌کنیم که تنها اعضای متمایز G عبارتنداز e، a، a^2، ...، و a^{m-1}. فرض‌کنیم $a^n \in G$. بنابه لم ۱.۶ دوعدد صحیح q و r را می‌یابیم که

$$n = mq + r, \quad 0 \leqslant r < m$$

بنابراین

$$a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q \cdot a^r = e^q a^r = a^r$$

و $0 \leqslant r < m$. این بدان معنی است که G متناهی است، خلاف فرض حالت اول. پس دراین حالت همهٔ توانهای a دوبه‌دو متمایز هستند.

فرض‌کنیم که G' گروه دوری نامتناهی دیگری بامولد b باشد. واضح است که با تجدید نامگذاری b^n به a^n گروه G' کاملا شبیه به گروه G خواهد شد؛ یعنی که دو گروه ایزومورف هستند. این‌کار را مجدداً درفصل بعد بادقت بیشتری انجام خواهیم داد. بنابر-این تمام گروههای دوری نامتناهی صرفنظر از نام اعضا و اعمال کاملا شبیه هم هستند. ما گروه $\mathbf{Z}$ تحت جمع را به عنوان الگوی گروههای دوری نامتناهی انتخاب می‌کنیم. تا پایان قسمت I کتاب، منظورمان‌از «گروه $\mathbf{Z}$» همواره «گروه دوری $\mathbf{Z}$ تحت عمل‌جمع» خواهد بود.

مثال ۱.۶ ممکن است غیرعادی بنظر برسد که $\mathbf{Z}$ و $3\mathbf{Z}$، که هر دو تحت عمل

جمع گروه دوری نامتناهی هستند، ازلحاظ ساختاری یکی باشند؛ گرچه $3\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$. ممکن است گفته شود که $1 \in \mathbf{Z}$ ولی $1 \notin 3\mathbf{Z}$، پس چگونه $\mathbf{Z}$ و $3\mathbf{Z}$ ازنظرساختاری یکی هستند. اما مسأله اینجاست که نامها اهمیت ندارند. باتجدید نامگذاری ۱ به۳، ۲ به ۶ و به‌طورکلی n به $3n$، گروه $\mathbf{Z}$ به $3\mathbf{Z}$ به‌عنوان یك گروه جمعی تبدیل می‌شود. □

حالت دوم. G متناهی است. دراین حالت تمام توانهای مثبت مولدی چون a از G نمی‌توانند متمایز باشند، ازاینرو به‌ازای دوعدد طبیعی ومتمایز k و h باید داشته باشیم $a^k = a^h$. به‌دنبال بحث حالت اول، عددی طبیعی مانند m هست به‌طوری که $a^m = e$ و هیچ توان مثبت کوچکتری از a مساوی e نیست. دراین صورت گروه G متشکل است از اعضای e، a، a^2، a^3، ... و a^{m-1}.

چون متداول است که حرف n را برای مرتبهٔ یك گروه متناهی به‌کار می‌برند، لذا درآنچه ذیلا خواهدآمد نامگذاری راعوض می‌کنیم و n رابه جای m به‌کارمی‌بریم.

مثال ۲.۶ خوب است که اعضای $a^0 = e$، a^1، ... و a^{n-1} از یك گروه دوری مرتبهٔ n رابا n نقطهٔ متساوی‌الفاصله در روی دایره‌ای نمایش دهیم (شکل ۲.۶ راملاحظه‌کنید). مکان عضو a^h به‌اندازهٔ hتا ازاین فاصله‌های مساوی درجهت خلاف عقربه‌های ساعت از پایین یعنی جایی که $a^0 = e$ قراردارد دورتراست. برای پیداکردن حاصلضرب a^k در a^h بااستفاده ازشکل، ازنقطهٔ a^h آغازمی‌کنیم وبه‌اندازهٔ k فاصلهٔ اضافی درجهت خلاف عقربه‌های ساعت دورمی‌زنیم. برای‌این‌که از روی محاسبه بدانیم به‌کجا می‌رسیم، q و r راچنان می‌یابیم که

$$h + k = nq + r, \quad 0 \leqslant r < n.$$

nq شمارا درست q بار دور دایره می‌چرخاند وسرانجام شمارا به a^r می‌رساند. □

تعریف فرض کنیم n عدد طبیعی ثابتی و k و h اعدادی صحیح باشند. عددطبیعی r باشرایط

$$h + k = nq + r, \quad 0 \leqslant r < n$$

مجموع h و k به هنگ n نامیده می‌شود.

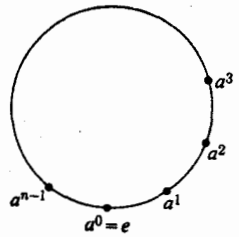
قضیهٔ ۳.۶ مجموعهٔ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ با عمل جمع به هنگ n گروهی دوری است دارای n عضو وبا $\mathbf{Z}_n$ نمایش داده می‌شود.

همنهشتی به‌هنگ n درفصل ۵ موردبحث قرارگرفت. ملاحظه می‌کنیم که اگردر $\mathbf{Z}_n$، $h + k = r$، آنگاه در $\mathbf{Z}$، $h + k \equiv r \pmod{n}$.

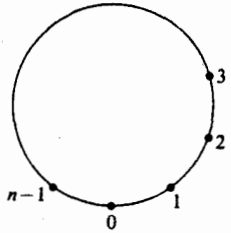
اثبات این قضیه ساده است و برای به‌کاربردن الگوریتم تقسیم به شما ورزیدگی می‌دهد. (تمرین ۸.۶ را ملاحظه‌کنید.) بایستی گ۱، گ۲، و گ۳ رابررسی کنید. این‌کار

را ذهنی انجام دهید. نمودارشکل۳.۶ را، همان طوری که درمثال۲.۶ شرح داده شد، در نظربگیرید. این‌کارحقیقتاً تنها به تغییرنام عضو a^h ازمثال ۲.۶ به h منجرمی‌شود.

بنابراین به‌ازای هرعددطبیعی n، یك گروه دوری ازمرتبهٔ n وجود دارد. درسرتاسر قسمت I کتاب Z_n همان گروه ارائه شدهٔ درقضیهٔ ۳.۶ می‌باشد. درست نظیر گروههای نامتناهی، بدیهی است که اگر G و G' دوگروه دوری n عضوی یابه ترتیب مولدهای a و b باشند آنگاه باتغییرنام b^r به a^r گروه G' عیناً مانند گروه G به‌نظرخواهد رسید؛ یعنی هر دوگروه دوری متناهی هم مرتبه ایزومورف هستند.



شکل ۲.۶



شکل ۳.۶

۳.۶ زیرگروههای گروههای دوری متناهی

اکنون‌که طبقه‌بندی گروههای دوری رابه پایان رساندیم، بـه بررسی زیر گروههایشان می‌پردازیم. نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۶ اطلاع کاملی درباب زیرگروههای گروههای دوری نامتناهی به‌دست ما می‌دهد. اکنون قضیهٔ اساسی مربوط به مولدهای زیرگروههای یك گروه دوری متناهی رابیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۶ فرض کنیم که G گروهی دوری با n عضو و بـا مولدی چون a باشد. اگر $b \in G$ و $b=a^s$ آنگاه b زیرگروهی دوری چون H از G با n/d عضوتولید می‌کند که درآن d بزرگترین مقسوم علیه مشترك (مخفف:بمعم) n و S است.

برهان. این‌که b زیرگروه دوری H از G راتولید می‌کند، ازقضیهٔ ۲.۳ نتیجه می‌شود. تنها، لازم است نشان دهیم که H دارای n/d عضواست. بنابه استدلالی‌که درحالت‌اول فوق داشتیم، تعداد اعضای H برابراست باکوچکترین توان b که عضوهمانی رابه‌دست می‌دهد. حال $b=a^s$ و $b^m=e$ اگروفقط‌اگر $a^{ms}=(a^s)^m=e$، یا اگروفقط اگـر n عدد ms را عادکند. کوچکترین مقدار m که n عدد ms را عاد می‌کند چیست؟ اگر d بزرگترین عددی باشدکه هردو n و s را عادکند، آنگاه درعبارت $n=d\,(n/d)$، عامل d از n، عامل s از ms را هم عاد می‌کند. به جز d هیچ عامل اولی از n/d به وسیلهٔ s جـذب نمی‌شود، زیرا d رابـه عنوان بزرگترین مقسوم علیه مشترك n و s انتخاب کردیم. پس تمام n/d باید توسط m جـذب شود، ازاینروکوچکترین چنین smی،

$m = n/d$ است. □

مثال ۳.۶ گروه $Z_{۱۲}$ بامولدی چون $a = ۱$ را درنظرمی‌گیریم. چون بزرگترین مقسوم علیه مشترك (بمعم) ۳ و ۱۲ برابراست با ۳، پس $۱۲/۳ = ۴$ زیرگروهی با $۳ = ۳ \cdot ۱$ عضو تولید می‌کند. یعنی

$$\langle ۳ \rangle = \{۰, ۳, ۶, ۹\}.$$

چون بمعم ۸ و ۱۲ برابراست با ۴، عضو ۸ زیرگروهی با $۱۲/۴ = ۳$ عضوتولید می‌کند: یعنی

$$\langle ۸ \rangle = \{۰, ۴, ۸\}.$$

چون بمعم ۵ و ۱۲ برابراست با ۱، پس عدد s زیرگروهی ازمرتبهٔ $۱۲/۱ = ۱۲$، یعنی خود $Z_{۱۲}$ را، تولید می‌کند. □

نتیجهٔ زیر بلافاصله از قضیه حاصل می‌شود.

نتیجه اگر a مولدی برای گروه دوری متناهی G از مرتبهٔ n باشد آنگاه مولدهای دیگر G اعضایی به صورت a^r هستند، که درآن r با n متباین باشد، یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترك r و n عدد ۱ باشد.

مثال ۴.۶ زیرگروههای $Z_{۱۸}$ را بیابید ونمودار لاتیس آنها را رسم کنید. تمام زیر گروههای $Z_{۱۸}$ دوری هستند. بنابه نتیجهٔ قضیهٔ ۴.۶، اعداد ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ و ۱۷ مولدهای $Z_{۱۸}$ هستند. از ۲ شروع می‌کنیم.

$$\langle ۲ \rangle = \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶\}$$

ازمرتبهٔ ۹ است ومولدهای آن اعدادبه صورت $۲h$ هستند، به شرط آن‌که h با ۹ متباین باشد، پس $h = ۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸$. از اینرو $۲h = ۲, ۴, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۶$. عضو ۶ از $\langle ۲ \rangle$ زیرگروه $\langle ۶ \rangle = \{۰, ۶, ۱۲\}$ را تولید می‌کند و ۱۲ نیزمولدی برای همین زیر گروه است.

تا اینجا تمام زیرگروههای تولید شده توسط ۰، ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۷ راپیداکرده‌ایم. بنابراین تنها اعداد ۳، ۹و۱۵ راباید بررسی کنیم.

$$\langle ۳ \rangle = \{۰, ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}،$$

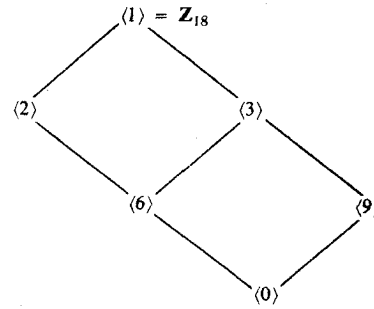
---

۱. استدلال فوق را می‌توان به طورخلاصه چنین بیان کرد؛ کوچکترین مقدار sm که به‌ازای آن عدد n عدد ms را عادکند عبارت است ازکوچکترین مقدار sm که n/d عدد s/d . m را عاد می‌کند. اماچون n/d و s/d متباین هستند، پس $m = n/d$ ـ م.

۱۵ هم ایـن زیرگروه مرتبهٔ ۶ را تولید می‌کند، زیـرا ۳ . ۵ = ۱۵ و بمعم ۵ و ۶ یك است. سرانجام

$$\langle ۹ \rangle = \{۰ , ۹\} .$$

نمودار لاتیس زیر گروههای این گروه درشکل ۴.۶ داده شده‌است.



شکل ۴.۶ نمودار لاتیس گروه $Z_{۱۸}$

این‌مثال بسیارساده است: اما ترس ما این است که چنان به‌جزئیات پرداخته باشیم که به‌نظرتان مشکل برسد. تمرینها ورزیدگیهایی دراین زمینه به‌شما خواهند داد. □

تمرین

۱.۶ تعداد مولدهای هریك از گروههای دوری ازمرتبه‌های ۶، ۸، ۱۲ و ۶۰ راپیدا کنید.

۲.۶+ نشان دهید گروهی کـه تعدادی متناهی زیر گروه داشته باشد، خود لزوماً گروهی متناهی است.

۳.۶ مرتبهٔ هریك از گروههای دوری زیررا پیدا کنید.
ا) زیر گروه دوری از $Z_{۳۰}$ که با ۲۵ تولید می‌شود.
ب) زیر گروه دوری از $Z_{۴۲}$ که با ۳۰ تولید می‌شود.
ج) زیر گروه دوری $\langle i \rangle$ ازگروه C^* ازاعداد مختلط ناصفر با عمل ضرب.
د) زیر گروه دوری ازگروه C^* ازقسمت (ج)، که با $(۱+i)/\sqrt{۲}$ تولید می‌شود.
ه) زیر گروه دوری از گروه C^* ازقسمت (ج)، که با $۱+i$ تولید می‌شود.

۴.۶ درمورد هریك ازگروههای ذیل، کلیهٔ زیر گروههای آن را پیداکنید ونمودار لاتیس این زیر گروهها را رسم نمایید.

ا) $Z_{۱۲}$ ب) $Z_{۳۶}$ ج) $Z_{۸}$

۵.۶ مرتبه‌های تمام زیر گروههای هر یك از گروههای Z_6، Z_8، Z_{12}، Z_{17} و Z_{60} را پیدا کنید.

۶.۶ درستی یا نادرستی هریك از گزاره‌های ذیل را تعیین کنید.

— ا) هر گروه دوری آبلی است.

— ب) هر گروه آبلی دوری است.

— ج) Q باعمل جمع یك گروه دوری است.

— د) هرعضوهر گروه دوری یك مولد آن‌است.

— ه) حداقل یك گروه آبلی ازمرتبهٔ هرعدد طبیعی وجود دارد.

— و) هر گروه ازمرتبهٔ نابیشتراز ۴ دوری است.

— ز) تمام مولدهای Z_{20} اعداد اول هستند.

— ح) S_3 یك گروه دوری است.

— ط) A_3 یك گروه دوری است.

— ی) هر گروه دوری ازمرتبهٔ بزرگتراز ۲ حداقل دومولد متمایزدارد.

۷.۶ بایك مثال نقض، نشان دهیدکه «عکس» قضیهٔ ۲.۶ به صورت زیر یك قضیه نیست. «اگر گروه G چنان باشدکه هرزیرگروه واقعی آن دوری باشد، آنگاه گروه G نیز دوری است.»

۸.۶ فرض کنید $+_n$ جمع به‌هنگ n در $Z_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ باشد. ثابت کنید که $(Z_n, +_n)$ یك گروه است. [راهنمایی: شرکتپذیری تنها اصل موضوع نابدیهی است. با استفاده از الگوریتم تقسیم، نشان دهید که هم $r +_n (s +_n t)$ و هم $(r +_n s) +_n t$ درست باقیماندهٔ تقسیم $r+s+t$ بر n هستند].

۹.۶ فرض کنید G یك گروه باشد وعضو a از G تنهاعضوی باشدکه زیر گروهی دوری ازمرتبهٔ ۲ تولید می‌کند. نشان دهیدکه به ازای هر x از G، $ax = xa$. (**توصیه.** ممکن است تاکنون توجه‌کرده باشیدکه یافتن یك اثبات درجبر، حتی وقتی اثباتی ساده وجود داشته‌باشد، ممکن‌است‌مشکل باشد. معمولا «شکلی» وجودندارد که بارسم آن‌بتوان دریافتن اثبات کمك گرفت. اغلب مجبوریدکه «کلك» درست را اختراع کنید. به‌دست‌آوردن کلك درست به تجربه، بصیرت وگاهی فقط شانس بستگی دارد. یکی ازبزرگترین جبردانهای قرن حاضروقتی اظهارنظرکرده بودکه راه تحقیق درجبربیشترفکرکردن به‌یك کلك است و سپس یافتن‌مسأله‌ای‌که باآن کلك حل شود، تاتلاش‌درجهت یافتن راهی برای حل‌مسأله‌ای خاص. خوب، درحل این تمرین سعی کنید، واگرمشکلی داشتید، «کلك» آن را در بخش پاسخ بیابید.)

۱۰.۶ فرض کنید $G = \langle a \rangle$ یك گروه دوری متناهی ازمرتبهٔ n باشد.

ا) نشان دهید هرزیر گروه H از G به‌صورت $\langle a^m \rangle$ است،که درآن عدد طبیعی m مقسوم علیهی از n است؛ ونشان دهید کـه برای مقسوم علیه‌های طبیعی m و m' از n ، داریم $\langle a^m \rangle = \langle a^{m'} \rangle$ اگروفقط اگر $m = m'$.

ب) فـرض کنید $D(n)$ مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صحیح ومثبت n باشد و $S(G)$ مجموعـهٔ زیرگـروههای G. نتیجهٔ قسمت (۱) را بدین صورت تفسیر کنید کـه نگاشت معینی از $D(n)$ به $S(G)$ یك‌به‌یك وبرو است.

ج) نشان دهیدکه‌اگردو زیر گروه از گروه دوری متناهی G دارای یك مرتبه باشند، آنگاه آنها یکی هستند. چه اعداد صحیحی مرتبه‌های زیر گروههای G هستند.

د) مثالی ارائه‌کنیدکـه نشان دهد برای‌گروههای متناهی نادوری G ، لازم نیست حکـم قسمت (ج) برقرارباشد.

۱۱.۶ فرض‌کنیدکه p و q اعدادی اول باشند. تعداد مولدهای $\mathbf{Z}_{pq}$ را پیداکنید.

۱۲.۶ فرض‌کنیدکه pعددی اول باشد. تعداد مولدهای $\mathbf{Z}_{p^r}$ راکه درآن r عددی طبیعی است، پیداکنید.

۱۳.۶ نشان دهیدکه درگروهی دوری چون G از مرتبهٔ n، به‌ازای هرعدد طبیعی m که n راعادکند معادلهٔ $x^m = e$ دقیقاً دارای m جواب x در G می‌باشد.

۱۴.۶ بامراجعه به تمرین ۱۳.۶، درمورد حالتی‌که $1 < m < n$ وعدد m عدد n راعاد نکند، جواب چیست؟

۱۵.۶ نشان دهیدکه اگرp عددی اول باشد آنگاه $\mathbf{Z}_p$ زیر گروه واقعی نابدیهی ندارد.

۱۶.۶ فرض‌کنیدکـه G گروهی آبلی باشد و H و K زیرگروههایی دوری ازآن باشند که $|H| = r$ و $|K| = s$.

ا) نشان دهیدکه اگر r و s نسبت بـه هم اول باشند آنگاه G زیر گروهی دوری ازمرتبهٔ rs دارد.

ب) باتعمیم بند (ا)، نشان دهیدکه G همواره دارای زیر گروهی دوری ازمرتبهٔ‌کوچکترین مضرب مشترك اعداد r و s می‌باشد.

۷

ایزومورفیسم

۱.۷ تعریف و خواص مقدماتی

اینك می‌خواهیم یکسان بودن ساختار یا ایزومورف بودن دوگروه G و G' را از لحاظ ریاضی دقیقتر بیان کنیم. تاکنون سعی کرده‌ایم این احساس را درشما ایجادکنیم که G و G' وقتی ایزومورف هستندکه قطع نظرازنام اعضا ونام عملهای دوتایی مربوط کاملا مثل هم باشند. بنابراین بایدبتوان G' را از G باتغییرنام هرعضو x از G به عضومعینی‌چون x' از G' به‌دست‌آورد. یعنی‌که به هرعضو x از G عضومتناظرش x' از G' را منسوب کنیم. این واقعاً چیزی جز وجود تابعی چون ϕ باحوزهٔ تعریف G نیست. واضح است‌که هردوعضومتمایز x و y از G باید متناظرهای متمایز $x'=x\phi$ و $y'=y\phi$ از G' را داشته باشند؛ یعنی ϕ باید یك‌به‌یك باشد. همچنین هرعضو G' باید متناظر بایکی ازاعضای G باشد؛ یعنی تابع ϕ باید بروباشد. تااینجا مربوط‌به تغییرنام اعضا بود. سرانجام، برای این‌که دوگروه ساختار یکسان داشته باشند، اگرموقتاً عمل دوتایی G را $*$ وعمل دوتایی G' را $*'$ بنامیم، باید عضو $x*y$ از G دارای عضومتناظر $x'*'y'$ از G' باشد، یا $(x*y)\phi$ با $(x\phi)*'(y\phi)$ برابر باشد. معمولا نمادهای $*$ و $*'$ برای اعمال را از قلم می‌اندازیم ونمادگذاری ضربی رابه‌کارمی‌بریم؛ یعنی می‌نویسیم:

$$(xy)\phi=(x\phi)(y\phi)\cdot$$

توجه داشته‌باشیدکه ضرب xy درطرف چپ رابطهٔ فوق، در G است، درحالی‌که ضرب $(x\phi)(y\phi)$ درطرف راست آن در G' است. مطالب مذکور را در تعریف زیرخلاصه می‌کنیم.

تعریف یك ایزومورفیسم از یك گروه G با یك گروه G' تابعی یك به یك چون ϕ است که G را بروی G' بنگارد به قسمی که به ازای هر x و y از G

$$(x\,y)\,\phi=(x\,\phi)\,(y\,\phi)\,.$$

دراین صورت، گروههای G و G' ایزومورف نامیده می‌شوند و نماد متداول برای آن $G \simeq G'$ است.

اکنون قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که اگر یك ایزومورفیسم را تجدید نامگذاری در گروهی که درست مثل گروهی دیگر باشد تلقی کنیم خیلی بدیهی خواهد بود. البته، ما این قضیه را با استفاده از تعریف ایزومورفیسم ثابت خواهیم کرد.

قضیهٔ ۱.۷ اگر $\phi : G \to G'$ یك ایزومورفیسم بین G و G' و e عضو همانی G باشد آنگاه $e\,\phi$ عضو همانی G' است. به‌علاوه برای هر a از G،

$$a^{-1}\,\phi=(a\,\phi)^{-1}\,.$$

به زبان ساده، هر ایزومورفیسم عضو همانی را به عضو همانی و معکوسها را به معکوسها می‌نگارد.

برهان. فرض کنیم $x' \in G'$. چون ϕ بروست، پس xی از G وجود دارد که $x\,\phi = x'$. لذا

$$x'=x\,\phi=(e\,x)\,\phi=(e\,\phi)\,(x\,\phi)=(e\,\phi)\,x',$$

وعیناً

$$x'=x\,\phi=(x\,e)\,\phi=(x\,\phi)\,(e\,\phi)=x'(e\,\phi)\,.$$

بنابراین برای هر x' از G' داریم

$$(e\,\phi)\,x'=x'=x'\,(e\,\phi),$$

یعنی $e\,\phi$ عضو همانی G' است.

همچنین اگر $a \in G$ آنگاه

$$e\,\phi=(a^{-1}\,a)\,\phi=(a^{-1}\,\phi)\,(a\,\phi),$$

وعیناً

$$e\,\phi=(a\,a^{-1})\,\phi=(a\,\phi)\,(a^{-1}\,\phi)\,.$$

و بنابراین $a^{-1}\phi=(a\,\phi)^{-1}$. □

۲.۷ چگونه نشان دهیم که گروهها ایزومورف هستند

در گذشته بعضی از دانشجویان درفهم و کاربرد مفهوم ایزومورفیسم با اشکال روبرو می‌شدند.

در این کتاب درچند فصل قبل ازاین که آن را به‌طور دقیق بیان کنیم به معرفی آن پرداختیم بدین امید که اهمیت ومعنی آن کاملا فهمیده شود. باتوجه به موارد استعمال آن، اکنون به‌طورخلاصه نشان می‌دهیم که برای اثبات ایزومورف بودن دو گروه G و G'، با استفاده از تعریف چگونه باید اقدام کنیم.

قدم اول تابعی مانند ϕ تعریف می‌کنیم که همان ایزومورفیسم بین G و G' باشد. این عمل بدین معنی است که باید به‌نحوی مشخص کنیم که هرعضو x از G توسط ϕ به‌کدام عضو از G' نظیرمی‌شود.

قدم دوم نشان می‌دهیم که ϕ تابعی یك‌به‌یك است.

قدم سوم نشان می‌دهیم که ϕ تابعی برو است.

قدم چهارم نشان می‌دهیم که به‌ازای هر x و y از G، $(xy)\phi=(x\phi)(y\phi)$. این چیزی جزیك مسألهٔ محاسباتی نیست. به عبارت دیگر باید طرفین این تساوی را محاسبه و ملاحظه کرد که آیا باهم برابرهستند یانه.

این روش رابامثال زیرشرح می‌دهیم.

مثال ۱.۷ نشان دهیدکه $\mathbf{R}$ تحت جمع ایزومورف است با $\mathbf{R}^+$ تحت ضرب.

قدم اول به‌ازای هرعدد x از $\mathbf{R}$ تعریف می کنیم $x\phi=e^x$. این نگاشتی چون $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ را به دست می‌دهد.

قدم دوم فرض کنیم که $x\phi=y\phi$. پس $e^x=e^y$ وازاینجا $x=y$. بنابراین ϕ یك به یك است.

قدم سوم اگر $r\in\mathbf{R}^+$، آنگاه

$$(\ln r)\phi=e^{\ln r}=r,$$

که درآن $(\ln r)\in\mathbf{R}$. بنابراین ϕ بروی $\mathbf{R}^+$ است.

قدم چهارم به‌ازای هر x و y از $\mathbf{R}$ داریم

$$(x+y)\phi=e^{x+y}=e^xe^y=(x\phi)(y\phi). \quad \square$$

این روش را دریك قضیه هم به‌کارمی بریم.

قضیهٔ ۲.۷ هر گروه دوری نامتناهی G با گروه جمعی $\mathbf{Z}$ از اعداد صحیح

ایزومورف است.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{Z}$ مولدی چون a داشته باشد و نمادضربی برای آن به‌کار رود. بنابراین

$$G=\{a^n \mid n\in \mathbf{Z}\}.$$

استدلالی که درحالت اول بخش ۲.۶، برای گروههای دوری نامتناهی داشتیم، نشان می‌دهد که اعضای a^n از G همه متمایزهستند، بدین‌معنی که اگر $n\neq m$ آنگاه $a^n\neq a^m$.

قدم اول تابع $\phi: G\to \mathbf{Z}$ رابه‌ازای هر a^n از G با $a^n\phi=n$ تعریف می‌کنیم.

قدم دوم اگر $a^n\phi=a^m\phi$ آنگاه $n=m$ ودرنتیجه $a^n=a^m$، یعنی ϕ یك‌به‌یك است.

قدم سوم برای هر n از $\mathbf{Z}$، عضو a^n توسط ϕ به n نگاشته می‌شود، بنابراین ϕ بروی $\mathbf{Z}$ است.

قدم چهارم اکنون $(a^na^m)\phi=a^{n+m}\phi=n+m$. (توجه کنید که عمل دوتایی در اینجا در گروه G است.) حالا باید $(a^n\phi)+(a^m\phi)$ راحساب کنیم، نماد $+$ بدان جهت ظاهر می‌شود که عمل $\mathbf{Z}$ جمع است. باری، $(a^n\phi)+(a^m\phi)$ نیزمجدداً $n+m$ است. بنابراین $(a^na^m)\phi=(a^n\phi)+(a^m\phi)$. □

برهانی که گذشت مسلماً بسیارساده است؛ مطمئن شوید که مراحل آن را فهمیده‌اید.

این بدیهی است که هر گروه باخودش ایزومورف است؛ تابع همانی ι که باضابطهٔ $g\iota=g$ تعریف می‌شود این موضوع رانشان می‌دهد. به‌علاوه، اگر G با G' ایزومورف باشدآنگاه G' نیز با G ایزومورف است؛ برای یك ایزومورفیسم $\phi: G\to G'$ تابع $\phi^{-1}: G'\to G$ این رانشان می‌دهد (تمرین ۶.۷ ملاحظه شود). سرانجام، اگر G با G' و G' با G'' ایزومورف باشندآنگاه G نیزبا G'' ایزومورف است؛ اگر $\phi: G\to G'$ و $\psi: G'\to G''$ ایزومورفیسم باشندآنگاه تابع مرکب $\phi\psi: G\to G''$ نیزایزومورفیسم است (به تمرین ۷.۷ مراجعه شود). شما باید توجه‌کرده باشیدکه نشان دادیم خاصیت ایزومورف بودن درهر گردایه‌ای از گروهها یك نسبت‌هم‌ارزی است. ازنقطه‌نظرقضیهٔ ۱.۰، این بدین معنی است که همواره می‌توان هر گردایهٔ ناتهی مفروض از گروهها رابه قطعه‌هایی (همادهای هم‌ارزی) افراز کرد به طوری که هر دو گروه متعلق به یك قطعه باهم ایزومورف باشند و هر دوگروه قطعات متفاوت ایزومورف نباشند.

دیدیم که هردو گروه از مرتبهٔ ۳ ایزومورف هستند. این مطلب را بدین صورت بیان می‌کنیم که درحد ایزومورفیسم، فقط یك گروه از مرتبهٔ ۳ وجود دارد.

مثال ۲.۷ درحد ایزومورفیسم فقط یك‌گروه ازمرتبهٔ ۱، یك‌گروه ازمرتبهٔ ۲ ویك گروه‌از مرتبهٔ ۳ وجود دارد. درمثال۲.۳ دیدیم که، درحد ایزومورفیسم، دقیقاً دوگروه از مرتبهٔ ۴

وجود دارند که عبارت‌اند از Z_4 و ۴ـ گروه کلاین V. درحد ایزومورفیسم، حداقل دو گروه ازمرتبهٔ ۶ وجود دارند، که عبارت‌اند از Z_6 و S_3. □

۳.۷ چگونه نشان دهیم که گروهها ایزومورف نیستند

دراینجا به مطلبی می‌پردازیم که کمتر در کتب جبر دیده می‌شود و آن این است که:

اگر دوگروه G و G' ایزومورف نباشند، چگونه می‌توان نشان داد که ایزومورف نیستند؟

این عبارت بدین‌معنی است که هیچ تابع یك به‌یکی چون ϕ از G به‌روی G' نمی‌توان یافت که واجد خاصیت $(xy)\phi=(x\phi)(y\phi)$ باشد. درحالت کلی، بدیهی است که عملا نمی‌توان همهٔ توابع یك‌به‌یك ممکن را امتحان کرد ونشان داد که خاصیت فوق را ندارند، بجزالبته حالتی که هیچ تابع یك به‌یکی وجود نداشته باشد. مثلا، اگر G و G' گروههای متناهی ازمرتبه‌های متفاوت باشند چنین تابعی وجود ندارد.

مثال ۳.۷ گروههای Z_4 و S_6 ایزومورف نیستند. هیچ تابع یك‌به‌یکی از Z_4 بروی S_6 وجود ندارد. □

درحالت گروههای نامتناهی، وجود یا عدم وجود یك تابع یك‌به‌یك و برو همیشه واضح نیست. مثلا، ممکن است تصور کنیم که $\mathbf{Q}$ بیش از $\mathbf{Z}$ عضو دارد، ولی معلمتان می‌تواند ظرف پنج دقیقه به‌شما نشان دهد که تناظرهای یك‌به‌یك زیادی از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{Q}$ وجود دارد. (این‌را از وی بخواهید.) اما واقعیت این‌است که $\mathbf{R}$ بیش ازآن عضو دارد که بتواند با $\mathbf{Z}$ در تناظری یك به یك قرار داده شود. نشان دادن این مطلب تنها پنج دقیقهٔ دیگر از وقت معلمتان راخواهد گرفت.

مثال ۴.۷ $\mathbf{Z}$ تحت جمع و $\mathbf{R}$ تحت جمع ایزومورف نیستند، زیرا هیچ تابع یك‌به‌یکی از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{R}$ وجود ندارد. □

در حالتی که بین دوگروه G و G' تناظری یك‌به‌یك وجود داشته باشد، برای نشان دادن‌این‌که دوگروه ایزومورف نیستند (اگرچنین‌باشد) نشان می‌دهیم‌که یکی‌ازدوگروه دارای خاصیتی ساختاری است که گروه دیگر واجد آن نیست. یك **خاصیت ساختاری یك‌گروه** آن است که هر گروه ایزومورف با آن نیزدارای‌آن خاصیت‌باشد. این‌خاصیت نبایدبستگی به نام یا برخی دیگرازمشخصه‌های غیرساختاری اعضا داشته باشد. ذیلا مثالهایی ازچند خاصیت ساختاری وچندخاصیت غیرساختاری ارائه می‌شود.

چند خاصیت ساختاری ممکن	چند خاصیت غیر ساختاری ممکن
۱. گروه دوری است.	۱′. گروه حاوی ۵ است.
۲. گروه آبلی است.	۲′. تمام اعضای گروه عدد هستند.
۳. مرتبهٔ گروه ۸ است.	۳′. عمل گروه «ترکیب» نامیده می‌شود.
۴. گروه متناهی است.	۴′. اعضای گروه جایگشت هستند.
۵. گروه دقیقاً دارای دو عضو از مرتبهٔ ۶ است.	۵′. عمل گروه با الحاق نشان داده می‌شود.
۶. معادلهٔ $x^2 = a$ به‌ازای هرعضو a در گروه جواب دارد.	۶′. گروه زیر گروهی از $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ است.

البته چندین خاصیت ساختاری دیگرهم وجود دارند که می‌توانستند فهرست شوند. این واقعیت که خواص ۱ تا ۶ درواقع ساختاری هستند قضیهٔ کوچکی است دربارهٔ گروههای ایزومورف. ما درتمرینها ازشما خواهیم خواست که دو تا ازاین قضیه‌ها را ثابت کنید. (تمرینهای ۸.۷، و ۹.۷ راملاحظه کنید.) ما آنها رادرمتن به‌عنوان بداهتاً ساختاری درنظر خواهیم گرفت.

مثال ۵.۷ بدین‌علت که $17 \in \mathbf{Z}$ ولی $17 \notin 3\mathbf{Z}$ نمی‌توان گفت که $\mathbf{Z}$ و $3\mathbf{Z}$ ایزومورف نیستند. اینهاخواص ساختاری نیستند، بلکه تنها ارتباط با نام اعضا دارند. در واقع $\mathbf{Z}$ و $3\mathbf{Z}$ تحت‌نگاشت $\phi : \mathbf{Z} \to 3\mathbf{Z}$ باتعریف $n\phi = 3n$ ایزومورف هستند. □

مثال ۶.۷ بدین‌علت که $1/2 \notin \mathbf{Z}$ ولی $1/2 \in \mathbf{Q}$ نمی‌توان گفت که گروههای $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$، هردوتحت جمع، ایزومورف نیستند. اما، می‌توان گفت $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ ایزومورف نیستند زیراکه اولی دوری است و دومی نیست. □

مثال ۷.۷ گروه $\mathbf{Q}^*$ ازاعضای ناصفر $\mathbf{Q}$ تحت ضرب وگروه $\mathbf{R}^*$ ازاعداد حقیقی‌ناصفر $\mathbf{R}$ تحت ضرب ایزومورف نیستند. یك راه استدلال این‌است که تناظری یك‌به‌یك بین آنها وجود ندارد. راه دیگراستدلال این است که در $\mathbf{R}^*$ هرعدد توان سوم عددی از $\mathbf{R}^*$ است. یعنی در $\mathbf{R}^*$ معادلهٔ $x^3 = a$ به‌ازای هر a از $\mathbf{R}^*$ جوابی‌دارد. حال‌آنکه درمورد $\mathbf{Q}^*$ چنین نیست. مثلا معادلهٔ $x^3 = 2$ در $\mathbf{Q}^*$ جوابی ندارد. □

مثال ۸.۷ گروه $\mathbf{R}^*$ ازاعدادحقیقی ناصفرتحت ضرب وگروه $\mathbf{C}^*$ ازاعدادمختلط‌ناصفر تحت ضرب ایزومورف نیستند. در $\mathbf{R}^*$ هرعضو یك گروه دوری نامتناهی تولید می‌کند، البته بجز ۱و۱− که اولی گروهی دوری ازمرتبهٔ ۱ ودومی‌گروهی دوری ازمرتبهٔ ۲ تولید می‌کند. اما، در $\mathbf{C}^*$ عضو i زیرگروه دوری $\{i, -1, -i, 1\}$ راتولید می‌کند که مرتبهٔ آن ۴ است. یابه عنوان استدلالی دیگر، معادلهٔ $x^2 = a$، به‌ازای هر a در $\mathbf{C}^*$ جواب دارد، درحالی‌که $x^2 = -1$ در $\mathbf{R}^*$ جواب ندارد. □

مثال ۹.۷ گروه $\mathbf{R}^*$ ازاعداد حقیقی ناصفر تحت ضرب و گروه $\mathbf{R}$ ازاعداد حقیقی تحت جمع ایزومورف نیستند. در $\langle \mathbf{R}, +\rangle$ معادلهٔ $x+x=a$ به‌ازای هر a از $\mathbf{R}$ جواب دارد ولی معادلهٔ نظیرش $x \cdot x=a$ در $\langle \mathbf{R}^*, \cdot\rangle$ همیشه جواب ندارد، مثلا به‌ازای $a=-1$. □

۴.۷ قضیهٔ کیلی

به جدول یکی از گروههایی که درمتن آمده است بنگرید. ملاحظه کنید که چگونه هرسطر جدول جایگشتی ازمجموعهٔ اعضای گروه، به‌صورتی که دربالای جدول آمده است، تشکیل می‌دهد. به همین ترتیب هرستون جدول جایگشتی ازمجموعهٔ اعضای گروه، به صورتی که درسمت چپ آمده است، تشکیل می‌دهد. باتوجه به‌این مشاهدات، موجب شگفتی نخواهد بود که حداقل هرگروه متناهی G بازیرگروهی ازگروه S_G، متشکل ازهمهٔ جایگشتهای G، ایزومورف باشد. همین امر در مورد گروههای نامتناهی نیزصادق است. قضیهٔ کیلی بیان همین مطلب است که هرگروه با یك گروه ازجایگشتها، تحت ضرب جایگشتی، ایزومورف است. این قضیه، هرچندکه مورد استعمال مهمی برایش نداریم، زیبا وشگفت‌انگیزاست. باری، این قضیه یکی‌ازقضیه‌های کلاسیك نظریهٔ گروههاست وتقریباًدرتمام کتابهای درسی جبردیده می‌شود. به‌علاوه، این اولین قضیه‌ای است ازاین متن که تاحدودی پیچیدگی دارد ومفاهیم وفنون مختلفی راکه دانشجو به‌طورجداگانه با آنها آشنا شده‌است به هم مربوط می‌سازد. هردانشجو باید صورت قضیهٔ کیلی را بداند. اثبات آن رابا یك ستاره مشخص کرده‌ایم تانشان دهیم که دراین کتاب این قضیه حائزاهمیت بنیادی نیست.

برای آن که تعقیب اثبات برایتان ساده‌تر باشد، ابتدا مراحلی راکه باید طی شوند به‌طورخلاصه بیان می‌کنیم. باشروع ازگروه مفروض G به‌ترتیب زیرادامه می‌دهیم.

قدم اول مجموعه‌ای چون G' ازجایگشتها راپیدا می‌کنیم که نامزدی برای تشکیل یك گروه ایزومورف با G تحت ضرب جایگشتی باشد.

قدم دوم ثابت می‌کنیم که G' تحت عمل ضرب جایگشتها یك گروه است.

قدم سوم تابعی‌چون $\phi : G \to G'$ تعریف می‌کنیم ونشان می‌دهیم که ϕ ایزومورفیسمی بین G و G' است.

قضیهٔ ۳.۷ (کیلی) هر گروه با گروهی از جایگشتها ایزومورف است.

*برهان. فرض کنیم G گروه مفروضی باشد.

قدم اول کارنخست ما یافتن مجموعه‌ای است چون G' ازجایگشتها که نامزدی برای

تشکیل یك گروه ایزومورف با G باشد. خود G را به عنوان یك مجموعه درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم S_G مجموعهٔ تمام جایگشتهای G باشدکه درقضیهٔ ۱.۴ آمده است. (توجه داشته باشیدکه اگر G متناهی و n عضوداشته‌باشد آنگاه S_G دارای $n!$ عضواست. بنابر-این درحالت کلی مسلماً S_G خیلی بزرگتراز آن است‌که بتواند با G ایزومورف باشد.) زیرمجموعه‌ای خاص از S_G را تعریف می‌کنیم: برای عضودلخواه a از G، فرض‌کنیم ρ_a نگاشتی از G به G باشدکه به‌ازای هر x از G

$$x\rho_a = xa\,.$$

(می‌توان تصورکردکه ρ_a ضرب (است در a است.) اگر $x\rho_a = y\rho_a$ آنگاه $xa = ya$، ازاینرو بنا به‌قضیهٔ ۱.۲، $x = y$. پس ρ_a تابعی یك‌به‌یك است. به‌علاوه، اگر $y \in G$ آنگاه

$$(ya^{-1})\rho_a = (ya^{-1})a = y$$

وبنابراین ρ_a، G را بروی G می‌نگارد. چون $\rho_a : G \to G$ هم یك‌به‌یك وهم بروی G است، پس ρ_a جایگشتی از G است؛ یعنی $\rho_a \in S_G$. اکنون فرض‌کنیم

$$G' = \{\rho_a | a \in G\}\,.$$

قدم دوم G' زیرگروهی‌از S_G است. کافی‌است نشان دهیم‌که G' تحت ضرب جایگشتی بسته است، حاوی عضو همانی است ومعکوس هرعضوش را دربردارد. ابتدا ادعا می‌کنیم که برای هر a و b از G

$$\rho_a\rho_b = \rho_{ab}.$$

برای اثبات تساوی دوتابع ρ_{ab} و $\rho_a\rho_b$ باید نشان دهیم‌که مقدارآنها درهر x از G یکسان است. اما

$$x(\rho_a\rho_b) = (x\rho_a)\rho_b = (xa)\rho_b = (xa)b = x(ab) = x\rho_{ab}.$$

پس $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$ و G' تحت ضرب بسته‌است. بدیهی‌است که اگر e عضوهمانی G باشد، آنگاه به‌ازای هر x از G

$$x\rho_e = xe = x = x\iota$$

ودرنتیجه ρ_e همان جایگشت همانی ι از S_G است وعضو G' نیز هست. چون همواره $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$، پس

$$\rho_a\rho_{a^{-1}} = \rho_{aa^{-1}} = \rho_e$$

ونیز

$$\rho_{a^{-1}}\rho_a = \rho_{a^{-1}a} = \rho_e$$

پس

$$(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$$

ودرنتیجه $(\rho_a)^{-1} \in G'$. بنابراین G' زیر گروهی از S_G است.

قدم سوم می‌ماند اثبات این‌که G با این گروه توصیف شدهٔ G' ایزومورف است. تابع $\phi : G \to G'$ رابه‌ازای هر x از G با

$$a\phi = \rho_a$$

تعریف می‌کنیم. اگر $a\phi = b\phi$، آنگاه ρ_aوρ_b باید یك جایگشت از G باشند. بالاخص

$$e\rho_a = e\rho_b$$

وبنابراین $ea = eb$، و $a = b$. درنتیجه ϕ یك‌به‌یك است. این بدیهی‌است که بنا به‌تعریف G'، تابع ϕ بروی G' است. سرانجام $(ab)\phi = \rho_{ab}$، درحالی‌که

$$(a\phi)(b\phi) = \rho_a \rho_b \cdot$$

اما دربالادیدیم که ρ_{ab} و $\rho_a \rho_b$ یك جایگشت از G هستند. بنابراین

$$(ab)\phi = (a\phi)(b\phi). \quad \square$$

دراثبات قضیه، می‌توانستیم جایگشتهایی چون λ_a از G راکه به‌ازای هر x از G باضابطهٔ

$$x\lambda_a = ax$$

تعریف می‌شوند‌درنظربگیریم (λ_a را می‌توان ضرب چپ در a تصورنمود). این‌جایگشتها زیر گروهی‌چون G'' از S_G راتشکیل می‌دهند، که‌آن هم با G ایزومورف است. اماتحت نگاشت $\psi : G \to G''$ که‌با

$$a\psi = \lambda_{a^{-1}}$$

تعریف می‌شود.

تعریف گروه G' در برهان قضیهٔ ۳.۷، نمایش منظم راست G و نیز گروه G'' در توضیح پس ازقضیه، نمایش منظم چپ G نامیده می‌شوند.

مثال ۱۰.۷ نمایش منظم‌راست گروهی‌راکه باجدول ۱.۷ داده شده‌است محاسبه می‌کنیم. منظوراز «محاسبه» دراینجا ارائهٔ اعضا وجدول گروه نمایش منظم راست است. دراینجا اعضای گروه عبارتند از

$$\rho_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix} \text{ و } \rho_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix} \text{ ، } \rho_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}$$

جدول ۱.۷

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

جدول ۲.۷

	ρ_e	ρ_a	ρ_b
ρ_e	ρ_e	ρ_a	ρ_b
ρ_a	ρ_a	ρ_b	ρ_e
ρ_b	ρ_b	ρ_e	ρ_a

جدول این گروه، چنان‌که درجدول ۲.۷ ملاحظه می‌شود، کاملا شبیه جدول اصلی‌است و با تجدید نام x به ρ_x به‌دست می‌آید. این «تجدیدنام» ایده اساسی ایزومورفیسم است. به عنوان مثال

$$\rho_a \rho_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix} = \rho_e \qquad \square$$

برای یك گروه متناهی که باجدول معرفی شده باشد، ρ_a عبارت است از جایگشت اعضا متناظربا ترتیبشان درستونی‌که زیرعضو a از سطرفوقانی جدول قراردارند و λ_a عبارت‌است ازجایگشت اعضا متناظربا ترتیبشان درسطری‌که مقابل عضو a ازستون سمت چپ جدول قراردارند. نمادهای ρ_a و λ_a بدین دلیل انتخاب شده‌اندکه به‌ترتیب یادآور ضرب‌از راست وضرب ازچپ در a باشند.

تمرین

۱.۷ دواستدلال ارائه کنیدکه تانشان دهندکه $\mathbf{Z}_4$ با ۴ـ گروه کلاین V ایزومورف‌نیست.

۲.۷ گردایهٔ گروههایی راکه ذیلا داده شده‌اند بانسبت هم‌ارزی ایزومورفیسم، که بحث آن بعدازقضیهٔ۲.۷ آمد به زیر گردایه‌هایی از گروههای ایزومورف افرازکنید. زیروند * به معنی مجموعهٔ اعضای ناصفرمجموعهٔ موردنظراست.

$\mathbf{Z}$ تحت جمع	S_2
$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{R}^*$ تحت ضرب
$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{R}^+$ تحت ضرب
S_6	$\mathbf{Q}^*$ تحت ضرب
$17\mathbf{Z}$ تحت جمع	$\mathbf{C}^*$ تحت ضرب

$\mathbf{Q}$ تحت جمع	زیرگروه $\langle \pi \rangle$ از $\mathbf{R}^*$ تحت ضرب
$3\mathbf{Z}$ تحت جمع	زیرگروه G از S_8 تولید شده با $(2, 6)$
$\mathbf{R}$ تحت جمع	$(1, 3, 4)$

۳.۷ با یك استدلال صوری (مثلا همان طوری که درقضیهٔ ۱.۷ ارائه شد) ثابت کنید که اگر ϕ یك ایزومورفیسم ازگروه G به گروه G' و H زیر گروهی از G باشدآنگاه

$$H\phi = \{h\phi | h \in H\}$$

هم زیر گروهی از G' است. (این مطلب بااستفاده ازانگیزه‌ای که برای تعریف ایزومورفیسم داشتیم بدیهی است ولی سعی درعرضهٔ اثبات صوری آن هم که فقط ازتعریف ایزومورفیسم استفاده شود مفید می باشد.)

۴.۷ فرض کنیم که G گروهی دوری بامولد a و G' گروهی ایزومورف با G باشد. نشان دهید که اگر $\phi : G \to G'$ یك ایزومورفیسم باشد آنگاه برای هر x از G عضو $x\phi$ از G' توسط $a\phi$ کاملا تعیین می‌شود.

۵.۷ درستی یا نادرستی هریك ازگزاره‌های زیررا تعیین کنید.

— ا) هردو گروه ازمرتبهٔ ۳ ایزومورف هستند.

— ب) ازهرمرتبهٔ متناهی مفروض، درحد ایزومورفیسم، فقط یك گروه دوری وجود دارد.

— ج) هردو گروه متناهی که تعداد مساوی عضوداشته باشند ایزومورف هستند.

— د) هرایزومورفیسم یك تابع یك‌به‌یك است.

— ه) هرتابع یك‌به‌یك بین دو گروه یك ایزومورفیسم است.

— و) خاصیت دوری بودن (یانبودن، برحسب مورد) یك خاصیت جبری گروهها است.

— ز) دریك خاصیت ساختاری یك گروه، همهٔ گروههای ایزومورف باید شریك باشند.

— ح) یك گروه آبلی نمی‌تواند بایك گروه نا آبلی ایزومورف باشد.

— ط) یك گروه جمعی نمی‌تواند بایك گروه ضربی ایزومورف باشد.

— ی) $\mathbf{R}$ باعمل جمع بایك گروه جایگشتی ایزومورف است.

۶.۷ فرض کنیم $\phi : G \to G'$ یك ایزومورفیسم ازگروهی چون G به گروهی چون G' باشد. نشان دهید که نگاشت $\phi^{-1} : G' \to G$ با تعریف $x'\phi^{-1} = x$ به‌طوری که به‌ازای هر x' از G'، $x\phi = x'$ تابعی است خوشتعریف وایزومورفیسمی است از G' به G.

۷.۷ فرض کنیم که $\phi : G \to G'$ ایزومورفیسمی است بین گروهی چون G و گروهی چون G' و $\psi : G' \to G''$ هم ایزومورفیسمی است از G' با گروهی چون G''. نشان دهید که $\phi\psi : G \to G''$ ایزومورفیسمی است از G به G''

۸.۷ فرض کنید G یك گروه آبلی باشد. با نشان دادن این که اگر G' با G ایزومورف باشد، G' نیز آبلی است، ثابت کنید که آبلی بودن یك خاصیت ساختاری G است.

۹.۷ فرض کنید G یك گروه دوری باشد. ثابت کنید که دوری بودن یك خاصیت ساختاری G است. (تمرین ۸.۷ را ملاحظه کنید.)

۱۰.۷ یك ایزومورفیسم از هر گروه به خودش یك **اتومورفیسم گروه** نامیده می‌شود. هریك از گروههای $\mathbf{Z}_2$، $\mathbf{Z}_6$، $\mathbf{Z}_8$، $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Z}_{17}$ چند اتومورفیسم دارند؟ [راهنمایی: تمرین ۴.۷ را به‌کار برید.]

۱۱.۷ فرض کنیم که $\langle G, \cdot \rangle$ یك گروه باشد. عمل دوتایی $*$ درمجموعهٔ G را که به‌ازای هر a و b از G با

$$a * b = b \cdot a$$

تعریف می‌شود، درنظر می‌گیریم. نشان دهید که $\langle G, * \rangle$ گروه است و این گروه عملا با $\langle G, \cdot \rangle$ ایزومورف است. [راهنمایی: نگاشت ϕ با تعریف $a\phi = a^{-1}$، به‌ازای هر a از G، را درنظر بگیرید.]

توصیه‌ها. این یکی از مواردی است که نمادهای $\langle G, \cdot \rangle$ و $\langle G, * \rangle$ خیلی عملی هستند. بحث بعد از تعریف گروه را ملاحظه کنید. توجه کنید که اگر G متناهی باشد، جدول گروه $\langle G, * \rangle$ را می‌توان با استفاده از جدول گروه $\langle G, \cdot \rangle$ با قرائت این جدول از بالا به چپ به جای از چپ به بالا به‌دست آورد.

۱۲.۷ با استدلالی شبیهٔ آنچه درقضیهٔ ۲.۷ گذشت، ثابت کنید که هر گروه دوری از مرتبهٔ n با $\mathbf{Z}_n$ ایزومورف است.

۱۳.۷ فرض کنیم G یك گروه و g عضوی ثابت از G باشد. نشان دهید که نگاشت i_g با تعریف $xi_g = gxg^{-1}$ به‌ازای هر x از G، یك ایزومورفیسم است از G به خودش؛ یعنی اتومورفیسمی از G است. (مراجعه شود به تمرین ۱۰.۷.)

***۱۴.۷** نمایش منظم چپ گروه $\mathbf{Z}_4$ را محاسبه کنید. نمایش منظم راست گروه S_3 را با استفاده از نمادگذاری مثال ۱.۴ محاسبه کنید.

۱۵.۷ فرض کنیم که $\langle S, * \rangle$ گروه تمام اعداد حقیقی بجز ۱ — با عمل $*$ تعریف شده توسط $a * b = a + b + ab$ باشد (به‌تمرین ۹.۲ مراجعه شود). نشان دهید که $\langle S, * \rangle$ با گروه ضربی $\mathbf{R}^*$ از اعداد حقیقی ناصفر تحت ضرب ایزومورف است. عملا ایزومورفیسمی چون $\psi : \mathbf{R}^* \to S$ را تعریف کنید.

۱۶.۷ فرض کنید که $\phi : G \to G'$ یك ایزومورفیسم از گروهی چون G به‌گروهی چون G' باشد. اگر برای هر x از G، $x\phi$ را نام جدیدی برای x تلقی کنیم آنگاه شرط $(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$ معادل این گفته است که نمودار شکل ۱.۷ تعویض‌پذیر است. منظور

از «نمودار تعویضپذیر است» این است که بـا شروع از گوشهٔ بالایی سمت چپ به مقصد گوشهٔ پایینی سمت راست طی راه (پیکان به‌پایین) (پیکان افقی) همان نتیجه را می‌دهد که طی راه (پیکان افقی) (پیکان به پایین) . به عنوان مثال، در ایزومورفیسم ψ پاسخ تمرین ۱۵.۷، اگر $x\psi$ نام جدید x از $\mathbf{R}^*$ باشد نمودار شکل ۲.۷ بـرای $x=۲$ و $y=۵$ حاصل می‌شود

$$\begin{tikzcd}
(x, y) \arrow[r, "\text{تجدید نام}"] \arrow[d, "\text{محاسبهٔ حاصلضرب در } G"'] & (x\phi, y\phi) \arrow[d, "\text{محاسبهٔ حاصلضرب در } G'"] \\
xy \arrow[r, "\text{تجدید نام}"] & (xy)\phi = (x\phi)(y\phi)
\end{tikzcd}$$

Fig. 7.1

$$\begin{tikzcd}
(2, 5) \arrow[r, "\text{تجدید نام}"] \arrow[d, "\text{محاسبهٔ حاصلضرب در } \mathbf{R}^*"'] & (1, 4) \arrow[d, "\text{محاسبهٔ حاصلضرب در } S"] \\
10 \arrow[r, "\text{تجدید نام}"] & 9 = 1 * 4
\end{tikzcd}$$

شکل ۲.۷

ا) با آغاز از گروه $\mathbf{R}^*$ تحت ضرب، فرض‌کنید x از $\mathbf{R}^*$ به $x-۴$ تجدید نام یابد. فرض کنید $S_۱$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بجز ۴ — باشد. در $S_۱$ $*_۱$ را چنان تعریف کنید که $\langle S_۱, *_۱\rangle$ با $\mathbf{R}^*$ تحت ضرب توسط این نامگذاری، ایزومورف باشد.

ب) قسمت (ا) را با تجدیدنام x از $\mathbf{R}^*$ به $x-t$ به‌ازای عددی ثابت چون t از $\mathbf{R}$ تکرار کنید. ابتدا مجموعهٔ لازم $S_۲$ را تعیین کنید.

ج) قسمت (ا) را با تجدیدنام x از $\mathbf{R}^*$ به $x^۳+۱$ تکرار کنید. ابتدا مجموعهٔ لازم $S_۳$ را مشخص کنید.

۸

حاصلضرب مستقیم

۱.۸ حاصلضرب مستقیم خارجی

ابتدا مروری برموجودیمان ازگروهها می‌کنیم. باشروع از گروههای متناهی، به‌ازای هر عدد طبیعی n، گروه دوری $\mathbf{Z}_n$، گروه متقارن S_n و گروه متناوب A_n را داریم. گروه هشتی D_4 ازمثال ۲.۴ و۴ — گروه کلاین V را هم در دست داریم. البته می‌دانیم که زیر گروههای این گروهها نیز وجود دارند؛ ودرحقیقت با به‌کار بردن قضیهٔ کیلی درمورد گروههای متناهی، هر گروه متناهی بازیر گروهی ازیك گروه متقارن S_n ایزومورف است. اما راه ساده‌ای برای محاسبهٔ تمام زیرگروههای یك گروه داده شده نمی‌شناسیم. در رابطه با گروههای نامتناهی، گروههای متشکل ازمجموعه‌های اعداد تحت جمع وضرب معمولی را داریم، مانند $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{R}$ تحت جمع.

یکی از هدفهای این فصل ارائهٔ روشی سازنده است که با استفاده از گروههای شناخته شده به عنوان بلوك ساختمانی، گروههای دیگری را هم بسازیم. ازاین طریق، ۴ـ گروه کلاین رامی‌توان از گروههای دوری به‌دست آورد. درفصل بعد نشان خواهیم داد، که با به‌کاربستن این روش درمورد گروههای دوری دستهٔ وسیعی از گروههای آبلی به‌دست می‌آید که شامل تمام گروههای آبلی متناهی می‌شود. اکنون با تعریفی ازنظریهٔ مجموعه‌ها کارخودرا آغاز می‌کنیم.

تعریف. حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های S_1، S_2، ... و S_n عبارت است از مجموعهٔ تمام nتایی‌های مرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ که به‌ازای هر i، $a_i \in S_i$. حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های فوق با نماد

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

یا

$$\prod_{i=1}^{n} s_i$$

نمایش داده می‌شود.

می‌توان حاصلضرب دکارتی تعدادی نامتناهی ازمجموعه‌ها راهم تعریف کرد، اما به‌طورقابل توجهی پیچیده‌تراست ومارابدان نیازی نیست.

اکنون فرض کنیم G_1، G_2، ...، G_n گروه باشند و برای عملهای همهٔ آنها نماد ضربی رابه‌کاربریم. با درنظر گرفتن G_i به عنوان مجموعه، $\prod_{i=1}^{n} G_i$ را تشکیل می‌دهیم. نشان خواهیم داد که باعمل دوتایی ضرب مؤلفه‌ای می‌توان به $\prod_{i=1}^{n} G_i$ ساختار گروهی داد. مجدداً خاطرنشان می‌کنیم که، با به‌کاربردن همان نماد مجموعهٔ اعضای گروه به عنوان نماد خود گروه، تسامح به خرج می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۰۸ فرض کنیم G_1، G_2، ... و G_n گروه باشند. برای $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ از $\prod_{i=1}^{n} G_i$ حاصلضرب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ را $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت $\prod_{i=1}^{n} G_i$ تحت این عمل دوتایی یك گروه است و **حاصلضرب مستقیم خارجی گروههای** G_i نامیده می‌شود.

برهان. توجه کنید که چون $a_i \in G_i$، $b_i \in G_i$ و G_i گروه است پس $a_ib_i \in G_i$. بنابراین عمل دوتایی در $\prod_{i=1}^{n} G_i$ که درصورت قضیه آمده است موجه می‌باشد، یعنی G تحت عمل دوتایی بسته‌است.

شرکتپذیری در $\prod_{i=1}^{n} G_i$ به صورت زیر به شرکتپذیری درمؤلفه‌ها برمی‌گردد:

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2, \ldots, a_n)[(b_1, b_2, \ldots, b_n)(c_1, c_2, \ldots, c_n)] \\
&= (a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1c_1, b_2c_2, \ldots, b_nc_n) \\
&= (a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2), \ldots, a_n(b_nc_n)) \\
&= ((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2, \ldots, (a_nb_n)c_n) \\
&= (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)(c_1, c_2, \ldots, c_n) \\
&= [(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n)](c_1, c_2, \ldots, c_n).
\end{aligned}$$

اگر e_i عضوهمانی G_i باشد، آنگاه بدیهی است که باضرب مؤلفه‌ای، $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ عضوهمانی $\prod_{i=1}^{n} G_i$ است. معکوس $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ عضو $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$ است؛ تنها حاصلضرب مؤلفه‌ای آنها راحساب کنید. بنابراین $\prod_{i=1}^{n} G_i$ گروه است. □

هنگامی که عمل هر G_i تعریفپذیر باشد ، گاهی در $\prod_{i=1}^{n} G_i$ نماد جمعی را به‌کار می‌بریم و $\prod_{i=1}^{n} G_i$ را **حاصلجمع مستقیم خارجی گروههای** G_i می‌خوانیم. دراین حالت گاهی از نماد $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ به‌جای $\prod_{i=1}^{n} G_i$ استفاده می‌شود، مخصوصاً در مورد گروههای آبلی باعمل $+$. حاصلجمع مستقیم گروههای آبلی G_1 ، G_2 ، . . . و G_n را می‌توان به‌صورت $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ هم نوشت. اثبات بدیهی این مطلب راکه حاصلضرب مستقیم‌خارجی گروههای آبلی خود گروهی آبلی است به‌صورت یك تمرین رها می‌کنیم.

به‌سهولت مشاهده می‌شود که اگر مجموعهٔ S_i دارای r_i عضو باشد، $i = 1, 2, \ldots, n$، آنگاه $\prod_{i=1}^{n} S_i$ دارای $r_1 r_2 \cdots r_n$ عضو است، زیرا برای nتایی‌های مرتب ، r_1 انتخاب برای مؤلفهٔ‌اول ازمجموعهٔ S_1 وجود دارد، وبرای هریك ازاینها r_2 انتخاب برای‌مؤلفه بعدی از S_2 وجود دارد وقس علیهذا.

مثال ۱.۸ گروه $Z_2 \times Z_3$ را در نظر می گیریم که دارای $6 = 2.3$ عضو، به صورت $(0,0)$، $(0,1)$، $(0,2)$، $(1,0)$، $(1,1)$ و$(1,2)$ است. ادعامی کنیم که $Z_2 \times Z_3$ دوری است. تنها کافیست که یکی ازمولدهارا بیابیم. عضو $(1,1)$ را درنظرمی گیریم. دراینجا اعمال در Z_2 و Z_3 جمعی نوشته می‌شوند، ازاینرو درحاصلضرب مستقیم خارجی $Z_2 \times Z_3$ نیز همین کاررا می کنیم

$$(1, 1) = (1, 1)$$
$$2(1, 1) = (1, 1) + (1, 1) = (0, 2)$$
$$3(1, 1) = (1, 1) + (1, 1) + (1, 1) = (1, 0)$$
$$4(1, 1) = 3(1, 1) + (1, 1) = (1, 0) + (1, 1) = (0, 1)$$
$$5(1, 1) = 4(1, 1) + (1, 1) = (0, 1) + (1, 1) = (1, 2)$$
$$6(1, 1) = 5(1, 1) + (1, 1) = (1, 2) + (1, 1) = (0, 0)$$

پس $(1,1)$ تمام گروه $Z_2 \times Z_3$ را تولید می کند. چون، درحد ایزومورفیسم، ازهرمرتبهٔ مفروض دقیقاً یك گروه دوری وجود دارد. بنابراین $(Z_2 \times Z_3) \simeq Z_6$. □

مثال ۲.۸ گروه $Z_3 \times Z_3$ را بررسی می‌کنیم. این گروه ۹ عضو دارد. نشان خواهیم داد که $Z_3 \times Z_3$ با Z_9 ایزومورف نیست. کافی است نشان دهیم که $Z_3 \times Z_3$ دوری نیست. چون جمع مؤلفه‌ای است وچون در Z_3 هرعضوی که ۳ بار با خودش جمع شود عضو همانی به‌دست می‌آید، پس در $Z_3 \times Z_3$ نیز چنین است. بنابراین هیچ عضوی نمی‌تواند گروه را تولید کند، زیرا یك مولد فقط وقتی ۹ مرتبه با خودش جمع شود عضو همانی به‌دست می‌آید. گروه دیگری ازمرتبهٔ ۹ یافته‌ایم. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $Z_2 \times Z_2$ دوری‌نیست. بنابراین $Z_2 \times Z_2$ باید با ۴ — گروه کلاین ایزومورف باشد. □

این دومثال قضیهٔ زیررا روشن می کنند.

قضیهٔ ۲.۸ گروه $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ با $\mathbf{Z}_{mn}$ ایزومورف است اگر و فقط اگر m و n متباین باشند؛ یعنی بمعم m و n عدد ۱ باشد.

برهان. زیر گروه دوری $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ را که با $(1,1)$، چنان‌که در قضیهٔ ۳.۲ بیان شد، تولید می‌شود در نظر می‌گیریم. همان‌طور که کار قبلی‌مان نشان می‌دهد، مرتبهٔ این گروه دوری کوچکترین توان $(1,1)$ است که عضو همانی $(0,0)$ را به‌دست می‌دهد. دراینجا با استفاده از نمادگذاری جمعی، توانی از $(1,1)$، مشتمل بر متوالیاً جمع کردن $(1,1)$ با خودش خواهد بود. تحت جمع مؤلفه‌ای، مؤلفهٔ اول ۱ از $\mathbf{Z}_m$ تنها پس از m جمع، $2m$ جمع ونظایرآن ۰ را به دست می‌دهد و مؤلفهٔ دوم ۱ از $\mathbf{Z}_n$ تنها پس از n جمع، $2n$ جمع ونظایرآن ۰ را به‌دست می‌دهد. برای آن‌که به‌طورهمزمان ۰ ایجاد کنند، تعداد عوامل جمع باید مضربی از هردو n,m باشد. کوچکترین عددی که مضربی از هردو n,m است mn خواهد بود اگر وفقط اگر بمعم m و n عدد ۱ باشد. دراین صورت $(1,1)$ زیرگروهی دوری از مرتبهٔ mn تولید می‌کند، که مرتبهٔ خود گروه است. این نشان می‌دهد که $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ با $\mathbf{Z}_{mn}$ ایزومورف است اگر و فقط اگر m و n متباین باشند.

اگر بمعم m و n عددی بزرگتراز یك مانند d باشد، آنگاه mn/d برهردو m و n بخشپذیر است. درنتیجه، برای هر (r, s) از $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$، داریم

$$\underbrace{(r, s) + (r, s) + \cdots + (r, s)}_{mn/d \text{ مرتبه}} = (0, 0)$$

بنابراین هیچ عضوی چون (r, s) از $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ نمی‌تواند تمام گروه را تولید کند؛ ازاینرو $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ دوری نیست و بنابراین با $\mathbf{Z}_{mn}$ ایزومورف نمی‌باشد. □

واضح است که با استدلالی استقرایی می‌توان این قضیه را به حاصلضرب بیش از دوعامل هم تعمیم داد. بدون آن‌که وارد جزئیات اثبات شویم، این مطلب را به صورت نتیجه‌ای بیان می‌کنیم

نتیجه گروه $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_{m_i}$ دوری و با $\mathbf{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_n}$ ایزومورف است اگر و فقط اگر اعداد m_i، $i = 1, 2, \ldots, n$ دو به دومتباین باشند.

مثال ۳.۸ نتیجهٔ فوق نشان می‌دهد که اگر n را بـه حاصلضربی از توانهای اعداد اول متمایز، به صورت

$$n = (p_1^{n_1})(p_2^{n_2})\cdots(p_r^{n_r})$$

بنویسیم، آنگاه $\mathbf{Z}_n$ ایزومورف خواهد بود با

$$\mathbf{Z}_{(p_1)^{n_1}} \times \mathbf{Z}_{(p_2)^{n_2}} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{(p_r)^{n_r}}$$

مثلا ، $\mathbf{Z}_{۷۲}$ ایزومورف است با $\mathbf{Z}_۸ \times \mathbf{Z}_۹$. □

موارد متعددی پیش آمده است که مفهوم کوچکترین توان مثبت عضوی از یك گروه راکه عضو همانی را به دست می‌دهد به کار برده‌ایم. وقت آن رسیده است که نام متداول آن را معرفی کنیم.

تعریف فرض کنیم G یك گروه باشد و $a \in G$. اگرعددی طبیعی چون n وجود داشته باشد که $a^n = e$، آنگاه کوچکترین این اعداد **مرتبهٔ** a است. اگرچنین nی وجودنداشته باشدآنگاه n از مرتبهٔ بینهایت است.

این بدیهی است که اگر a عضوی از گروه G باشد ، مرتبهٔ a همان مرتبهٔ زیر گروه دوری تولید شده به وسیلهٔ a است . این حکم بسیارمفید را باید به خاطرسپرد.

قضیهٔ ۳.۸ فرض کنیم $(a_۱, a_۲, \ldots a_n) \in \prod_{i=۱}^{n} G_i$، اگرعضو a_i در G_i از مرتبهٔ متناهی r_i باشد آنگاه مرتبهٔ $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ در $\prod_{i=۱}^{n} G_i$ برابر است با کوچکترین مضرب مشترك تمام r_i ها.

برهان. این مطلب با تکرار استدلالی که دراثبات قضیهٔ ۲.۸ به‌کار رفت حاصل می‌شود. برای این‌که توانی از $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ برابر با $(e_۱, e_۲, \ldots, e_n)$ باشد، باید این توان درعین حال مضربی از $r_۱$ باشد تا توان اولین مؤلفه یعنی $a_۱$ بشود $e_۱$ ، مضربی از $r_۲$ باشد تا توان دومین مؤلفه یعنی $a_۲$ بشود $e_۲$ وقس علیهذا. □

بدیهی است که اگر $\prod_{i=۱}^{n} G_i$ حاصلضرب مستقیم گروههای G_i باشد آنگاه زیر مجموعهٔ

$$\bar{G}_i = \{(e_۱, e_۲, \ldots, e_{i-۱}, a_i, e_{i+۱}, \ldots, e_n) \mid a_i \in G_i\},$$

یعنی، مجموعهٔ تمام nتاییهایی که تمام مؤلفه‌ها ، مگرمؤلفهٔ iم آنها ، عضو همانی باشند ، زیر گروهی است از $\prod_{i=۱}^{n} G_i$. همچنین واضح است که این زیر گروه $\bar{G}_i$ به‌طورطبیعی با G_i، تحت ایزومورفیسم داده شده با نگاشت تصویری π_i ، که درآن

$$(e_۱, e_۲, \ldots, e_{i-۱}, a_i, e_{i+۱}, \ldots, e_n)\, \pi_i = a_i,$$

ایزومورف است. گروه G_i درمؤلفهٔ iم اعضای $\bar{G}_i$ دیده می‌شود وعضو e_j درمؤلفه‌های دیگرصرفاً همراهی‌می کند. گروه $\prod_{i=۱}^{n} G_i$ حاصلضرب مستقیم داخلی این‌زیر گروههای $\bar{G}_i$ نامیده‌می‌شود. اصطلاحات‌داخلی‌وخارجی که به‌دنبال‌حاصلضرب مستقیم گروههامی آیندمبین آن است که‌آیا گروههای مؤلفه‌های حاصلضرب به‌صورت‌زیر گروههای گروه حاصلضرب تلقی می‌شوند یا نه . ازاین فصل به‌بعد معمولا کلمات خارجی یا داخلی را حذف می کنیم

و تنها می‌گوییم حاصلضرب مستقیم. این که کدام اصطلاح مورد نظر است از متن مستفاد می‌شود. در بخش ۲.۸ (ستاره‌دار) برای علاقه‌مندان شرحی دقیق ازحاصلضرب مستقیم داخلی داده می‌شود. تعریفی اساسی ازنظریهٔ مجموعه‌ها وهمچنین قضیه‌ای اساسی ازنظریهٔ گروهها موردنیاز خواهند بود. اینها راکه موارد استفادهٔ دیگری هم خواهند داشت در اینجا بیان می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم $\{S_i | i \in I\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد. دراینجا I می‌تواند هرمجموعه‌ای از اندیسها باشد. مقطع $\bigcap_{i\in I} S_i$ ازمجموعه‌های S_i مجموعهٔ تمام اعضایی است که به همهٔ S_iها تعلق دارند، یعنی

$$\bigcap_{i\in I} S_i = \{x | x \in S_i \text{ ،} I \text{ از } i \text{ به‌ازای هر}\}$$

اگر I متناهی باشد، $I = \{1, 2, \ldots, n\}$، می‌توان $\bigcap_{i\in I} S_i$ را با نماد

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$$

هم نمایش داد.

قضیهٔ ۴.۸ مقطع زیرگروههای H_i، $i \in I$، از یك گروه G خود زیرگروهی از G است.

برهان. ابتدا بسته بودن را ثابت می‌کنیم. اگر $a, b \in \bigcap_{i\in I} H_i$، آنگاه به‌ازای هر i از I، $a, b \in H_i$ ودرنتیجه به ازای هر i از I، $ab \in H_i$. ازاینجا نتیجه می‌شود که $ab \in \bigcap_{i\in I} H_i$.

چون به‌ازای هر i از I، H_i زیر گروهی از G است پس به‌ازای هر i از I، $e \in H_i$ وبنابراین $e \in \bigcap_{i\in I} H_i$.

سرانجام، فرض کنیم که $a \in \bigcap_{i\in I} H_i$. دراین‌صورت به‌ازای هر i از I، $a \in H_i$، بنابراین a^{-1} نیز عضو هر H_i است ودرنتیجه $a^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. □

۲.۸* حاصلضرب مستقیم داخلی

تعریف. فرض کنیم گروه G دارای زیر گروههای H_i، $i = 1, 2, \ldots, n$، باشد اگر نگاشت $\phi: \prod_{i=1}^{n} H_i \to G$ که با ضابطهٔ

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n)\,\phi = h_1 h_2 \cdots h_n$$

تعریف می‌شود یك ایزومورفیسم باشد آنگاه G حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای H_1، H_2، ...، و H_n است.

توجه کنید که تحت ایزومورفیسم ϕ، هر زیرگروه H_i از $\prod_{i=1}^{n} H_i$ به‌طورطبیعی بروی H_i نگاشته می‌شود. از نقطه نظر ایزومورفیسم بیان شدهٔ دراین تعریف، هرچه در مورد یکی از حاصلضربهای مستقیم داخلی یا مستقیم خارجی مشاهده شود، تعبیر بلافصل مشابهی درمورد دیگری خواهد داشت.

قضیهٔ ۵.۸ اگر G حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای H_1، H_2، ...، و H_n باشد آنگاه هرعضو g از G را می‌توان منحصراً به صورت $g=h_1 h_2 \cdots h_n$ که $h_i \in H_i$ نوشت.

برهان. بااستفاده از ایزومورفیسمی که درتعریف آمد، کافی است نشان دهیم که حکم مشابه درمورد حاصلضرب مستقیم‌خارجی $\prod_{i=1}^{n} H_i$ نسبت به زیرگروههای $\bar{H}_i$ که به‌طورطبیعی با H_iها ایزومورف هستند، برقرار است. باید نشان دهیم که هرعضو $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ را می‌توان منحصراً به‌صورت حاصلضرب

$$(a_1, e_2, \ldots, e_n)(e_1, a_2, \ldots, e_n)\cdots(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, a_n),$$

که در آن $a_i \in H_i$، نوشت. این بدیهی است که باید داشته باشیم $a_i = h_i$. □

تعریف وقضیهٔ اخیرنشان می‌دهند که مطالعهٔ حاصلضرب اعضای زیرگروههای متمایز یك گروه مفروض‌درخور توجه‌است. درباقیماندهٔ این فصل، ماحاصلضرب فقط‌دو زیرگروه از یك گروه را درنظرمی‌گیریم؛ گرچه تعریفها وقضیه‌ها را می‌توان به‌حالت کلی‌تعمیم داد.

فرض کنیم H و K زیرگروههایی ازیك گروه G باشند می‌خواهیم $\{hK \mid h \in H, k \in K\}$ را که با HK نشان داده می‌شود مورد بررسی قرار دهیم. متأسفانه، لزوماً این مجموعهٔ HK زیرگروهی از G نیست، چونکه عضو $h_1 k_1 h_2 k_2$ لزوماً به‌صورت hk نیست. البته اگر G آبلی باشد، یاحتی‌اگرهرعضو h از H با هرعضو k از K **تعویضپذیر** باشد، یعنی همواره $hk = kh$، آنگاه

$$h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h_2 k_1 k_2 = h_3 k_3.$$

دراینجا $k_3 = k_1 k_2$, $h_3 = h_1 h_2$ به‌ترتیب اعضای K, H هستند. به سادگی می‌توان نشان داد که دراین‌حالت HK زیرگروه G است، زیرا

$$(hk)^{-1} = k^{-1} h^{-1} = h^{-1} k^{-1}, e = ee$$

سعی می‌کنیم درحالت تعویض‌ناپذیری هم زیرگروهی بسازیم. توجه‌کنید که همواره حداقل یك زیرگروه از G شامل HK وجود دارد، وآن خود G است.

تعریف. فرض کنیم H و K زیرگروههای یك گروه مفروض G باشند. دست $H \vee K$ از H و K، مقطع تمام زیرگروههایی از G است که شامل $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ هستند.

به‌وضوح، این مقطع عبارت از کوچکترین زیرگروه ممکن از G است که شامل مجموعهٔ HK است. اگر اعضای H با اعضای K تعویضپذیر باشند، و بالاخص اگر G آبلی باشد، آنگاه $H \vee K = HK$. توجه‌کنید که چون $h = he$, $k = ek$، $H \subseteq HK$، $K \subseteq HK$، ازاینرو $H \leqslant H \vee K$ و $K \leqslant H \vee K$. اما واضح است که $H \vee K$

زیر گروه هر گروهی است که شامل H و K هردو باشد. بنا براین ملاحظه می‌شود که $H \vee K$ کوچکترین زیرگروه G است که شامل هم H و هم K باشد.

با قضیه‌ای متعارف که در فصلهای ستاره‌دار آینده مورد استفاده قرار می گیرد این فصل را خاتمه می‌دهیم.

قضیهٔ ۶.۸ یك گروه G حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای H و K است اگر و فقط اگر:

۱) $G = H \vee K$،

۲) به ازای هر h از H و هر k از K، $hk = kh$،

۳) $H \cap K = \{e\}$.

برهان. فرض کنیم G حاصلضرب مستقیم داخلی H و K باشد. اگر توجه کنیم که با ایزومورفیسم $\phi : (h, k) \to hk$، گروه G با حاصلضرب مستقیم خارجی H و K ایزومورف است، احکام ۱، ۲ و ۳ بدیهی خواهند بود. تحت این ایزومورفیسم

$$\bar{H} = \{ (h, e) \mid h \in H \}$$

متناظر خواهد بود با H و

$$\bar{K} = \{ (e, k) \mid k \in K \}$$

متناظر خواهد بود با K. اکنون شرایط ۱، ۲ و ۳ بلافاصله از احکام متناظر در مورد K و H به‌عنوان زیر گروههای $H \times K$، که بدیهی هستند، نتیجه می‌شوند.

به‌عکس فرض کنیم شرایط ۱، ۲ و ۳ برقرار باشند. باید نشان دهیم که نگاشت ϕ از حاصلضرب مستقیم خارجی $H \times K$ بتوی G تعریف شده توسط $(h, k)\phi = hk$ یك ایزومورفیسم است. نگاشت ϕ قبلا هم تعریف شده است.

فرض کنیم

$$(h_1, k_1)\phi = (h_2, k_2)\phi.$$

در این صورت $h_1 k_1 = h_2 k_2$ و در نتیجه $h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}$. اما $h_2^{-1} h_1 \in H$ و $k_2 k_1^{-1} \in K$، و این دو عضو برابرند و لذا بنا به شرط (۳) در $H \cap k = \{e\}$ قرار دارند. بنابراین $h_2^{-1} h_1 = e$ و از اینجا $h_1 = h_2$. همچنین $k_1 = k_2$، از اینرو $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$. این نشان می‌دهد که ϕ یك به‌یك است.

این واقعیت که بنا به (۲) برای هر h از H و هر k از K، $hk = kh$ بدین معنی است که

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

یك گروه است. زیرا قبلا دیده‌ایم که اگر اعضای H با اعضای K تعویضپذیر باشند این

مطلب صحیح است. پس بنا به شرط ۱، $HK = H \vee K = G$، از اینرو ϕ بروی G است. سرانجام

$$[(h_1, k_1)(h_2, k_2)]\phi = (h_1 h_2, k_1 k_2)\phi = h_1 h_2 k_1 k_2$$

درحالی که

$$[(h_1, k_1)\phi][(h_2, k_2)\phi] = h_1 k_1 h_2 k_2.$$

اما بنا به شرط ۲ داریم $k_1 h_2 = h_2 k_1$. پس

$$[(h_1, k_1)(h_2, k_2)]\phi = [(h_1, k_1)\phi][(h_2, k_2)\phi]. \quad \square$$

تمرین

۱.۸ هشت عضو $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ را بنویسید و مرتبهٔ هریک را پیدا کنید. آیا این گروه دوری است؟

۲.۸ بزرگترین مرتبه در بین مرتبه‌های تمام زیرگروههای دوری هر یك از گروههای $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_8$ و $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{15}$ چیست؟

۳.۸+ ثابت کنید که هرحاصلضرب مستقیم خارجی گروههای آبلی خود یك گروه آبلی است.

۴.۸ همهٔ زیرگروههای واقعی و نابدیهی $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ را پیدا کنید.

۵.۸ بدون درنظر گرفتن ترتیب عوامل، به هر چند صورتی که ممکن باشد حاصلضرب مستقیم دو یا چند گروه به شکل $\mathbf{Z}_n$ را بنویسید تا حاصلضرب به‌دست آمده با $\mathbf{Z}_{60}$ ایزومورف باشد.

۶.۸ فواصل خالی را پر کنید.

— ا) مرتبهٔ زیرگروه دوری $\mathbf{Z}_{24}$ تولید شده توسط ۱۸ عبارت است از ــــــ.

— ب) مرتبهٔ $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4$ برابر است با ــــــ.

— ج) عضو $(4, 2)$ از $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_8$ ازمرتبهٔ ــــــ است.

— د) ۴ـ گروه کلاین ایزومورف است با $\mathbf{Z}__ \times \mathbf{Z}__$.

— هـ) گروه $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_4$ دارای ــــــ عضو ازمرتبهٔ متناهی است.

۷.۸ درستی یا نادرستی هریك از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) اگر G_1 و G_2 گروه باشند آنگاه $G_1 \times G_2$ همواره با $G_2 \times G_1$ ایزومورف است.

— ب) به‌شرط آن که محاسبه درهریك ازمؤلفه‌ها را بدانیم، محاسبه درهرحاصلضرب مستقیم خارجی را نیز می‌دانیم.

— ج) برای تشکیل یك حاصلضرب مستقیم خارجی باید گروههای از مرتبه‌های متناهی را به‌کار ببریم.

— د) هر گروه ازمرتبهٔ عددی اول نمی‌تواند حاصلضرب مستقیم داخلی دو زیرگروه واقعی

خودش باشد.

— ه) $Z_2 \times Z_4$ با گروه Z_8 ایزومورف است.

— و) $Z_2 \times Z_4$ با گروه S_8 ایزومورف است.

— ز) گروه $Z_2 \times Z_8$ با گروه S_4 ایزومورف است.

— ح) هرعضو $Z_4 \times Z_8$ از مرتبهٔ ۸ است.

— ط) مرتبهٔ $Z_{12} \times Z_{15}$ برابر است با ۶۰.

— ی) $Z_m \times Z_n$ دارای mn عضو خواهد بود چه m و n متباین باشند و چه نباشند.

۸.۸ همهٔ زیرگروههای واقعی $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ را پیدا کنید.

۹.۸ همهٔ زیرگروههای $Z_2 \times Z_2 \times Z_4$ را که با ۴ — گروه کلاین ایزومورف هستند تعیین کنید.

۱۰.۸ مثالی بیاورید که نشان‌دهد هر گروه آبلی لزوماً به‌صورت حاصلضرب مستقیم داخلی دوزیرگروه واقعی‌خودش نیست. (تمرین ۱۶.۸ را برای یك مثال متناظر در مورد گروههای ناآبلی ملاحظه کنید.)

۱۱.۸ فرض کنید G یك گروه آبلی باشد. فرض کنید H زیر مجموعهٔ متشکل از عضو همانی e همراه با تمام اعضای ازمرتبهٔ دو ازگروه G باشند. ثابت کنید H یك زیرگروه G است.

۱۲.۸ در رابطه با مسألهٔ ۱۱.۸، اگر H شامل e و تمام اعضای از مرتبهٔ ۳ از G باشد، آیا همواره H زیرگروهی ازگروه آبلی G خواهد بود؟ درمورد تمام اعضای از مرتبهٔ ۴ چطور؟ به‌ازای چه مقادیرطبیعی n، مجموعهٔ H متشکل ازعضو همانی و تمام اعضای از مرتبهٔ n از G، همواره یك زیرگروه G است؟ با تمرین ۱۲.۳ مقایسه شود.

۱۳.۸ یك مثال نقض برای تمرین ۱۱.۸ که درآن شرط آبلی بودن G حذف شده باشد پیدا کنید.

۱۴.۸ گاهی می‌شنوید که افرادی، بدون توجه می‌گویند «هر مقطع چندگروه یك گروه است». اشکال این گفته درچیست؟

***۱۵.۸** قضیه‌ای مشابه قضیهٔ تمرین ۳.۸ در مورد گروهی که حاصلضرب مستقیم داخلی چند زیرگروه باشد بیان کنید.

***۱۶.۸** نشان دهید که S_3 از مثال ۱.۴ حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای

$$H = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\} \quad \text{و} \quad K = \{\rho_0, \mu_1\}$$

نیست.

*۱۷.۸ فرض کنید که $n=rs$ و r و s متباین باشند، یعنی بمعم r و s برابر با یك باشد. نشان دهید که $\mathbf{Z}_n$ حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای دوری $\langle r\rangle$ و $\langle s\rangle$ است.

*۱۸.۸ زیرگروههای $H=\langle ۲\rangle$ و $K=\langle ۶\rangle$ از گروه $\mathbf{Z}_{۱۲}$ را در نظر بگیرید. HK و $H\vee K$ را پیدا کنید.

*۱۹.۸ زیرگروههای

$$K=\{\rho_۰,\ \mu_۲\}\quad \text{و}\quad H=\{\rho_۰,\ \mu_۱\}$$

از $S_۳$ در مثال ۱.۴ مفروض هستند. HK و $H\vee K$ را بیابید.

*۲۰.۸ زیرگروههای

$$K=\{\rho_۱,\ \delta_۲\}\quad \text{و}\quad H=\{\rho_۰,\ \delta_۱\}$$

از گروه $D_۴$ متشکل از تقارنهای مربع در مثال ۲.۴ مفروضند. HK و $H\vee K$ را پیدا کنید.

*۲۱.۸ گروه G داده شده است. فرض کنید h و k دو عضو تعویضپذیر از G و به‌ترتیب از مرتبه‌های اعداد متباین r و s باشند. قضیهٔ ۶.۸ در مورد زیرگروههای $\langle h\rangle$ و $\langle k\rangle$ از $\langle h\rangle\vee\langle k\rangle$ را به‌کار برید و نشان دهید که hk از مرتبهٔ rs است.

۹

گروه آبلی متناهیاً تولید شده

فهمیدن و به‌کار بردن برخی از قضیه‌های جبر مجرد، گرچه ممکن است اثباتشان کاملا فنی و وقت‌گیر باشد، ساده است. این اولین فصل از چند فصل این متن است که در آن معنی و مفاد برخی از قضیه‌ها را بیان می‌کنیم و از شما می‌خواهیم که بدون اثبات آنها را به کار ببرید. اثباتها عموماً در بخشهای ستاره‌دار بعدی ارائه شده‌اند. در حال حاضر حجم منابع ریاضی آنچنان عظیم است که اگر ریاضیدانی اصرار داشته باشد جزئیات اثبات‌هر قضیه‌ای را که به‌کار می‌برد مو به‌مو خود امتحان کند، هرگز به مرزهای مهم موضوع نخواهد رسید. قضیه‌هایی را که بدون اثبات در بخشهای بی‌ستاره عرضه می‌کنیم کاملا در حد فهم شما هستند، و احساس می‌کنیم که شما باید با آنها آشنا شوید. اگر اصرار داشته باشیم که شما اثبات کامل همهٔ قضیه‌ها را ببینید غیرممکن خواهد بود که در یك کلاس کارشناسی، آن هم درطول یك نیمسال تحصیلی، به‌همهٔ این مفاهیم جالب برسید.

۱.۹ مولد و تاب

اولین مفهومی را که تعریف می‌کنیم اهمیت زیادی برایمان خواهد داشت. برخلاف عادت گذشته، ابتدا تعریف ظریفی را ارائه می‌کنیم و سپس دریك قضیه به شرح ساده‌ای از آن می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که بنا به‌قضیهٔ ۴.۸، مقطع هر تعداد از زیرگروههای یك گروه، خود یك گروه است. فرض کنیم G یك گروه باشد و به‌ازای هر i از مجموعهٔ اندیسگذاری مانند I، a_i عضوی ازگروه باشد. حداقل یك زیرگروه از G وجود دارد

که‌شامل همهٔ a_iهاست، مثلا خود G. به‌وضوح، مقطع تمام زیرگروههای G که شامل همهٔ a_iها باشند. کوچکترین زیرگروه از G است که شامل همهٔ a_iها، $i\in I$، هست.

تعریف فرض‌کنیم G یك گروه‌باشد و برای هر i از I، $a_i\in G$. کوچکترین زیر گروه G شامل $\{a_i|i\in I\}$ زیرگروه تولید شده توسط $\{a_i|i\in I\}$ نامیده می‌شود. اگر این زیر گروه خود G باشد آنگاه گفته می‌شود که $\{a_i|i\in I\}$، G را تولید می‌کند و a_iها مولدهای G هستند. اگر مجموعه‌ای متناهی مانند $\{a_i|i\in I\}$ گروه G را تولید کند آنگاه G یك گروه متناهیاً تولید شده نامیده می‌شود.

توجه داشته باشید که این تعریف با تعریف قبلی ما دربارهٔ مولـدی برای یك گروه دوری سازگار است. حتماً دقت کنید که قضیهٔ زیر برای هر گروه بیان و اثبات می‌شود، و نه‌تنها برای گروههای آبلی.

قضیهٔ ۱.۹ اگر G یك‌گروه باشد و به‌ازای هر i از I، $a_i\in G$، آنگاه زیر گروه H از G تولید شده به توسط $\{a_i|i\in I\}$ دقیقاً از تمام اعضایی از G تشکیل می‌شود که به‌صورت حاصلضربی متناهی از توانهای صحیح a_iها باشند؛ دراینجا توانهای یك a_i ثابت می‌تواند چندین بار در حاصلضرب ظاهر شود.

برهان. بـدین دلیل ممکن است مجبور بـاشیم توانهـای مختلفی از یك a_i ثـابت را چندین مرتبه دریك حاصلضرب بیاوریم که G آبلی فرض نشده است. اگر G آبلی باشد آنگاه عبارت $(a_1)^{-3}(a_2)^5(a_1)^7$ را می‌توان به‌صورت $(a_1)^4(a_2)^5$ ساده کرد. اما این کار درحالت گروههای ناآبلی ممکن است درست نباشد.

فرض‌کنیم K مجموعهٔ تمام حاصلضربهای متناهی از توانهای صحیح a_iهـا باشد. واضح است که $K\subseteq H$. کافی است ملاحظه کنیم که K یك‌زیر گروه است و آنگاه، چون H کـوچکترین زیر گروه شامل همهٔ a_iهـا، برای $i\in I$، است، کـار تمام است.

بدیهی‌است که‌حاصلضرب هردوعضو K به‌K تعلق دارد. چون $(a_1)^0=e$، پس $e\in K$. به‌ازای هرعضو k از K، اگر با استفاده از عواملی که در k هست عضو جدیدی بسازیم که ترتیب عواملش درست برعکس ترتیب عوامل در k باشد وتوان هرعامل قرینه‌توان همان عامل در k، این عضو مساوی k^{-1} خواهد بود، که بنابراین در K است. به‌عنوان مثال

$$(a_1^3a_2^2a_1^{-7})^{-1}=a_1^7a_2^{-2}a_1^{-3}$$

که خود عضوی است از K. □

مثال ۱.۹ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_2$ به‌وسیلهٔ $\{(1\ 0),\ (0,\ 1)\}$ تولید می‌شود. □

دانشجویی که بخش *۲.۸ را مطالعه کرده است باید توجه کند که اگر A و B زیر

گروههایی از G باشند آنگاه زیرگروه وست $A \setminus B$ دقیقاً زیرگروه تولید شده به‌وسیلهٔ $A \cup B$ است.

گرچه در این فصل بیشتر گروههای آبلی مورد بررسی هستند، اما در بحث‌های کلی خود به طور ثابت از نمادگذاری ضربی استفاده می‌کنیم. تجربه نشان داده است که نماد a^n برای دانشجویان از نماد na محسوس‌تر است. در مورد نماد دوم این سوء-تفاهم پیش می‌آید که گویی n عضوی از گروه است.

تعریف گروه G یک‌گروه‌تابی است در صورتی که هر عضو آن از مرتبهٔ متناهی باشد. G بدون تاب است در صورتی که بجز عضو همانی عضوی از مرتبهٔ متناهی نداشته باشد.

قضیهٔ ۲.۹ در هرگروه‌آبلی G، مجموعهٔ T متشکل ازهمهٔ اعضای از مرتبهٔ متناهی G، یک زیرگروه G است، به‌نام **زیرگروه تابی** G.

برهان. نمادگذاری ضربی را به‌کارمی‌بریم. فرض‌کنیم a و b اعضایی‌از T باشند. اعداد طبیعی m و n وجود دارند به طوری کـه $a^m = b^n = e$. چون G آبلی است

$$(ab)^{mn} = a^{mn}b^{mn} = (a^m)^n(b^n)^m = e^n e^m = e$$

بنابراین ab از مرتبهٔ متناهی و از اینرو عضو T است. این نشان می‌دهد که T تحت عمل گروه بسته است.

بدیهی است که e هم از مرتبهٔ متناهی و در نتیجه عضو T است.

سرانجام، اگر $a \in T$ آنگاه، عددی طبیعی مانند m هست که $a^m = e$، بنابراین

$$e = e^m = (aa^{-1})^m = a^m(a^{-1})^m = e(a^{-1})^m = (a^{-1})^m.$$

پس a^{-1} نیز از مرتبهٔ متناهی و از اینرو عضو T است. □

مثال ۲.۹ هر گروه متناهی یک گروه تابی است، در حالی که $\mathbf{Z}$ تحت جمع گروهی است بدون تاب. اگر گروه $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_2$ را در نظر بگیریم عضو $(1, 0)$ از مرتبهٔ متناهی نیست، اما عضو $(0, 1)$ از مرتبهٔ ۲ است. بدیهی است که $T = \{(0, 0), (0, 1)\}$ زیرگروه تابی $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_2$ است. □

۲.۹ قضیهٔ اساسی

اکنون چند لم راکه به قضیهٔ اصلی این فصل، قضیهٔ ۳.۹، منتهی می‌شوند بیان می‌کنیم. این لمها را ثابت نمی‌کنیم. قضیهٔ ۳.۹ در فصل ستاره‌دار ۲۰ ثابت خواهد شد. این‌قضیه درآن فصل بـرمبنای رشته لمهایی‌که اینجا آورده می‌شوند ثابت نمی‌شود. این لمهـای مقدماتی را بدین جهت‌آورده‌ایم‌که شما را به تدریج به‌درکی از ساختارگروهی بیان‌شدهٔ

در قضیه هدایت کنند.

لم ۱.۹ اگر G یك گروه آبلی متناهیاً تولید شده با زیرگروه تابی T باشد، آنگاه G با یك حاصلضرب مستقیم (داخلی) $T \times F$، که در آن F گروهی بدون تاب است. برابر می‌باشد.

برهان. این حکم از قضیهٔ ۳.۹، که درفصل ستاره‌دار ۲۰ ثابت شده‌است، نتیجه می‌شود. □

لم ۲.۹ هرگروه آبلی بدون تاب متناهیاً تولید شدهٔ F باحاصلضرب $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}$ از m عامل، ایزومورف است. عدد m منحصر به‌فرد است و عدد بتی F نامیده می‌شود.

برهان. این لم هم از قضیهٔ ۳.۹، که درفصل ستاره‌دار ۲۰ ثابت شده‌است، نتیجه‌می‌شود. □

لم ۳.۹ هرگروه آبلی متناهی T به دو صورت مختلف باحاصلضرب مستقیم گروههای دوری ایزومورف است:

۱) T با حاصلضرب مستقیمی به‌صورت

$$\mathbf{Z}_{p_1^{r_1}} \times \mathbf{Z}_{p_2^{r_2}} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p_n^{r_n}}$$

که در آن p_i ها اعدادی اول هستند و احیاناً نامتمایز، ایزومورف است. این حاصلضرب مستقیم گروههای دوری از مرتبهٔ توانهای اول که با T ایزومورف است، مگر احیاناً از نظر ترتیب عوامل، منحصر به‌فرد می‌باشد.

۲) T با حاصلضرب مستقیمی به صورت

$$\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{m_r}$$

ایزومورف است، که در آن هر m_i، m_{i+1} را عاد می‌کند. اعداد m_i که **ضرایب تاب** T نامیده می‌شوند، منحصر به‌فرد هستند.

برهان. حکم از قضیهٔ ۴.۹، که در فصل ستاره‌دار ۲۰ ثابت شده‌است، نتیجه می‌شود. □

اصطلاحات عددبتی و ضرایب تاب از توپولوژی جبری می‌آیند ودرآن درس نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

این واقعیت که اعداد اول p_i که در قسمت (۱) لم ۳.۹ دیده می‌شوند ممکن است متمایز نباشند اجتناب ناپذیراست. برای مثال، دیده‌ایم که $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_9$ با $\mathbf{Z}_{25} \times \mathbf{Z}_9$ ایزومورف نیست، برای این که درگروه اولی مرتبهٔ هرعضوحداکثر ۴۵ است درصورتی که گروه آخری، یك گروه دوری از مرتبهٔ ۲۲۵ می‌باشد.

برای یك لحظه به اهمیت و توان فوق‌العادهٔ لم ۳.۹ بیندیشید. این لم، در حد ایزومورفیسم، توصیفی برای تمام‌گروههای آبلی متناهی را به دست می‌دهد.

اکنون به‌تشریح روشی برای پیداکردن گروهی که به‌صورت (۲) از لم ۳.۹ بیان

شود و با حاصلضرب مستقیم مفروضی از گروههای دوری، با مرتبهٔ توانی از عددی اول، ایزومورف باشد می‌پردازیم. به ازای هر عدد اول موجود در مرتبهٔ گروه، تمام اندیسهای گروههـای دوری مفروض را که توانی از آن عدد اول هستند به ترتیب صعودی در یك سطر بنویسید. انتهای راست این سطرها را هم در یك ستون نگـاهدارید. مثلا در مورد گروه $Z_2 \times Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$ جدولی به صورت

۲	۴
۳	۳
	۵

حاصل می‌شود. آنگاه حاصلضرب اعداد هر ستون را به‌دست‌آورید. در این مورد اعداد ۶ و ۶۰ حاصل می‌شوند. پس گروه $Z_2 \times Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$ با $Z_6 \times Z_{60}$ ایزومورف است. به‌همین‌ترتیب، از گروه $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$ جدول

۲	۲	۲
	۳	۳
		۵
۲	۶	۳۰

حاصل می‌شود وبنابراین آن گروه با $Z_2 \times Z_6 \times Z_{30}$ ایزومورف است. با اثباتی صوری از صحت این الگوریتم را ارائه نمی‌کنیم. با استفاده از نظریهٔ عرضه شدهٔ در فصل ۸ و بالاخص از قضیهٔ ۲.۸ به‌سهولت می‌توانید دریابید که چرا این الگوریتم کار می‌کند.

مثال ۳.۹ بیایید تمام گروههای آبلی از مرتبهٔ ۳۶۰ را، در حد ایزومورفیسم، پیدا کنیم. ابتدا ۳۶۰ را به حاصلضرب توانهای اعداد اول تجزیه می‌کنیم، $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. آنگاه با استفاده از قسمت (۱) از لم ۳.۹ امکانات ذیل وجود دارند.

(۱ $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$

(۲ $Z_2 \times Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$

(۳ $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_5$

(۴ $Z_2 \times Z_4 \times Z_9 \times Z_5$

(۵ $Z_8 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$

(۶ $Z_8 \times Z_9 \times Z_5$

بنابراین، در حد ایزومورفیسم، ۶ گروه آبلی متمایز از مرتبهٔ ۳۶۰ وجود دارد. با حفظ

گروهها (درحد ایزومورفیسم) به ترتیب فوق، ذیلا این ۶ حالت را به‌صورت ۲ از لم ۳.۹ می‌نویسیم. بدین‌ترتیب، اولین گروه از فهرست بالا با اولین گروه از فهرست ذیل ایزومورف‌است و قس علیهذا. با استفاده از تذکرات قبل از این مثال، بررسی این ادعا آسان است.

۱) $Z_2 \times Z_6 \times Z_{30}$ ۲) $Z_6 \times Z_{60}$

۳) $Z_2 \times Z_2 \times Z_{90}$ ۴) $Z_2 \times Z_{180}$

۵) $Z_3 \times Z_{120}$ ۶) Z_{360} □

غیر از آگاهی از این‌که هرزیرگروه‌ازیك گروه‌آبلی متناهیاً تولید شده، خود متناهیاً تولید شده است و اثباتی ازآن در فصل ۲۰ وجود دارد، قضیهٔ اصلی بلافاصله از لمهای قبل نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۳.۹ (قضیهٔ اساسی گروههای آبلی متناهیاً تولید شده). هرگروه‌آبلی‌متناهیاً تولید شده ایزومورف است با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری به صورت

$$Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_2^{r_2}} \times \cdots \times Z_{p_n^{r_n}} \times Z \times Z \times \cdots \times Z \qquad (1)$$

که در آن p_i ها اعدادی اول هستند و نه لزوماً متمایز؛ و همچنین به صورت

$$Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \cdots \times Z_{m_r} \times Z \times Z \times \cdots \times Z \qquad (2)$$

که درآن هر عدد m_i عدد m_{i+1} را عاد می‌کند.

در هر دو حالت حاصلضرب مستقیم منحصر به فرد است، مگر احیاناً با تغییر ترتیب عوامل؛ یعنی تعداد عوامل Z (عدد بتی G) منحصر به فرد است، ضرایب‌تاب m_i منحصر به فرد هستند و توانهای اول $p_i^{r_i}$ نیز منحصر به فردند.

برهان. اثبات کامل را در فصل ستاره‌دار ۲۰ می‌توان یافت. □

آیا واقعاً اهمیت این احکام را درك می‌کنید؟ ضمن همهٔ فواید، این احکام اطلاعات کاملی در باب تمام‌گروههای آبلی متناهی نیز به ما می‌دهند.

۳.۹* کاربرد

این فصل را با نمونه‌هایی از قضیه‌های فراوانی که اکنون می‌توانیم در موردگروههای آبلی ثابت‌کنیم خاتمه می‌دهیم. بعضی نتیجهٔ مطالب فصل ۸ هستند؛ برای اثبات بقیه هم قضیهٔ توانمند ۳.۹ را لازم داریم.

تعریف گروهی چون G تجزیه ناپذیر است هرگاه با حاصلضرب مستقیمی از دو

زیر گروه واقعی و نابدیهی خود ایزومورف باشد. در غیر این صورت G، تجزیه‌ناپذیر است.

قضیهٔ ۴.۹ گروههای آبلی متناهی تجزیه ناپذیر دقیقاً عبارتند ازگروههای دوری از مرتبهٔ توانی از یك عدد اول.

برهان. فرض کنیم G یك گروه آبلی متناهی تجزیه ناپذیر باشد. آنگاه بنا به قضیهٔ ۳.۹ (یا لم ۳.۹) G ایزومورف است با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری از مرتبهٔ توانی از عددی اول. چون G تجزیه‌ناپذیراست، این حاصلضرب مستقیم باید تنها از یك عامل تشکیل شود.

به‌عکس، فرض کنیم p عددی اول باشد. مطالب فصل۸ نشان می‌دهدکه $\mathbf{Z}_{p^r}$ تجزیه‌ناپذیراست، زیرا اگر $\mathbf{Z}_{p^r}$ باحاصلضرب مستقیمی به‌صورت $\mathbf{Z}_{p^i}\times\mathbf{Z}_{p^j}$، بافرض $i+j=r$، ایزومورف باشد، آنگاه هر عضو آن حداکثر از مرتبهٔ $p^{max(i,j)}$ است که کمتراست از p^r. □

قضیهٔ ۵.۹ اگر m مرتبهٔ یك‌گروه‌آبلی متناهی G را نماد کند آنگاه G زیر گروهی از مرتبهٔ m دارد.

برهان. بنا به قضیهٔ ۳.۹ (یا لم ۳.۹)، می‌توان G را به صورت

$$\mathbf{Z}_{p_1^{r_1}}\times\mathbf{Z}_{p_2^{r_2}}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{p_n^{r_n}}$$

تصور کرد، که درآن p_i ها احیاناً متمایز نیستند. چون $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_n^{r_n}$ مرتبهٔ G است، m باید به‌صورت $p_1^{s_1}p_2^{s_2}\ldots p_n^{s_n}$ باشد، که درآن $0\leqslant s_i\leqslant r_i$. بنا به قضیهٔ ۴.۶، $p_i^{r_i-s_i}$ زیر گروهی دوری از $\mathbf{Z}_{p_i^{r_i}}$ تولید می کندکه مرتبهٔ‌آن برابر است با خارج‌قسمت تقسیم $p_i^{r_i}$ بر بزرگترین مقسوم علیه مشترك $p_i^{r_i}$ و $p_i^{r_i-s_i}$. اما بزرگترین مقسوم علیه مشترك این دوعدد همان $p_i^{r_i-s_i}$ است. بنابراین $p_i^{r_i-s_i}$ زیرگروهی دوری از $\mathbf{Z}_{p_i^{r_i}}$ را تولید می‌کند و مرتبهٔ‌آن برابر است با

$$(p_i^{r_i})/(p_i^{r_i-s_i})=p_i^{s_i}$$

با یادآوری این‌که $\langle a\rangle$ به معنی زیرگروه دوری تولید شده به توسط a است، ملاحظه می‌کنیم که

$$\langle p_1^{r_1-s_1}\rangle\times\langle p_2^{r_2-s_2}\rangle\times\cdots\times\langle p_n^{r_n-s_n}\rangle$$

زیرگروه دوری مطلوب از مرتبهٔ m است. □

قضیهٔ ۶.۹ اگر m عددی طبیعی و خالی از مربع باشد، یعنی m بر مربع هیچ

عدد اولی قابل قسمت نباشد، آنگاه هر گروه آبلی از مرتبهٔ m دوری است.

برهان. فرض کنیم G یك گروه‌آبلی از مرتبهٔ عدد طبیعی خالی از مربع m باشد. آنگاه بنا به قضیهٔ ۳.۹ (یا لم ۳.۹) G ایزومورف است با

$$\mathbf{Z}_{p_1^{r_1}} \times \mathbf{Z}_{p_2^{r_2}} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{p_n^{r_n}}$$

که درآن $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}$. چون m خالی از مربع است، باید به ازای هر i ، $r_i = 1$ و تمام p_i ها متمایز باشند. اکنون، نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۸ نشان می‌دهد که G با گروه $\mathbf{Z}_{p_1 p_2 \cdots p_r}$ ایزومورف و بنابراین دوری است. □

تمرین

۱.۹ درحد ایزومورفیسم، مطلوب است تعیین تمام گروههای از مرتبهٔ ۷۲۰ ؛ از مرتبهٔ ۱۰۸۹. آنها را به هر دو صورت مذکور در قسمتهای (۱) و (۲) از لم ۳.۹ بیان کنید و گروههای ایزومورف به صورتهای (۱) و (۲) را باهم جفت کنید.

۲.۹ ضرایب تاب و عدد بتی گروه زیر را پیدا کنید:

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{10}$$

۳.۹ زیر گروه تولید شده به توسط $\{3, 2\}$ از $\mathbf{Z}_{12}$ را پیدا کنید؛ ونیز توسط $\{6, 4\}$ وتوسط $\{8, 6, 10\}$ را.

۴.۹ مطلوب است تعیین مرتبهٔ زیرگروه تاب از گروه $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_2$ ؛ از گروه $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_{12}$.

۵.۹+ نشان دهید که یك گروه‌آبلی متناهی دوری نیست اگروفقط اگر به‌ازای عدد اولی چون p زیر گروهی ایزومورف با $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ داشته باشد.

۶.۹ درستی یا نادرستی هریك از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) هر گروه‌آبلی از مرتبهٔ عددی اول دوری است.
— ب) هر گروه‌آبلی از مرتبهٔ توانی از عددی اول دوری است.
— ج) $\mathbf{Z}_8$ به توسط $\{6, 4\}$ تولید می‌شود.
— د) $\mathbf{Z}_8$ به‌وسیلهٔ $\{6, 5, 4\}$ تولید می‌شود.
— ه) به‌وسیلهٔ لم ۳.۹ تمام گروههای آبلی‌متناهی درحد ایزومورفیسم دسته‌بندی می‌شوند.
— و) هر دو گروه‌آبلی متناهیاً تولید شدهٔ با عدد بتی مساوی ایزومورف هستند.
— ز) هرگروه‌آبلی ازمرتبهٔ عددی قابل قسمت بر۵ زیر گروهی دوری از مرتبهٔ ۵ دارد.
— ح) هر گروه‌آبلی ازمرتبهٔ عددی قابل قسمت بر۴ زیر گروهی دوری ازمرتبهٔ ۴ دارد.

— ط) هر گروه آبلی ازمرتبهٔ عددی قابل قسمت بر ۶ زیر گروهی دوری از مرتبهٔ ۶ دارد.
— ی) عدد بتی هر گروه آبلی متناهی ۰ است.

۷.۹ چندگروه آبلی (در حد ایزومورفیسم) از مرتبهٔ ۲۴ وجود دارد؟ از مرتبهٔ ۲۵؟ از مرتبهٔ ۲۵×۲۴؟

۸.۹ به‌دنبال‌مفهومی که از تمرین ۷.۹ استنباط می‌شود، فرض کنید m و n دوعددطبیعی متباین باشند. نشان دهید که اگر (در حد ایزومورفیسم) r گروه آبلی از مرتبهٔ m و s گروه آبلی از مرتبهٔ n وجود داشته باشد، آنگاه (در حد ایزومورفیسم) rs گروه آبلی از مرتبهٔ mn وجود دارد.

۹.۹ با استفاده از تمرین ۸.۹، تعداد گروههای آبلی از مرتبهٔ 10^5 را (در حد ایزومورفیسم) پیدا کنید.

۱۰.۹ فرض کنید G یك گروه آبلی از مرتبهٔ ۷۲ باشد.
ا) می‌توانید بگویید G چند زیر گروه از مرتبهٔ ۸ دارد؟ چرا؟
ب) می‌توانید بگویید G چند زیر گروه از مرتبهٔ ۴ دارد؟ چرا؟

۱۱.۹ ثابت کنید که اگر مرتبهٔ یك گروه آبلی متناهی توانی از عدد اول p باشد، آنگاه مرتبهٔ هر عضو گروه، توانی از عدد اول p است.

۱۲.۹ به‌ازای چه‌اعدادطبیعی n می‌توان گفت که تنها گروههای آبلی ازمرتبهٔ n، گروههای دوری هستند؟

۱۳.۹ فرض کنید p و q اعداد اول متمایزی باشند. چگونه تعداد (درحدایزومورفیسم) گروههای آبلی از مرتبهٔ p^r با تعداد (در حد ایزومورفیسم) گروههای آبلی از مرتبهٔ q^r باهم مقایسه می‌شوند؟

۱۴.۹ (برای دانشجویانی که مختصری در بارهٔ اعداد مختلط، بالاخص قضیهٔ دموآور، می‌دانند.) زیر گروه تابی T از گروه ضربی C^* از اعداد مختلط ناصفر را پیدا کنید.

۱۵.۹ نشان دهید که s_n توسط $\{(1,2),(1,2,\dots,n)\}$ تولید می‌شود. [راهنمایی: نشان دهید که به‌ازای مقادیر مختلف r، $(1,2)(1,2,\dots,n)^r(1,2,\dots,n)^{n-r}$ تمام ترانهشهای $(1,2)$، $(2,3)$، $(3,4)$، ...، $(n-1,n)$ و $(n,1)$ را به‌دست می‌دهد. سپس نشان‌دهید که هر ترانهش حاصلضربی‌است از برخی ازترانهشهای مذکور و بعد نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۵ را به‌کار ببرید.]

۱۶.۹ حداقل تعداد اعضایی راکه می‌توان برای تولید S_3 از مثال ۱.۴ به‌کار برد چند تاست؟ برای گروه D_4 متشکل از تفاوتهای مربع از مثال ۲.۴ چندتاست؟ برای گروه $Z_2 \times Z_2 \times Z_{12}$؟

۱۷.۹ اشکال بحث زیر چیست؟

«بنا به‌تمرین ۱۵.۹، S_n را می‌توان با ۲ عضو تولید کرد. بنا به قضیهٔ کیلی، هر گروه متناهی با زیرگروهی از S_n ایزومورف است. بنابراین، هر گروه متناهی را می‌توان به وسیلهٔ ۲ عضو تولید کرد.»

توجه داشته باشید که بنا به‌قسمت سوم تمرین ۱۶.۹ این نتیجه‌گیری نادرست است.

۱۸.۹ فرض کنید G، و H و K گروههای آبلی متناهیاً تولیدشده‌ای باشند. نشان‌دهید که اگر $G\times K\simeq H\times K$ آنگاه $G\simeq H$.

۱۹.۹ در $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ فرض کنید $G=\{(a,b)|a\equiv b \pmod{۱۰}\}$.

ا) ثابت کنید که G زیرگروهی از $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ است و بدون تاب.

ب) نشان‌دهید که G متناهیاً تولید شده‌است.

ج) ایزومورفیسمی چون $\phi:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\ldots\times\mathbf{Z}$، برای تعداد معینی عامل $\mathbf{Z}$، بیابید.

۱۰*

گروه در هندسه و آنالیز

در اینجا مطالعهٔ صرفاً جبری خود را قطع می‌کنیم تا اشاره‌ای نسبتاً مجمل به‌اهمیت مفهوم گروه در هندسه و آنالیز بنماییم. چون قصد ما تدریس هندسه یا آنالیز نیست، بحث ما در این زمینه‌ها خیلی دقیق نخواهد بود.

۱.۱۰* گروه در هندسه

تعریف برای یك هندسه‌دان، یك تبدیل از مجموعه‌ای چون A عبارت‌است از جایگشتی از مجموعه، یعنی تابعی یك به یك از A بروی خودش.

بنا به قضیهٔ ۱.۴، تبدیلهای یك مجموعه با ضرب تبدیلها (جایگشتها) تشکیل یك گروه می‌دهند. به‌خاطر داشته‌باشید که این ضرب چیزی جز ترکیب توابع نیست. به‌عبارت دیگر، اگر ϕ و ψ تبدیلهایی از A باشند، آنگاه $\mu=\phi\psi$ با $a\mu=(a\phi)\psi$، $a\in A$، تعریف می‌شود.

فلیکس کلاین[1] (۱۸۴۹–۱۹۲۵) در یك خطابه (برنامهٔ ارلانگنی[2]) درسال ۱۸۷۲، هنگامی که یك کرسی دانشگاه ارلانگن[3] را می‌پذیرفت تعریف مشهوری از هندسه ارائه کرد. بااین که ازنقطه‌نظر هندسه‌دانان امروزی، تعریف کلاین به‌اندازهٔ کافی جامع نیست. ولی به‌هرحال نظر ما را تأمین می‌کند.

تعریف (کلاین) یك هندسه عبارت‌است از مطالعهٔ آن دسته از خواص یك فضا (مجموعه) که تحت زیرگروه ثابتی ازگروه تمام تبدیلها پایا باقی می‌مانند.

---

1. Felix Klein 2. The Erlanger Programm 3. Erlangen

این تعریف را با کاربردش درهندسهٔ اقلیدسی کلاسیك متشکل از خط، صفحه و فضای ۳ بعدی اقلیدسی و غیره، روشن می کنیم. در اینجا مجموعه‌هایی در دستند که در آنها مفهوم فاصله بین اعضا تعریف می‌شود. اگر فاصلهٔ بین دوعضو x و y را به‌صورت $d(x \text{ و } y)$ نمایش دهیم، آنگاه می‌توانیم راجع به‌تبدیلهایی که حافظ فاصله‌هستند صحبت کنیم.

تعریف مجموعهٔ A را که در آن مفهوم فاصله تعریف شده است درنظر می گیریم. تبدیلی چون ϕ در A یك ایزومتری است اگر $d(x,y)=d(x\phi \text{ و } y\phi)$، یعنی اگر ϕ حافظ فاصله باشد.

واضح است که مجموعهٔ تمام ایزومتریهای مجموعه زیرگروهی از گروه تمام تبدیلهای مجموعه‌است. هندسهٔ اقلیدسی خط، صفحه، فضای سه‌بعدی و غیره دقیقاً مطالعهٔ خواصی‌است که تحت گروه ایزومتریها پایا می‌مانند. بنابراین در هندسهٔ اقلیدسی صحبت از مفاهیمی مانند طول یك پاره خط، اندازهٔ یك‌زاویه وتعداد اضلاع یك چندضلعی‌است. زیرا این خواص توسط هر ایزومتری پایا باقی می‌مانند.

اکنون به‌شرح چند ایزومتری صفحهٔ اقلیدسی می‌پردازیم. یك انتقال صفحه تبدیلی است که تمام نقاط صفحه را در جهتی ثابت و به مقداری ثابت تغییرمحل دهد. به زبان مختصات، یك انتقال $\tau_{(a,\,b)}$، نقطهٔ (x,y) را به‌نقطهٔ $(x+a,\ y+b)$ تغییرمحل می‌دهد. بدیهی است که

$$\tau_{(a,\,b)}\tau_{(c,\,d)}=\tau_{(a+c,\,b+d)}$$

بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که انتقالها زیرگروهی ازگروه ایزومتریها را تشکیل می‌دهند که با $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ تحت جمع ایزومورف است. **دوران** $\rho_{(P,\,\theta)}$ تبدیلی است که صفحه را حول نقطهٔ P در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ زاویهٔ θ، $0\leqslant\theta<2\pi$، دوران می‌دهد. دورانها زیرگروهی از گروه ایزومتریها را تشکیل نمی دهند، زیرا اگر $P\neq Q$ و $\theta_1+\theta_2=2\pi$ آنگاه $\rho_{(P,\,\theta_1)}\rho_{(Q,\,\theta_2)}$ یك دوران نیست. اما، واضح است که

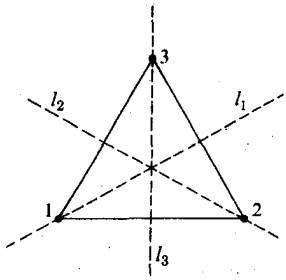
$$\rho_{(P,\,\theta_1)}\rho_{(P,\,\theta_2)}=\rho_{(P,\,\theta_1+\theta_2(mod\,2\pi))},$$

که درآن

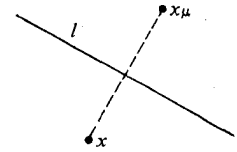
$$\theta_1+\theta_2\ (mod\,2\pi)=\begin{cases}\theta_1+\theta_2 & \text{اگر } \theta_1+\theta_2<2\pi\ ،\\ \theta_1+\theta_2-2\pi & \text{اگر } \theta_1+\theta_2\geqslant 2\pi\ ،\end{cases}$$

مجموعهٔ دورانهای حول یك نقطهٔ ثابت P زیرگروهی ازگروه ایزومتریها را تشکیل می‌دهند. این گروه با گروه $\mathbf{R}$ تحت جمع ایزومورف نیست، چون زیرگروههای دوری متناهی دارد. برای مثال $\rho_{(P,\,\pi/2)}$ مولد یك زیرگروه دوری از مرتبهٔ ۴ است. درحقیقت همهٔ دورانهای حول نقطه‌ای ثابت‌گروهی تشکیل می‌دهند که باگروه ضربی اعداد مختلط

بـا قدر مطلق ۱ ایزومورف است. بالاخره یك **انعکاس** در صفحه تابعی مانند μ است که هرنقطهٔ از خطی ثابت چون l را بروی خودش تصویر می‌نماید و هرنقطهٔ غیرواقع برخط رابه‌نقطهٔ تصویر آینه‌ای‌آن، درست درطرف دیگر l و باهمان فاصله از l طبق شکل ۱.۱۰، می‌برد. می‌توان نشان داد که انتقالها، دورانها و انعکاسها کل گروه ایزومتری صفحه را (بدان معنی که در فصل ۹ گفته شد) تولید می‌کنند. عملا این مجموعه از مولدهـا خیلی بزرگتر ازحد ضرور است. می‌توان نشان دادکه مجموعهٔ انعکاسها به‌تنهایی‌گروه ایزومتری صفحه را تولید می‌کنند. هر ایزومتری صفحه قابل تجزیه به حاصلضرب حداکثر سه انعکاس است. شمـا به سهولت می‌توانید خود را قـانع کنید که، مثلا، هر انتقـال را می‌توان حاصلضرب دو انعکاس نسبت به دو خط عمود بر جهت انتقـال، و به فاصلهٔ نصف طول انتقال از یکدیگر، دانست. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به‌کاکستر[1] [۴۴] مراجعه نماید.



شکل ۲.۱۰



شکل ۱.۱۰

گروه S_3 از مثال ۱.۴ دارای تعبیر زیبـای هندسی زیر است. یك مثلث متساوی‌الاضلاع، مانندشکل ۲.۱۰را درنظربگیرید. فرض کنیم

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

که ρ مبین یك دوران است و می‌توان ρ_1 را دورانی بـه‌اندازهٔ زاویهٔ $2\pi/3$ رادیان در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دانست. به‌همین‌ترتیب

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

دورانی به‌اندازهٔ زاویهٔ $4\pi/3$ رادیان‌است و در همان جهت و

1. Coxeter

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

دورانی‌است به‌اندازهٔ صفر رادیان. همچنین

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

که μ مبین تصویری آینه‌ای است، متناظر با انعکاسی در مثلث نسبت به خط l_1 می‌باشد. به‌طور کلی تبدیلهای μ_i از مثال ۱.۴ را می‌توان انعکاسهای نسبت به خطوط l_i دانست. تبدیلی چون μ_i درعین حال متناظر با برگرداندنی از مثلث، حول محور l_i هم‌هست. حال دلیل انتخاب نمادها در مثال ۱.۴ کاملا واضح است. به‌جدول ۱.۴ ازمثال ۱.۴ مجدداً نگاه‌کنید. توجه‌کنید که جدول به چهارقسمت تقسیم‌شده‌است و قسمتها با هاشور مشخص شده‌اند. این تقسیم‌بندی مجدداً درجدول ۱.۱۰ هم‌آمده‌است. بادید جبری، جدول ۱.۱۰ گروهی‌ازمرتبهٔ ۲ رامشخص می‌کند. با دید هندسی، این‌جدول بیان می‌کند که حاصلضرب هر دو دوران یك‌دوران است، حاصلضربی از یك‌دوران و یك انعکاس، یك انعکاس و حاصلضرب هر دوانعکاس یك‌دوران‌است. تجزیهٔ یك گروه‌به‌چند قطعه‌به‌طوری که خوداین قطعات هم تشکیل گروهی را بدهند، موضوع بعدی مطالعات جبری ماست.

جدول ۱.۱۰

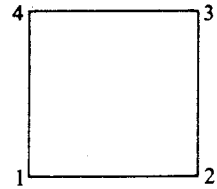
	جملات ρ	جملات μ
جملات ρ	جملات ρ	جملات μ
جملات μ	جملات μ	جملات ρ

ممکن‌است در بدو امر تصور کنید که‌گروه تقارنهای یك مربع گروه S_4 را به دست می‌دهد، ولی مواظب باشید. جایگشت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

یك ایزومتری مربع در شکل ۳.۱۰ نیست، زیرا فاصلهٔ بین رأسهای ۱ و ۲ به‌فاصلهٔ

طولانی‌تر بین رأسهای ۱ و ۳ تبدیل می‌شود. گروه تقارنهای یك مربع، یا گروه هشتین، درمثال ۲.۴ محاسبه شد. محاسبهٔ گروه‌دو وجهی متشکل از تقارنهای یك nـ ضلعی منتظم درصفحه برای $n \geqslant ۳$ به‌عنوان تمرین درآخر این فصل آمده‌است. توجه داشته باشید که گروه تقارنهای یك n ضلعی منتظم درصفحه، برای $n \geqslant ۳$ ، فقط وفقط وقتی S_n است که $n = ۳$.

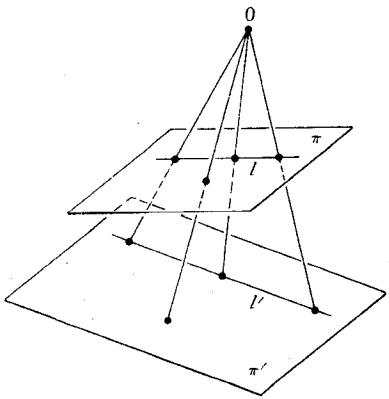


شکل ۳.۱۰

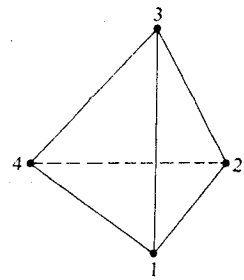
با دید هندسی، می‌توان $S_۴$ راگروه تقارنهای چهار وجهی منتظم، که هر وجهش، طبق شکل ۴.۱۰، یك مثلث متساوی‌الاضلاع است تصور نمود. ممکن است بگویید که نمی‌توان تبدیل

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}$$

رابا حرکتی صلب به‌دست آورد. اما همان‌طوری که درموردمثلث متساوی‌الاضلاع مجبور بودید ازصفحه خارج شوید تا بتوانید مثلث را برگردانید و درنتیجه تمام $S_۳$ را به‌دست آورید، در اینجا نیز مجبورید از فضای ۳ ـ بعدی خارج شوید و در فضای ۴ ـ بعدی چهاروجهی را «برگردانید» تا تمام $S_۴$ را به دست آورید. تبدیل مورد بحث به‌انعکاسی نسبت به صفحهٔ شامل خط گذرنده از رأسهای ۱ و ۴ و عمود برخط گذرنده از رأسهای ۲ و ۳ می‌انجامد.



شکل ۵.۱۰

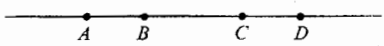


شکل ۴.۱۰

دومثال دیگر برای تعریف کلاین می‌آوریم. اگر صفحهٔ معمولی $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ را با افزودن خطی در بینهایت که شامل یك نقطه برای هر جهت در $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ باشد، توسعه دهیم، **صفحهٔ تصویری** را به دست می‌آوریم. در صفحهٔ تصویری مفاهیمی چون دو خط موازی نداریم زیرا دو خطی که در $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ باهم متوازی هستند در صفحهٔ تصویری یکدیگر را در نقطهٔ بینهایت متناظر با امتداد مشترکشان قطع می‌کنند. اکنون فرض می‌کنیم که π و π' دو صفحهٔ تصویری باشند که قسمتهای معمولی $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ هریك به‌عنوان جزیی ازفضای $\mathbf{R}^3$ تصورشوندوبه‌مفهوم صفحه‌های فضای $\mathbf{R}^3$ لزوماً متوازی نباشند. یك **تصویر از π بروی π'** نگاشتی است از π بروی π' که یا به توسط تصویر از نقطه‌ای خارج از هردوصفحه صورت گرفته باشد، یا به‌توسط پرتوهای موازی. تصویرازیك نقطه در شکل ۵.۱۰ روشن شده است. با دو بار تصویرکردن، می‌توان π را بروی π' و سپس مجدداً π' را بروی π تصویر نمود و بدین ترتیب از ترکیب آنها تبدیلی از π بروی خودش به دست‌آورد. **گروه تبدیلهای تصویری** π عبارت است از زیرگروه تمام تبدیلهایی از π که به وسیلهٔ نگاشتهایی از π بروی خودش ازآن نوع که شرحش گذشت تولیدمی‌شود. بدیهی‌است که چنین تبدیلهایی خط را به خط و چهارضلعی را به چهار ضلعی می‌برند، پس خط و چهار ضلعی از مفاهیم هندسهٔ تصویری هستند. با این وجود، تبدیلهای تصویری حافظ فاصله نیستند، پس فاصله یك مفهوم هندسهٔ تصویری نیست. باری، می‌توان نشان داد که نسبت متقاطع

$$\frac{(CA/CB)}{(DA/DB)}$$

از چهار نقطهٔ واقع بر یك خط، چنان‌که در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده، یك پایای گروه تصویری است. این نسبت متقاطع تقریباً تنها مقدار عددی است که در هندسهٔ تصویری می‌توان بدان دست یافت و بنابراین درهندسهٔ تصویری نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند.



شکل ۶.۱۰

سرانجام، اگر در یك فضای داده شده، از مفهوم نزدیك بودن نقاط به یکدیگرایدهٔ کافی داشته باشیم آنگاه می‌توانیم از تبدیلهای متصل صحبت کنیم (چنین مجموعه‌ای یك فضای توپولوژیك است)؛ بنابراین می‌توان **توپولوژی** را مطالعهٔ خواصی از فضاهایی که توسط گروه تمام تبدیلهای متصل با معکوس متصل، پایا نگهداشته می‌شوند تعریف کرد. خط، صفحه، فضای سه بعدی اقلیدسی و نظایرآنها همگی فضاهای توپولوژیك هستند. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که تبدیل متصلی که معکوس آن نیز متصل باشد تبدیلی‌است که ازخم کردن، کشیدن و پیچیدن فضا، بدون دریدن یا بریدن آن به دست می‌آید. درفضاهای اقلیدسی این تبدیلها شامل ایزومتریها و در صفحات تصویری این تبدیلها شامل تمام

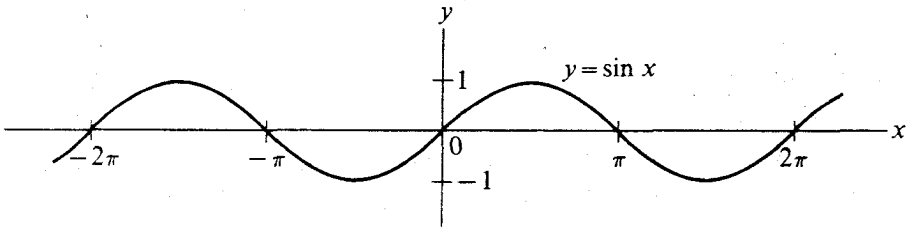
تبدیلهای تصویری می‌شوند. ازنقطه‌نظر توپولوژی، نمی‌توان بین یك توپ فوتبال آمریکایی و یك توپ بسکتبال تمیز قایل شد، زیرا می‌توان یکی را بدون ایجاد پارگی تغییر شکل داد ودرست مثل‌دیگری درآورد. همچنین‌ازدید توپولوژیك یك دایره ویك مربع‌یکسانند. اما،نمی‌توانید یك قرص شکلات رابدون این‌که سوراخی درآن ایجادکنید به‌صورت یك کیك حلقوی درآورید. بنابراین اینها از نظر توپولوژیك متمایزند. بدون شك امروز در بین انواع هندسه‌ها توپولوژی از فعالترین رشته‌ها می‌باشد.

۲.۱۰ گروه درآنالیز

در زمینهٔ آنالیز، چند مورد راکه درآن گروهها به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند مختصراً بیان می‌کنیم. البته درآنالیز سر و کار ما اصولا با زیرگروههای اعداد مختلط است، وبه‌همان راه ساده هم ظاهر می‌شوند. تابع حقیقی یك متغیرهٔ f را که با ضابطهٔ $f(x)=\sin x$ تعریف می‌شود در نظر بگیرید. این تابع منحنی نمایش مشهودی داردکه در شکل ۷.۱۰ نشان داده شده‌است. همچنین، به‌ازای هر عدد صحیح n،

$$\sin x=\sin(x+۲n\pi)$$

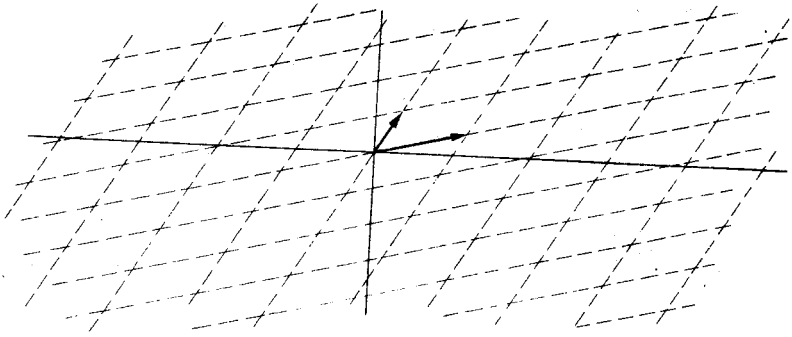
از اینرو، تابع سینوس از یك متغیر حقیقی تحت تبدیلی از حوزهٔ تعریفش توسط عضوی از زیرگروه دوری نامتناهی $\langle ۲\pi\rangle$ از گروه انتقالهای $\mathbf{R}$ پایا باقی می‌ماند. چنین تابع یك متغیرهٔ حقیقی را که تحت تبدیلی از حوزهٔ تعریفش به وسیلهٔ عضوی ازیك‌گروه دوری نامتناهی پایا باقی می‌ماند یك **تابع تناوبی** می‌نامیم.



شکل ۷.۱۰

یادآوری می‌کنیم که اعداد مختلط را می‌توان نقاط صفحهٔ اقلیدسی تصور نمود. تابعی در صفحه‌که تحت عضوی ازگروه انتقالهای تولیدشده توسط دو انتقال در دو جهت متمایز (ولی نه متقابل)، همچون شکل ۸.۱۰ پایا می‌ماند یك **تابع دو تناوبی** نامیده می‌شود. گروه مذکور با $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ایزومورف است. یك **تابع بیضوی** تابعی است از یك متغیر مختلط که دو تناوبی و مرومورف باشد. اصطلاح تابع مرومورف در نخستین درس توابع با متغیر مختلط در دورهٔ کارشناسی بیان می‌شود. بنابراین اگر یك تابع بیضوی در

یکی از نواحی اصلی، یعنی در یکی از نواحی لوزی شکل در شکل ۸.۱۰، تعریف شده باشد مقدار آن در هر نقطهٔ صفحه معین است. توابع مثلثاتی و بیضوی هردوحالتهای خاصی از **توابع اتومورف** هستند که تحت گروهی گسسته ازتبدیلها، توابعی پایامی باشند. اصطلاح گسسته تقریباً بدین معنی است که هیچ دو عضو گروه نزدیك هم نیستند.



شکل ۸.۱۰

سرانجام، در نظریهٔ اندازه علاقه‌مندیم که به زیر مجموعه‌های «خوب» مشخصی از یك مجموعه اندازه‌ای عددی منسوب نماییم. اگر مجموعهٔ موردنظردارای ساختار گروهی $\langle G, \cdot \rangle$ باشد و a عضوی از این گروه، غالباً مناسب‌است اندازه‌ای را داشته باشیم که اندازهٔ یك زیر مجموعهٔ S از G مساوی اندازهٔ زیر مجموعهٔ

$$aS = \{a \cdot s \mid s \in S\}$$

باشد. با قیاس به‌گروه جمعی $\mathbf{R}$، غالباً aS را **انتقال چپ** S به توسط a و Sa را **انتقال راست** S به وسیلهٔ a می‌نامند. یك**اندازهٔ پایای چپ**، اندازه‌ای‌است که‌اندازهٔ S با اندازهٔ aS، به‌ازای هر a از G و هر مجموعهٔ خوب S، برابر باشد. به همین ترتیب می‌توان **اندازهٔ پایای راست** راتعریف کرد. بنابرآنچه گفته شد درگروه جمعی $\mathbf{R}$ مفهوم معمولی اندازه (طول) برای مجموعه‌های خوب (بازه‌ها) یك‌اندازهٔ پایای چپ وهمچنین پایای راست است. به‌همین منوال، مفهوم متداول مساحت درصفحهٔ $\mathbf{C}$ (یا $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$) تحت جمع یك اندازهٔ پایای چپ ونیز پایای راست است. باری، مفهوم مساحت در $\mathbf{C}^*$، گروه اعداد مختلط ناصفر تحت ضرب؛ یعنی، در صفحهٔ بدون مبدأ، نه یك اندازهٔ پایای چپ است و نه یك اندازهٔ پایای راست. برای مثال، اگر S درون دایرهٔ به شعاع واحد و به مرکز مبدأ بدون خود مبدأ باشد، مساحت S برابر است با π ولی مساحت $2S$، که شعاع آن ۲ است، برابراست با 4π. به هرحال، هار نشان داده است که روی هر گروه توپولوژیك فشردهٔ موضعی یك اندازهٔ پایای چپ (و نیز یك‌اندازهٔ پایای راست) که همان **اندازهٔ هار** باشد وجود دارد[1]. گروههای توپولوژیك فشردهٔ موضعی بسیاری ازگروههای

1. A. Haar, "Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Grouppen," *Ann. of Math.* (2), 34, 147-169 (1933).

طبیعی متشکل از اعداد مختلط، از جمله گروه $\mathbf{C}^*$، را شامل می‌شوند.

تمرین

*۱.۱۰ تمرین ۹.۴ را مرور کنید؛ اگر قبلا آن را انجام نداده‌اید اکنون آن را انجام دهید.

*۲.۱۰ نشان دهید که می‌توان n-گروه دو وجهی D_n از مثال ۹.۴ را با دو عضو تولید کرد. استدلال هندسی آن را بیان کنید.

*۳.۱۰ تمرین ۱۰.۴ را مرور کنید؛ اگر قبلا آن را انجام نداده‌اید اکنون آن را انجام دهید.

*۴.۱۰ نشان دهید که گروه حرکتهای صلب یك مکعب، ارائه شدهٔ در تمرین ۱۰.۴، را می‌توان با دو عضو تولید کرد. استدلال هندسی آن را بیان کنید.

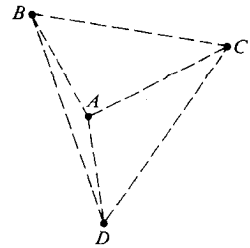
*۵.۱۰ گروه تمام تقارن (ایزومتری)های مکعب را درنظر بگیرید. این گروه مشتمل است بر تمام حرکتهای صلب و نیز تمام انعکاسهای مکعب. مرتبهٔ گروه چنداست؟ نشان دهید که می‌توان این گروه را با سه عضو تولید کرد.

*۶.۱۰ هندسهٔ مستوی متناهی متشکل از چهار نقطهٔ A، B، C، و D و شش خط AB، AC، AD، BC، BD، و CD را، چنان‌که در شکل ۹.۱۰ نشان‌داده شده است، در نظر بگیرید. دراینجا روی هرخط فقط وفقط دونقطه‌وجود دارد. یك **همخطی هندسهٔ مستوی** نگاشتی‌است یك به یك از مجموعهٔ نقاط بروی خودش که خطوط را بروی خطوط ببرد. (برای حل این‌تمرین واقعاً به اطلاعات دقیقی درمورد خط یا نقطه نیازنیست. این تمرین بر مبنای همان اطلاعات مختصر که خط مجموعه‌ای از نقاط است وغیره طرح شده‌است.)

ا) نشان دهید که هر تابع یك به یك از مجموعهٔ نقاط این هندسهٔ مستوی چهار نقطه‌ای بروی خودش یك همخطی است.

ب) نشان دهید که درهرهندسهٔ مستوی مجموعهٔ‌تمام همخطی‌ها تحت ترکیب‌توابع یك گروه است. این گروه را **گروه مستوی**می‌نامند.

ج) گروه مستوی متناظر با هندسهٔ شکل ۹.۱۰ با کدام یك از گروههایی که قبلا دیده‌ایم ایزومورف است؟



شکل ۹.۱۰

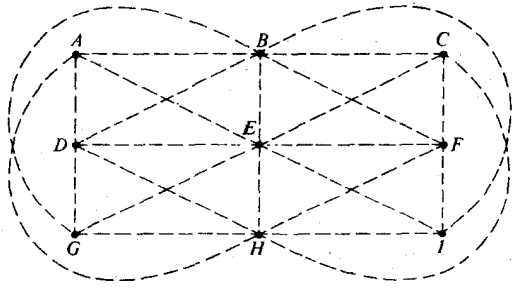
*۷.۱۰ در ادامهٔ بحث تمرین ۶.۱۰، هندسهٔ مستوی متشکل از ۹ نقطه؛ ۱۲ خط و هرخط متشکل از ۳ نقطه را که در شکل ۱۰.۱۰ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم.

ا) نشان دهید که در این هندسهٔ ۹ نقطه‌ای هر تابع یك به یك از مجموعهٔ نقاط بروی خودش لزوماً یك همخطی نیست.

ب) نشان دهید که هر همخطی از این هندسهٔ ۹ نقطه‌ای با مقادیرش در سه نقطهٔ غیر واقع بر یك خط کاملا تعیین می‌شود.

ج) مرتبهٔ این گروه مستوی، یعنی گروه همهٔ همخطی‌های این هندسهٔ ۹ نقطه‌ای، چند است؟

د) زیرگروه H از گروه مستوی در (ج) را که متشکل از همخطی‌هایی است که هر نقطهٔ روی خط ABC را ثابت نگه می‌دارند در نظر بگیرید. مرتبهٔ این زیرگروه چیست؟ این زیرگروه با کدام یك از گروههایی که قبلا تعریف شده ایزومورف است؟



شکل ۱۰.۱۰

۱۱

گروه همدسته ها

۱.۱۱ مقدمه

احتمالا توجه کرده‌اید که ۳۶ درآیهٔ جدول S_3 ازمثال ۱.۴ به چهار قطعه تقسیم می‌شوند، و هر قطعه، یا فقط از جملات ρ_i تشکیل می‌شود یا فقط از جملات μ_i. در جدول ۱.۴ این قطعه‌ها با سایه ـ روشن مشخص شده‌اند. بنابراین گروه S_3 خود به دوقطعهٔ هم اندازهٔ B_ρ و B_μ افراز می‌شود و مجموعهٔ $\{B_\rho , B_\mu)$ تشکیل یك گروه می‌دهد که جدولش، با استفاده از جدول ۱.۴، به صورتی که در جدول ۱.۱۱ نشان داده شده است در می‌آید. افراز یك گروه به قطعه‌ها به طوری که مجموعهٔ قطعه‌ها خود تشکیل یك گروه بدهد در جبر ازاهمیت‌ویژه‌ای برخورداراست. هر عضو از یك قطعه را **یك نمایندهٔ آن قطعه** می‌نامیم. تساوی

$$B_\rho B_\mu = B_\mu$$

بدین‌معنی است که حاصلضرب هر نمایندهٔ B_ρ درهر نمایندهٔ B_μ نماینده‌ای از B_μ خواهد بود.

جدول ۱.۱۱

	B_ρ	B_μ
B_ρ	B_ρ	B_μ
B_μ	B_μ	B_ρ

با توجه به حالت کلی، خواهان تعیین شرایط دقیقی هستیم که تحت آن شرایط بتوان

یك گروه G را به قطعه‌های B_i افراز کرد به نحوی که به‌ازای هر دو قطعهٔ ثابت B_r و B_s قطعهٔ منحصر به فرد B_t وجود داشته باشد که حاصلضرب هر نمایندهٔ B_r در هر نمایندهٔ B_s نماینده‌ای از B_t به‌دست آید. دراین صورت B_t را حاصلضرب B_r در B_s می گیریم و می‌نویسیم $B_t = B_rB_s$. حاصلضرب B_rB_s از قطعه‌ها قطعه‌ای چون B_t تعریف می‌شود که حاوی حاصلضرب نماینده‌ای از B_r در نماینده‌ای از B_s باشد. برای این که این عمل ضرب قطعه‌ها در مجموعهٔ $\{B_i\}$ خوشتعریف باشد، همان‌گونه که درفصل ۱ بیان شد، بایستی قطعهٔ B_t به‌انتخاب نماینده‌های انتخاب شدهٔ از B_r و B_s بستگی نداشته باشد. عمل دوتایی ضرب قطعه‌ای درمجموعهٔ $\{B_i\}$ **عمل القا شدهٔ در** $\{B_i\}$ **به وسیلهٔ عمل** G نامیده می‌شود. تنها در صورتی که این عمل خوشتعریف باشد این پرسش که آیا مجموعهٔ $\{B_i\}$ تحت عمل مذکور گروه است، با معنی است.

قضیهٔ ۱.۱۱ اگر گروه G را بتوان چنان به قطعه ها افرازکردکه عمل القا شدهٔ مذکور در بالا خوشتعریف باشد و اگر مجموعهٔ قطعه ها تحت این عمل یك‌گروه تشکیل دهد آنگاه قطعهٔ شامل عضو همانی گروه G، خود یك زیر گروه G است.

برهان فرض کنیم G به قطعه هایی افراز شده، عمل القایی خوشتعریف باشد و گروهی را به وجود آورند. به علاوه فرض کنیم B_e قطعهٔ شامل عضو همانی باشد. برای محاسبهٔ B_rB_e هر عضو از B_r و هر عضو از B_e را می‌توان به عنوان نماینده هایشان انتخاب و حاصلضرب را در G پیدا کرد. عضو e از B_e و r از B_r را انتخاب می کنیم. با توجه به این که $er = r$ و $r \in B_r$، پس $B_eB_r = B_r$. همچنین $B_rB_e = B_r$. پس B_e نقش قطعهٔ همانی را در گروه قطعه‌ها ایفا می کند. بنابراین

$$B_eB_e = B_e.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که حاصلضرب هر دو عضو B_e به B_e تعلق دارد، یعنی B_e تحت عمل ضرب G بسته است.

بنا به تعریف، B_e شامل عضو همانی e است.

فرض کنیم $a \in B_e$. اکنون a^{-1} درقطعهٔ مثلا B_k است. چون B_e عضوهمانی‌است، $B_eB_k = B_k$. با انتخاب نماینده‌های a از B_e و a^{-1} از B_k و استفاده از آنها برای محاسبهٔ B_eB_k ملاحظه می‌شود که باید $B_eB_k = B_e$. بنابراین $B_k = B_e$ و $a^{-1} \in B_e$.

پس، B_e یك زیر گروه G است. □

۲.۱۱ همدسته

فرض کنیم گروه G را بتوان به قطعاتی افرازکرد که عمل القا شده خوشتعریف باشد و موجب تشکیل گروه شود. فرض کنیم که قطعهٔ B_e حاوی عضو همانی باشد. قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که B_e یك زیر گروه G است. فرض کنیم که B_a قطعهٔ شامل a باشد. تساوی

$B_aB_e=B_a$ نشان می‌دهد که حاصلضرب a در هر عضو B_e به B_a تعلق دارد، یعنی

$$aB_e=\{ax|x\in B_e\}$$

زیر مجموعه‌ای است از B_a. از اینجا به‌نظر می‌رسد که این انتقالها یا همدسته‌های aB_e از زیر گروهی چون B_e باید حایز اهمیت باشند.

تعریف فرض کنیم H زیر گروهی از یك گروه G باشد و $a\in G$. همدستهٔ چپ aH از H عبارت‌است از مجموعهٔ $\{ah|h\in H\}$. همدستهٔ راست Ha نیز به‌همین ترتیب تعریف می‌شود.

قبلا دیده‌ایم که اگر G را بتوان به مجموعه‌ای از قطعه‌ها چنان افراز کرد که عمل القایی خوشتعریف و موجد گروه باشد، آنگاه

$$aB_e\subseteq Ba.$$

فرض کنیم که $a^{-1}\in B_k$. آنگاه $B_kB_a=B_e$، بنابراین با انتخاب نماینده‌های a^{-1} از B_k و x ی از B_a ملاحظه می‌شود که $a^{-1}x\in B_e$. پس $a^{-1}x=b$ و $x=ab$، که در آن $b\in B_e$. این نشان می‌دهد که

$$B_a\subseteq aB_e$$

و در نتیجه

$$B_a=aB_e.$$

البته با استدلالی مشابه ثابت می‌شود که $B_a=B_ea$. این نتایج را در یك قضیه خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۱۱ اگر یك گروه G را بتوان به نحوی به‌قطعات افرازکرد که عمل القایی خوشتعریف و موجد گروه باشد، آنگاه این قطعه‌ها باید دقیقاً همدسته‌های چپ (و همچنین راست) زیرگروهی از G باشند. بالاخص، هر همدستهٔ چپ باید یك همدستهٔ راست نیز باشد.

مثال ۱.۱۱ ببینیم همدسته‌های چپ زیر گروه $3\mathbf{Z}$ از گروه جمعی $\mathbf{Z}$ چگونه‌اند. نماد‌گذاری در اینجا جمعی است. البته $3\mathbf{Z}=0+3\mathbf{Z}$ خود، یك همدسته‌است. همدسته‌ای دیگر عبارت‌است از $1+3\mathbf{Z}$. با یك لحظه تأمل ملاحظه می‌شود که به مفهوم لم ۱.۶، $1+3\mathbf{Z}$ تشکیل می‌شود از تمام اعداد صحیحی که در تقسیم بر ۳ باقیماندهٔ ۱ دارند. به همین‌ترتیب، همدستهٔ چپ $2+3\mathbf{Z}$ از تمام اعداد صحیح دارای باقیماندهٔ ۲ در تقسیم بر ۳ تشکیل می‌شود. با توجه به لم ۱.۶، که در تقسیم هر عدد به ۳، باقیمانده عددی است مانند r و $0\leqslant r<3$، تنها باقیمانده‌ها ۰، ۱ و ۲ هستند. بنابراین اینها همهٔ همدسته‌ها می‌باشند. □

این سؤال ممکن‌است مطرح شود که آیا برای هر زیرگروه مفروض H از گروه G، مجموعهٔ همدسته‌های چپ (یا راست)، G را به قطعه‌هایی مجزا افراز می‌کند؟ البته، بنا به قضیهٔ ۱.۵، هرچنین افرازی متناظراست با یك نسبت هم‌ارزی در G. توجه داشته باشد که $b \in aH$ اگر و فقط اگر به‌ازای عضوی مانند h از H، $b = ah$، یا اگر و فقط اگر $a^{-1}b \in H$. ازاینجا به نظر می‌رسد که بایددربارهٔ هم‌ارزی بودن نسبت $\sim$، با تعریف «$a \sim b$ اگر و فقط اگر $a^{-1}b \in H$» بررسی کنیم. همان گونه که در صورت قضیهٔ زیر مشخص‌است برای این نسبت هم‌ارزی نماد خاصی انتخاب شده‌است.

قضیهٔ ۳.۱۱ فرض‌کنیم H یك زیرگروه ازگروه G باشد. نسبتها

$$a \equiv_r b \pmod H \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad a^{-1}b \in H$$

و

$$a \equiv_l b \pmod H \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad ab^{-1} \in H$$

که به‌ترتیب نسبت **همنهشتی چپ به هنگ** H و نسبت **همنهشتی راست به‌هنگ** H نامیده می‌شوند، در G نسبت هم‌ارزی هستند. همادهای هم‌ارزی نسبت همنهشتی چپ (راست) به هنگ H عبارتند از همدسته‌های چپ (راست) H. تعداد اعضای همهٔ همدسته‌های H باهم‌برابرند.

برهان. ما حکم را در مورد نسبت همنهشتی چپ به هنگ H و همدسته‌های چپ ثابت می‌کنیم. اثبات در مورد نسبت همنهشتی راست و همدسته‌های راست نظیرآن‌است. ابتدا نشان می‌دهیم که نسبت همنهشتی چپ به هنگ H یك نسبت هم‌ارزی است.

انعکاسی همواره $a \equiv_l a \pmod H$ چون همواره $a^{-1}a = e \in H$.

تقارنی اگر $a \equiv_l b \pmod H$ آنگاه $a^{-1}b \in H$ وچون H زیر گروه G است، پس $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$ یعنی $b \equiv_l a \pmod H$

تعدی اگر $a \equiv_l b \pmod H$ و $b \equiv_l c \pmod H$ آنگاه $a^{-1}b \in H$ و $b^{-1}c \in H$. با توجه به‌این که H زیر گروهی از G است، $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$. درنتیجه، $a \equiv_l c \pmod H$.

پس نسبت همنهشتی به هنگ H یك نسبت هم ارزی است.

همادهم‌ارزی $\bar{a}$ شامل a به‌سهولت‌قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \{x \in G \mid x \equiv_l a \pmod H\} = \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} \\ &= \{x \in G \mid a^{-1}x = h \in H\} = \{x \in G \mid x = ah \text{ ، } H \text{ به‌ازای عضو } h \text{ ی از}\} \\ &= aH.\end{aligned}$$

بنابراین همادهای هم‌ارزی نسبت‌همنهشتی چپ به هنگ H دقیقاً همان همدسته‌های چپ H هستند.

برای این که نشان دهیم تعداد اعضای همدسته‌ها باهم برابر است، نگاشت $\lambda_a: H \to aH$ را باتعریف $h\lambda_a = ah$ بررسی می‌کنیم. این‌نگاشت به‌وضوح بروی aH است. اگر h_1 و h_2 اعضایی از H باشند و $ah_1 = ah_2$، بنا به قانون حذف گروه، $h_1 = h_2$. بنابراین λ_a زیرگروه H را به‌طور یك به‌یك بروی aH می‌نگارد. از اینرو تعداد اعضای هر همدسته با تعداد اعضای H برابراست، و در نتیجه همه دارای تعدادی مساوی عضو می‌باشند. □

اکنون تصورکاملا خوبی از چگونگی افراز یك‌گروه به قطعات مجزا، در صورتی که عمل القایی خوشتعریف و موجدگروه باشد، داریم. قطعه‌ها همواره همدسته‌های یك زیرگروه هستند (دراین‌حالت همدسته‌های چپ و راست بنا به قضیهٔ ۲.۱۱ یکی هستند.) بنابراین از این پس اصطلاح قطعه را رها می‌کنیم وبه‌جای‌آن همواره اصطلاح همدسته را به‌کار می‌بریم.

متأسفانه، در حالت‌کلی، همواره همدسته‌های چپ یك زیرگروه H تحت عمل القاشده تشکیل گروه نمی‌دهند. مشکل در اینجاست‌که ممکن‌است عمل القاشده خوشتعریف نباشد. مثالی می‌آوریم.

مثال ۲.۱۱ گروه S_3 ازمثال ۱.۴ و زیرگروه $H = \{\rho_0, \mu_1\}$ ازآن را درنظرمی‌گیریم. برای پیداکردن همدسته‌های چپ یك زیرگروه H از یك‌گروه متناهی G، ابتدا عضوی چون a از G را که در H نباشد پیدا و همدستهٔ aH را حساب می‌کنیم. سپس عضو دیگری از G مانند b را که نه در H باشد و نه در aH به‌دست می‌آوریم و همدستهٔ جدید bH را تشکیل می‌دهیم. با ارائه این‌کار، تمام همدسته‌های چپ H در G محاسبه می‌شوند. درمورد مثال فعلی، به‌سهولت دیده می‌شود که همدسته‌های چپ $H = \{\rho_0, \mu_1\}$ در G عبارتند از:

$$H = \{\rho_0, \mu_1\}$$

$$\rho_1 H = \{\rho_1, \mu_2\}$$

$$\rho_2 H = \{\rho_2, \mu_3\}.$$

بیایید مجدداً جدول‌گروه S_3 را بنویسیم، منتهی با ترتیب

$$\rho_0, \mu_1, | \rho_1, \mu_2 | \rho_2, \mu_3.$$

درجدول ۲.۱۱ مربعهای حاوی اعضای همدستهٔ $\{\rho_1, \mu_2\}$ را کمرنگ ومربعهای حاوی اعضای همدستهٔ $\{\rho_2, \mu_3\}$ را پر رنگ سایه زده‌ایم. با یك نظر می‌توان فهمیدکه آیا عمل القایی خوشتعریف هست وآیا همدسته‌های چپ تشکیل گروه می‌دهندیانه. ملاحظه می‌کنیم

که پاسخ منفی است. حاصلضرب دو قطعه همواره قطعه‌ای از تنها یك رنگ، یعنی قطعهٔ شامل اعضای یك همدسته نمی‌شود. مثلا با ضرب اعضای همدستهٔ $\{\rho_0,\mu_1\}$ در اعضای همدستهٔ $\{\rho_1,\mu_2\}$ تمام‌اعضای $\{\rho_1,\rho_2,\mu_2,\mu_3\}$ به‌دست می‌آیند که یك همدستهٔ چپ‌نیست. در این همدسته‌های چپ، عمل القایی خوشتعریف نیست. □

جدول ۲.۱۱

	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_2	ρ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_2	ρ_2	μ_3
μ_1	μ_1	ρ_0	μ_3	ρ_2	μ_2	ρ_1
ρ_1	ρ_1	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_0	μ_1
μ_2	μ_2	ρ_1	μ_1	ρ_0	μ_3	ρ_2
ρ_2	ρ_2	μ_3	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_2
μ_3	μ_3	ρ_2	μ_2	ρ_1	μ_1	ρ_0

جدول ۳.۱۱

	۰	۳	۱	۴	۲	۵
۰	۰	۳	۱	۴	۲	۵
۳	۳	۰	۴	۱	۵	۲
۱	۱	۴	۲	۵	۳	۰
۴	۴	۱	۵	۲	۰	۳
۲	۲	۵	۳	۰	۴	۱
۵	۵	۲	۰	۳	۱	۴

مثال ۳.۱۱ ببینیم که آیا می‌توان گروه Z_6 را به گروهی از همدسته‌های چپ زیرگروه $H=\{0,3\}$ افراز کرد. در اینجا، با استفاده از نمادگذاری جمعی، همدسته‌های چپ عبارت‌اند از:

$$H=\{0,3\}$$

$$1+H=\{1,4\}$$

$$2+H=\{2,5\}.$$

جدول گروه Z_6 با ترتیب

$$0,3|1,4|2,5$$

برای اعضا و مربعهای سایه‌دار بر حسب همدستهٔ شامل عضو، در جدول ۳.۱۱ ارائه شده‌است. روش کارآیی‌است! آیا زیبا نیست؟ چنین نمایش جالبی از تقارن باید لرزهٔ شادی براندام هرکس که احساسی از ریاضی داشته‌باشد بیندازد. □

هر گروهی از همدسته‌های چپ از یك گروه G اطلاعاتی در باب خود گروه G هم به ما می‌دهد. اگر شما تنها گروه همدسته‌های چپ را بشناسید، نمی‌توانید بگویید که حاصلضرب هردو عضو G دقیقاً چه عضوی می‌شود، اما می‌توانید بگویید که حاصلضرب دونوع عضو چه نوع عضوی خواهد شد. اهمیت موضوع هم در همین است. این مطلب را با گروه S_3 که اعضای آن از دونوع هستند؛ نوع ρ (دوران) و نوع μ (انعکاس)، تشریح کرده‌ایم. تحلیل دیگر آن این‌است که هر جایگشت از نوع ρ زوج و هر جایگشت از نوع μ فرد است. بدین‌ترتیب گروه ایجاد شده از دو همدستهٔ چپ A_3 در S_3، چنان که در جدول ۴.۱۱ نشان داده شده‌است، برحسب دسته‌بندی حاصلضربهای جایگشتها به دو نوع فرد و زوج تعبیر ساده‌ای دارد. تعجب‌آور نیست که زیرگروههایی که همدسته‌های چپ آنها تشکیل گروه می‌دهند نقش مهمی را در نظریهٔ گروهها ایفا کنند.

جدول ۴.۱۱

	زوج	فرد
زوج	زوج	فرد
فرد	فرد	زوج

برای تکمیل این بحث، آنچه باقی می‌ماند این‌است که مشخص کنیم همدسته‌های دقیقاً چه‌نوع زیرگروههایی ازیك گروه مفروض G تحت عمل القایی تشکیل گروه می‌دهند.

عمدتاً چون‌که این مسئله بسیار مهم است و می‌خواهیم فرصت کافی برای جذب آن داشته باشید، این کار را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

۳.۱۱ کاربرد

به جـای این‌که بحث را در اینجـا خاتمه دهیم، می‌خواهیم چند نتیجهٔ جالب در بـاب گروههای متناهی را که به سادگی از کارهای انجام شدهٔ قبلی به‌دست می‌آیند، ثابت کنیم.

قضیهٔ ۴.۱۱ (لاگرانژ[1]) فرض‌کنیم G یك‌گروه متناهی و H زیرگروهی از G باشد. مرتبهٔ H مرتبهٔ G را عاد می‌کند.

برهان. فرض‌کنیم G از مرتبهٔ n و H از مرتبهٔ m باشند. گردآیهٔ همدسته‌های چپ H را در نظر بگیرید. بنا به قضیهٔ ۳.۱۱، این همدسته‌ها دوبه‌دو مجزا هستند، مانند H هر یك m عضو دارد و هر عضو G دقیقاً به یکی از این همدسته‌ها متعلق‌است. بنابراین اگر تعداد این همدسته‌های چپ r باشد، خواهیم داشت $n=mr$؛ از اینرو m ، n را عـاد می‌کند. □

توجه داشته‌باشید که این قضیهٔ مهم و زیبا ازشمارش سادهٔ انجام‌شده درقضیهٔ ۳.۱۱ که نشان‌داد تعداد اعضای تمام همدسته‌ها با هم برابر هستند حاصل می‌شود. هرگز قضیه‌ای را که چیزی را می‌شمارد دست‌کم نگیرید.

قضیهٔ ۳.۹ بلافاصله نشان می‌دهد که هر گروه آبلی ازمرتبهٔ عددی اول دوری است. اما، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۴.۱۱، داریم:

نتیجه. هرگروه از مرتبهٔ عددی اول دوری است.

برهان. فرض‌کنیم که مرتبهٔ گروه G عدد اول p و a عضوی غیراز عضو همانی G باشد. زیرگـروه دوری $\langle a\rangle$ از G تولید شدهٔ به‌وسیلهٔ a حداقل دارای ۲ عضو a و e است. بنا به قضیهٔ ۴.۱۱، m یعنی‌مرتبهٔ $\langle a\rangle$ یك مقسوم علیه p است و $m\geqslant 2$. پس باید داشته باشیم $m=p$ و در نتیجه $G=\langle a\rangle$؛ یعنی G دوری‌است. □

بنابراین، به‌ازای هر عدد اول p، در حد ایزومورفیسم، فقط یك‌گروه ازمرتبهٔ p وجود دارد. آیـا این نتیجهٔ زیبای قضیهٔ لاگرانژ که قضیه‌ای شمارشی است به‌سهولت بـه‌دست نیامـد؟ هرگز قضیه‌ای را که چیزی را می‌شمارد دست‌کم نگیرید. نتیجه‌ای کـه گـذشت یـك سؤال امتحانی مطلوب است.

قضیهٔ ۵.۱۱ مرتبهٔ هر عضو یك‌گروه متناهی، مرتبهٔ‌گروه را عاد می‌کند.

برهان. با به خاطرآوردن این‌که مرتبهٔ هر عضو، همان مرتبهٔ زیرگروه دوری تـولید شدهٔ

---

1. Lagrange

به‌وسیله‌ی آن عضو است، ملاحظه می‌کنیم که حکم مستقیماً از قضیهٔ ۴.۱۱ نتیجه می‌شود. □

تعریف فرض کنیم H زیر گروهی از گروه متناهی G باشد. اندیس H در G که به‌صورت $(G:H)$ نوشته می‌شود، عبارت است از تعداد همدسته‌های چپ H در G.

اندیس $(G:H)$ که هم‌اکنون تعریف شد ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. اگر G متناهی باشد، آنگاه به‌وضوح $(G:H)$ هم متناهی است و $(G:H)=|G|/|H|$، چون هر همدستهٔ H شامل $|H|$ عضو است. تمرین ۵.۱۱ نشان می‌دهد که اندیس $(G:H)$ می‌تواند به عنوان تعداد همدسته‌های راست هم تعریف شود. در مورد اندیس زیر گروههای یك گروه، قضیه‌ای اساسی بیان می‌کنیم، اما اثبات آن‌را به‌تمرین وامی‌گذاریم. (تمرین ۹.۱۱ ملاحظه شود.)

قضیهٔ ۶.۱۱ فرض کنیم H و K زیرگروههایی از گروه G باشند به طوری که $K \leqslant H \leqslant G$، همچنین فرض کنیم $(H:K)$ و $(G:H)$ هر دو متناهی باشند. در این صورت $(G:K)$ متناهی است، و $(G:K)=(G:H)(H:K)$.

قضیهٔ ۴.۱۱ نشان می‌دهد که اگر H زیرگروهی از گروه متناهی G باشد، آنگاه مرتبهٔ H مرتبهٔ G را عاد می‌کند. ممکن است بیندیشید که آیا عکس این موضوع هم درست است. یعنی اگر G گروهی از مرتبهٔ n باشد و m مقسوم علیهی از n، آیا حتماً G زیر گروهی از مرتبهٔ m دارد؟ هرچند از قضیهٔ ۳.۹، به‌سهولت نتیجه می‌شود که عکس موضوع در مورد گروههای آبلی درست است (قضیهٔ ۵.۹ ملاحظه شود) ولی پاسخ منفی است. باری می‌توان نشان داد که A_4 هیچ زیر گروهی از مرتبهٔ ۶ ندارد و مثال نقضی است برای گروههای ناآبلی.

تمرین

۱.۱۱ تعداد همدسته‌های چپ هر یك از زیرگروههای زیر را حساب کنید:

ا) زیر گروه $\langle 18 \rangle$ از $\mathbf{Z}_{36}$.

ب) زیرگروه $\langle 1 \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle$ از $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$.

ج) زیرگروه $\langle 2 \rangle \times \langle 1 \rangle \times \langle 0 \rangle$ از $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$.

۲.۱۱ سه زیر گروه از گروه تقارنهای مربع از مثال ۲.۴، عبارت‌انداز $H_1=\{\rho_0,\rho_2\}$، $H_2=\{\rho_0,\mu_1\}$ و $H_3=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$. برای هریك از این زیر گروهها، اعضای گروه را به‌ترتیبی بنویسید که جدول گروه تقارنهای مربع، همدسته‌های چپ را چنان که در مثالهای ۲.۱۱ و ۳.۱۱ عمل کردیم نشان بدهد. تعیین کنید که آیا عمل القایی خوشتعریف است و آیا همدسته‌های چپ تشکیل گروه می‌دهند یا نه. استفاده از رنگهای مختلف برای هر همدسته، جدول را جالبتر می‌سازد.

۳.۱۱ همدسته‌های چپ زیر گروه دوری $\langle (1,2) \rangle$ از $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ را بنویسید و تعیین کنید که آیا عمل القایی خوشتعریف است یا نه و آیا مجموعهٔ همدسته‌های چپ تشکیل گروه می‌دهند

یانه. در مورد استفاده از رنگ‌آمیزی تمرین ۲.۱۱ ملاحظه شود.

۴.۱۱ در حد ایزومورفیسم، چند گروه از مرتبهٔ ۱۷ وجود دارد؟

۵.۱۱ نشان دهید که تعداد همدسته‌های چپ‌هر زیرگروه H از یك گروه G با تعداد همدسته‌های راست‌آن برابراست؛ یعنی، نگاشتی یك به یك‌از گردایهٔ همدسته‌های راست بروی گردایهٔ همدسته‌های چپ ارائه کنید. (توجه کنید که بنا به شمارش، درمورد گروههای متناهی این نتیجه بدیهی‌است. اثبات شما باید شامل همهٔ گروهها بشود.)

۶.۱۱ درستی یا نادرستی هر یك ازگزاره های زیررا تعیین کنید.

— ا) هر زیر گروه یك گروه همدسته‌های چپ‌دارد.

— ب) تعداد همدسته‌های چپ هر زیر گروه یك گروه متناهی مقسوم علیهی ازمرتبهٔ گروه است.

— ج) هر گروه از مرتبهٔ عددی اول، آبلی‌است.

— د) همدسته‌های چپ زیر گروهی متناهی ازیك گروه نامتناهی وجود ندارند.

— ه) هر زیر گروه یك گروه یك همدستهٔ چپ‌خودش است.

— و) فقط زیرگروههای گروههای متناهی می‌توانند همدسته‌های‌چپ داشته باشند.

— ز) به‌ازای $n>1$ اندیس A_n در S_n برابر است‌با ۲.

— ح) قضیهٔ لاگرانژ نتیجهٔ‌خوبی است.

— ط) هر گروه متناهی، عضوی از مرتبهٔ هرمقسوم علیه مرتبهٔ گروه دارد.

— ی) هر گروه دوری متناهی عضوی از مرتبهٔ هرمقسوم علیه مرتبهٔ گروه دارد.

۷.۱۱ تمرین ۵.۲ نشان داد که هر گروه متناهی ازمرتبهٔ زوج $2n$، عضوی‌ازمرتبهٔ ۲ دارد. با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ ونه قضیهٔ ۳.۹، نشان دهید که اگر n فرد باشد، هر گروه‌آبلی از مرتبهٔ $2n$ دقیقاً یك عضو ازمرتبهٔ ۲ دارد.

۸.۱۱ نشان‌دهید که هر گروه با حداقل ۲ عضو و بدون زیر گروهی واقعی ونابدیهی باید متناهی باشد و ازمرتبهٔ عددی اول.

۹.۱۱ قضیهٔ ۶.۱۱ راثابت کنید. [راهنمایی: فرض کنید $\{a_iH|i=1,2,\dots,r\}$ گردایهٔ همدسته‌های چپ متمایز H در G و $\{b_jK|j=1,2,\dots,s\}$ گردایهٔ همدسته‌های‌چپ متمایز K در H باشد. نشان دهید که

$$\{(a_i,b_j)K|i=1,2,\dots,r,j=1,2,\dots,s\}$$

گردایهٔ همدسته‌های چپ متمایز K در G است.]

۱۰.۱۱ نشان دهید که اگر H زیرگروهی از یك گروه‌آبلی G باشد آنگاه هرهمدستهٔ چپ H یك همدستهٔ راست H نیزهست.

۱۱.۱۱ نشان دهید که اگر اندیس زیرگروه H در گروه متناهی G برابر با ۲ باشد، آنگاه هر همدستهٔ چپ H در عین حال یك همدستهٔ راست آن نیز هست.

۱۲.۱۱ با استفاده از نمادگذاری S_3 از مثال ۱.۲، سعی کنید بدون نوشتن جدول بفهمید که آیا عمل القایی در همدسته‌های چپ زیرگروه

$$\{(\rho_0,0),\ (\rho_0,3),\ (\rho_1,0),\ (\rho_1,3),\ (\rho_2,0),\ (\rho_2,3)\}$$

از گروه $S_3 \times \mathbf{Z}_6$ خوشتعریف هست و آیا این همدسته‌ها یك گروه تشکیل می‌دهند. درمورد همدسته‌های چپ چطور؟

$$\{(\rho_0,0),\ (\rho_0,3),\ (\mu_1,0),\ (\mu_1,3)\}$$

۱۳.۱۱ نشان دهید که همدسته‌های چپ زیرگروه $\{0\} \times \mathbf{Z}_2$ از $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_2$ تحت عمل القایی در همدسته‌های چپ گروهی ایزومورف با $\mathbf{Z}$ تشکیل می‌دهند.

۱۴.۱۱ نشان دهید که اگر گروه G با عضو همانی e از مرتبهٔ n باشد، آنگاه برای هر a از G، $a^n = e$.

۱۵.۱۱ نشان دهید که هر همدستهٔ چپ زیرگروه $\mathbf{Z}$ از گروه جمعی $\mathbf{R}$ متشکل از اعداد حقیقی نمایندهٔ منحصر به‌فردی مانند x در $\mathbf{R}$ دارد به طوری که $0 \leqslant x < 1$.

۱۶.۱۱ نشان دهید که تابع sine به‌همهٔ نماینده‌های هرهمدستهٔ چپ‌ثابت زیرگروه $\langle 2\pi \rangle$ از گروه جمعی $\mathbf{R}$ متشکل از اعداد حقیقی، مقدار ثابتی را نسبت می‌دهد. (بنابراین sine به مجموعهٔ همدسته‌ها تابع خوشتعریفی القامی‌کند، مقدار تابع دریك همدسته بدین‌ترتیب به دست می‌آید که نماینده‌ای چون x از آن‌همدسته را انتخاب و $\sin x$ را حساب می‌کنیم.)

۱۷.۱۱ نشان دهید که هر گروه دوری متناهی از مرتبهٔ n، دقیقاً یك زیرگروه ازمرتبهٔ هر مقسوم علیه d از n دارد و اینها تمام زیرگروههای گروه را تشکیل می‌دهند.

۱۸.۱۱ **تابع ϕ اویلر** به‌ازای هرعدد طبیعی n چنین تعریف می‌شود که: $\phi(n) = s$؛ s تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n یا مساوی با آن است که نسبت به n متباین باشند. با استفاده ازتمرین ۱۷.۱۱، نشان دهید که

$$n = \sum_{d|n} \phi(d),$$

مجموع روی تمام مقسوم علیه‌های طبیعی d از n است. [راهنمایی: توجه کنید که تعداد مولدهای $\mathbf{Z}_d$ بنا به‌نتیجهٔ قضیهٔ ۴.۶ برابراست با $\phi(d)$.]

۱۹.۱۱ فرض کنیم که G یك گروه متناهی باشد. نشان دهید که اگر به‌ازای هرعدد طبیعی m، تعداد جوابهای معادلهٔ $x^m = e$ در G حداکثر m باشد، آنگاه G دوری است. [راهنمایی: قضیهٔ ۵.۱۱ و تمرین ۱۸.۱۱ رابه‌کار ببرید و نشان دهید که G باید عضوی ازمرتبهٔ $n = |G|$ داشته‌باشد.]

۱۲

زیرگروه نورمال وگروه‌خارج قسمت

۱.۱۲ ملاکهایی برای وجود یك‌گروه همدسته

اکنون باز می‌گردیم به مسئلهٔ تشخیص این‌که برای چه زیرگروههای H ازیك‌گروه G، همدسته‌های چپ (راست) با عمل القایی تشکیل یك‌گروه می‌دهند. نکتهٔ حساس این است که‌آیا عمل القایی خوشتعریف‌است یانه.

لم ۱.۱۲ اگر H یك زیرگروه G باشد و عمل القایی ضرب همدسته ها در مجموعهٔ همدسته‌های چپ (راست) H خوشتعریف باشد، آنگاه گردآیه همدسته‌های چپ (راست) H با این عمل القایی ضرب همدسته ها یك‌گروه‌است.

برهان. خاطرنشان می‌سازیم که حاصلضرب $(aH)(bH)$ ازهمدسته‌های چپ عبارت‌است از همدستهٔ چپی از H که حاوی حاصلضرب هر دو نماینده، یکی از aH و دیگری از bH، باشد. فرض براین است که ضرب همدسته‌ها خوشتعریف، یعنی مستقل از انتخاب نماینده‌های aH و bH است. بنابراین درمحاسبات همواره می‌توان عضو x را به‌عنوان نمایندهٔ همدستهٔ xH انتخاب کرد.

برقراری اصول موضوع گروه در مورد گردآیهٔ همدسته‌ها به برقراری اصول موضوع گروه در G باز می‌گردد، چراکه ضرب همدسته‌ها برحسب ضرب اعضای G تعریف می‌شود. برای اثبات قانون شرکتپذیری، باید نشان دهیم که

$$(aH)[(bH)(cH)] = [(aH)(bH)](cH).$$

بنا برمحاسبه، داریم:

$$(aH)[(bH)(cH)]=(aH)(bcH)=a(bc)H$$

همچنین

$$[(aH)(bH)](cH)=(abH)(cH)=(ab)cH.$$

بنا به قانون شرکتپذیری در G، می‌دانیم که

$$a(bc)=(ab)c$$

بنابراین ضرب همدسته‌ها نیز شرکتپذیر است. به همین ترتیب، eH چون عضو همانی عمل می‌کند، زیرا نمایندهٔ آن e عضو همانی G است، و معکوس aH عبارت است از $a^{-1}H$. □

قضیهٔ ۱.۱۲ اگر H زیرگروهی از گروه G باشد، آنگاه عمل ضرب القایی در همدسته‌های چپ (راست) H خوشتعریف است، اگر و فقط اگر هر همدستهٔ چپ یك همدستهٔ راست نیز باشد.

برهان. فرض کنیم عمل ضرب القایی همدسته‌ها خوشتعریف باشد. بنا به لم ۱.۱۲ همدسته‌های چپ (راست) تشکیل یك گروه می‌دهند و بنا به قضیهٔ ۲.۱۱ همدسته‌های چپ همان همدسته‌های راست هستند.

به عکس، فرض کنیم که هر همدستهٔ چپ aH یك همدستهٔ راست نیز باشد. چون که اگر g عضوی از G باشد، $g\in gH$ و همدستهٔ راست شامل g عبارت است از Hg، بنابراین فرض این است که به‌ازای هر g از G، $gH=Hg$. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر حاصلضرب $(aH)(bH)$ باضرب نماینده‌ها تعریف شود، همدستهٔ چپی که حاصلضرب نماینده‌ها را در بر دارد مستقل از انتخاب این نماینده است. برای این کار، فرض می‌کنیم a_1 و a_2 نماینده‌هایی از aH باشند و b_1 و b_2 نماینده‌هایی از bH. باید نشان دهیم که a_1b_1 و a_2b_2 هر دو در یك همدسته هستند. چون $aH=a_1H=a_2H$ و $bH=b_1H=b_2H$، به‌ازای h_1 و h_2 یی از H می‌توان نوشت $a_1=a_2h_1$ و $b_1=b_2h_2$. پس

$$a_1b_1=a_2h_1b_2h_2.$$

چون بنا به فرض $b_2H=Hb_2$، پس به‌ازای h_3 ای از H، $h_1b_2=b_2h_3$. بنابراین

$$a_1b_1=a_2b_2h_3h_2 \quad \text{و از اینرو} \quad a_1b_1\in a_2b_2H;$$

یعنی، a_1b_1 و a_2b_2 هر دو در یك همدستهٔ چپ هستند. این نشان می‌دهد که ضرب القایی خوشتعریف است. □

۲.۱۲ اتومورفیسم داخلی و زیرگروه نورمال

اکنون می‌دانیم که شرط لازم وکافی برای آن که همدسته‌های یك زیرگروه H از گروهی چون G تحت عمل القایی ضرب همدسته‌ها تشکیل یك گروه بدهند آن است که به‌ازای هر g از G، $gH=Hg$. این تساوی را می‌توان چنین بیان کرد که به‌ازای هر g از G، $g^{-1}Hg=H$، که در آن، البته،

$$g^{-1}Hg=\{g^{-1}hg|h\in H\}.$$

برای آن که بر معنی gHg^{-1} وقوف بیشتری پیدا کنیم، هدایت می‌شویم به‌این که به‌ازای هر g از G، نگاشت $i_g:G\to G$ با تعریف

$$xi_g=g^{-1}xg$$

را مورد مطالعه قرار دهیم.

تعریف هر ایزومورفیسم از گروه G با خودش یك اتومورفیسم گروه G نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۱۲ به‌ازای هر g از G، نگاشت $i_g:G\to G$ که باضابطهٔ $xi_g=gxg^{-1}$ تعریف می‌شود، اتومورفیسمی ازگروه G است. i_g **اتومورفیسم داخلی** G **تحت مزدوجگیری** g نامیده می‌شود.

برهان. باید نشان دهیم که i_g یك ایزومورفیسم G باخودش است. چون نگاشت تعریف شده است، باید نشان دهیم که یك‌به‌یك و برو است، و همواره

$$(xy)i_g=(xi_g)(yi_g).$$

ابتدا در مورد یك‌به‌یك بودن؛ اگر $xi_g=yi_g$ آنگاه $g^{-1}xg=g^{-1}yg$ و بنابراین بنا به‌قاعدهٔ حذف درگروهها $x=y$. سپس درمورد برو بودن؛ اگر $x\in G$، آنگاه

$$(gxg^{-1})i_g=g^{-1}(gxg^{-1})g=x.$$

سرانجام

$$(xy)i_g=g^{-1}xyg$$

ونیز

$$(xi_g)(yi_g)=(g^{-1}xg)(g^{-1}yg)=g^{-1}xyg. \square$$

چون هر اتومورفیسم G یك ایزومورفیسم از G با خودش است، پس هر اتومورفیسم تنها نام اعضا را تبدیل می‌کند و تمام خصوصیات ساختاری جبری آنها را حفظ می‌کند. یعنی، i_g هر زیرگروه G را به‌زیرگروهی (احیاناً متفاوت با آن) تصویر می‌کند و هرعضو

از مرتبهٔ n را به عضوی از همان مرتبه می‌نگارد و قس علیهذا. اکنون بیان این که $gH=Hg$ معادل است با این بیان که

$$H=g^{-1}Hg=\{g^{-1}hg|h\in H\}.$$

این تساوی بدین معنی است که i_g زیر گروه H را به‌خودش تصویر می‌کند. این بدان معنی نیست که لزوماً برای هر h، از $hi_g=h$، H، بلکه بدین معنی است که به‌ازای هر h، $hi_g\in H$. به عبارت دیگر، تساوی $g^{-1}Hg=H$ چنین معنی می‌دهد که i_g جایگشتی است از H.

تعریف یك زیر گروه H از گروهی چون G یك زیر گروه نورمال (یا پایا) از G است، اگر به‌ازای هر g از G، $g^{-1}Hg=H$، یعنی اگر H تحت هر اتومورفیسم داخلی G پایا باشد.

بنابراین زیرگروههای نورمال دقیقاً همان زیرگروههای مهم واجد این خاصیت هستند که عمل القایی در همدسته‌های آنها (همدسته‌های چپ و راست در اینجا یکی هستند) خوشتعریف است و همدسته‌ها تشکیل یك گروه می‌دهند.

توجه بدین نکته ارزش دارد که اگر H زیر گروهی از G باشد که به‌ازای هر g از G، $g^{-1}Hg\subseteq H$، آنگاه به‌ازای هر g از G، $gHg^{-1}=H$، یعنی H یك زیر گروه نورمال G است. برای اثبات، فرض کنیم که به ازای هر g از G، $g^{-1}Hg\subseteq H$. می‌خواهیم نشان دهیم که $H\subseteq g^{-1}Hg$. فرض کنیم $h\in H$، آنگاه $(g^{-1})^{-1}Hg^{-1}\subseteq H$، از اینرو $(g^{-1})^{-1}hg^{-1}=h_1$ و $h_1\in H$. پس $ghg^{-1}=h_1$ و لذا $h=g^{-1}h_1g$ و $h\in g^{-1}Hg$. بنابراین برای نشان دادن این که یك زیر گروه H از گروهی چون G یك زیر گروه نورمال است، معمولا نشان می‌دهند که به ازای هر h از H و هر g از G، $g^{-1}hg\in H$.

قضیهٔ ۳.۱۲ هر زیرگروه یك گروه آبلی یك زیرگروه نورمال است.

برهان. اثبات ساده است، چون که اگر H یك زیر گروه از گروه آبلی G باشد، آنگاه به‌ازای هر g از G و هر h از H

$$ghg^{-1}=hgg^{-1}=he=h. \qquad \square$$

مثال ۱.۱۲ مثال ۲.۱۱ نشان می‌دهد که $\{\rho_0,\mu_1\}$ یك زیر گروه نورمال S_3 نیست. درواقع

$$\rho_1\mu_1(\rho_1)^{-1}=\rho_1\mu_1\rho_2=\mu_2\notin\{\rho_0,\mu_1\}.$$

در اینجا i_{ρ_1} زیر گروه $\{\rho_0,\mu_1\}$ را بروی زیر گروه $\{\rho_0,\mu_2\}$ می‌نگارد. $\square$

تعریف دو زیر گروه H و K از گروهی چون G مزدوج نامیده می‌شوند درصورتی که به‌ازای عضوی مانند a از G، $H=aKa^{-1}$، یعنی اگر یکی به‌وسیلهٔ اتومورفیسمی داخلی بروی دیگری نگاشته شود.

بنابراین مثال ۱.۱۲ نشان می‌دهد که $\{\rho_0,\mu_1\}$ و $\{\rho_0,\mu_2\}$ دو زیر گروه مزدوج از گروه S_3 از مثال ۱.۴ هستند.

۳.۱۲ گروه خارج قسمت

تعریف اگر N زیر گروهی نورمال ازگروه G باشد، گروه همدسته‌های N تحت عمل القایی را گروه خارج قسمت G به هنگ N می‌نامند و آن را به صورت G/N نمایش می‌دهند. هر همدسته یك هماد مانده‌ای G به هنگ N نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱۲ با مراجعه به‌تمرین ۱.۱۱، ملاحظه می‌کنیم که چون گروه $\mathbf{Z}$ آبلی‌است، $3\mathbf{Z}$ یك زیرگروه نورمال آن‌است و بنابراین گروه خارج قسمت $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ متشکل از سه هماد مانده‌ای

$$0+3\mathbf{Z}\ ،\ 1+3\mathbf{Z}\ \text{و}\ 2+3\mathbf{Z}$$

است. این گروه از مرتبهٔ ۳ و بنابراین دوری‌است و با $\mathbf{Z}_3$ ایزومورف‌است. □

مثال ۳.۱۲ زیرگروه $n\mathbf{Z}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، در $\mathbf{Z}$ نورمال‌است. n هماد مانده وجود دارد که عبارت‌اند از:

$$0+n\mathbf{Z}\ ،\ 1+n\mathbf{Z}\ ،\ \ldots,\ (n-1)+n\mathbf{Z}.$$

چون مجموع همادهای مانده‌ای را با انتخاب نماینده‌هایی از آنها محاسبه می‌کنیم، بلافاصله نتیجه می‌شود که نگاشت $\phi_n:\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n$ با تعریف:

$$(m+n\mathbf{Z})\phi_n=m$$

که درآن $0\leqslant m<n$، یك ایزومورفیسم‌است. □

با تسامح در نمادگذاری، گاهی می‌نویسیم $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_n$ و $\mathbf{Z}_n$ را به‌عنوان گروه جمعی همادهای مانده‌ای $\mathbf{Z}$ به‌هنگ $\langle n\rangle$، یا با تسامح دیگری در نمادگذاری، گروه همادهای مانده‌ای $\mathbf{Z}$ به‌هنگ n، تصور می‌کنیم. به‌خاطر بیاورید که در فصل ۵ گفتیم دو عدد a و b به‌هنگ n همنهشت نامیده می‌شوند، و نوشته می‌شود $a\equiv b \pmod n$، اگر و فقط اگر n عادکند $a-b$ را. این دقیقاً ملاك تشخیص این مطلب است که a و b هر دو در یك همدسته از $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ باشند.

در اینجا خاطرنشان می‌سازیم که بر خلاف روش ساده‌ای که در قضیهٔ ۳.۶ به‌کار

رفت روش زیبای نمایش وجود یك گروه دوری از مرتبهٔ n، تشکیل $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ است.

مثال ۴.۱۲ مطلوب است محاسبهٔ گروه خارج قسمت $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/\langle(0,1)\rangle$. در اینجا $\langle(0,1)\rangle$ زیر گروه دوری H از $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6$ تولید شده به‌وسیلهٔ $(0,1)$ است.
بنابراین

$$H=\{(0,0),(0,1),(0,2)(0,3),(0,4),(0,5)\}.$$

چون که $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6$ دارای ۲۴ عضو است و H دارای ۶ عضو، بنابراین هر یك از همدسته‌های H باید ۶ عضو داشته و $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/H$ ازمرتبهٔ ۴ باشد. چون $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6$ آبلی است، پس $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/H$ نیز آبلی است (بخاطر داشته باشید که در گروه خارج قسمت، محاسبه بر حسب نماینده‌هایی از گروه اصلی صورت می‌گیرد). منظور از «محاسبهٔ $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/H$» تعیین این گروه آبلی متناهی است براساس طبقه‌بندیمان در قضیهٔ اساسی گروههای آبلی متناهیاً تولیدشده (قضیهٔ ۳.۹). با نماد گذاری جمعی، همدسته‌ها عبارت‌اند از:

$$H=(0,0)+H \quad ، \quad (1,0)+H \quad ، \quad (2,0)+H \quad و \quad (3,0)+H.$$

نظر به‌این که می‌توان محاسبه را برمبنای نماینده‌های $(0,0)$، $(1,0)$، $(2,0)$، و $(3,0)$ انجام داد، بدیهی است که $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/H$ با $\mathbf{Z}_4$ ایزومورف است. این نتیجه را باید انتظارمی‌داشتیم چراکه دریك گروه خارج قسمت به‌هنگ H، هرچه در H باشد به‌عضو همانی تبدیل می‌شود؛ بدین معنی که، اساساً بجای هرچه در H هست صفر قرار می‌دهید. بنابراین عامل دوم $\mathbf{Z}_6$ از $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6$ به‌طور کلی از بین می‌رود و تنها عامل $\mathbf{Z}_4$ باقی می‌ماند. این مثالی است از یك حالت کلی که در قضیهٔ ۷.۱۲ خواهدآمد. □

مثال ۵.۱۲ مطلوب است محاسبهٔ $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/\langle(0,2)\rangle$.
اکنون، $(0,2)$ زیر گروه

$$H=\{(0,0),(0,2),(0,4)\}$$

از مرتبهٔ ۳ از $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6$ را تولید می‌کند. در اینجا نخستین عامل $\mathbf{Z}_4$ از $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6$ دست نخورده باقی می‌ماند. از طرف دیگر عامل $\mathbf{Z}_6$ به‌وسیلهٔ یك زیرگروه از مرتبهٔ ۳ اساساً فرو می‌ریزد و در عامل دوم یك گروه خارج قسمت از مرتبهٔ ۲ پدید می‌آید که باید با $\mathbf{Z}_2$ ایزومورف باشد. بنابراین $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6/\langle(0,2)\rangle$ ایزومورف است با $\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_2$. □

مثال ۶.۱۲ مطلوب است محاسبهٔ گروه خارج قسمت $(\mathbf{Z}_4\times\mathbf{Z}_6)/\langle(2,3)\rangle$.
مواظب باشید! امکان زیادی دارد که بگویید در اینجا عضو ۲ از $\mathbf{Z}_4$ و عضو ۳ از $\mathbf{Z}_6$ را صفر می‌گیریم و در نتیجه $\mathbf{Z}_4$ به‌یك گروه خارج قسمت ایزومورف با $\mathbf{Z}_2$ و همچنین $\mathbf{Z}_6$ به‌یك گروه خارج قسمت ایزومورف با $\mathbf{Z}_3$ تبدیل می‌شوند و در نتیجه

رویهمرفته گروه خارج قسمت ایزومورف با $Z_2 \times Z_3$ به‌دست می‌آید این نتیجه غلط است. توجه کنید که

$$H=(2,3)=\{(0,0),(2,3)\}$$

از مرتبهٔ ۲ است، بنابراین $(Z_4 \times Z_6)/\langle(2,3)\rangle$ مرتبهٔ ۱۲ دارد و نه ۶. ملاحظه کنید که صفر قراردادن $(2,3)$ موجب صفرشدن هر یك از اعضای $(2,0)$ و $(0,3)$ نمی‌شود و بنابراین عاملها به‌طور جداگانه فرو نمی‌ریزند.

گروههای آبلی ممکن از مرتبهٔ ۱۲ عبارت‌اند از $Z_4 \times Z_3$ و $Z_2 \times Z_2 \times Z_3$ و باید تصمیم بگیریم که گروه خارج قسمت در اینجا با کدام یك ایزومورف است. این دو گروه را می‌توان به سهولت از یکدیگر تمیز داد، چراکه $Z_4 \times Z_3$ عضوی از مرتبهٔ ۴ دارد ولی $Z_2 \times Z_2 \times Z_3$ دارای چنین عضوی نیست. ادعا می‌کنیم که همدستهٔ $(1,0)+H$ از گروه $(Z_4 \times Z_6)/H$ از مرتبهٔ ۴ است. برای پیدا کردن کوچکترین توان یك همدسته که در یك گروه خارج قسمت به‌هنگ H عضو همانی را به دست دهد باید نماینده‌ای برای آن انتخاب کنیم و کوچکترین توان آن نماینده را که در زیر گروه H باشد بیابیم. بدیهی است که

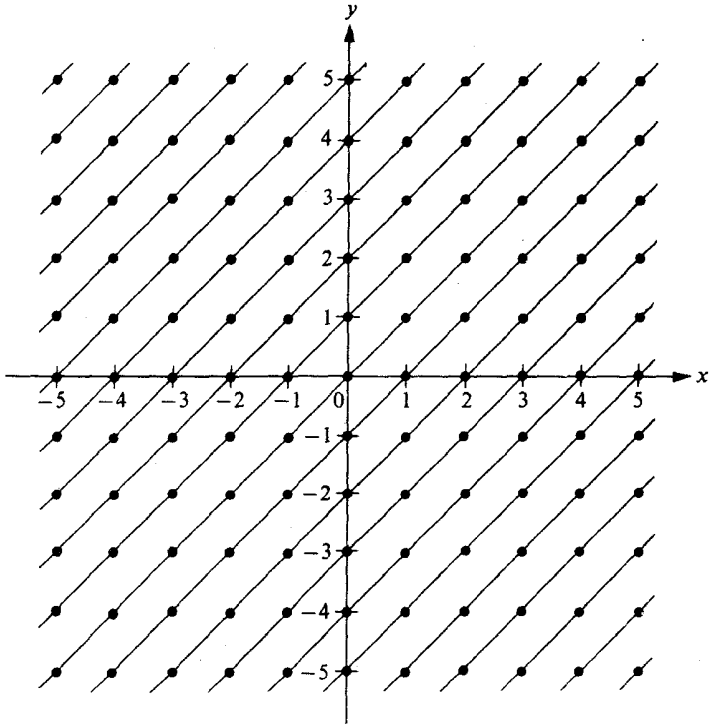
$$4(1,0)=(1,0)+(1,0)+(1,0)+(1,0)=(0,0)$$

اولین دفعه‌ای است که از جمع $(1,0)$ با خودش عضوی از H به‌دست می‌آید. بنابراین $(Z_4 \times Z_6)/H$ عضوی ازمرتبهٔ ۴ دارد و لذا با $Z_3 \times Z_4$ یا Z_{12} ایزومورف است. □

مثال ۷.۱۲ مطلوب است محاسبهٔ (یعنی، طبقه‌بندی بر اساس قضیهٔ ۳.۹) گروه $(Z \times Z)/\langle(1,1)\rangle$. $Z \times Z$ را می‌توان به صورت نقاطی ازصفحه که هردو مختصشان اعداد صحیح باشند، طبق شکل ۱.۱۲، در نظر گرفت. زیرگروه $H=\langle(1,1)\rangle$ تشکیل می‌شود ازآن دسته از نقاط مذکور که بر خط $45°$ گذرنده از مبدأ مختصات واقع هستند. همدستهٔ $(1,0)+H$ تشکیل می‌شود از نقاط واقع برخط $45°$ گذرنده ازنقطهٔ به‌مختصات $(1,0)$، که آن هم در شکل نشان داده شده‌است. با ادامهٔ این مطلب، ملاحظه می‌شود که هر همدسته تشکیل می‌شود از نقاط واقع بر یکی از خطوط $45°$ رسم‌شدهٔ درشکل. برای محاسبه درگروه خارج قسمت، می‌توان نماینده های

$$\ldots,(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\ldots$$

از این همدسته‌ها را انتخاب کرد. با توجه به‌این که این نماینده‌ها دقیقاً متناظرند با نقاط Z واقع برمحور xها، بلافاصله می بینیم که گروه خارج قسمت $(Z \times Z)/\langle(1,1)\rangle$ با Z ایزومورف است. □



شکل ۱.۱۲

۴.۱۲ گروه ساده

چنان‌که در بخش قبل گفته شد، یکی از خواص گروههای خارج قسمت اطلاعات مجملی است که در باب ساختار گروه اصلی به ما می‌دهد. اما، گاهی ممکن‌است گروه، زیر گروه نورمال واقعی نابدیهی نداشته‌باشد. مثلا، قضیهٔ ۴.۱۱ نشان می‌دهد که هر گروه از مرتبهٔ عددی اول دارای زیر گروهی واقعی و نابدیهی نیست.

مثال ۸.۱۲ واضح‌است که زیر گروه غیرواقعی G و زیر گروه بدیهی $\{e\}$ از یك گروه G هر دو زیر گروههای نورمال هستند. همچنین بدیهی‌است که G/G گروه بدیهی تك‌عضوی است در حالی که $G/\{e\}$ تحت نگاشت طبیعی که به‌ازای هر g از G، $g\{e\}$ را به g می‌برد، با G ایزومورف‌است. این دو گروه خارج قسمت از لحاظ ارائه اطلاعاتی بیشتر در باب ساختار گروه مفروض G، فاقد ارزش هستند. □

تعریف یك گروه **ساده** است در صورتی که هیچ زیر گروه نورمال واقعی‌ونا بدیهی نداشته باشد.

قضیهٔ ۴.۱۲ گروه متناوب A_n به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geqslant 5$، ساده است.

برهان. تمرین ۲۲ ملاحظه شود.

ما در آخرین فصل این کتاب[1] کاربرد مهمی از قضیهٔ ۴.۱۲ را ارائه خواهیم کرد. گروههای سادهٔ بسیاری غیر از آنچه در بالا گفته‌شد نیز وجود دارند. به‌عنوان مثال، مرتبهٔ A_5 برابراست با ۶۰ و مرتبهٔ A_6 برابراست با ۳۶۰. گروه ساده‌ای از مرتبهٔ عدد غیر اول ۱۶۸ هم وجود دارد که مرتبهٔ آن بین این دو عدد است.

تعیین و دسته‌بندی کامل تمام گروههای سادهٔ متناهی اخیراً تکمیل شده است. در سه دههٔ گذشته صدها ریاضی‌دان روی این موضوع کار کرده‌اند. فصل ۱۴، دربارهٔ سری گروهها، نشان خواهد داد که هر گروه متناهی نوعی تجزیه به گروههای ساده دارد که عوامل، قطع نظر از ترتیب، منحصر به‌فرد هستند. این وضعیت شبیه تجزیهٔ اعداد طبیعی به اعداد اول است. اطلاعات جدید درباب تمام گروههای سادهٔ متناهی می‌تواند برای حل برخی ازمسائل نظریهٔ گروههای متناهی مورد استفاده قرار گیرد.

در این متن دیده‌ایم که هر گروه آبلی سادهٔ متناهی بدازای عددی اول چون p، با $\mathbf{Z}_p$ ایزومورف است. در ۱۹۶۴، تامپسون[2] و فایت[3] [۲۱] حدس قدیمی برنساید[4] مبنی براین که هر گروه ساده ناآبلی متناهی از مرتبهٔ زوج است را ثابت کردند. قدم بسیار بزرگ دیگری در جهت تکمیل دسته‌بندی توسط اشباخر[5] در سالهای ۱۹۷۰ برداشته‌شد. در اوایل ۱۹۸۰، گریس[6] اعلام کرد که گروه سادهٔ «غول» از قبل پیش‌بینی‌شدهٔ از مرتبهٔ

$$۸۰۸,۰۱۷,۴۲۴,۷۹۴,۵۱۲,۸۷۵,۸۸۶,۴۵۹,۹۰۴,۹۶۱$$

$$۷۱۰,۷۵۷,۰۰۵,۷۵۴,۳۶۸,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$$

را ساخته‌است. اشباخر شرح نهایی دسته‌بندی را در اوت ۱۹۸۰ به‌دست داد. مقالات تحقیقی ارائه شده برای دسته‌بندی کامل، حدود پنجهزار صفحهٔ مجله‌ای را پر می‌کند.

*۵.۱۲ کاربرد

در باقیماندهٔ این فصل سعی می‌کنیم جنبه‌های گوناگون گروههای خارج قسمت (اثبات نورمال بودن زیرگروهها، محاسبه با گروههای خارج قسمت، اهمیتشان، کاربردها وغیره) را روشنتر کنیم. برای این‌که نشان دهیم، به شرط امکان محاسبه در گروه اصلی، محاسبه در گروه خارج قسمت چقدر ساده است قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

---

۱. منظور آخرین فصل قسمت II کتاب است که ترجمهٔ فارسی آن در مجلد جداگانه‌ای چاپ می‌شود.ـ م.

2. Thompson 3. Feit 4. Burnside 5. Aschbacher 6. Griess

قضیهٔ ۵.۱۲ هرگروه خارج قسمت ازگروهی دوری خود دوری است.

برهان. فرض کنیم G گروهی دوری با مولد a و N زیرگروه نورمالی‌از G باشد. ادعا می‌کنیم که همدستهٔ aN، گروه G/N راتولید می‌کند. بایدتمام توانهای aN را محاسبه کنیم. امـا این‌کار منجر می‌شود به محاسبهٔ تمـام توانهای نمایندهٔ a در G، که همهٔ این توانها تمام اعضای G را به دست می‌دهند. بنابراین به طور قطع، توانهای aN تمـام همدسته‌های N را به‌دست می‌دهند و در نتیجه G/N دوری است. □

توجه داشته باشید که‌درتشکیل یك‌گروه خارج‌قسمت‌ازگروه G به‌هنگ‌زیرگروه N، اساساً هریك از اعضای G را که در N باشد مساوی e قرار می‌دهیم، برای این‌که در گروه جدید، N نقش عضو همانی‌گروه را ایفا می‌کند. این هم مورد استعمال دیگری از گروه خارج قسمت است. برای مثال، فرض‌کنیم که می‌خواهیم ساختار یك‌گروه ناآبلی G را مطالعه‌کنیم. چون قضیهٔ ۳.۹ اطلاعات‌کاملی در باب ساختارگروههای‌آبلی به‌اندازهٔ کافی کوچك به ما می‌دهد، ممکن‌است جالب باشد در پی تشکیل‌گروهی‌آبلی باشیم‌که تا آنجاکه ممکن‌است به G شبیه یا به‌اصطلاح یك نسخهٔ آبلی شدهٔ G باشد. برای این‌کار از Gآغاز وشرط می‌کنیم که به‌ازای هر a و b ازگروه‌جدید $ab=ba$. شرط $ab=ba$ معادل‌است با این‌که در گروه جدید $aba^{-1}b^{-1}=e$. عضو $aba^{-1}b^{-1}$ در یك‌گروه، یك **برگردان‌گروه** نامیده می‌شود. بنابراین می‌خواهیم با جایگزین‌کردن هر برگردان G با e سعی‌کنیم نسخه‌ای‌آبلی‌شده از G را تشکیل دهیم. بنابر نخستین مشاهدهٔ این پارگراف، باید سعی‌کنیم‌گروه خـارج قسمت G را، به‌هنگ‌کوچکترین زیرگروه نورمالی‌که شامل همهٔ برگردانهای G باشد، تشکیل دهیم.

قضیهٔ ۶.۱۲ مجموعهٔ تمام برگردانهای $aba^{-1}b^{-1}$ از یك‌گروه G زیرگروه نورمالی چون G' (**زیرگروه برگردان**) از G را تـولید می‌کند و گروه G/G' آبلی است. به‌علاوه، G/N آبلی است اگر و فقط‌اگر $G'\leqslant N$.

برهان. برگردانهـا مسلماً زیرگروهی چون G' از G را تولید می‌کنند. تنها بـاید نشان دهیم‌که این زیرگروه در G نورمـال است. توجه‌کنید که معکوس $(aba^{-1}b^{-1})^{-1}$ از یك برگردان خـود یك برگـردان، یعنی $bab^{-1}a^{-1}$ است. همچنین $e=eee^{-1}e^{-1}$ یك برگردان است. قضیهٔ ۱.۹ آنگـاه نشان می‌دهدکـه G' دقیقاً تشکیل مـی‌شود از تمـام حاصلضربهای متناهی‌برگردانهـا. به‌ازای هر x از G' باید نشان دهیم‌که برای هر g از G، $gxg^{-1}\in G'$، یا این‌که اگر x حاصلضربی از برگردانهـا باشد، gxg^{-1} نیز به‌ازای هر g از G حاصلضربی‌است از برگردانهـا. بـا قراردادن $e=g^{-1}g$ بین حـاصلضرب برگردانهـای موجود در x، ملاحظه می‌کنیم که مسئله منجر می‌شود به‌این‌کـه نشان دهیم به‌ازای هر برگـردان $cdc^{-1}d^{-1}$ عضو $g(cdc^{-1}d^{-1})g^{-1}$ به G' تعلق دارد.

$$\begin{aligned} g(cdc^{-1}d^{-1})g^{-1} &= (gcdc^{-1})e(d^{-1}g^{-1}) \\ &= (gcdc^{-1})(g^{-1}d^{-1}dg)(d^{-1}g^{-1}) \\ &= [(gc)d(gc)^{-1}d^{-1}][dgd^{-1}g^{-1}] \end{aligned}$$

که در G' است. بنابراین G' در G نورمال‌است.

به‌شرط این‌که برداشت درستی از گروههای خارج قسمت به‌دست‌آورده‌باشید، بقیهٔ قضیه بدیهی‌است. آبلی بودن G/G'، هرچندکسی‌آن را این‌طور مجسم نمی‌کند، از روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (aG')(bG') &= abG' = ab(b^{-1}a^{-1}ba)G' \\ &= (abb^{-1}a^{-1})baG' = baG' = (bG')(aG'). \end{aligned}$$

به‌علاوه،اگر G/N آبلی باشد، آنگاه $(a^{-1}N)(b^{-1}N)=(b^{-1}N)(a^{-1}N)$، یعنی $aba^{-1}b^{-1}N=N$، بنابراین $aba^{-1}b^{-1}\in N$ و $G'\leqslant N$. سرانجام، اگر $G'\leqslant N$، آنگاه

$$\begin{aligned} (aN)(bN) &= abN = ab(b^{-1}a^{-1}ba)N \\ &= (abb^{-1}a^{-1})baN = baN = (bN)(aN). \end{aligned}$$ □

قضیهٔ ۷.۱۲ اگر G حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای H و K باشد آنگاه H و K در G نورمال هستند. همچنین G/H به صورتی طبیعی با K ایزومورف است.

برهان. می‌توان G را ایزومورف با حاصلضرب مستقیم خارجی $H\times K$ تصورکرد. در این صورت لازم است نشان دهیم که $\bar{H}=\{(h,e)|h\in H\}$ در $H\times K$ نورمال است و این که $(H\times K)/\bar{H}$ ایزومورف است با $\bar{K}=\{(e,k)|k\in K\}$.

برای نورمال بودن، کافی‌است نشان دهیم که به‌ازای هر (h,k) از $H\times K$،

$$(h,k)\bar{H}(h,k)^{-1}=\bar{H}$$

اما

$$\begin{aligned} (h,k)(h_1,e)(h,k)^{-1} &= (h,k)(h_1,e)(h^{-1},k^{-1}) \\ &= (hh_1h^{-1},kek^{-1}) = (hh_1h^{-1},e) \end{aligned}$$

و $(hh_1h^{-1},e)\in\bar{H}$. بنابراین $\bar{H}$ در $H\times K$ نورمال است. همدسته‌های $\bar{H}$ به‌وضوح به صورت $(e,k)\ \bar{H}$ هستندکه درآن $k\in K$. واضح است که نگاشت

$$\phi:\bar{K}\longrightarrow(H\times K)/\bar{H} \quad \text{تعریف‌شده به وسیلهٔ} \quad (e,k)\phi=(e,k)\bar{H}$$

یك ایزومورفیسم است. □

تمرین

دانشجویان وقتی برای اولین بار می‌خواهند قضیه‌ای در بارهٔ گروههای خارج قسمت ثابت کنند، اغلب مطالبی بدون معنی می‌نویسند. دو تمرین اول و دوم برای جلب توجه به‌نوعی اشتباه اساسی طرح شده‌اند.

۱.۱۲ از دانشجویی خواسته می‌شود که نشان دهد اگر H زیر گروه نورمالی از گروه آبلی G باشد، آنگاه G/H آبلی است. اثبات دانشجو به صورت زیر شروع می‌شود:

باید نشان دهیم که G/H آبلی است. فرض کنیم a و b دو عضو G/H باشند.

ا) چرا مدرسی که این اثبات را می‌خواند انتظار دارد که پس از آن در ورقهٔ دانشجو مطالبی بی‌معنی ببیند؟

ب) دانشجو چه باید می‌نوشت؟

ج) اثبات را کامل کنید.

۲.۱۲ از دانشجویی خواسته می‌شود که ثابت کند اگر G یك گروه تابی باشد، آنگاه به‌ازای هر زیرگروه نورمال H از G، G/H هم یك گروه تابی است. دانشجو می‌نویسد:

باید نشان دهیم که هر عضو G/H از مرتبهٔ متناهی است. فرض کنیم $x \in G/H$. به‌همان پرسشهای تمرین ۱.۱۲ پاسخ دهید.

۳.۱۲ فواصل خالی را پر کنید.

ا) مرتبهٔ گروه خارج قسمت $\mathbf{Z}_6/\langle 3\rangle$ برابر است با ــــــ .

ب) مرتبهٔ گروه خارج قسمت $(\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_{12})/(\langle 2\rangle \times \langle 2\rangle)$ برابر است با ــــــ .

ج) مرتبهٔ گروه خارج قسمت $(\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_{12})/\langle (2,2)\rangle$ برابر است با ــــــ .

د) مرتبهٔ همدستهٔ $5 + \langle 4\rangle$ در گروه خارج قسمت $\mathbf{Z}_{12}/\langle 4\rangle$ برابر است با ــــــ .

ه) مرتبهٔ همدستهٔ $26 + \langle 12\rangle$ در گروه خارج قسمت $\mathbf{Z}_{60}/\langle 12\rangle$ برابر است با ــــــ .

۴.۱۲ نشان دهید که A_n زیر گروهی نورمال از S_n است و S_n/A_n را حساب کنید، یعنی گروه شناخته شده‌ای را پیدا کنید که با S_n/A_n ایزومورف باشد.

۵.۱۲ مطلوب است محاسبهٔ (یعنی طبقه‌بندی بر مبنای قضیهٔ ۳.۹) گروههای زیر:

ا) $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})/\langle (0,1)\rangle$.

ب) $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})/\langle (1,2)\rangle$.

ج) $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z})/\langle (1,1,1)\rangle$.

۶.۱۲ این تمرین این‌واقعیت‌را نشان می‌دهد که اگر G دو زیر گروه نورمال ایزومورف H و K داشته باشد، آنگاه لزومی ندارد که G/H با G/K ایزومورف باشد. این

موضوع بستگی به‌این دارد که هر یك از H و K چگونه در G نشانده شده‌اند.
ا) $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4)/\langle(1,0)\rangle$ رامحاسبه کنید. توجه کنید که $\langle(1,0)\rangle$ دوری‌ازمرتبهٔ ۲ است. «محاسبه کنید» بدین معنی است که کشف کنید این گروه خارج قسمت با کدام یك (در حد ایزومورفیسم) از دوگروه از مرتبهٔ ۴ ایزومورف‌است.
ب) قسمت (۱) را در مورد $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4)/\langle(0,2)\rangle$ تکرار کنید.
ج) قسمت (۱) را در مورد $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4)/\langle(1,2)\rangle$ تکرار کنید.

۷.۱۲ تمام زیرگروههای S_3 از مثال ۱.۴ راکه با $\{\rho_0, \mu_1\}$ مزدوج هستند پیدا کنید.

۱۲.۸+ ثابت کنید که زیرگروه تابی T از گروهی آبلی چون G یك زیرگروه نورمال G است و نیز G/T بدون تاب است. از لم ۱.۹ نمی‌توان استفاده کرد زیرا ممکن است به‌طور متناهی تولید نشود. مستقیماً با استفاده از تعریف گروه تاب و زیرگروه نورمال عمل کنید. مرتکب اشتباه مذکور در تمرینهای ۱.۱۲ و ۲.۱۲ نشوید.

۹.۱۲ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
— ا) فقط و فقط وقتی صحبت از گروه خارج قسمت G/N با معنی است که N یك زیرگروه نورمال G باشد.
— ب) هر زیرگروه از یك گروه آبلی G، یك زیرگروه نورمال G است.
— ج) هر اتومورفیسم داخلی یك گروه آبلی باید همان نگاشت همانی باشد.
— د) هر گروه خارج قسمت یك گروه متناهی خود یك گروه متناهی است.
— ه) هر گروه خارج قسمت یك گروه تابی خود یك گروه تابی است.
— و) هر گروه خارج قسمت یك گروه بدون تاب خود یك گروه بدون تاب است.
— ز) هر گروه خارج قسمت یك گروه آبلی خود گروهی آبلی است.
— ح) هر گروه خارج قسمت یك گروه ناآبلی خودگروهی ناآبلی است.
— ط) گروه $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ دوری و از مرتبهٔ n است.
— ی) گروه $\mathbf{R}/n\mathbf{R}$، که درآن $n\mathbf{R} = \{nr \mid r \in \mathbf{R}\}$ و $\mathbf{R}$ تحت جمع است، یك گروه دوری از مرتبهٔ n است

۱۰.۱۲ تمام زیرگروههای از مرتبهٔ نابیشتر از ۴ از $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4$ را تعیین، ودرهرحالت، مانند قسمت (۱) قضیهٔ ۳.۹، گروه خارج قسمت $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4$ به‌هنگ زیرگروه را محاسبه کنید. یعنی، زیرگروه را توصیف کنید و سپس بگویید که گروه خارج قسمت به‌هنگ این زیرگروه، با $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ یا هرحالت ممکن‌دیگر، ایزومورف‌است. [راهنمایی: $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4$ دارای ۶ زیرگروه دوری از مرتبهٔ ۴ است. آنها را با ارائهٔ مولدشان، همانند زیرگروه $\langle(1,0)\rangle$ معرفی کنید. یکی از زیرگروهها ازمرتبهٔ۴ است که با ۴-گروه کلاین ایزومورف است. سه زیرگروه از مرتبه ۲ نیز وجود دارد.]

۱۱.۱۲ فرض کنید H یك زیرگروه نورمال از گروه متناهی G باشد و $m = (G:H)$. نشان دهید که به‌ازای هر a از G، $a^m \in H$.

۱۲.۱۲ نشان‌دهید هرمقطع از زیرگروههای نورمال یك‌گروه، خود یك‌زیرگروه نورمال آن‌است.

۱۳.۱۲ نشان دهیدکه صحبت ازکوچکترین زیرگروه نورمال یك گروه G که شامل زیر مجموعهٔ ثابتی‌مانند S از G باشد، مصداق دارد. [راهنمایی: از تمرین ۱۲.۱۲ استفاده کنید.]

۱۴.۱۲ نشان دهیدکه اگر گروه متناهی G فقط یك زیرگروه H از مرتبه‌ای مفروض داشته باشد، آنگاه H در G نورمال است.

۱۵.۱۲ نشان دهیدکه اگریك‌گروه متناهی G دارای زیرگروهی واقعی با اندیس ۲ در G باشد، آنگاه G ساده نیست.

۱۶.۱۲ نشان دهیدکه اگر H و N زیرگروههایی از یك‌گروه G باشند و N در G نورمال باشدآنگاه $N \cap H$ در H نورمال است. با یك مثال نشان دهیدکه لزومی‌ندارد $N \cap H$ در G نورمال باشد.

۱۷.۱۲ فرض‌کنیدگروه G حداقل یك زیرگروه از مرتبهٔ متناهی ثابتی چون S داشته باشد. نشان‌دهیدکه مقطع‌تمام‌زیرگروههای بامرتبهٔ s از G یك‌زیرگروه نورمال G است. [راهنمایی. ازاین واقعیت استفاده‌کنیدکه اگر H مرتبهٔ s داشته باشد، آنگاه به‌ازای هر x از G، xHx^{-1} نیز همین مرتبه را دارد.]

۱۸.۱۲ ا) نشان دهیدکه مجموعهٔ تمام اتومورفیسمهای یك‌گروه G باعمل‌ترکیب توابع یك گروه است.
ب) نشان دهیدکه مجموعهٔ تمام اتومورفیسمهای داخلی هر گروه G یك زیرگروه نورمال گروه تمام اتومورفیسمهای G تحت ترکیب توابع است. [هشدار: فراموش نکنید نشان دهیدکه اتومورفیسمهای داخلی حتماً یك گروه تشکیل می‌دهند.]

۱۹.۱۲ نشان دهیدکه مجموعهٔ تمام g هایی از G که $i_g: G \to G$ برابربا اتومورفیسم داخلی همانی i_e باشد یك زیرگروه نورمال G است.

۲۰.۱۲ فرض‌کنید G یك‌گروه باشد. نشان دهیدکه نسبت $\sim$ با تعریف : $a \sim b$ اگر و فقط اگر به‌ازای عضوی چون g از G ، $a = gbg^{-1}$ یك نسبت هم‌ارزی در G است. بعضی از همادهای هم‌ارزی فقط از یك عضو e تشکیل می‌شوند. این اعضا را مشخص کنید.

۲۱.۱۲ فرض‌کنید G یك گروه باشد. نشان دهیدکه نسبت $A \sim B$ اگر و فقط اگر A و B زیرگروههای مزدوج G باشند، وازاینرو به‌ازای‌عضوی چون g از G، $A = gBg^{-1}$، یك نسبت هم‌ارزی می‌باشد. بعضی از همادهای هم‌ارزی ممکن‌است فقط حاوی یك زیر

گروه K باشند. این زیرگروهها را مشخص کنید.

۲۳.۱۲ با تعقیب مراحل و راهنمایی‌های داده شده، ثابت کنید اگر $n \geqslant ۵$ آنگاه A_n ساده است.

ا) نشان دهید که برای $n \geqslant ۳$، A_n شامل هر دور به طول ۳ است.

ب) نشان‌دهید که برای $n \geqslant ۳$، A_n به‌وسیلهٔ دورهای به‌طول ۳ تولیدمی‌شود. [راهنمایی: توجه کنید که $(a,b)(c,d)=(a,c,d)(a,c,b)$ و $(a,b)(a,c)=(a,b,c)$.]

ج) فرض کنید r و s اعضای ثابتی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشند و $n \geqslant ۳$. نشان دهید که A_n به‌وسیلهٔ n دور «خاص» به‌طول ۳ به شکل (r,s,i)، $۱ \leqslant i \leqslant n$، تولید می‌شود. [راهنمایی: با محاسبهٔ

$$(r,s,i)^۲ \quad , \quad (r,s,i)^۲(r,s,j) \quad , \quad (r,s,i)(r,s,j)^۲$$

و

$$(r,s,i)(r,s,j)^۲(r,s,k)(r,s,i)^۲$$

نشان دهید که هر دور به طول ۳ حاصلضرب دورهای «خاص» به طول ۳ است. مشاهده کنید که حاصلضربهای فوق تمام انواع دورهای ممکن به‌طول ۳ را تولید می‌کنند.]

د) فرض کنید برای $n \geqslant ۳$، N زیرگروه نورمالی از A_n باشد. نشان دهید که اگر N شامل دوری به طول ۳ باشد آنگاه $N = A_n$. [راهنمایی: با محاسبهٔ $((i,j,)(r,s))^{-۱}(r,s,i)^۲((i,j,)(r,s))$، نشان‌دهید که $(r,s,i) \in N$ نتیجه می‌دهد که به‌ازای $j = ۱,۲,\ldots,n$، $(r,s,i) \in N$.]

ه) فرض کنید برای $n \geqslant ۵$، N زیرگروه نورمالی از A_n باشد. نشان دهید که یکی از حالتهای زیر باید برقرار باشد و نتیجه بگیرید که در هر حالت $N = A_n$.

حالت ۱. N شامل دوری به طول ۳ است.

حالت ۲. N شامل حاصلضربی از دورهای مجزا است که طول حداقل یکی از آنها بزرگتر از ۳ باشد. [راهنمایی: فرض کنید N شامل حاصلضرب مجزای $\sigma = (a_۱,a_۲,\ldots,a_r)\mu$ باشد. نشان دهید که $(a_۱,a_۲,a_۳)^{-۱}\sigma(a_۱,a_۲,a_۳)\sigma^{-۱}$ در N است، و آن را محاسبه کنید.]

حالت ۳. N شامل حاصلضربی مجزا به صورت $\sigma = (a_۱,a_۲,a_۳)(a_۴,a_۵,a_۶)\mu$ است. [راهنمایی: نشان دهید که $(a_۱,a_۲,a_۴)^{-۱}\sigma(a_۱,a_۲,a_۴)\sigma^{-۱}$ در N است، و آن را محاسبه کنید.]

حالت ۴. N شامل حاصلضربی مجزا به‌صورت $\sigma = (a_۱,a_۲,a_۳)\mu$ است، که در آن μ حاصلضربی از دورهای مجزای به طول ۲ است. [راهنمایی: نشان دهید $\sigma^۲ \in N$ و آن رامحاسبه کنید.]

حالت ۵. N شامل حاصلضربی مجزا به صورت $\sigma=(a_1,a_2)(a_3,a_4)\mu$ است، که در آن μ حاصلضربی از تعداد زوجی از دورهای مجزای به طول ۲ است. [راهنمایی: نشان دهید که $(a_1,a_2,a_3)^{-1}\sigma(a_1,a_2,a_3)\sigma^{-1}$ در N است، و با محاسبهٔ آن نتیجه بگیرید که $\alpha=(a_1,a_3)(a_2,a_4)$ نیز در N است. با استفاده از $n\geqslant 5$ برای اولین بار، عضوی چون $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ را بیابید که $i\neq a_1,a_2,a_3,a_4$. قراردهید $\beta=(a_1,a_3,i)$. نشان دهید که $\beta^{-1}\alpha\beta\alpha\in N$ و آن را محاسبه کنید.]

***۲۳.۱۲** زیرگروه برگردان G' از گروه D_4، متشکل از تقارنهای مربع در مثال ۲.۴ را پیدا کنید.

***۲۴.۱۲** ا) نشان دهید که اگر N زیرگروه نورمالی از G و H زیرگروه دلخواهی از G باشند، آنگاه $HN=NH=N\vee H$.

ب) نشان دهید که اگر N و M زیرگروههایی نورمال از G باشند، آنگاه NM نیز زیرگروه نورمالی از G است.

***۲۵.۱۲** نشان دهید که اگر H و K زیرگروههای نورمال از گروهی چون G باشند و $H\cap K=\{e\}$، آنگاه به‌ازای هر h از H و هر k از K، $hk=kh$. [راهنمایی: برگردان $hkh^{-1}k^{-1}=(hkh^{-1})k^{-1}=h(kh^{-1}k^{-1})$ را بررسی کنید.]

۱۳

همومورفیسم

۱.۱۳ تعریف و خواص ابتدایی

یك ایزومورفیسم ϕ از یك گروه G به‌یك گروه G' به‌عنوان تابعی یك به یك چون ϕ از G بروی G' تعریف شد که برای‌هر a و b از G، $(ab)\phi=(a\phi)(b\phi)$. اگرشرط یك به‌یك بودن و بروبودن ϕ را حذف کنیم وتنها شرط $(ab)\phi=(a\phi)(b\phi)$ را نگهداریم، آنگاه نگاشت ϕ یك همومورفیسم نامیده می‌شود. خواهیم‌دیدکه همومورفیسمها با گروههای خارج قسمت ارتباط نزدیکی دارند.

تعریف نگاشت ϕ از گروه G بتوی گروه G' یك همومورفیسم نامیده می‌شود در صورتی که به‌ازای هر a و b از G

$$(ab)\phi=(a\phi)(b\phi)$$

ببینیم در ورای شرط $(ab)\phi=(a\phi)(b\phi)$ برای یك همومورفیسم $\phi: G \to G'$ چه ایده‌ای نهفته است. این شرط تنها وجه تمایز یك همومورفیسم است نسبت به نگاشتی عادی از G به G'. این شرط بیان می‌کند که ϕ یك نگاشت ارتباط دهندهٔ ساختار است. ساختار جبری G با عمل دوتایی G کاملا مشخص می‌شود. همچنین، ساختار جبری G' با عمل دوتایی G' مشخص می‌شود. درتساوی $(ab)\phi=(a\phi)(b\phi)$، حاصلضرب ab در طرف چپ در G است وحاصلضرب $(a\phi)(b\phi)$ درطرف راست در G' است. بنابراین شرط همومورفیسم ساختار G را به‌ساختار G' مربوط می‌کند.

مثال ۱.۱۳ نگاشت‌طبیعی γ از $\mathbb{Z}$ بتوی $\mathbb{Z}_n$ تعریف‌شده با $\gamma(x)=r$، که در آن r باقیماندهٔ

تقسیم m بر n (برمبنای لم ۱.۶) است، یك همومورفیسم‌است. کافی است مشاهده کنیم که

$$(s+t)\gamma = s\gamma + t\gamma \cdot$$

اگر

$$t = nq_2 + r_2 \quad (2) \qquad \text{و} \qquad s = nq_1 + r_1 \quad (1)$$

و درآنها $0 \leqslant r_i < n$ ، آنگاه $s\gamma = r_1$ و $t\gamma = r_2$. بنابراین

$$s\gamma + t\gamma = (r_1 + r_2) \pmod n.$$

یعنی اگر برای $0 \leqslant r_3 < n$ ، $r_1 + r_2 = q_3 n + r_3$ ، آنگاه

$$s\gamma + t\gamma = r_3 \cdot$$

با جمع تساویهای (۱) و (۲) داریم:

$$s+t = (q_1+q_2)n + r_1 + r_2 = (q_1+q_2+q_3)n + r_3$$

و $0 \leqslant r_3 < n$. بنابراین

$$(s+t)\gamma = r_3 \cdot$$

با درنظر گرفتن $\mathbf{Z}_n$ به‌عنوان خارج قسمت $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ متشکل از همادهای مانده‌های به‌هنگ n ، ملاحظه می‌کنیم که γ هرعضو $\mathbf{Z}$ را به‌همدسته یاهماد ماندهٔ به‌هنگ n شامل آن عضو می‌نگارد: این مثالی‌است ازیك حالت کلی‌که درقضیهٔ بعد بیان خواهد شد. □

قضیهٔ ۱.۱۳ اگر N زیرگروهی نورمال ازیك گروه G باشد، آنگاه نگاشت کانونی (یاطبیعی) $\gamma : G \to G/N$ که باضابطهٔ $a\gamma = aN$ به‌ازای هر a از G، تعریف می‌شود یك همومورفیسم است.

برهان. این یك نتیجهٔ بلافصل تعریف ضرب همدسته‌ها برحسب ضرب نماینده‌های آنهاست برای این‌که

$$\square \ (ab)\gamma = abN = (aN)(bN) = (a\gamma)(b\gamma).$$

تعریف هستهٔ یك همومورفیسم ϕ ازیك گروه G بتوی یك گروه G' عبارت است‌از مجموعهٔ تمام اعضایی از G که به‌وسیلهٔ ϕ به‌عضو همانی G' تصویرمی‌شوند.

مثال ۲.۱۳ برای نگاشت‌کانونی $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ که درمثال ۱.۱۳ ارائه شد، هسته عبارت است از $n\mathbf{Z}$. توجه داشته باشیدکـه $n\mathbf{Z}$ زیرگروه نورمالی از $\mathbf{Z}$ است و $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ با $\mathbf{Z}_n$ ایزومورف می‌باشد. □

مثال اخیر، ارتباط کلی بین همومورفیسمها و گروههای خارج قسمت را نشان می‌دهد. این مطلب درقضیهٔ ۳.۱۳ بیان وثابت خواهد شد.

تعریف فرض کنیم ϕ نگاشتی ازمجموعهٔ X بتوی مجموعهٔ Y باشد، و فرض کنیم $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. تصویر $A\phi$ از A تحت ϕ در Y عبارت‌است‌از $\{a\phi | a \in A\}$. تصویر معکوس $B\phi^{-1}$ از B در X عبارت است از $\{x \in X | x\phi \in B\}$.

قضیهٔ بعد بعضی ازخواص ساختاری راکه به‌وسیلهٔ یك‌همومورفیسم حفظ می‌شوند، نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲.۱۳ فرض کنیم ϕ یك همومورفیسم از گروه G بتوی گروه G' باشد. اگر e عضو همانی G باشد آنگاه $e\phi$ عضو همانی G' است، و اگر $a \in G$ آنگاه $a^{-1}\phi = (a\phi)^{-1}$. اگر H زیرگروهی از G باشد، آنگاه $H\phi$ زیرگروهی از G' است و نورمال بودن H در G نورمال بودن $H\phi$ در $G\phi$ را ایجاب می‌کند. از طرف دیگر، اگر K' زیرگروهی از G' باشد آنگاه $K'\phi^{-1}$ زیرگروهی از G است و نورمال‌بودن K' در $G\phi$ نورمال بودن $K'\phi^{-1}$ در G را ایجاب می‌کند. اجمالا، تحت هر همومورفیسم، زیرگروهها متناظر می‌شوند با زیرگروهها و زیرگروههای نورمال متناظر می‌شوند با زیرگروههای نورمال.

برهان. فرض کنیم ϕ همومورفیسمی‌از G بتوی G' باشد. دراین صورت، به‌ازای هر a از G،

$$a\phi = (ae)\phi = (a\phi)(e\phi).$$

بنابراین $e\phi$ باید عضو همانی e' از G' باشد. اکنون تساوی

$$e' = e\phi = (aa^{-1})\phi = (a\phi)(a^{-1}\phi)$$

نشان می‌دهد که $a^{-1}\phi = (a\phi)^{-1}$.

فرض کنیم H زیرگروهی از G باشد و $a\phi$ و $b\phi$ دو عضو دلخواه از $H\phi$. در این صورت، $(ab)\phi = (a\phi)(b\phi)$ و بنابراین $(a\phi)(b\phi) \in H\phi$، یعنی $H\phi$ نسبت به‌عمل G' بسته است. توجه به این امر که $e' = e\phi$ و $a^{-1}\phi = (a\phi)^{-1}$، اثبات این راکه $H\phi$ زیرگروهی از $G\phi$ است، تمام می‌کند. فرض کنیم‌که H در G نورمال باشد، و $g\phi \in G\phi$. اکنون

$$(g\phi)(h\phi)(g\phi)^{-1} = (g\phi)(h\phi)(g^{-1}\phi) = (ghg^{-1})\phi$$

چون $ghg^{-1} \in H$، داریم $(ghg^{-1})\phi \in H\phi$. پس $H\phi$ در $G\phi$ نورمال است.

از طرف دیگر، فرض کنیم K' زیرگروهی از G' باشد. فرض کنیم که a و b در $K'\phi^{-1}$ باشند. دراین صورت، $(ab)\phi = (a\phi)(b\phi)$ و $(a\phi)(b\phi) \in K'\phi$، از اینجا

$ab \in K'\phi^{-1}$. همچنین، K' باید شامل $e\phi$ باشد و بنابراین $e \in K'\phi^{-1}$. اگر $a \in K'\phi^{-1}$، آنگاه $a\phi \in K'$، ازاینرو $(a\phi)^{-1} \in K'$. اما $(a\phi)^{-1} = a^{-1}\phi$، پس باید داشته‌باشیم $a^{-1} \in K'\phi^{-1}$. بنابراین $K'\phi^{-1}$ یك زیرگروه G است. اگر K' زیر گروه نورمالی از $G\phi$ باشد، آنگاه برای $b \in K'\phi^{-1}$ و $g \in G$ داریم

$$(gbg^{-1})\phi = (g\phi)(b\phi)(g\phi)^{-1}$$

و $(g\phi)^{-1}(b\phi)(g\phi)$ در K' است، ازاینرو $g^{-1}bg \in K'\phi^{-1}$. بنابراین $K'\phi^{-1}$ در G نورمال است. □

ممکن است قضیهٔ ۲.۱۳ در بدو امر پیچیده به نظر برسد، ولی خیلی ساده است و اثباتش واقعاً مکانیکی است، تکرار کامل اثبات، بدون مراجعه به متن برایتان تمرینی عالی خواهد بود. این کار امتحانی است که ببینید آیا تعریفهای به‌کار رفته را واقعاً فهمیده‌اید.

۲.۱۳ قضیهٔ اساسی همومورفیسم

قضیهٔ ۲.۱۳، بالاخص نشان می‌دهد، که برای هرهمومورفیسم $\phi : G \to G'$، هستهٔ ϕ، یعنی $K = \{e'\}\phi^{-1}$ زیر گروهی نورمال از G است. اکنون درموقعیتی هستیم که قضیهٔ اصلی خود را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۳.۱۳ (قضیهٔ اساسی همومورفیسم). فرض کنیم ϕ همومورفیسمی از گروه G به گروه G' باهستهٔ K باشد. دراین صورت $G\phi$ یك‌گروه است و ایزومورفیسمی کانونی (طبیعی) از $G\phi$ به G/K هم وجود دارد.

برهان. درقضیهٔ ۲.۱۳ ملاحظه‌کردیم که $G\phi$ گروه است، زیرا G حالت خاصی از یك زیر گروه G است. اکنون بافرض $aK \in G/K$، سعی‌می‌کنیم نگاشت $\psi : G/K \to G\phi$ را با

$$(aK)\psi = a\phi$$

تعریف کنیم. بنابراین مقدار نگاشت ψ را در هرهمدسته باانتخاب نماینده‌ای چون a از آن تعریف می‌کنیم. پس اولین‌کار ما این است که نشان دهیم ψ خوشتعریف، یعنی مستقل از انتخاب نماینده است. برای این کار، فرض‌کنیم $b \in aK$. باید نشان دهیم که $a\phi = b\phi$. اما $b \in aK$ بدین معنی‌است که به‌ازای عضوی چون k_1 از K، $b = ak_1$ از اینرو $a^{-1}b = k_1$. اکنون

$$e' = K_1\phi = (a^{-1}b)\phi = (a^{-1}\phi)(b\phi) = (a\phi)^{-1}(b\phi).$$

پس

$$b\phi = (a\phi)e' = a\phi.$$

بنابراین ψ خوشتعریف است.

برای این که نشان دهیم ψ یك به‌یك است، فرض می‌کنیم که $(aK)\psi=(bK)\psi$. در این صورت $a\phi=b\phi$ و

$$e'=(a\phi)^{-1}(b\phi)=(a^{-1}\phi)(b\phi)=(a^{-1}b)\phi.$$

پس، بنا به‌تعریف K، $a^{-1}b\in K$. اما از $a^{-1}b\in K$ نتیجه می‌شود که $b\in aK$، یعنی $aK=bK$. پس ψ یك به‌یك است.

بدیهی است که ψ بروی $G\phi$ است.

تساوی

$$[(aK)(bK)]\psi=(abK)\psi=(ab)\phi=(a\phi)(b\phi)=[(aK)\psi][(bK)\psi]$$

اثبات ایزومورفیسم بودن ψ را کامل می‌کند.

نگاشت ψ یك نگاشت کانونی (یا طبیعی) است بدین معنی که اگر γ همومورفیسم کانونی (یا طبیعی) $\gamma: G\to G/K$ ازقضیهٔ ۱.۱۳ باشد، آنگاه

$$\phi=\gamma\psi.$$

این مطلب معمولا بدین صورت بیان می‌شود که مثلث شکل ۱.۱۳ تعویضپذیر است. □

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G\phi \\ & G/K \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

شکل ۱.۱۳

قضیهٔ ۳.۱۳ یکی از قضیه‌هایی است که دانشجویان غالباً درفهم آن دچار اشکال می‌شوند. این قضیه در واقع بیان می‌کند که برای هرهمومورفیسم ϕ از گروه G، تصویر ϕ صرفنظر ازنام اعضا، چیزی جز G/K نیست که درآن K هسته است و همچنین ϕ اساساً همان نگاشت کانونی $\gamma: G\to G/K$ است. به عبارت دیگر، قضیهٔ ۱.۱۳، از جهتی تمام همومورفیسمها را توصیف می‌کند

دراینجا یك نکته را یك بار وبرای همیشه به‌شما خاطرنشان می‌کنیم وآن این‌که هرگاه همومورفیسمی داشته باشیم، دوچیز همواره از اهمیت خاصی برخوردارند؛ هسته و تصویر.

قضیه‌های ۱.۱۳ و ۳.۱۳ نشان می‌دهند که همومورفیسمها به‌صورتی طبیعی با گروههای خارج قسمت متناظرند. بدین معنی که، به‌ازای هر گروه خارج قسمت G/N،

همومورفیسمی چون $\gamma = G \to G/N$ با هستهٔ K وجود دارد. به‌عکس، به‌ازای هر همومورفیسم $\phi : G \to G'$ تصویر ϕ یعنی $G\phi$ اساساً همان G/K است که درآن K هستهٔ ϕ است. «اساساً» به‌معنی درحد یك ایزومورفیسم کانونی است.

مثال ۳.۱۳ دانشجویی که معلومات مختصری از نظریهٔ اعداد مختلط داشته باشد، می‌تواند ملاحظه کند که نگاشت $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$ با ضابطه

$$x\phi = \cos x + i \sin x$$

یك همومورفیسم است. دراینجا $\mathbf{R}$ گروه جمعی اعداد حقیقی است و $\mathbf{C}^*$ گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر. توجه کنید که $\cos x + i \sin x = 1$ اگر وفقط اگر به‌ازای عددی صحیح مانند n، $x = 2\pi n$. از اینرو، هستهٔ این همومورفیسم زیرگروه دوری $\langle 2\pi \rangle$ از $\mathbf{R}$ است.

قضیهٔ ۳.۱۳ نشان می‌دهد که $\mathbf{R}/\langle 2\pi \rangle$ با $\mathbf{R}\phi$ گروه اعداد مختلط با قدرمطلق ۱، یعنی با اعداد مختلط روی دایرهٔ واحد، ایزومورف است. این ایزومورفیسم را می‌توان به‌طور هندسی هم مشاهده کرد. هر همدستهٔ $\mathbf{R}/\langle 2\pi \rangle$ دقیقاً یك نماینده مانند a دارد که $0 \leqslant a < 2\pi$. بنابراین بازهٔ $0 \leqslant x < 2\pi$ را می‌توان همان $\mathbf{R}/\langle 2\pi \rangle$ تصور نمود، واگر این بازه راطوری خم کنیم که انتهای باز بازه در 2π به‌انتهای بستهٔ آن در ۰ متصل شود، دایره‌ای را تشکیل می‌دهد. جمع در $\mathbf{R}/\langle 2\pi \rangle$، که به صورت یك دایره تصور شد، مطابقت دارد باجمع طول کمانها (یا زاویه‌های مرکزی) که خود مطابقت دارد با ضرب دوعدد مختلط روی دایرهٔ واحد. □

۳.۱۳ کاربرد

تعریف زیرگروه نورمال M از یك گروه G یك زیرگروه نورمال ماکسیمال نامیده می‌شود، در صورتی که M مساوی G نباشد و زیرگروه واقعی نورمالی از G وجود نداشته باشد که M زیرگروه واقعی آن باشد.

قضیهٔ ۴.۱۳ M یك زیرگروه نورمال ماکسیمال G است اگر و فقط اگر G/M ساده باشد.

برهان. فرض کنیم که M یك زیرگروه نورمال ماکسیمال G باشد. همومورفیسم کانونی $\gamma : G \to G/M$ راکه درقضیهٔ ۱.۱۳ معرفی شد، درنظر می‌گیریم. تصویرمعکوس هرزیرگروه واقعی نورمال از G/M تحت γ، زیرگروه واقعی نورمالی از G است که M یك زیرگروه واقعی آن می‌باشد. اما M ماکسیمال است واین امکان ندارد. پس G/M باید ساده باشد

به عکس، قضیهٔ ۲.۱۳ نشان می‌دهد که اگر N زیرگروه نورمالی از G باشد و M یك‌زیرگروه واقعی‌آن، آنگاه $N\gamma$ در G/M نورمال است. به‌علاوه: اگر $N\neq G$ آنگاه

$$N\gamma\neq G/M \quad \text{و} \quad N\gamma\neq\{M\}.$$

بنابراین، اگر G/M ساده باشد و درنتیجه $N\gamma$ به‌صورت فوق وجود نداشته‌باشد، آنگاه هیچ N به‌صورت فوق هم وجود ندارد و M ماکسیمال است. □

توجه‌کنید که هرهمومورفیسم ϕ ایزومورفیسمی بین حوزهٔ تعریف ϕ و حوزهٔ مقادیر ϕ است اگر وفقط اگر ϕ نگاشتی یك به‌یك باشد.

قضیهٔ ۵.۱۳ همومورفیسم ϕ از یك گروه G تابعی یك‌به‌یك است اگر وفقط اگرهستهٔ ϕ برابر با $\{e\}$ باشد.

برهان. بدیهی است که اگر ϕ یك به‌یك باشد آنگاه هستهٔ ϕ درست $\{e\}$ است، چون می‌دانیم که $e\phi$ عضو همانی e' ازتصویر ϕ است.

به عکس،فرض‌کنیم که هستهٔ ϕ برابر با $\{e\}$ باشد. اگر $a\phi=b\phi$، آنگاه

$$e'=e\phi=(a\phi)^{-1}(b\phi)=(a^{-1}\phi)(b\phi)=(a^{-1}b)\phi$$

وبنابراین $a^{-1}b$ درهسته است. باتوجه به‌این‌که هسته $\{e\}$ است، باید داشته باشیم

$$a^{-1}b=e \text{، یعنی } a=b$$

بنابراین ϕ یك به‌یك است. □

باتوجه به‌قضیهٔ ۵.۱۳، مراحلی راکه یك‌ریاضیدان انجام‌می‌دهد تا ایزومورفیسمی را عرضه‌کند می‌توان به‌شرح زیر خلاصه نمود:

قدم اول تعریف یك نگاشت.

قدم دوم اثبات این‌که آن نگاشت همومورفیسم است.

قدم سوم اثبات این‌که هستهٔ‌آن نگاشت $\{e\}$ است.

پس ازآن محقق می‌شود که‌آن‌نگاشت، یك ایزومورفیسم بین حوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر است.

گرچه اصطلاحات ذیل را ما به‌کارنمی‌بریم ولی برای اطلاعتان بیان می‌کنیم که‌اگر همومورفیسم $\phi: G\to G'$ یك‌به‌یك باشد **مونومورفیسم**، و اگر برو باشد **اپیمورفیسم** نامیده می‌شود.

تمرین

۱.۱۳ تعیین کنید که از نگاشتهای ذیل کدام همومورفیسم هستند. زبروند* مبین اعضای ناصفر است. اگر نگاشت همومورفیسم باشد، هسته و تصویر آن را پیدا کنید.

ا) تحت جمع، $\phi : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ $n\phi = n$.

ب) تحت جمع، $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ با ضابطهٔ، بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $x\phi = x$.

ج) تحت ضرب، $\phi : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ، $x\phi = |x|$.

د) $\phi : \mathbf{Z}_۶ \to \mathbf{Z}_۲$ با ضابطهٔ، باقیماندهٔ تقسیم x بر ۲ $= x\phi$، طبق لم ۱.۶.

ه) $\phi : \mathbf{Z}_۹ \to \mathbf{Z}_۲$ با ضابطهٔ، باقیماندهٔ تقسیم x بر ۲ $= x\phi$، طبق لم ۱.۶.

+ **۲.۱۳** فرض کنید گروه G به وسیلهٔ مجموعهٔ $\{a_i | i \in I\}$ تولید شده باشد، که در آن I مجموعه‌ای اندیسگذار است. و $a_i \in G$ فرض کنید $\phi : G \to G'$ همومورفیسمی از گروه G بتوی گروه G' باشد. نشان دهید که مقدار ϕ درهرعضو G بامقدارهای $a_i\phi$ کاملا تعیین می‌شود. بنابراین، برای مثال، هرهمومورفیسم یك گروه دوری بامقدار آن دریکی از مولدهای گروه کاملا تعیین می‌شود. [راهنمایی: قضیهٔ ۱.۹، والبته تعریف همومورفیسم، را به‌کار ببرید.]

۳.۱۳ چند همومورفیسم از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{Z}$ وجود دارد؟ از $\mathbf{Z}_۲$ بتوی $\mathbf{Z}$؟ از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{Z}_۲$؟ [راهنمایی: ازتمرین ۲.۱۳ استفاده کنید. تمرین ۱۱.۱۳ را هم ملاحظه کنید.]

۴.۱۳ چند همومورفیسم از $\mathbf{Z}$ بتوی $\mathbf{Z}_۸$ وجود دارد؟ از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{Z}_۸$؟ [راهنمایی: ازتمرین ۲.۱۳ استفاده کنید. تمرین ۱۱.۱۳ راهم ملاحظه کنید.]

۵.۱۳ چند همومورفیسم از $\mathbf{Z}_{۱۲}$ بروی $\mathbf{Z}_۵$ وجود دارد؟ از $\mathbf{Z}_{۱۲}$ بتوی $\mathbf{Z}_۶$؟ از $\mathbf{Z}_{۱۲}$ بروی $\mathbf{Z}_۶$؟ از $\mathbf{Z}_{۱۲}$ بتوی $\mathbf{Z}_{۱۴}$؟ از $\mathbf{Z}_{۱۲}$ بتوی $\mathbf{Z}_{۱۶}$؟ [راهنمایی: از تمرین ۲.۱۳ استفاده کنید.]

۶.۱۳ دربارهٔ همومورفیسمهای یك گروه ساده چه می‌توانید بگویید؟

۷.۱۳ درستی یا نادرستی هریك از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) A_n یك زیر گروه نورمال S_n است.

— ب) هر ایزومورفیسم یك همومورفیسم هم هست.

— ج) هر همومورفیسم یك ایزومورفیسم است.

— د) هرهمومورفیسم ایزومورفیسمی بین‌حوزهٔ تعریفش وحوزهٔ مقادیرش است، اگروفقط اگر هستهٔ آن زیر گروه بدیهی متشکل از عضوهمانی باشد.

— ه) تصویر یك همومورفیسم ازیك گروه ۶ عضوی ممکن است ۴ عضو داشته باشد.

— و) تصویر یك گروه ۶ عضوی به وسیلهٔ یك همومورفیسم ممکن است ۱۲ عضو داشته باشد.

— ز) همومورفیسمی ازیك گروه ۶ عضوی بتوی یك گروه ۱۲ عضوی وجود دارد.

— ح) همومورفیسمی ازیك گروه ۶ عضوی بتوی یك گروه ۱۰ عضوی وجود دارد.

— ط) همهٔ همومورفیسمهای یك گروه از مرتبهٔ عددی اول، ازجهتی بدیهی هستند.
— ی) امکان ندارد همومورفیسمی ازیك گروه نامتناهی بتوی یك گروه متناهی وجودداشته باشد.

۸.۱۳ چند همومورفیسم از $Z_2 \times Z_2$ بتوی Z_2 وجود دارد؟ از $Z_2 \times Z_2$ بروی Z_2؟ از $Z_2 \times Z_2$ بتوی Z_6؟ از $Z_2 \times Z_2$ بتوی $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$؟ از $Z_2 \times Z_2$ بتوی $Z_2 \times Z_2 \times Z_4$؟ [راهنمایی: تمرین ۲.۱۳ را به‌کار ببرید.]

۹.۱۳ علامت یك جایگشت زوج ۱+ است و **علامت یك جایگشت فرد** ۱−. نشان دهیدکه نگاشت $\mathrm{sgn}_n : S_n \to \{1, -1\}$ با تعریف

$$\mathrm{sgn}_n(\sigma) = \sigma \text{ علامت}$$

یك همومورفیسم از S_n بروی گروه $\{1, -1\}$ تحت ضرب، می‌باشد. هستهٔ این همومورفیسم چیست؟

۱۰.۱۳ برای گروههای G_1 و G_2 نگاشت $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ با تعریف $(x, y)\pi_1 = x$ را درنظر بگیرید. نشان دهیدکه π_1 یك همومورفیسم است. هستهٔ آن چیست؟ هستهٔ آن با چه گروهی ایزومورف است؟

۱۱.۱۳ فرض‌کنید G یك گروه و a عضوی از آن باشد. فرض‌کنید $\phi : Z \to G$ با ضابطهٔ $n\phi = a^n$ تعریف شده باشد. نشان دهیدکه ϕ یك همومورفیسم است. تصویر ϕ و همهٔ امکانات هستهٔ ϕ را شرح دهید. [توضیح با استفاده از قضیهٔ ۳.۱۳ و این تمرین، اثبات زیبایی برای این‌که هرگروه دوری با یك گروه خارج قسمت Z/nZ، به ازای عددی صحیح و نامنفی چون n، ایزومورف است، و همچنین اثبات زیبایی برای این‌که هرعضو یك گروه زیرگروهی دوری ازآن را تولید می‌کند به‌دست می‌آورید.]

۱۲.۱۳ فرض‌کنید G یك گروه باشد.
ا) اگر $\phi : Z \times Z \to G$ یك‌همومورفیسم باشد، $(1, 0)\phi = h$ و $(0, 1)\phi = K$، آنگاه $(n, m)\phi$ را پیدا کنید
ب) فرض‌کنید $h, k \in G$ و $\psi : Z \times Z \to G$ با ضابطهٔ $(m, n)\psi = h^m k^n$ تعریف شده باشد. شرطی لازم و کافی مشتمل بر h, k ارائه کنید که ψ یك همومورفیسم باشد. شرط خود را ثابت کنید.
ج) شرطی لازم وکافی برای G به‌دست آوریدکه نگاشت ψ تعریف شدهٔ در قسمت (ب) به‌ازای هر h, k از G یك همومورفیسم باشد.

۱۳.۱۳ فرض‌کنید G گروهی آبلی از مرتبهٔ n باشد و r عددی طبیعی و متباین با r.
ا) ثابت‌کنیدکه نگاشت $\phi_r : G \to G$ باضابطهٔ $a\phi_r = a^r$ یك ایزومورفیسم از G بروی خودش است. (به نکات بیان شدهٔ بعداز قضیهٔ ۵.۱۳ توجه‌کنید.)

ب) نتیجه بگیرید که اگر r با n متباین باشد، معادلهٔ $x^r = a$، در گروه آبلی متناهی G از مرتبهٔ n دارای جواب منحصر به‌فرد است. وقتی که r بامرتبهٔ G متباین نباشد چه می‌تواند رخ دهد.

۱۴.۱۳ نشان دهید که اگر G، G' و G'' سه گروه و $\phi : G \to G'$ و $\psi : G' \to G''$ همومورفیسم باشند، آنگاه تابع مرکب $\phi\psi : G \to G''$ نیز یك همومورفیسم است.

۱۵.۱۳ فرض کنید G یك گروه باشد و $\mathcal{J}_G$ گروه اتومورفیسمهای داخلی از G مفروض درتمرین ۱۸.۱۲ باشد. نشان دهید که نگاشت $\phi : G \to \mathcal{J}_G$ باضابطهٔ $g\phi = i_g$ یك همومورفیسم از G بروی $\mathcal{J}_G$ است. نشان دهید که هسته (مرکز G) عبارت است از:

$$\{a \in G | ax = xa \text{ ، } x \in G \text{ به‌ازای تمام}\}.$$

درچه صورت ϕ یك ایزومورفیسم است؟

۱۶.۱۳ فرض کنید G_1 و G_2 گروه باشندوفرض کنید $\phi_1 : G_1 \to G_2$ و $\phi_2 : G_2 \to G_1$ همومورفیسمهایی باشند که $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_1 = i$. در اینجا i نگاشت همانی است؛ یعنی، $\phi_1\phi_2 : G_1 \to G_1$ و $\phi_2\phi_1 : G_2 \to G_2$ هردونگاشت همانی‌هستند. نشان دهید که ϕ_1 و ϕ_2 هردو ایزومورفیسمهای G_1 و G_2 هستندو داریم $\phi_1 = (\phi_2)^{-1}$.

۱۷.۱۳ فرض کنید G و G' گروه هستند و H و H' به ترتیب زیرگروههایی نورمال از G و G'. فرض کنید ϕ یك همومورفیسم از G بتوی G' باشد. نشان دهید که اگر $H\phi \subseteq H'$، که ϕ یك همومورفیسم طبیعی $\phi_* : (G/H) \to (G'/H')$ القامی کند. (این حکم مرتباً درتوپولوژی جبری مورد استفاده قرارمی گیرد.)

۱۴

سری گروهها

۱.۱۴ سریهای زیر نورمال ونورمال

این فصل مربوط است به مفهوم سری در گروهی چون G، که آگاهیهایی دربارهٔ ساختار گروه بهما می‌دهد. نتایجی که دراینجا بدون اثبات عرضه می‌شوند، برای گروههای آبلی و ناآبلی هردو برقرارند. این نتایج برای گروههای آبلی متناهیاً تولید شده، به‌خاطرقضیهٔ توانمند ۳.۹، چندان مهم نیستند. به هرحال، برای سهولت محاسبات، اکثر مثالهایمان از گروههای آبلی گرفته خواهند شد. این نتایج درفصل بعد ثابت می‌شوند.

تعریف یك سری زیر نورمال (یا زیر پایا) از گروهی چون G دنبالـه‌ای متناهی از زیر گروههای $H_0, H_1, \ldots, H_n$ از G است به طوری که $H_i < H_{i+1}$، H_i زیرگروه نورمالی از H_{i+1} باشد، $H_0 = \{e\}$ و $H_n = G$. یك (سری نورمال یـا پـایـا) از G عبارت است از دنبالـه‌ای متناهی از زیرگروههـای نورمـال $H_0, H_1, \ldots, H_n$ از G به‌طوری که $H_0 = \{e\}$، $H_i < H_{i+1}$ و $H_n = G$.

توجه داشته باشید که درمورد گروههای آبلی، چون همهٔ زیرگروهها نورمال‌هستند مفاهیم سریهای زیرنورمال ونورمال‌یکی هستند. هرسری نورمال همواره سری زیرنورمال هم هست، ولی عکس آن لزوماً برقرارنیست. ما تعریف سریهای زیرنورمال رابرسریهای نورمال مقدم داشتیم، چراکه سریهای زیرنورمال برای‌کارمان واجد اهمیت بیشتری‌هستند.

مثال ۱.۱۴ دونمونه‌ازسریهای نورمال از گروه جمعی $\mathbf{Z}$ عبارت‌اند از:

$$\{0\} < 8\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$$

و

$$\{0\} < 9\mathbf{Z} < \mathbf{Z}. \quad \square$$

مثال ۲.۱۴ گروه D_4 از تقارنهای مربع درمثال ۲.۴ را درنظر بگیرید. به سهولت می‌توانید امتحان کنید که سری

$$\{\rho_0\} < \{\rho_0, \mu_1\} < \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} < D_4$$

یك‌سری زیرنورمال از D_4 است. چون $\{\rho_0, \mu_1\}$ یك زیر گروه نورمال از D_4 نیست، سری مزبور نورمال نیست. $\square$

تعریف سری زیرنورمال (نورمال) $\{K_j\}$ یك تظریف سری زیر نورمال (نورمال) $\{H_i\}$ از گروه G است درصورتی که $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$، یا به عبارت دیگر هر H_i یکی از K_j ها باشد.

مثال ۳.۱۴ سری

$$\{0\} < 72\mathbf{Z} < 24\mathbf{Z} < 8\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$$

تظریفی است ازسری

$$\{0\} < 72\mathbf{Z} < 8\mathbf{Z} < \mathbf{Z}.$$

دراینجا دوجملهٔ جدید $24\mathbf{Z}$ و $4\mathbf{Z}$ افزوده شده‌اند. $\square$

ازجمله مطالب سودمند برای‌مطالعهٔ ساختار G، گروههای خارج قسمت H_{i+1}/H_i هستند. این گروههای خارج‌قسمت هم‌برای سریهای زیرنورمال وهم برای سریهای‌نورمال تعریف می‌شوند، چون درهرحالت H_i در H_{i+1} نورمال است.

تعریف دوسری زیرنورمال (نورمال) $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ از گروه G ایزومورف هستند درصورتی که تناظری یك‌به‌یك بین گردایه‌های گروههای خارج‌قسمت $\{H_{i+1}/H_i\}$ و $\{K_{j+1}/K_j\}$ وجود داشته باشد به‌طوری که‌گروههای خارج قسمت متناظر باهم ایزومورف باشند.

واضح است که تعداد گروههای دوسری زیرنورمال (نورمال) ایزومورف بایدباهم برابر باشند.

مثال ۴.۱۴ دوسری

$$\{0\} < \langle 5 \rangle < \mathbf{Z}_{15}$$

و

$$\{0\} < \langle 3 \rangle < \mathbf{Z}_{15}$$

از Z_{15} باهم ایزومورف هستند، زیرا $Z_{15}/\langle 5\rangle$ و $\langle 3\rangle/\{0\}$ هردو با Z_5 ایزومورف هستندو $Z_{15}/\langle 3\rangle$ هم با $\langle 5\rangle/\{0\}$ یا با Z_3 ایزومورف است. □

۲.۱۴ قضیهٔ ژوردان ـ هولدر[1]

قضیهٔ زیر از قضیه‌های اساسی این مبحث است.

قضیهٔ ۱.۱۴ (شرایر[2]) هر دو سری زیر نورمال (نورمال) ازگروه G دارای تظریفهای ایزومورف هستند.

برهان. برای اثبات این قضیه به فصل ۱۵ مراجعه کنید. □

اثبات قضیهٔ ۱.۱۴ حقیقتاً چندان مشکل نیست، ولی با توجه به تجربیات خود می‌دانیم که بعضی از دانشجویان دراثبات آن سردرگم می‌شوند و درنتیجه تصورمی کنند که قادر به درك قضیه نیستند. با این که بسیاری از دانشجویان توانایی فهم آن‌را دارند، ولی ما آن‌را در بخشهای بدون ستاره ثابت نمی کنیم. به هرحال، با مثالی قضیه را روشن می‌سازیم.

مثال ۵.۱۴ می‌خواهیم تظریفهای ایزومورف دوسری

$$\{0\} < 8Z < 4Z < Z$$

و

$$\{0\} < 9Z < Z$$

ازمثال ۱.۱۴ را پیدا کنیم. تظریف

$$\{0\} < 72Z < 8Z < 4Z < Z$$

از $\{0\} < 8Z < 4Z < Z$ وتظریف

$$\{0\} < 72Z < 18Z < 9Z < Z$$

از $\{0\} < 9Z < Z$ را درنظرمی گیریم. درهر دوحالت، تظریفها، چهارگروه خارج قسمت ایزومورف با Z_4، Z_2، Z_9 و $72Z$ یا Z دارند. مسلماً ترتیب وقوع گروههای خارج قسمت متفاوت است. □

تعریف سری زیر نورمال $\{H_i\}$ ازگروهی چون G یك سری ترکیبی است در صورتی که گروههای خارج قسمت H_{i+1}/H_i ساده باشند. سری نورمالی مانند $\{H_i\}$ از G یك سری اصلی یا عمده است درصورتی که گروههای خارج قسمت

---

1. Jordan-Hölder 2. Schreier

H_{i+1}/H_i ساده باشند.

توجه کنید که درمورد گروههای آبلی مفاهیم سری ترکیبی وسری اصلی یکی هستند. به‌علاوه، از آنجا که هرسری نورمال زیرنورمال نیزهست، پس اعم از این که گروه آبلی باشد یا نباشد هرسری اصلی آن یك سری ترکیبی هم هست.

مثال ۶.۱۴ ادعا می‌کنیم که $\mathbf{Z}$ هیچ سری ترکیبی (ونیز هیچ سری اصلی) ندارد. برای این که اگر سری

$$\{0\}=H_0<H_1<H_2<\cdots<H_{n-1}<H_n=\mathbf{Z}$$

یك سری زیرنورمال باشد. آنگاه به‌ازای عددی طبیعی‌چون r، H_1 باید به صورت $r\mathbf{Z}$ باشد. دراین صورت H_1/H_0 با $r\mathbf{Z}$ ایزومورف است که خود یك گروه دوری نامتناهی است با زیر گروههای نورمال نابدیهی متعدد؛ به‌عنوان مثال $2r\mathbf{Z}$. پس $\mathbf{Z}$ هیچ سری ترکیبی (ونیز هیچ سری اصلی) ندارد. □

مثال ۷.۱۴ به‌ازای هرعدد طبیعی n ناکمتر از ۵، سری

$$\{e\}<A_n<S_n$$

یك سری ترکیبی (ونیز یك سری اصلی) از S_n است، زیرا $A_n/\{e\}$ همواره با A_n، که به‌ازای $n\geqslant 5$ ساده است، ایزومورف است ونیز S_n/A_n با $\mathbf{Z}_2$، که ساده است ایزومورف است. به‌همین منوال دوسری ارائه شدهٔ درمثال ۴.۱۴ سریهای ترکیبی (وبنابراین سریهای اصلی) $\mathbf{Z}_{15}$ هستند. این دوسری، چنان که ثابت شد، ایزومورف می‌باشند. این مثال قضیهٔ اصلی این فصل را که به‌زودی بیان خواهد شد، روشن می‌سازد. □

ملاحظه کنید که بنابرقضیهٔ ۴.۱۳، H_{i+1}/H_i ساده است اگر و فقط اگر H_i زیر گروه نورمال ماکسیمال H_{i+1} باشد. بنابراین دریك سری ترکیبی هر H_i باید زیر گروه نورمال ماکسیمال H_{i+1} باشد. برای تشکیل یك سری ترکیبی ازگروه G، ابتدا به‌دنبال زیرگروه نورمال ماکسیمالی چون H_{n-1} از G می‌گردیم سپس زیرگروه نورمال ماکسیمالی برای H_{n-1} را جستجو می‌کنیم و قس علیهذا. اگر این فرآیند طی تعدادی متناهی مرحله پایان پذیرد، آنگاه یك سری ترکیبی از گروه G خواهیم داشت. توجه داشته باشید که بنابرقضیهٔ ۴.۱۳ یك سری ترکیبی نمی‌تواند تظریفی جزخودش داشته باشد. برای تشکیل یك سری اصلی، ابتدا زیرگروه نورمال ماکسیمالی چون H_{n-1} از G را می‌یابیم. سپس زیر گروه نورمال، ماکسیمالی برای H_{n-1} پیدا می‌کنیم که زیر گروه نورمال G هم باشد. و به‌همین منوال ادامه می‌دهیم. قضیهٔ اصلی این فصل به‌شرح زیر است.

قضیهٔ ۲.۱۴ (ژوردان ـ هولدر) هر دوسری ترکیبی (اصلی) ازیك گروه G ایزومورف هستند.

برهان. فرض کنیم $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ دوسری ترکیبی (اصلی) از G باشند. بنابرقضیهٔ ۱.۱۴

این دوسری دوتظریف ایزومورف دارند. ولی از آنجاکه تمام گروههای خارج قسمت خود ساده هستند. قضیهٔ ۴.۱۳ نشان می‌دهدکه هردوسری تظریفی جزخود ندارند. بنابراین دوسری $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ خود باید ایزومورف باشند. □

برای گروهی متناهی، یك سری ترکیبی را نوعی تجزیهٔ گروه به گروههای خارج قسمت ساده؛ نظیر تجزیهٔ عددی طبیعی به حاصلضرب اعداد اول، باید به حساب آوریم. درهر دوحالت، قطع نظر ازترتیب عوامل، تجزیه منحصر به‌فرد است.

قضیهٔ ۳.۱۴ اگر G یك‌سری ترکیبی (اصلی) داشته‌باشد، و N یك زیرگروه واقعی نورمال از G باشد، آنگاه یك سری ترکیبی (اصلی) شامل N هم وجود دارد.

برهان. سری $\{e\} < N < G$ هم زیر نورمال است و هم نورمال. چون G دارای یك سری ترکیبی مانند $\{H_i\}$ است، بنابر قضیهٔ ۱.۱۴ تظریفی از $\{e\} < N < G$ به‌صورت یك سری زیرنورمال وجود داردکه با تظریفی از $\{H_i\}$ ایزومورف است. ولی به عنوان یك‌سری ترکیبی، $\{H_i\}$ تظریفی جزخودش نمی‌تواند داشته‌باشد. بنابراین $\{e\} < N < G$ تظریفی به‌یك سری زیرنورمال داردکه تمام‌گروههای خارج قسمت آن ساده هستند، یعنی این‌تظریف یك سری ترکیبی است. اگربه‌جای $\{H_i\}$، بایك‌سری اصلی $\{K_j\}$ از G آغاز کنیم، استدلالی مشابه برقرارخواهد بود. □

مثال ۸.۱۴ یك سری ترکیبی (و نیز یك سری اصلی) از $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_9$ که شامل $\langle(0, 1)\rangle$ باشد عبارت است از

$$\{(0, 0)\} < \langle(0, 3)\rangle < \langle(0, 1)\rangle < \langle 2\rangle \times \langle 1\rangle < \langle 1\rangle \times \langle 1\rangle = \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_9. \quad \square$$

تعریف بعد برای فصل آخر این کتاب[1]، که درباب حل معادلات بسجمله‌ای برحسب رادیکالهاست، اهمیت بنیادی دارد.

تعریف گروهی چون G حلپذیر است اگریك‌سری ترکیبی مانند $\{H_i\}$ داشته‌باشد به‌طوری‌که تمام‌گروههای خارج قسمت H_{i+1}/H_i آبلی باشند.

با توجه به‌قضیهٔ ژوردان ـ هولدر، ملاحظه می‌کنیم که برای یك گروه حلپذیر درهر سری‌ترکیبی $\{H_i\}$، تمام‌گروههای خارج قسمت H_{i+1}/H_i باید آبلی باشند.

مثال ۹.۱۴ گروه S_3 حلپذیر است، زیرا سری ترکیبی

$$\{e\} < A_3 < S_3$$

---

۱. منظور فصل آخر قسمت II کتاب است‌که ترجمهٔ فارسی آن در مجلد جداگانه‌ای چاپ می‌شود.ـم.

دارای گروههای خارج قسمت ایزومورف با Z_2 و Z_3 است که هردو آبلی هستند. گروه S_5 حلپذیر نیست؛ چون، با توجه به‌این‌که A_5 ساده است، سری

$$\{e\} < A_5 < S_5$$

یك سری ترکیبی است، و $A_5/\{e\}$ که با A_5 ایزومورف است آبلی نیست. می‌توان نشان‌داد که گروه A_5 که مرتبهٔ آن ۶۰ است کوچکترین گروهی است که حلناپذیر است. این واقعیت بستگی نزدیکی دارد به‌این‌که به‌طور کلی معادلات بسجمله‌ای درجهٔ ۵ توسط رادیکالها حلناپذیر هستند، اما معادلات بسجمله‌ای از درجات نابیشتر از ۴ حلناپذیرند. □

* ۳.۱۴ مرکز و سری مرکزی فزاینده

نوع دیگری از سری را برای یك گروه ارائه می‌کنیم.

تعریف مرکز یك گروه G عبارت است از مجموعهٔ تمام اعضایی مانند a از G به‌طوری که‌برای هر x از G، $ax = xa$؛ به‌عبارت دیگرمجموعهٔ تمام اعضایی از Gاست که با هرعضو G تعویضپذیر باشند.

قضیهٔ ۴.۱۴ مرکز هرگروه زیرگروه نورمالی از آن گروه است.

برهان. اثبات این قضیه بقدری ساده وآموزنده است که آن را برای تمرینی از این فصل ذخیره می‌کنیم. □

اگر جدول گروه متناهی G در دست باشد، پیداکردن مرکز آن ساده خواهد بود. مسلماً عضو a متعلق به‌مرکز G است اگر وفقط اگر اعضایی که درسطرمربوط به a قرار دارند دقیقاً به‌همان ترتیبی باشندکه اعضای ستون مربوط به a.

حال فرض‌کنیم G یك گروه و $Z(G)$ مرکز G باشد. چون بنابه قضیهٔ ۴.۱۴، $Z(G)$ در G نورمال است، می‌توانیم گروه خارج قسمت $G/Z(G)$ را تشکیل دهیم و مرکز گروه خارج قسمت یعنی $Z(G/Z(G))$ را پیداکنیم. چون $Z(G/Z(G))$ در $G/Z(G)$ نورمال است، اگر $\gamma : G \to G/Z(G)$ نگاشت‌کانونی باشد آنگاه‌بنابرقضیهٔ ۲.۱۳، $Z_1(G) = [Z(G)/Z(G)]\gamma^{-1}$ زیر گروه نورمالی از G است. آنگاه می‌توانیم گروه خارج‌قسمت $G/Z_1(G)$ ومرکز آن راتشکیل دهیم،از γ_1^{-1} برای محاسبهٔ $Z_2(G)$ استفاده‌کنیم و الی آخر.

تعریف سری

$$\{e\} \leqslant Z(G) \leqslant Z_1(G) \leqslant Z_2(G) \leqslant \cdots$$

که شرح آن در بحث گذشته آمد، سری مرکزی فزایندهٔ گروه G است.

مثال ۱۰.۱۴ مرکز S_3 فقط ازعضوهمانی $\{\rho_0\}$ تشکیل می‌شود. بنابراین سری مرکزی فزایندهٔ S_3 عبارت است از

$$\{\rho_0\} \leqslant \{\rho_0\} \leqslant \{\rho_0\} \leqslant \cdots .$$

مرکز گروه D_4 از تقارنهای مربع درمثال ۲.۴ عبارت است از $\{\rho_0, \rho_2\}$. (آیا به خاطر دارید که گفتیم این گروه تقریباً در هرمبحثی مثال جالبی خواهد بود؟) چون $G/\{\rho_0, \rho_2\}$ ازمرتبهٔ ۴ وبنابراین آبلی است، پس مرکزآن تمام $G/\{\rho_0, \rho_2\}$ است. پس سری مرکزی فزایندهٔ D_4 عبارت است از

$$\{\rho_0\} \leqslant \{\rho_0, \rho_2\} \leqslant D_4 \leqslant D_4 \leqslant D_4 \leqslant \cdots . \qquad \square$$

تمرین

۱.۱۴ نظریفهای ایزومورف دوسری نورمال

$$\{0\} < 245\mathbf{Z} < 49\mathbf{Z} < \mathbf{Z} \text{ و } \{0\} < 60\mathbf{Z} < 20\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$$

از $\mathbf{Z}$ را پیدا کنید

۲.۱۴ تمام سریهای ترکیبی گروه $\mathbf{Z}_{60}$ را پیدا کنید و نشان دهید که در واقع همه باهم ایزومورف هستند.

۳.۱۴ تمام سریهای ترکیبی $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5$ را پیدا کنید.

۴.۱۴ تمام سریهای ترکیبی $S_3 \times \mathbf{Z}_2$ را پیدا کنید.

+ **۵.۱۴** نشان دهید که اگر

$$H_0 = \{e\} < H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G$$

یك سری زیرنورمال (نورمال) ازگروه G باشد واگر H_{i+1}/H_i ازمرتبهٔ متناهی s_{i+1} باشد، آنگاه G ازمرتبهٔ متناهی $s_1 s_2 \cdots s_n$ است.

۶.۱۴ درستی یا نادرستی هریك ازگزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) هرسری نورمال، زیرنورمال نیزهست.

— ب) هرسری زیرنورمال، نورمال نیزهست.

— ج) هرسری اصلی یك سری ترکیبی هم هست.

— د) هرسری ترکیبی یك سری اصلی هم هست.

— ه) هر گروه آبلی دقیقاً یك سری ترکیبی دارد.

— و) هر گروه متناهی یك سری ترکیبی دارد.

— ز) یك گروه حلپذیر است اگر و فقط اگر یك سری ترکیبی با گروههای خارج قسمت

ساده داشته باشد.

— ح) گروه S_7 حلپذیر است.

— ط) قضیهٔ ژوردان ـ هولدر شباهتی‌دارد به‌قضیهٔ اساسی حساب که به‌موجب آن هرعدد طبیعی بزرگتر از یك، قطع نظر از ترتیب عوامل، تجزیه‌ای منحصر به فرد به‌حاصلضرب عوامل اول دارد.

— ی) هر گروه متناهی ازمرتبهٔ عددی اول حلپذیر است.

۷.۱۴ نشان دهیدکه یك گروه آبلی نامتناهی نمی‌تواند یك سری ترکیبی داشته باشد. [راهنمایی: ازتمرین ۵.۱۴ همراه با این واقعیت که هر گروه آبلی نامتناهی همواره یك زیرگروه نورمال واقعی دارد استفاده کنید.]

۸.۱۴ یك سری ترکیبی برای $S_3 \times S_3$ پیدا کنید. آیا $S_3 \times S_3$ حلپذیراست؟

۹.۱۴ نشان دهیدکه هرحاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی گروه حلپذیرخود حلپذیراست.

۱۰.۱۴ آیا گروه D_4 از تقارنهای مربع‌درمثال ۲.۴ حلپذیراست.

***۱۱.۱۴** مرکز گروه $S_3 \times Z_4$ را پیدا کنید.

***۱۲.۱۴** ثابت کنیدکه مرکز هر گروه، یك زیرگروه نورمال آن گروه است. [هشدار: فراموش نکنیدکه قبل ازاثبات نورمال بودن، زیرگروه بودن مرکز را ثابت کنید.]

***۱۳.۱۴** سری مرکزی فزایندهٔ گروه $S_3 \times Z_4$ را پیدا کنید.

۱۵

قضیه‌های ایزومورفیسم

اثبات قضیهٔ ژوردان ـ هولدر

۱.۱۵* قضیه‌های ایزومورفیسم

درمورد گروههای خارج قسمت ایزومورف قضیه‌های متعددی وجود دارد که به قضیه‌های ایزومورفیسم نظریهٔ گروهها معروفند. اولین اینها قضیهٔ ۳.۱۳ است، که برای سهولت مراجعه آن را دوباره بیان می‌کنیم. قضیه درشکل ۱.۱۵ بیان شده است.

قضیهٔ ۱.۱۵ (قضیهٔ اول ایزومورفیسم) فرض کنیم $\phi : G \to G'$ همومورفیسمی باشد باهستهٔ K، وفرض کنیم $\gamma_k : G \to G/K$ همومورفیسم کانونی باشد. آنگاه ایزومورفیسم منحصر به‌فرد $\psi : G/K \to G\phi$ وجود دارد به طوری که به‌ازای هر x از G، $x\phi = x(\gamma_K\psi)$.

به خاطر بیاوریم که اگر H و N زیر گروههایی از گروه G باشند آنگاه $HN = \{hn | h \in H, n \in N\}$. درفصل ۸، دست $H \vee N$ را به‌عنوان کوچکترین زیر گروه شامل HN از گروه G تعریف کردیم. البته، $H \vee N$ کوچکترین زیر گروه G هم هست که شامل هر دو، H و N، می‌باشد؛ چون چنین زیر گروهی باید شامل HN هم باشد. به‌طور کلی، لازم نیست HN زیر گروه G باشد. باری، لم زیر را داریم.

لم ۱.۱۵ اگر N زیرگروه نورمالی از G و H زیرگروه دلخواهی از G باشند، آنگاه $H \vee N = HN = NH$. اگر به‌علاوه H در G نورمال هم باشد، آنگاه NH نیز در G نورمال است.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma_K"'] & & G\phi \\ & G/K \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

ایزومورفیسم

شکل ۱.۱۵

برهان. نشان می‌دهیم HN زیرگروهی از G است، که از آنجا بلافاصله $H \vee H = HN$ نتیجه می‌شود. فرض کنیم $h_1, h_2 \in H$ و $n_1, n_2 \in N$. چون N زیرگروهی نورمال است، به‌ازای عضوی چون n_3 از N داریم $n_1 h_2 = h_2 n_3$. اکنون

$$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1(n_1 h_2)n_2 = h_1(h_2 n_3)n_2 = (h_1 h_2)(n_3 n_2) \in HN$$

واز اینرو HN تحت عمل‌القایی بسته است. واضح است که $e = ee$ متعلق به HN است. برای $n \in N, h \in H$ به‌ازای عضوی چون n_4 از N داریم $(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n_4$، چون که N زیرگروهی نورمال است. پس $(hn)^{-1} \in HN$، ازاینرو $HN \leqslant G$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که NH نیز یك زیرگروه است، بنابراین $NH = H \vee N = HN$.

اکنون فرض کنیم H هم در G نورمال باشد، و فرض کنیم $h \in H$، $n \in N$، و $g \in G$. آنگاه $g^{-1}hng = (g^{-1}hg)(g^{-1}ng) \in HN$؛ از اینرو HN واقعاً در G نورمال است. □

اکنون برای قضیهٔ دوم ایزومورفیسم آمادگی داریم.

قضیهٔ ۲.۱۵ (قضیهٔ دوم ایزومورفیسم) فرض کنیم H زیرگروهی از G و N زیرگروه نورمالی از G باشد. آنگاه $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$.

برهان. چون N در G نورمال است، بلافاصله می‌بینید که $H \cap N$ در H نورمال می‌باشد (تمرین ۱.۱۵ ملاحظه شود). فرض کنیم $h \in H$ و $n \in N$. سعی می‌کنیم $\phi : HN \to H/(H \cap N)$ را باضابطهٔ $(hn)\phi = h(H \cap N)$ تعریف کنیم. باید نشان دهیم ϕ خوشتعریف است. فرض کنیم $h_1 \in H$ و $n_1 \in N$ و $h_1 n_1 = hn$. آنگاه $h^{-1}h_1 = nn_1^{-1}$، ازاینرو $h^{-1}h_1$ در هردو H، N، و بنابراین در $H \cap N$ است. درنتیجه $h(H \cap N) = h_1(H \cap N)$ خواهیم داشت $H/(H \cap N)$. پس $(h_1 n_1)\phi = (hn)\phi$ ازاینرو ϕ خوشتعریف است.

ادعامی کنیم که ϕ همومورفیسمی بر روی $H/(H \cap N)$ است. فرض کنیم $n_1, n_2 \in N$ و $h_1, h_2 \in H$. مانند لم قبل می‌توان نوشت $n_1 h_2 = h_2 n_3$ چون N در G نورمال است. آنگاه

$$[(h_1n_1)(h_2n_2)]\phi=[(h_1h_2)(n_2n_2)]\phi=(h_1h_2)(H\cap N)$$
$$=h_1(H\cap N).\,h_2(H\cap N)=(h_1n_1)\phi.(h_2n_2)\phi$$

ازاینرو ϕ یك همومورفیسم است. چون به‌ازای هر h از H، $(he)\phi=h(H\cap N)$، می‌بینیم که ϕ بروی $H/(H\cap N)$ است.

هستهٔ ϕ ازتمام hnهـای متعلق به HN تشکیل می‌شود که $h\in H\cap N$؛ پس این هسته $(H\cap N)N$ است. واضح است که $(H\cap N)N=N$. پس ϕ همومـورفیسمی بـروی $H/(H\cap N)$ بـا هستهٔ N مـی‌بـاشد، و از اینرو بنابـه قـضیهٔ ۱.۱۵، $HN/N\simeq H/(H\cap N)$. □

مثال ۱.۱۵ فرض کنیم $G=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$، $H=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\{0\}$ و $N=\{0\}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. آنگاه بداهتاً $HN=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ و $H\cap N=\{0\}\times\mathbf{Z}\times\{0\}$. داریم $(HN)/N\simeq\mathbf{Z}$ وهمچنین $H/(H\cap N)\simeq\mathbf{Z}$. □

اگر H و K دو زیر گروه‌نورمال G باشندو $K\leqslant H$، آنگاه‌واضح است که H/K زیر گروه نورمالی از G/K است. قضیهٔ سوم ایزومورفیسم در بارهٔ این گروهها می‌باشد

قضیهٔ ۳.۱۵ (قضیهٔ سوم ایزومورفیسم) فرض کنیم H و K زیر گروههای نورمـالی از گروه G باشند و $K\leqslant H$. آنگاه $G/H\simeq(GH/K)/(H/K)$.

برهان. فـرض کنیم $\phi:G\to(G/K)/(H/K)$ به ازای هـر a از G بـا ضابطهٔ $a\phi=(aK)(H/K)$ تعریف شده باشد. واضح است کـه ϕ بروی $(G/K)(H/K)$ است، وبرای $a,\,b\in G$.

$$(ab)\phi=[(ab)K](H/K)=[(aK)(bK)](H/K)$$
$$=[(aK)(H/K)][(bK)(H/K)]=(a\phi)(b\phi).$$

بنابـراین ϕ یـك همومورفیسم است. هسته، از آن x هایی از G تشکیل می‌شود کـه $x\phi=H/K$. این xها درست همان اعضای H هستند. اکنون قضیهٔ ۱.۱۵ نشان می‌دهد که $G/H\simeq(G/K)/(H/K)$. □

یك راه خوب برای تجسم قضیهٔ ۳.۱۵ ملاحظهٔ نگاشت‌کانونی $\gamma_H:G\to G/H$ به صورت تجزیه شده از طریق زیر گروه نورمالی چون K از H، $K\leqslant H\leqslant G$، است که درحد ایزومورفیسمی طبق شکل ۲.۱۵،

$$\gamma_H=\gamma_K\gamma_{H/K}$$

را به‌دست می‌دهد.

راه دیگر تجسم این قضیه استفاده از نمودار لاتیس شکل ۳.۱۵ است که در آن هر گروه زیر گروه نورمالی از G است و جزء زیر گروه مافوق خود. هرچه زیرگروه نورمال بزرگتر باشد، گروه خارج قسمت کوچکتر است. بنابراین می‌توان تصور کرد که اگر G به وسیلهٔ H فروریزد، که G/H حاصل آن خواهد بود، کوچکتر از وقتی است که G به وسیلهٔ K فروریزد. قضیهٔ ۳.۱۵ نشان می‌دهد که تمام راه فروریختن G به G/H را می‌توان در دو مرحله انجام داد. ابتدا به G/K، و سپس با استفاده از H/K به $(G/K)/(H/K)$ می‌رسیم. نتیجهٔ نهایی (درحد ایزومورفیسم) همان فروریزی G توسط H خواهد بود.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\gamma_H"] \arrow[dr, "\gamma_K"'] & & G/H \\
& G/K \arrow[ur, "\text{ایزومورفیسم طبیعی}"'] \arrow[r, "\gamma_{H/K}"'] & (G/K)/(H/K)
\end{tikzcd}$$

شکل ۲.۱۵

$$\begin{array}{c} G \\ | \\ H \\ | \\ K \end{array}$$

شکل ۳.۱۵

مثال ۲.۱۵ $K=6\mathbf{Z}<H=2\mathbf{Z}<G=\mathbf{Z}$ را در نظر بگیرید. آنگاه $G/H=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\simeq\mathbf{Z}_2$. اکنون $G/K=\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ دارای اعضای

$$6\mathbf{Z},1+6\mathbf{Z},2+6\mathbf{Z},3+6\mathbf{Z},4+6\mathbf{Z},5+6\mathbf{Z}$$

می‌باشد. از این شش همدسته، $6\mathbf{Z}$، $2+6\mathbf{Z}$ و $4+6\mathbf{Z}$ در $2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ قرار دارند. به‌وضوح $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})/(2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ دارای ۲ عضو است و با $\mathbf{Z}_2$ هم‌ایزومورف می‌باشد. به عبارت دیگر، $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}\simeq\mathbf{Z}_6$، و $2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ تحت این ایزومورفیسم متناظر است با زیر گروه دوری $\langle 2\rangle$ از $\mathbf{Z}_6$. پس

$$(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})/(2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}_6/\langle 2\rangle\simeq\mathbf{Z}_2\simeq\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}. \quad \square$$

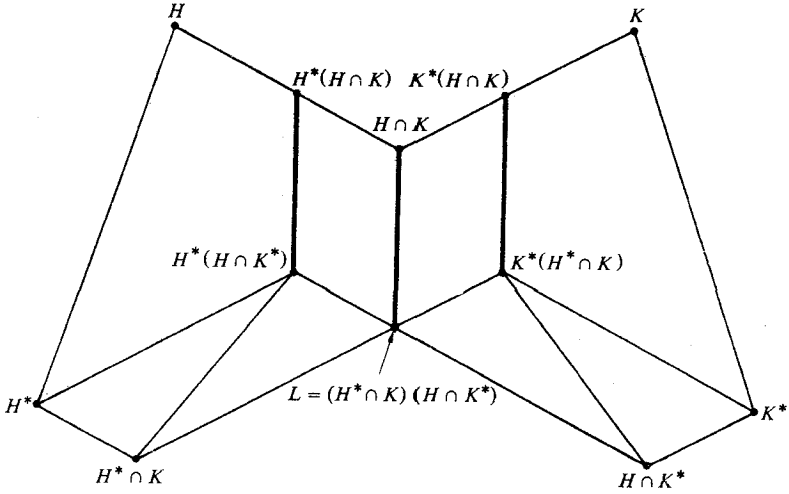
*۲.۱۵ لم ساسنهاوس[1] (پروانه‌ای)

اثبات قضیهٔ ژوردان ـ هولدر به آسانی از لمی نسبتاً فنی که به توسط ساسنهاوس مطرح شده است نتیجه می‌شود. این لم، لم پروانه‌ای هم نامیده می‌شود، زیرا شکل ۴.۱۵ که لم را همراهی می‌کند، به شکل پروانه است.

فرض کنیم H و K زیر گروههایی از گروهی چون G، H^* زیر گروه نورمالی از H و K^* زیر گروه نورمالی از K باشند. با به کاربردن حکم اول لم ۱.۱۵ درمورد H^*

1. Zassenhaus

و $H \cap K$ به عنوان زیر گروههایی از H، می‌بینید که $H^*(H \cap K)$ یک گروه است. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $H^*(H \cap K^*)$، $K^*(H \cap K)$ و $K^*(H^* \cap K)$ نیز گروه هستند. نشان دادن این که $H^* \cap K$ زیرگروه نورمالی از $H \cap K$ است بسیار ساده است (تمرین ۲.۱۵ ملاحظه شود). همان استدلال با به‌کاربردن لم ۱.۱۵ درمورد $H^* \cap K$ و $H \cap K^*$ به‌عنوان زیرگروههایی از $H \cap K$ نشان می‌دهد که $L=(H^* \cap K)(H \cap K^*)$ یك گروه است. بنابراین لاتیس زیرگروههای نشان داده شدهٔ درشکل ۴.۱۵ را به‌دست می‌آوریم. به‌آسانی می‌توانید نسبتهای جزئیت مشخص‌شدهٔ درنمودار را نشان دهید.



شکل ۴.۱۵

چون $H \cap K^*$ و $H^* \cap K$ هردو زیرگروههای نورمالی‌از $H \cap K$ هستند،حکم‌دوم لم ۱.۱۵ نشان می‌دهد که $L=(H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زیرگروه نورمالی از $H \cap K$ است. این نسبت خاص زیرگروه نورمال‌بودن رادرشکل ۴.۱۵ باخط پررنگ وسط نشان داده‌ایم. ادعا می‌کنیم که دوخط پررنگ دیگرهم نسبتهای زیرگروه نورمال بودن را نشان می‌دهند، و این که سه گروه خارج قسمت به دست آمده توسط این سه نسبت زیر گروهی نورمال، هرسه ایزومورف هستند. برای اثبات این موضوع، همومورفیسمی چون $\phi: H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/L$ تعریف‌خواهیم‌کرد ونشان خواهیم دادکه ϕ بروی $(H \cap K)/L$ با هستهٔ $H^*(H \cap K^*)$ است. آنگاه بلافاصله نتیجه خواهد شدکه $H^*(H \cap K^*)$ در $H^*(H \cap K)$ نورمال است، ونیز

$$H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \simeq (H \cap K)/L.$$

حال حکمی مشابه برای گروههای روی‌خط پررنگ سمت راست شکل۴.۱۵، بنا به‌تقارن، به‌دست می‌آید.

فرض کنیم $\phi : H^*(H\cap K) \to (H\cap K)/L$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد. برای $h\in H^*$ و $x\in H\cap K$ قرار می‌دهیم $(hx)\phi = xL$. نشان می‌دهیم که ϕ خوشتعریف و همومورفیسم است. فرض کنیم $h_1, h_2 \in H^*$ و $x_1, x_2 \in H\cap K$. اگر $h_1x_1 = h_2x_2$ آنگاه $h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^*\cap(H\cap K) = H^*\cap K \subseteq L$، از اینرو $x_1L = x_2L$. پس ϕ خوشتعریف است. چون H^* در H نورمال است، پس عضوی مانند h_3 در H^* هست به‌طوری که $x_1h_2 = h_3x_1$. آنگاه

$$[(h_1x_1)(h_2x_2)]\phi = [(h_1h_3)(x_1x_2)]\phi = (x_1x_2)L$$
$$= (x_1L)(x_2L) = (h_1x_1)\phi\cdot(h_2x_2)\phi.$$

پس ϕ همومورفیسم است. بداهتاً ϕ بروی $(H\cap K)/L$ است. سرانجام اگر $h\in H^*$ و $x\in H\cap K$، آنگاه $(Hx)\phi = xL = L$ اگر وفقط اگر $x\in L$، یا اگر و فقط اگر $hx \in H^*L = H^*(H^*\cap K)(H\cap K^*) = H^*(H\cap K^*)$. پس $Ker(\phi) = H^*(H\cap K^*)$.

به‌این ترتیب لم زیر را ثابت کرده‌ایم.

لم ۲.۱۵ (ساسنهاوس) فرض کنیم H و K زیرگروههایی از گروه G باشند و فرض کنیم H^* و K^* زیرگروههای نورمالی به‌ترتیب از H و K باشند.

۱. $H^*(H\cap K^*)$ زیرگروه نورمالی از $H^*(H\cap K)$ است.

۲. $K^*(H^*\cap K)$ زیرگروه نورمالی از $K^*(H\cap K)$ است.

۳. $H^*(H\cap K)/H^*(H\cap K^*) \simeq K^*(H\cap K)/K^*(H^*\cap K)$
$\simeq (H\cap K)K)/[(H^*\cap K)(H\cap K^*)]$.

*۳.۱۵ اثبات قضیهٔ شرایر

در فصل ۱۴ نشان دادیم که قضیهٔ ژوردان ـ هولدر بلافاصله از قضیهٔ شرایر (قضیهٔ ۱.۱۴) نتیجه می‌شود. دراینجا، به‌خاطر سهولت مراجعه، قضیهٔ شرایر را دوباره بیان و آن را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۱۵ (شرایر) دوسری زیرنورمال (نورمال) ازگروهی چون G دارای تظریفهای ایزومورف هستند.

برهان. فرض کنیم G یك گروه باشد و

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G \qquad (۱.۱۵)$$

و

$$\{e\} = K_0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_m = G \qquad (۲.۱۵)$$

دو سری زیر نورمال G باشند. به‌ازای هر i که $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ، زنجیر گروههای

$$H_i = H_i(H_{i+1} \cap K^{\circ}) \leqslant H_i(H_{i+1} \cap K_1) \leqslant \cdots \leqslant H_i(H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1}$$

را تشکیل می‌دهیم. این‌کار $m-1$ گروه نه لزوماً متمایز بین H_i و H_{i+1} درج می‌کند. اگر این‌کار را برای هر i که $0 \leqslant i \leqslant n-1$ ، انجام دهیم وقرار دهیم $H_{i,j} = H_i(H_{i+1} \cap K_j)$ ، آنگاه زنجیر گروههای زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\{e\} = H_{0,0} &\leqslant H_{0,1} \leqslant H_{0,2} \leqslant \cdots \leqslant H_{0,m-1} \leqslant H_{1,0} \\ &\leqslant H_{1,1} \leqslant H_{1,2} \leqslant \cdots \leqslant H_{1,m-1} \leqslant H_{2,0} \\ &\leqslant H_{2,1} \leqslant H_{2,2} \leqslant \cdots \leqslant H_{2,m-1} \leqslant H_{3,0} \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant H_{n-1,1} \leqslant H_{n-1,2} \leqslant \cdots \leqslant H_{n-1,m-1} \leqslant H_{n-1,m} = G. \qquad (۳.۱۵)\end{aligned}$$

این زنجیر (۳.۱۵) شامل $nm+1$ گروه نه لزوماً متمایز است، و به ازای هر i ، $H_{i,0} = H_i$. بنا به لم ساسنهاوس، (۳.۱۵) زنجیری زیر نورمال است، یعنی هر گروه در گروه بعدی نورمال است. این زنجیر تظریفی است ازسری (۱.۱۵).

به‌طریقی مشابه، برای $0 \leqslant j \leqslant m-1$ و $0 \leqslant i \leqslant n$ قرار می‌دهیم $K_{j,i} = K_j(K_{j+1} \cap H_i)$. نتیجهٔ این‌کار زنجیری زیر نورمال به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\{e\} = K_{0,0} &\leqslant K_{0,1} \leqslant K_{0,2} \leqslant \cdots \leqslant K_{0,n-1} \leqslant K_{1,0} \\ &\leqslant K_{1,1} \leqslant K_{1,2} \leqslant \cdots \leqslant K_{1,n-1} \leqslant K_{2,0} \\ &\leqslant K_{2,1} \leqslant K_{2,2} \leqslant \cdots \leqslant K_{2,n-1} \leqslant K_{3,0} \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant K_{m-1,1} \leqslant K_{m-1,2} \leqslant \cdots \leqslant K_{m-1,n-1} \leqslant K_{m-1,n} = G. \qquad (۴.۱۵)\end{aligned}$$

این زنجیر(۴.۱۵)شامل $mn+1$ گروه نه‌لزوماً متمایزاست، وبه‌ازای هر j ، $K_{j,0} = Kj$ این زنجیر تظریفی است ازسری (۲.۱۵).

بنا به‌لم ساسنهاوس، برای $0 \leqslant i \leqslant n-1$ و $0 \leqslant j \leqslant m-1$ ، داریم

$$H_i(H_{i+1} \cap K_{j+1})/H_i(H_{i+1} \cap K_j) \simeq K_j(K_{j+1} \cap H_{i+1})/K_j(K_{j+1} \cap H_i)$$

یا

$$H_{i,\,j+1}/H_{i,\,j} \simeq K_{j,\,i+1}/K_{j,\,i}. \qquad (۵.۱۵)$$

ایزومورفیسمهای تساوی (۵.۱۵) تناظری یك‌به‌یك بین گروههای‌خارج قسمت ایزومورف

زنجیرهای زیرنورمال تساوی (۳.۱۵) وتساوی (۴.۱۵) برقرارمی‌سازند. برای تحقیق‌در برقراری این تناظر، دقت‌کنیدکه $H_{i,0}=H_i$ و $H_{i,m}=H_{i+1}$، درحالی که $K_{j,0}=K_j$ و $K_{j,n}=K_{j+1}$. هریک از دو زنجیر تساوی (۳.۱۵) و تساوی (۴.۱۵) آرایه‌ای مستطیل شکل از mn نماد $\leqslant$ را شامل است. هر $\leqslant$ یک گروه خارج قسمت را ایجاد می‌کند. گروههای خارج قسمت ایجاد شده از سطر r م $\leqslant$های درتساوی (۳.۱۵) متناظر خواهند بود با گروههای‌خارج قسمت ایجاد شده از ستون r م $\leqslant$های درتساوی (۴.۱۵). باحذف گروههای تکراری از زنجیرهای (۳.۱۵) و (۴.۱۵)، سریهای زیرنورمالی از گروههای متمایز به‌دست می‌آوریم که تظریفهای ایزومورف‌ازتساویهای (۱.۱۵)و(۲.۱۵) هستند. این برقراری حکم را درمورد سریهای زیرنورمال نشان می‌دهد.

برای سریهای‌نورمال که همهٔ H_i ها و K_j ها در G نورمال هستند، مشاهده‌می‌کنیم که همهٔ گروههای $H_{i,j}$ و $K_{j,i}$ تشکیل شدهٔ دربالانیز در G نورمال هستند، ازاینروهمان اثبات را می‌توان به کاربرد. نورمال بودن $K_{i,j}$ و $H_{i,j}$ بلافاصله ازحکم دوم لم ۱.۱۵ واین حقیقت که مقطع دو زیرگروه نورمال زیرگروهی نورمال است نتیجه می‌شود. □

تمرین

*۱.۱۵ نشان دهیدکه اگر H و N زیرگروههایی از G باشند و N در G نورمال باشد، آنگاه $H\cap N$ در H نورمال است.

*۲.۱۵ فرض‌کنید H^*، H و K زیرگروههایی از G باشند و H^* در H نورمال باشد. نشان دهیدکه $H^*\cap K$ در $H\cap K$ نورمال است.

*۳.۱۵ فرض‌کنید H، K و L زیرگروههای نورمالی از G باشند و $H<K<L$. قراردهید $A=G/H$، $B=K/H$ و $C=L/H$.

ا) نشان دهیدکه B و C زیرگروههای نورمالی از A هستند، و $B<C$.

ب) $(A/B)/(C/B)$ باکدام‌گروه ایزومورف است؟

+*۴.۱۵ فرض‌کنید K و L زیرگروههایی نورمال از G باشند و $K\vee L=G$، و $K\cap L=\{e\}$. نشان دهیدکه $G/K\simeq L$ و $G/L\simeq K$.

هنگام استفاده از سه قضیهٔ ایزومورفیسم، اغلب لازم است که عملا تناظر ارائه شده به توسط ایزومورفیسم را بدانیم ونه صرفاً این که گروهها باهم ایزومورف هستند. شش تمرین بعد آموزشی برای این کار به شما می‌دهند.

*۵.۱۵ فرض‌کنید $\phi: Z_{12}\to Z_3$ همومورفیسمی باشدکه $\phi(1)=2$.

ا) هستهٔ K از ϕ را بیابید.

ب) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو Z_{12}/K را فهرست کنید.
ج) تناظر بین Z_{12}/K و Z_3 ارائه شده بانگاشت ψ درقضیهٔ ۱.۱۵ را به‌دست آورید.

*۶.۱۵ فرض کنید $\Phi: Z_{18} \to Z_{12}$ همومورفیسمی باشد که $\phi = 10$.
ا) هستهٔ K از ϕ رابیابید.
ب) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، یا همدسته‌های عضو Z_{18}/K را فهرست کنید.
ج) گروه $Z_{18}\phi$ را بیابید.
د) تناظر بین Z_{18}/K و $Z_{18}\phi$ ارائه شده بانگاشت ψ درقضیهٔ ۱.۱۵ را به‌دست آورید.

*۷.۱۵ درگروه Z_{24}، قراردهید $H = \langle 4 \rangle$ و $N = \langle 6 \rangle$.
ا) اعضای NH (که می‌تواند برای این گروههای جمعی به‌صورت $N + H$ هم نوشته شود) و $H \cap N$ را فهرست کنید.
ب) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو HN/N را فهرست کنید.
ج) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو $H/(H \cap N)$ را فهرست کنید.
د) تناظر بین HN/N و $H/(H \cap N)$ توصیف شده درقضیهٔ ۲.۱۵ را ارائه کنید.

*۸.۱۵ تمرین ۷.۱۵ را درموردگروه Z_{36} با $H = \langle 6 \rangle$ و $N = \langle 9 \rangle$ تکرار کنید.

*۹.۱۵ درگروه $G = Z_{24}$، قراردهید $H = \langle 4 \rangle$ و $K = \langle 8 \rangle$.
ا) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو G/H را فهرست کنید.
ب) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو G/K را فهرست کنید.
ج) بانشان دادن اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو H/K را فهرست کنید.
د) بانشان دادن‌اعضای هرهمدسته، همدسته‌های عضو $(G/K)/(H/K)$ رافهرست کنید.
ه) تناظر بین G/H و $(G/K)/(H/K)$ توصیف شده دراثبات قضیهٔ ۳.۱۵ را ارائه کنید.

*۱۰.۱۵ تمرین ۹.۱۵ رابرای گروه $G = Z_{36}$ با $H = \langle 9 \rangle$ و $K = \langle 18 \rangle$ تکرار کنید.

*۱۱.۱۵ G را Z_{36} بگیرید. اثبات‌قضیهٔ ۴.۱۵ را تکرار کنید. فرض کنید سری زیر نورمال (۱.۱۵)

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 3 \rangle < Z_{36}$$

باشد وسری زیر نورمال (۲.۱۵)

$$\{0\} < \langle 18 \rangle < Z_{36}.$$

زنجیرهای (۳.۱۵) و (۴.۱۵) را بیابید و گروههای خارج قسمت ایزومورف را به صورت توصیف شدهٔ دربرهان نمایش دهید. زنجیرهای (۳.۱۵) و (۴.۱۵) را به‌صورت آرایه‌های مستطیل شکل نشان داده شدهٔ درمتن بنویسید.

*۱۲.۱۵ تمرین ۱۱.۱۵ را در مورد گروه $\mathbf{Z}_{۲۴}$ باسری زیر نورمال (۱.۱۵) به صورت

$$\{۰\} < \langle ۱۲ \rangle < \langle ۴ \rangle < \mathbf{Z}_{۲۴}$$

و (۲.۱۵) به‌صورت

$$\{۰\} < \langle ۶ \rangle < \langle ۳ \rangle < \mathbf{Z}_{۲۴}$$

تکرار کنید.

*۱۳.۱۵ نشان دهید که هرزیر گروه K از گروهی حلپذیرچون G حلپذیراست.[راهنمایی فرض کنید $H_۰ = \{e\} < H_۱ < \cdots < H_n = G$ یك سری ترکیبی برای G باشد. نشان دهید که گروههای متمایز دربین $K \cap H_i$ها برای $i = ۰, ۱, \ldots, n$ تشکیل یك سری ترکیبی برای K می‌دهند. مشاهده کنید که بنابه قضیهٔ ۲.۱۵ با فرض $H = K \cap H_i$ و $N = H_{i-۱}$

$$(K \cap H_i)/(K \cap H_{i-۱}) \simeq [H_{i-۱}(K \cap H_i)]/[H_{i-۱}]$$

واین که $H_{i-۱}(K \cap H_i) \leqslant H_i$.]

*۱۴.۱۵ فرض کنید $H_۰ = \{e\} < H_۱ < \cdots < H_n = G$ یك سری ترکیبی برای گروهی چون G باشد. فرض کنید N زیرگروه نورمالی از G و N گروهی ساده باشد. نشان دهید که گروههای متمایز بین $H_۰$ و H_iNها، برای $i = ۰, \ldots, n$، هم تشکیل یك سری ترکیبی برای G می‌دهند. [راهنمایی: H_iN بنابه لم ۱.۱۵ یك گروه است. نشان دهید که $H_{i-۱}N$ در H_iN نورمال است. بنابه‌قضیهٔ ۲.۱۵

$$(H_iN)/(H_{i-۱}N) \simeq H_i/[H_i \cap (H_{i-۱}N)]$$

و گروه آخر بنابه‌قضیهٔ ۳.۱۵ با

$$[H_i/H_{i-۱}]/[(H_i \cap (H_{i-۱}N))/H_{i-۱}]$$

ایزومورف است. اما $H_i/H_{i-۱}$ ساده است.]

*۱۵.۱۵ فرض کنید G یك گروه، و $H_۰ = \{e\} < H_۱ < \cdots < H_n = G$ یك سری ترکیبی برای G باشد. فرض کنید N زیر گروه نورمالی از G باشد و $\gamma: G \to N$ نگاشت کانونی. نشان دهید که گروههای متمایز بین $H_i\gamma$ها، برای $i = ۰, \ldots, n$، تشکیل یك سری ترکیبی برای G/N می‌دهند. [راهنمایی: مشاهده کنید که نگاشت

$$\psi: H_iN \to (H_i\gamma)/(H_{i-۱}\gamma)$$

باتعریف

$$(h_in)\psi = ((h_in)\gamma)(H_{i-۱}\gamma)$$

یك همومورفیسم است با هستهٔ $H_{i-1}N$. بنا به قضیه ۱.۱۵

$$(H_i\gamma)/(H_{i-1}\gamma)\simeq(H_iN)/(H_{i-1}N).$$

همان گونه که در راهنمایی تمرین ۱۴.۱۵ بیان شد، ازطریق قضیهٔ ۲.۱۵ کار را ادامه دهید.]

***۱۶.۱۵** ثابت کنید که تصویر همومورف گروهی حلپذیر، حلپذیر است. [راهنمایی: تمرین ۱۵.۱۵ را برای به‌دست آوردن یك سری ترکیبی برای تصویر همومورف به کار برید. راهنماییهای تمرینهای ۱۴.۱۵ و ۱۵.۱۵ آنگاه نشان می‌دهند که گروههای خارج قسمت این سری ترکیبی در تصویر چگونه به نظر می‌رسند.]

۱۶*

کنش گروه بر یك مجموعه

۱.۱۶* مفهوم کنش گروه

اکنون که شما با تابع و حاصلضرب دکارتی آشنا هستید، در مقایسه با فصل ۱ می‌توانید دید روشنتری از عملی دوتایی بر یك مجموعه داشته باشید. **عملی دوتایی** بر S تابعی است که $S \times S$ را بتوی S می‌نگارد. در صورتی که این تابع را با * نمایش دهیم، آنگاه بیشتر مرسوم است که $(s_1, s_2) * = s_3$ را به صورت ساده‌تر $s_1 * s_2 = s_3$ بنویسند. تابع * قاعده‌ای برای «ضرب» عضوی از S در عضوی از S که حاصل مجدداً عضوی از S باشد برای ما فراهم می‌سازد.

به‌طور کلی، برای مجموعه‌های A، B و C می‌توانیم نگاشتی چون $*: A \times B \to C$ را به‌عنوان تعریفی برای یك «ضرب» در نظر بگیریم که حاصلضرب عضوی چون a از A در عضوی چون b از B به‌عنوان مقدار عضوی چون c از C را داشته باشد. البته، می‌نویسیم $a*b = c$، یا به‌سادگی $ab = c$. در این فصل، ما با حالتی سر و کار خواهیم داشت که X یك مجموعه‌است، G یك گروه است و نگاشتی چون $*: X \times G \to X$ را هم داریم. ما $(x, g)*$ را به‌صورت $x*g$ یا xg خواهیم نوشت.

تعریف فرض کنیم X یك‌مجموعه باشد و G یك‌گروه. یك کنش G بر X نگاشتی است چون $*: X \times G \to G$ به‌طوری که:

۱. به‌ازای هر x از X، $xe = x$؛

۲. به‌ازای هر x از X و هر g_1 و g_2 از G، $x(g_1 g_2) = (xg_1)g_2$.

تحت این شرایط، X یك G-**مجموعه** است

مثال ۱.۱۶ فرض‌کنیم X مجموعهٔ دلخواهی باشد S_X را گروه تمام جایگشتهای X می‌گیریم. X یك S_X ـمجموعه است، در صورتی که برای هر x از X و هر σ از S_X، کنش $x\sigma$ از σ بر x اثر جایگشت σ بر x را داشته باشد. شرط ۲ نتیجهٔ تعریف ضرب جایگشتی به‌عنوان ترکیب تابع است،و شرط ۱ بلافاصله ازتعریف جایگشت همانی به‌دست می‌آید. بالاخص، $\{1,2,3,\ldots,n\}$ یك S_n ـ مجموعه‌است. □

مثال ۲.۱۶ هرگروه G خود یك G ـ مجموعه است، در صورتی که کنش g_2 از G بر g_1 از G با ضرب راست تعریف شده باشد. یعنی، $(g_1, g_2)*=g_1g_2$. اگر H زیر گروهی از G باشد، G را یك H ـ مجموعه هم می‌توان در نظر گرفت، که در آن $(g,h)*=gh$. □

مثال ۳.۱۶ فرض‌کنیم H زیرگروهی از G باشد. در این صورت G یك H ـ مجموعه است تحت مزدوجگیری، که برای $g\in G$ و $h\in H$، $(g,h)*=h^{-1}gh$. شرط ۱ بدیهی است و برای شرط ۲ ملاحظه‌کنیدکه

$$(g,\ h_1h_2)*=(h_1h_2)^{-1}g(h_1h_2)=h_2^{-1}(h_1^{-1}gh_1)h_2=((g,\ h_1)*,\ h_2)*$$

این کنش H بر G توسط مزدوجگیری را همیشه به‌صورت $h^{-1}gh$ می‌نویسیم. به‌کار بردن صورت مختصر gh که قبل از تعریف بیان شد موجب اشتباه بزرگی با عمل دوتایی گروه G خواهد شد. در فصل ۱۸ خواهیم دیدکه این کنش H بر G در مطالعهٔ ساختار گروه G بسیار مهم است. □

مثال ۴.۱۶ فرض‌کنیم H زیرگروهی از G و R_H مجموعهٔ تمام همدسته‌های‌راست H باشد. در این صورت، R_H یك G ـ مجموعه‌است که درآن کنش $g\in G$ برهمدستهٔ راست Hx با $(Hx)g=H(xg)$ تعریف می‌شود. تعدادی از تمرینها نشان می‌دهندکه هر G ـ مجموعه با یکی که بتواند با استفاده از این G ـ مجموعه‌های همدسته‌ای راست به عنوان بلوکهای ساختمانی تشکیل بشود ایزومورف است. (تمرینهای ۱۲.۱۶ تا ۱۵.۱۶ را ببینید.) □

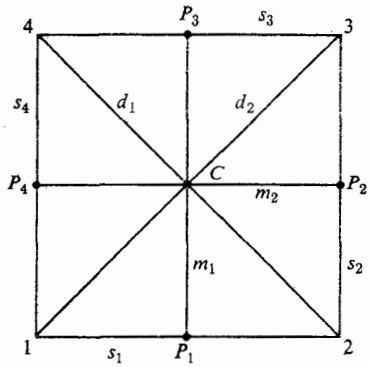
مثال ۵.۱۶ فرض‌کنیم G گروه $D_4=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2,\rho_3,\mu_1,\mu_2,\delta_1,\delta_2\}$ از تقارنهای مربع، بیان شده در مثال ۲.۴، باشد. در شکل ۱.۱۶ هم مانند شکل ۶.۴ مربع را با رأسهای ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان می‌دهیم. همچنین ضلعها را s_1، s_2، s_3 و s_4، قطرها را d_1 و d_2، محورهای عمودی و افقی را m_1 و m_2، نقطهٔ مرکز را C و نقطه‌های وسط ضلعهای s_i را P_i نامگذاری می‌کنیم. بخاطر بیاوریدکه P_i متناظر است با دوران مربع در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت به اندازهٔ $\pi i/2$ رادیان، μ_i متناظر است با برگرداندن مربع حول‌محور m_i و δ_i متناظر است با برگرداندن آن‌حول‌قطر d_i. قرارمی‌دهیم

$$X=\{1,2,3,4 \text{ و } s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ m_1,\ m_2,\ d_1,\ d_2,\ C,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\}.$$

جدول ۱.۱۶

	۱	۲	۳	۴	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	$m_۱$	$m_۲$	$d_۱$	$d_۲$	C	$P_۱$	$P_۲$	$P_۳$	$P_۴$
$\rho_۰$	۱	۲	۳	۴	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	$m_۱$	$m_۲$	$d_۱$	$d_۲$	C	$P_۱$	$P_۲$	$P_۳$	$P_۴$
$\rho_۱$	۲	۳	۴	۱	$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	$s_۱$	$m_۲$	$m_۱$	$d_۲$	$d_۱$	C	$P_۲$	$P_۳$	$P_۴$	$P_۱$
$\rho_۲$	۳	۴	۱	۲	$s_۳$	$s_۴$	$s_۱$	$s_۲$	$m_۱$	$m_۲$	$d_۱$	$d_۲$	C	$P_۳$	$P_۴$	$P_۱$	$P_۲$
$\rho_۳$	۴	۱	۲	۳	$s_۴$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$m_۲$	$m_۱$	$d_۲$	$d_۱$	C	$P_۴$	$P_۱$	$P_۲$	$P_۳$
$\mu_۱$	۲	۱	۴	۳	$s_۱$	$s_۴$	$s_۳$	$s_۲$	$m_۱$	$m_۲$	$d_۲$	$d_۱$	C	$P_۱$	$P_۴$	$P_۳$	$P_۲$
$\mu_۲$	۴	۳	۲	۱	$s_۳$	$s_۲$	$s_۱$	$s_۴$	$m_۱$	$m_۲$	$d_۲$	$d_۱$	C	$P_۳$	$P_۲$	$P_۱$	$P_۴$
$\delta_۱$	۳	۲	۱	۴	$s_۲$	$s_۱$	$s_۴$	$s_۳$	$m_۲$	$m_۱$	$d_۱$	$d_۲$	C	$P_۲$	$P_۱$	$P_۴$	$P_۳$
$\delta_۲$	۱	۴	۳	۲	$s_۴$	$s_۳$	$s_۲$	$s_۱$	$m_۲$	$m_۱$	$d_۱$	$d_۲$	C	$P_۴$	$P_۳$	$P_۲$	$P_۱$

آنگاه، X را می‌توان به صورتی بدیهی به عنوان یك D_4 - مجموعه درنظر گرفت. جدول ۱.۱۶ کنش D_4 بر X را تماماً بیان می‌کند. مطمئن شوید که چگونگی تشکیل جدول را می‌فهمید. □



شکل ۱.۱۶

*۲.۱۶ مجموعهٔ پایا و زیرگروه همروندی

فرض کنیم X یك G - مجموعه باشد. و $x \in X$ و $g \in G$. دانستن این که چه وقت $xg = x$ مهم خواهد بود. قرار می‌دهیم

$$G_x = \{g \in G | xg = x\} \quad \text{و} \quad X_g = \{x \in X | xg = x\}$$

مثال ۶.۱۶ برای D_4 - مجموعهٔ X از مثال ۵.۱۶، داریم

$$X_{\rho_0} = X, \quad X_{\rho_1} = \{C\}, \quad X_{\mu_1} = \{s_1, s_2, m_1, m_2, C, P_1, p_3\}$$

همچنین، با $G = D_4$،

$$G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}, \quad G_{s_3} = \{\rho_0, \mu_1\}, \quad G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}.$$

محاسبهٔ سایر X_σ ها و G_x ها را به تمرینهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ واگذار می‌کنیم. □

احتمالا توجه کرده‌اید که زیر مجموعه‌های G_x ارائه شدهٔ در مثال پیش، در همهٔ موارد زیرگروههایی از G هستند. این به‌طور کلی هم درست است.

قضیهٔ ۱.۱۶ فرض کنیم X یك G - مجموعه باشد. در این صورت برای هر x از X، G_x زیرگروهی از G است.

برهان. فرض کنیم $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G_x$. پس $xg_1 = x, xg_2 = x$. در نتیجه،

$x(g_1g_2)=(xg_1)g_2=xg_2=x$، از اینرو $g_1g_2\in G_x$، و G_x تحت عمل القایی G بسته است. البته $xe=x$، از اینرو $e\in G_x$. اگر $g\in G_x$، آنگاه $xg=x$، پس $x=xe=x(gg^{-1})=(xg)g^{-1}=xg^{-1}$، و در نتیجه $g^{-1}\in G_x$. بنابراین G_x زیر گروهی از G است. □

تعریف فرض کنیم X یك G-مجموعه باشد و $x\in X$. زیر گروه G_x زیر گروه همروندی x نامیده می‌شود.

۳.۱۶* مدار

برای D_4-مجموعهٔ X از مثال ۵.۱۶ با جدول کنش طبق جدول ۱.۱۶، اعضای زیر مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ تحت کنش D_4 به‌اعضای همین مجموعه برده می‌شوند. به‌علاوه هر یك از اعضای ۱، ۲، ۳ و ۴ توسط اعضای مختلف D_4 به بقیهٔ اعضای این زیر مجموعه برده می‌شوند. بعداً نشان می‌دهیم که هر G-مجموعهٔ X را می‌توان به این قبیل زیر مجموعه‌ها افراز کرد.

قضیهٔ ۲.۱۶ فرض‌کنیم X یك G-مجموعه باشد. برای $x_1,x_2\in X$، قرار می‌دهیم $x_1\sim x_2$ اگر و فقط اگر عضوی چون g از G وجود داشته باشد به طوری که $x_1g=x_2$. آنگاه $\sim$ نسبتی هم‌ارزی بر S است.

برهان. برای هر x از X، داریم $xe=x$؛ از اینرو $x\sim x$ و $\sim$ منعکس است.
فرض‌کنیم $x_1\sim x_2$، لذا به ازای عضوی چون g از G، $x_1g=x_2$. پس، $x_2g^{-1}=(x_1g)g^{-1}=x_1(gg^{-1})=x_1e=x_1$؛ از اینرو $x_2\sim x_1$ و $\sim$ متقارن است.
سرانجام، اگر $x_1\sim x_2$ و $x_2\sim x_3$، آنگاه به ازای g_1 و g_2 یی از G، $x_1g_1=x_2$ و $x_2g_2=x_3$. پس $x_1(g_1g_2)=(x_1g_1)g_2=x_2g_2=x_3$؛ از اینرو $x_1\sim x_3$ و $\sim$ متعدی است. □

تعریف فرض‌کنیم X یك G-مجموعه باشد. هر قطعه در افراز با نسبت هم‌ارزی بیان شدهٔ در قضیهٔ ۲.۱۶ یك مدار در X تحت G نامیده می‌شود. اگر $x\in X$، قطعهٔ شامل x را مدار x می‌نامیم و به‌صورت xG نمایش می‌دهیم.

نسبت بین مدارهای X و ساختار گروهی G در قلب کاربردهایی جای دارد که در دو فصل آتی ظاهر خواهد شد. قضیهٔ بعد این نسبت را ارائه می‌کند. بخاطر بیاوریم که برای مجموعه‌ای چون X، نماد $|X|$ را برای تعداد اعضای X به‌کار می‌بریم و $(G:H)$ اندیس زیر گروه H از یك گروه G است.

قضیهٔ ۳.۱۶ فرض کنیم X یك G-مجموعه باشد و $x\in X$. آنگاه $|xG|=(G:G_x)$.

برهان. نگاشتی یك‌به‌یك چون ϕ از xG بر روی گردآیهٔ همدسته‌های راست Gx در G را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $x_1 \in xG$ عضوی چون g_1 از G وجود دارد به‌طوری که $xg_1 = x_1$. $x_1\phi$ را همدستهٔ راست $G_x g_1$ از G_x تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که این نگاشت ϕ خوشتعریف است، یعنی مستقل است از انتخاب g_1 از G. فرض کنیم که همچنین $xg'_1 = x_1$. آنگاه $xg_1 = xg'_1$، از اینرو $(xg_1)g_1^{-1} = (xg'_1)g_1^{-1}$ که از آن نتیجه می‌گیریم $x = x(g'_1 g_1^{-1})$. بنابراین $g'_1 g_1^{-1} \in G_x$، از اینرو $g'_1 \in G_x g_1$ و $G_x g_1 = G_x g'_1$. پس نگاشت ϕ خوشتعریف است.

برای نشان دادن این که نگاشت ϕ یك‌به‌یك است، فرض کنیم که $x_1, x_2 \in xG$، و $x_1\phi = x_2\phi$. آنگاه g_1 و g_2 هایی از G وجود دارند که $x_1 = xg_1$، $x_2 = xg_2$ و $g_2 \in G_x g_1$. در این صورت عضوی مانند g از G_x هست که $g_2 = gg_1$، از اینرو $x_2 = xg_2 = x(gg_1) = (xg)g_1 = xg_1 = x_1$. پس ϕ یك‌به‌یك است.

سرانجام، نشان می‌دهیم که هر همدستهٔ راست G_x در G به‌ازای عضوی چون x_1 از xG به‌صورت $x_1\phi$ است. فرض کنیم $G_x g_1$ یك همدستهٔ راست باشد. آنگاه، اگر $x_1 = xg_1$، خواهیم داشت $G_x g_1 = x_1\phi$. پس ϕ، xG را بر روی گردآیه‌ای از همدسته‌های راست می‌نگارد. □

مثال ۷.۱۶ فرض کنیم X همان D_4 - مجموعهٔ مثال ۵.۱۶ با جدول کنش ارائه‌شده توسط جدول ۱.۱۶ باشد. با $G = D_4$، داریم $1G = \{1, 2, 3, 4\}$ و $G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}$. چون $|G| = 8$، داریم $|1G| = (G:G_1) = 4$. □

نه تنها تساوی اعداد اصلی در قضیهٔ ۳.۱۶ را باید به خاطر داشته باشید، بلکه باید بدانید که اعضایی از G که x را به xg_1 می‌برند دقیقاً همان اعضای همدستهٔ راست $G_x g_1$ هستند. این نکته با استفاده از برهان واضح است.

تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۳ فرض کنید

$$X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1 P_2 P_3 P_4\}$$

D_4 - مجموعهٔ مثال ۵.۱۶ با جدول کنش مطابق جدول ۱.۱۶ باشد. با فرض $G = D_4$ آنچه را که خواسته شده است پیدا کنید.

*۱.۱۶ مجموعه‌های پایای X_σ برای هر σ از D_4، یعنی X_{ρ_0}، X_{ρ_1}، ...، X_{δ_2}.

*۲.۱۶ زیرگروههای همروندی G_x برای هر x از X، یعنی G_1، G_2، ...، G_{P_1}، G_{P_2}

*۳.۱۶ مدارهای X تحت D_4.

*۴.۱۶ G-مجموعه‌ای ناتهی چون X **متعدی** است اگر، به‌ازای هر x_1 و x_2 از X، عضوی چون g از G وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_1g=x_2$. یك G-مجموعهٔ متعدی را بر حسب مدارهایش مشخص کنید.

*۵.۱۶ فرض کنید X یك G-مجموعه باشد و $S\subseteq X$. اگر به ازای هر s از S، $sG\subseteq S$، آنگاه s یك **زیر-G-مجموعه** است. یك زیر-G-مجموعه‌از G-مجموعه‌ای چون X را برحسب مدارهای واقع در $\bar{X}$ تحت G پیدا کنید.

*۶.۱۶ فرض کنید X و Y دو G-مجموعه با یك گروه G باشند. یك **ایزومورفیسم** بین G-مجموعه‌های X و Y نگاشتی‌است چون $\phi: X\longrightarrow Y$ که یك‌به‌یك باشد و بروی Y، و برای هر x از X و هر g از G، $(x\phi)g=(xg)\phi$ بر قرار باشد. دو G-مجموعه **ایزومورف** هستند، در صورتی‌که چنین ایزومورفیسمی بین‌آنها وجود داشته‌باشد. فرض کنید X همان D_4-مجموعهٔ مثال ۵.۱۶ باشد.

ا) دو مدار متمایز از X بیابیدکه زیر-D_4-مجموعه‌های ایزومورف باشند.

ب) نشان دهیدکه مدارهای $\{1,2,3,4\}$ و $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ زیر-D_4-مجموعه‌های ایزومورف هستند. [راهنمایی. عضوی از G بیابید که به‌صورتی اساساً متفاوت روی دو مدار عمل کند.]

ج) آیا مدارهایی که برای پاسخ به قسمت (ا) ارائه کرده‌اید تنها دو زیر-D_4-مجموعهٔ متمایز ایزومورف از X هستند؟

*۷.۱۶ کنش یك گروه G روی G-مجموعه‌ای چون X **صادقانه** است اگرعضوهمانی تنها عضوی از G باشد که هر عضو X را ثابت نگه می‌دارد. فرض کنید X همان D_4-مجموعهٔ مثال ۵.۱۶ باشد.

ا) آیا کنش D_4 روی X صادقانه است؟

ب) تمام مدارهایی‌از X را بیابیدکه‌به‌عنوان یك زیر-D_4-مجموعه و کنش D_4 روی‌آنها صادقانه باشد.

*۸.۱۶ فرض کنید X یك G-مجموعه باشد. با ارجاع به‌تمرین ۷.۱۶، نشان دهیدکه کنش G روی X صادقانه‌است اگر و فقط اگر هیچ دو عضو متمایزی از G بر هر عضو X کنش یکسان نداشته باشند.

+ *۹.۱۶ فرض‌کنید X یك G-مجموعه باشد و $Y\subseteq X$. فرض‌کنید $G_Y=\{g\in G|yg=y$ به‌ازای هر y از $Y\}$. به عنوان تعمیم قضیهٔ ۱.۱۶، نشان دهیدکه G_Y زیرگروهی از G است.

*۱۰.۱۶ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

— ا) هر G-مجموعه یك‌گروه هم هست.

— ب) هر عضو یك G-مجموعه به وسیلهٔ عضو همانی G ثابت نگهداشته می‌شود.

— ج) اگر هرعضو یك Gـ مجموعه به‌وسیلهٔ عضو g از G ثابت نگهداشته شود، آنگاه g باید عضو همانی e باشد.
— د) فرض کنید X یك Gـ مجموعه‌باشد با $x_1, x_2 \in X$ و $g \in G$. اگر $x_1 g = x_2 g$ آنگاه $x_1 = x_2$.
— ه) فرض کنید X یك Gـ مجموعه باشد با $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$. اگر $x g_1 = x g_2$ آنگاه $g_1 = g_2$.
— و) هر مدار یك Gـ مجموعهٔ X یك زیر ـ Gـ مجموعهٔ متعدی‌است.
— ز) فرض کنید X یك Gـ مجموعه باشد و $H \leqslant G$. آنگاه X را به طریقی طبیعی می‌توان یك Hـ مجموعه به حساب آورد.
— ح) با ارجاع به (ز)، مدارهای X تحت H همان مدارهای X تحت G هستند.
— ط) اگر X یكGـ مجموعه باشد، آنگاه کنش هر عضو G به‌صورت جایگشتی از X عمل می‌کند.
— ی) فرض کنید X یك Gـ مجموعه باشد و $x \in X$. اگر G متناهی باشد، آنگاه $|G| = |xG| \cdot |G_x|$.

---

*۱۱.۱۶ فرض کنید G گروه جمعی اعداد حقیقی باشد. فرض کنید کنش θ از G بر صفحهٔ حقیقی $\mathbf{R}^2$ به وسیلهٔ دوران صفحه در خلاف جهت ساعت حول مبدا به اندازهٔ θ رادیان باشد. فرض کنید P نقطه‌ای از صفحه، غیر از مبدأ باشد.
ا) نشان دهید که $\mathbf{R}^2$ یك Gـ مجموعه است.
ب) به‌طریق هندسی مدار شامل P را توصیف کنید.
ج) گروه G_p را به‌دست آورید.
تمرینهای ۱۲ تا ۱۵ نشان می‌دهند که چگونه تمام Gـ مجموعه‌های ممکن، در حد ایزومورفیسم، را می‌توان ازگروهی چون G به‌دست آورد.

*۱۲.۱۶ فرض کنید $\{X_i | i \in I\}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های مجزا باشد، یعنی برای $i \neq j$: $X_i \cap X_j = \varnothing$. فرض کنید برای گروه مفروض G، هر X_i یك Gـ مجموعه باشد.
ا) نشان‌دهید که $\bigcup_{i \in I} X_i$ را به‌طریقی طبیعی می‌توان به‌عنوان یك Gـ مجموعه، **اتحاد** Gـ مجموعه‌های X_i، در نظر گرفت.
ب) نشان دهید که هر Gـ مجموعهٔ X اتحاد مدارهای آن است.

*۱۳.۱۶ فرض کنید X یك Gـ مجموعهٔ متعدی باشد و $x_0 \in X$. نشان دهید که X با Gـ مجموعهٔ R متشکل از تمام همدسته‌های راست G_{x_0}، به‌شرح مثال ۴.۱۶، ایزومورف است. [راهنمایی. برای $x \in X$، فرض کنید $x = x_0 g$ و $\phi : X \to R$ را با $x\phi = G_{x_0} g$ تعریف کنید. حتماً نشان‌دهید که ϕ خوشتعریف است.]

*۱۴.۱۶ Gـ مجموعه‌های X_i، $i \in I$، برای یك گروه G را در نظر بگیرید و فرض کنید

که X_i ها لزوماً مجزا نباشند. فرض کنید به ازای هر i از I، $X'_i=\{(x,i)|x\in X_i\}$. آنگاه X'_i ها مجزا هستند و هر یك را به‌طریقی طبیعی می‌توان هنوزهم یك G-مجموعه به حساب آورد. (عضو X_i به i منسوب شده است تا با عضو X_j، برای $i\neq j$، متمایز گردد.) G-مجموعهٔ $\bigcup_{i\in I} X'_i$ **اتحاد مجزای** G-مجموعه های X_i است. با استفاده از تمرینهای ۱۲.۱۶ و ۱۳.۱۶ نشان دهید که هر G-مجموعه با اتحاد مجزایی از G-مجموعه های همدسته‌ای راست، به صورت بیان شدهٔ در مثال ۴.۱۶، ایزومورف است.

***۱۵.۱۶** تمرینهای قبل نشان می‌دهند که هر G-مجموعه با اتحادمجزایی از G-مجموعه‌های همدسته‌ای راست ایزومورف است. این سؤال پیش می‌آید که آیا G مجموعه های همدسته‌ای راست از دو زیرگروه متمایز H و K از G می‌توانند خود ایزومورف باشند. توجه کنید که نگاشت تعریف شدهٔ در راهنمایی تمرین ۱۳.۱۶ به انتخاب x_0 به عنوان «نقطهٔ مبنا» بستگی دارد. اگر x_0 را با x_0g_0 عوض کنیم و اگر $G_{x_0}\neq G_{x_0g_0}$، آنگاه گردایهٔ R_H از همدسته‌های راست $H=G_{x_0}$ و R_K از همدسته‌های راست $K=G_{x_0g_0}$ تشکیل G-مجموعه های متمایزی می‌دهند که باید ایزومورف باشند، زیرا R_H و R_K هر دو با X ایزومورف هستند.

ا) فرض کنید X یك G-مجموعهٔ متعدی باشد و فرض کنید $x_0\in X$ و $g_0\in G$. اگر $H=G_{x_0}$ آنگاه $K=G_{x_0g_0}$ را بر حسب H و g_0 بیان کنید.

ب) برمبنای (ا)، برای زیرگروههای H و K از G شرایطی را حدس بزنید که G-مجموعه‌های همدسته‌ای راست G و K ایزومورف باشند.

ج) حدس خود در قسمت (ب) را ثابت کنید.

***۱۶.۱۶** در حد ایزومورفیسم، چند تا $\mathbf{Z}_4$-مجموعهٔ متعدی وجود دارد؟ (تمرین قبل را به‌کاربرید.) با تنظیم یك جدول کنش برای هر یك، مانند جدول ۱.۱۶، مثالی از هر نوع درحدایزومورفیسم ارائه کنید. اسامی حروف کوچك a، b، c و نظایر آن را برای اعضای مجموعهٔ X اختیار کنید.

***۱۷.۱۶** تمرین ۱۶.۱۶ را برای گروه $\mathbf{Z}_6$ تکرار کنید.

***۱۸.۱۶** تمرین ۱۶.۱۶ را برای گروه S_3 تکرار کنید. اعضای S_3 را به‌ترتیب با ι، $(1\ 2\ 3)$، $(2\ 3\ 1)$، $(3\ 2)$، $(3\ 1)$ و $(2\ 1)$ مشخص کنید.

۱۷

کاربرد G - مجموعه در شمارش

این فصل کاربردی از کارمان در رابطه با G - مجموعه‌ها را درشمارش عرضه می‌دارد. فرض کنید، برای مثال، می‌خواهید بدانید به‌چند راه متمایزمی‌توانید شش‌وجه یك مکعب را از یك تا ۶ نقطه، نقطه‌گذاری کنید تا یك تاس به‌دست آید. تاس استاندارد طوری نقطه‌گذاری می‌شود که وقتی آن را طوری روی میز بگذاریم که ۱ در پایین و ۲ به طرف جلو باشد، آنگاه ۶ در بالا، ۳ در طرف چپ، ۴ در طرف راست و ۵ در طرف عقب باشد. البته، راههای دیگری هم برای نمره‌گذاری وجود دارند که تاسهایی مشخصاً متفاوت را به‌دست می‌دهند.

فعلا بین وجوه مکعب تمایز قایل می‌شویم وآنها را پایین، بالا، چپ، راست، جلو و عقب می‌خوانیم. آنگاه وجه پایین هر یك از یك تا شش نقطه را می‌تواند داشته باشد. وجه بالا هر یك از پنج مورد باقیمانده را و قس علیهذا. جمعاً $۶! = ۷۲۰$ صورت برای نقطه‌گذاری وجوه مکعب وجود دارد. برخی از نقطه‌گذاریها همان تاسی را به دست می‌دهند که چند صورت دیگر، بدین‌معنی که با دوران تاس نقطه‌گذاری شده می‌توان یك نقطه‌گذاری را به نقطه‌گذاری دیگری تبدیل کرد. برای مثال، اگر تاس استاندارد فوق‌الذکر را وقتی رو به‌پایین به‌آن نگاه می‌کنید ۹۰° درخلاف جهت ساعت بچرخانید، آنگاه ۳ به جای ۲ در جلو خواهد بود، در حالی که این همان تاس است.

تعداد موقعیتهای ممکنهٔ یك تاس روی یك میز ۲۴ است، زیرا هر یك از شش وجه را می‌توان پایین قرار داد وآنگاه هر یك از چهار وجه را به جلو، که $۶.۴ = ۲۴$ وضعیت ممکن را به‌دست می‌دهد. با دوران تاس، هر یك از این موقعیت‌ها را می‌توان از دیگری به دست آورد. این دورانها یك گروه G را تشکیل می‌دهند که با زیر گروهی از $S_۸$

ایزومورف‌است (تمرین ۱۰.۴ ملاحظه شود). x را مجموعهٔ ۷۲۰ راه ممکن‌نقطه‌گذاری مکعب قرارمی‌دهیم وفرض‌می‌کنیم کنش G روی X با دوران مکعب باشد. دونقطه‌گذاری یك تاس را به دست می‌دهند اگر تحت کنش عضوی از G، یعنی با دوران مکعب، بتوان یکی را از دیگری به‌دست‌آورد. به‌عبارت دیگر، هر مدار X تحت G متناظر با یك تاس است و مدارهای متفاوت تاسهای متفاوت را ارائه می‌کنند. بنابراین تعیین تعداد تاسهای متفاوت، به‌تعیین تعداد مدارهای تحت G در یك Gـ مجموعهٔ X منجر می‌شود.

قضیهٔ ذیل ابزاری را برای تعیین تعداد مدارهای یك Gـ مجموعهٔ X تحت G به‌دست می‌دهد. به خاطر بیاوریم‌که برای هر g از G، X_g را مجموعهٔ اعضای ثابت نگهداشته شدهٔ X توسط g قرار می‌دهیم؛ از اینرو $X_g=\{x\in X|xg=x\}$. همچنین به یاد بیاوریم که برای هر x از X قرار می‌دهیم $G_x=\{g\in G|xg=x\}$ و xG مدار x تحت G است.

قضیهٔ ۱.۱۷ (برنساید) فرض‌کنیم G یك‌گروه متناهی باشد و X یك Gـ مجموعهٔ متناهی. اگر r تعداد مدارهای X تحت G باشد، آنگاه

$$r\cdot|G|=\sum_{g\in G}|X_g|. \qquad (۱.۱۷)$$

برهان. تمام زوجهای (x, g) را که $xg=x$ در نظر می‌گیریم و تعداد این زوجها را N می‌نامیم. برای هر g از G، $|X_g|$ زوج با عضو دوم g وجود دارد. بنابراین

$$N=\sum_{g\in G}|X_g|. \qquad (۲.۱۷)$$

از طرف دیگر، برای هر x از X، $|G_x|$ زوج با عضو اول x وجود دارد. پس همچنین داریم

$$N=\sum_{x\in X}|G_x|.$$

بنا به قضیهٔ ۳.۱۶، داریم $|xG|=(G:G_x)$. اما می‌دانیم که $(G:G_x)=|G|/|G_x|$، از اینرو نتیجه می‌گیریم که $|G_x|=|G|/|xG|$. پس

$$N=\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|xG|}=|G|\Big(\sum_{x\in X}\frac{1}{|xG|}\Big).$$

اکنون، $1/|xG|$ برای تمام x های در یك مدار مقداری ثابت دارد، و اگر $\mathcal{O}$ را مدار دلخواهی بگیریم، آنگاه

$$\sum_{x\in\mathcal{O}}\frac{1}{|xG|}=1.$$

بنابراین داریم

$$N = |G|.(\text{تعداد مدارهای } X \text{ تحت } G) = |G|.r. \qquad (۳.۱۷)$$

از مقایسهٔ تساوی (۲.۱۷) با تساوی (۳.۱۷) تساوی (۱.۱۷) به دست می‌آید. □

نتیجه اگر G گروهی متناهی باشد و X یك G-مجموعهٔ متناهی، آنگاه

$$(\text{تعداد مدارهای } X \text{ تحت } G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|.$$

برهان. اثبات این نتیجه بلافاصله از قضیهٔ قبل به‌دست می‌آید. □

به عنوان نخستین مثال، محاسبهٔ تعداد تاسهای متمایز را ادامه می‌دهیم.

مثال ۱.۱۷ X را مجموعهٔ ۷۲۰ نقطه‌گذاری متفاوت وجوه یك مکعب با استفاده از یك تا شش نقطه قرارمی‌دهیم. فرض کنیم G گروه ۲۴ چرخش مکعب، چنان‌که در بالا بحث شد، باشد. دیدیم که تعداد تاسهای متمایز برابراست با تعداد مدارهای X تحت G. در اینجا $|G| = ۲۴$. برای هر g از G، اگر $g \neq e$ آنگاه $|X_g| = ۰$، زیرا هر چرخش غیرازهمانی هر یك از ۷۲۰ نقطه‌گذاری را به‌دیگری تغییرمی‌دهد. باری، $|X_e| = ۷۲۰$، زیرا عضو همانی هر یك از ۷۲۰ نقطه گذاری را ثابت نگه می‌دارد. اکنون بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱۷

$$(\text{تعداد مدارها}) = \frac{1}{۲۴} \cdot ۷۲۰ = ۳۰,$$

بنابراین ۳۰ تاس متمایز وجود دارد. □

البته تعداد تاسهای مختلف را می‌توان بدون به‌کاربردن روش نتیجهٔ قبل هم، تنها با استفاده از ریاضیات ترکیبی مقدماتی که غالباً در بخشی از ریاضیات متناهی در سال اول تدریس می‌شود، به‌دست‌آورد. در نقطه‌گذاری مکعب برای ساختن یك تاس، در صورت لزوم با چرخاندن، می‌توان فرض کرد که وجه با یك نقطه در پایین قرار دارد. برای وجه بالا (مقابل) پنج انتخاب وجود دارد. با دوران تاس وقتی که از بالا به‌آن نگاه می‌کنید، هرکدام از چهار وجه دیگر می‌تواند به‌جلوآورده شود، از اینرو برای وجه جلو تفاوتی در انتخابها نیست. اما نسبت به عدد روی وجه جلو، به تعداد ۱. ۲. ۳ امکان برای سه وجه جانبی باقیمانده وجود دارد. بنابراین کلا ۳۰ = ۱. ۲. ۳. ۵ امکان وجود دارد.

دو مثال بعد در برخی از کتابهای ریاضیات متناهی هم دیده می‌شوند و با روشهای مقدماتی قابل حل هستند. ما نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱۷ را به‌کار می‌بریم تا ورزش فکری بیشتری روی مدار داشته باشید.

مثال ۲.۱۷ به چند صورت مختلف هفت شخص می‌توانند دور یك میز گرد بنشینند، در صورتی که «بالا»ی متمایزی برای میز وجود نداشته باشد؟ البته !۷ راه متفاوت برای منسوب کردن اشخاص به صندلیهای متفاوت وجود دارد. X را مجموعهٔ !۷ امکان منسوب کردن قرار می‌دهیم. دورانی از اشخاص که از هر کس خواسته شود یك صندلی به طرف راستش حرکت کند همان آرایش را نتیجه می‌دهد. چنین دورانی یك گروه دوری G از مرتبهٔ ۷ تولید می‌کند، و به‌طریقی طبیعی می‌توان فرض کرد که روی X کنش می‌کند. در اینجا هم تنها عضو همانی e هر آرایشی را ثابت نگه می‌دارد. بنا به‌نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱۷،

$$(\text{تعداد مدارها}) = \frac{1}{7}\cdot 7! = 6! = 720. \quad \square$$

مثال ۳.۱۷ به چند صورت مختلف با ۷ مهرهٔ هم‌اندازهٔ با رنگهای متفاوت می‌توان یك گردن‌بند (بدون قلاب) درست کرد؟ برخلاف میز مثال ۲.۱۷، گردن‌بند را علاوه بر دوران می‌توان برگرداند. بنابراین کل گروه دو وجهی D_7 از مرتبهٔ $14 = 2.7$ را داریم که روی مجموعهٔ X از !۷ امکان، کنش می‌کند. پس تعداد گردن بندهای متفاوت عبارت است از

$$(\text{تعداد مدارها}) = \frac{1}{14}\cdot 7! = 360. \quad \square$$

در به‌کار بردن نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱۷، باید $|G|$ و به ازای هر g از G، $|X_g|$ را نیز حساب کنیم. در مثالها و تمرینها، محاسبهٔ $|G|$ مسأله‌ای نیست. مثالی می‌آوریم که در آن محاسبهٔ $|X_g|$ مانند مثالهای قبل بدیهی نباشد. باز هم فرض می‌کنیم که با ریاضیات ترکیبی ابتدائی آشنا هستید.

مثال ۴.۱۷ می‌خواهیم تعداد راههای متفاوتی را حساب کنیم که اضلاع یك مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان رنگ‌آمیزی کرد، با این شرایط که چهار رنگ در اختیارمان باشد، برای هر ضلع فقط از یك رنگ بتوان استفاده کرد و یك رنگ را برای اضلاع مختلف هم بتوان به‌کار برد.

بدیهی است جمعاً $4^3 = 64$ صورت برای رنگ‌آمیزی ضلعها وجود دارد، زیرا هر یك از ضلعها می‌تواند به‌هر یك از چهار رنگ باشد. X را مجموعهٔ این ۶۴ مثلث رنگ شدهٔ ممکن در نظر می‌گیریم. گروه کنش G بر X گروه تقارنهای مثلث است، که با S_3 ایزومورف می‌باشد و آنرا S_3 می‌گیریم. برای اعضای S_3 از نمادهای داده شدهٔ در فصل ۴ استفاده می‌کنیم. باید $|X_g|$ را برای هرشش عضو g از S_3 حساب کنیم.

$|X_{\rho_0}| = 64$ هر مثلث رنگ شده توسط ρ_0 ثابت نگهداشته می‌شود.

$|X_{\rho_1}| = 4$ برای پویا بودن تحت ρ_1، همهٔ ضلعها باید از یك رنگ باشند و ۴ رنگ ممکن وجود دارد.

به همان دلیل ρ_1. $|X_{\rho_2}| = 4$

اضلاعی که باهم تعویض می‌شوند باید از یك رنگ باشند (۴ امکان) و سایر اضلاع نیز از هر رنگی می‌توانند باشند (ضرب در ۴ امکان). $|X_{\mu_1}| = 16$

به همان دلیل μ_1. $|X_{\mu_2}| = |X_{\mu_3}| = 16$

اکنون،

$$\sum_{g \in S_3} |X_g| = 64 + 4 + 4 + 16 + 16 + 16 = 120$$

پس

$$(\text{تعداد مدارها}) = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$$

لذا بیست مثلث رنگ شدهٔ متمایز وجود دارد. □

مثال ۵.۱۷ مثال ۴.۱۷ را تکرار می‌کنیم، منتهی با این شرط که برای اضلاع مختلف از رنگهای متفاوت استفاده کنیم. تعداد صورتهای ممکن برای رنگ‌آمیزی اضلاع $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ است و X را مجموعهٔ ۲۴ مثلث رنگ شده می‌گیریم. گروهی که روی X کنش می‌کند بازهم S_3 است. چون رنگ همهٔ اضلاع متفاوت است، ملاحظه می‌کنیم که $|X_{\rho_0}| = 24$ در حالی که برای هر g غیر از ρ_0، $|X_g| = 0$. پس

$$(\text{تعداد مدارها}) = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

بنابراین ۴ مثلث متمایز وجود دارد. □

تمرین

در هر یك از تمرینهای زیر، حتی اگر به دست‌آوردن جواب با روشهای مقدماتی‌تر هم ممکن باشد، نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۱۷ را برای حل مسأله به‌کار ببرید.

***۱.۱۷** تعداد مدارهای $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ تحت زیرگروه دوری $\langle(1,3,5,6)\rangle$ از S_8 را به دست آورید.

***۲.۱۷** تعداد مدارهای $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ تحت‌زیرگروه S_8 تولیدشده‌توسط $(1, 3)$ و $(2, 4, 7)$ را به‌دست‌آورید.

***۳.۱۷** تعداد تاسهای متمایز چهار وجهی را که با قرار دادن یك، دو، سه و چهار نقطه

روی وجوه یك چهار وجهی منتظم به جای یك مکعب، می‌توان به دست آورد حساب کنید.

*۴.۱۷ برای ساختن اسباب بازی، وجوه مکعبهای چوبی هم‌اندازه را باید با رنگهای متفاوت رنگ‌آمیزی کنیم. اگر ۸ رنگ در اختیارمان باشد، چند مکعب متمایز می‌توانیم بسازیم؟

*۵.۱۷ تمرین ۴.۱۷ را به شرطی که روی وجوه متفاوت رنگهای تکراری هم امکان‌پذیر باشد پاسخ دهید. [راهنمایی: بیست و چهار دوران مکعب متشکل است از عضو همانی، نه تا که هر کدام یك جفت وجه متقابل مکعب را پایا نگه می‌دارند، هشت تا که دو رأس متقابل مکعب را پایا نگه می‌دارند و شش تا که دو ضلع متقابل مکعب را پایا نگه می‌دارند.]

*۶.۱۷ هر یك از ۸ گوشهٔ مکعبی قرار است به‌یکی از چهار رنگ علامتگذاری شود. هر یك از رنگها را برای یك تا تمام گوشه‌ها می‌توان به‌کار برد. تعداد علامتگذاریهای متمایز ممکن را حساب کنید. (راهنمایی: به راهنمایی تمرین ۵.۱۷ رجوع کنید.)

*۷.۱۷ تعداد راههای متمایزی که اضلاع یك مربع مقوایی را می‌توان رنگ‌آمیزی کرد حساب کنید، در صورتی که شش رنگ در اختیارمان باشد و

ا) از هیچ رنگی بیش از یك بار استفاده نشود.

ب) یك رنگ را بتوان برای هر چند ضلع به‌کار برد.

*۸.۱۷ شش سیم مستقیم با طولهای مساوی را در نظر بگیرید که سر آنها طوری به هم لحیم شده است که اضلاع یك چهار وجهی منتظم را تشکیل می‌دهند. قرار است یك مقاومت ۵۰-اهمی یا ۱۰۰-اهمی در وسط هر ضلع نسب شود. فرض کنید از هر نوع متفاوت حداقل شش تا در اختیارمان باشد. چند سیم‌کشی اساساً متفاوت امکان‌پذیر است؟

*۹.۱۷ قرار است هر یك از وجوه منشور قائمی به طول ۲ متر که دو انتهایش مربعی به ضلع ۱ متر است با یکی از شش رنگ موجود رنگ‌آمیزی شود. چند منشور رنگ‌آمیزی شدهٔ متمایز می‌توان ساخت، اگر:

ا) هیچ رنگی روی وجوه مختلف تکرار نشود؟

ب) هر رنگی را بتوان برای هر تعداد از وجوه به‌کار برد؟

۱۸*

قضیه‌های سیلو[1]

قضیهٔ ۳.۹ اطلاعات کاملی در مورد تمام گروههای آبلی به ما می‌دهد. مطالعهٔ گروههای ناآبلی متناهی به مراتب پیچیده تر است و قضیه‌های سیلو اطلاعات مهمی در بارهٔ آنها به ما می‌دهند.

می‌دانیم که مرتبهٔ هر زیر گروه گروهی متناهی چون G باید $|G|$ را عاد کند. اگر G آبلی باشد، از هر مرتبه‌ای که $|G|$ را عاد کند زیر گروهی وجود دارد. در پایان فصل ۱۱ تذکر دادیم که این در مورد گروههای ناآبلی درست نیست؛ می‌توان نشان داد که A_4 زیر گروهی از مرتبهٔ ۶ ندارد. قضیه‌های سیلو تأیید می‌کنند که برای هر توان عددی اول که $|G|$ را عاد کنید، زیر گروهی از مرتبهٔ آن توان اول وجود دارد. این قضیه‌ها حاوی اطلاعاتی در مورد تعداد چنین زیر گروههایی هم هستند.

اثبات قضیه‌های سیلو کاربرد دیگری از کنش یك گروه روی یك مجموعه را نشان می‌دهد. این بار، مجموعه از خود گروه تشکیل می‌شود؛ در بعضی اوقات مجموعه خود گروه است، گاهی گردایه‌ای است از همدسته‌های یك زیر گروه، و گاهی گردایه‌ای است از زیر گروهها.

۱.۱۸* p- گروه

فصل قبل کاربردهایی از یك تساوی را که تعداد مدارهای یك G - مجموعه متناهی را می‌شمرد ارائه کرد. اغلب احکام این بخش از یك تساوی نتیجه می‌شوند که تعداد اعضای

---

1. Sylow

یك Gـ مجموعهٔ متناهی را می‌شمارد.

فرض کنیم X یك Gـ مجموعهٔ متناهی باشد. به‌یادبیاوریم که برای $x \in X$، مدار x در X تحت G عبارت است از $xG = \{xg | g \in G\}$. فرض کنیم r مدار در X تحت G وجود داشته‌باشد و فرض کنیم $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ از هر مدار X یك عضو داشته باشد. اکنون، چون هر عضو X دقیقاً در یك مدار است،

$$|X| = \sum_{i=1}^{r} |x_i G|. \qquad (۱.۱۸)$$

ممکن است تعدادی مدار تك عضوی هم در X باشد. فرض کنیم

$$X_G = \{x \in X | xg = x، \text{برای هر } g \text{ از } G\}.$$

بنابراین X_G دقیقاً اتحاد مدارهـای تك عضوی در X است. فرض کنیم که s مدار تك‌عضوی وجود داشته باشد که $0 \leqslant s \leqslant r$. آنگاه $|X_G| = s$ و تساوی (۱.۱۸) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=s+1}^{r} |x_i G|. \qquad (۲.۱۸)$$

اغلب احکام این فصل از تساوی (۲.۱۸) به‌دست می‌آیند. ما نظریهٔ سیلو را مانند کتاب هانگرفورد[1] [۹] شرح می‌دهیم، که درآنجا روش اثبات به‌آر. ج. نونکه[2] منسوب است. اثبـات قضیهٔ ۲.۱۸ (قضیهٔ کوشی[3]) آن کتـاب هم به ج. اچ. مك‌کی[4] نسبت داده شده است.

قضیهٔ ۱.۱۸، که ذیلا می‌آید، قضیه‌ای کاملا شمارشی نیست، اما مسلماً نتایجی عددی در بر دارد. قضیه به‌طور شگفت‌آوری توانا به‌نظر می‌رسد. در باقیماندهٔ این فصل، اگر مجموعه‌ای مناسب با گروه مناسبی برای کنش روی آن انتخاب، وازقضیهٔ ۱.۱۸ هم استفاده کنیم، آنگـاه درست آنچه راکه می‌خواهیم به‌دست می‌آوریم. در مقایسه با برهـانهـای قدیمی‌تر، استدلالها بسیار قشنگ و زیبا هستند.

در طول این فصل، p همواره عددی اول خواهد بود.

قضیهٔ ۱.۱۸ فرض‌کنیم G گروهی از مرتبهٔ p^n باشد و X یك Gـ مجموعهٔ متناهی. آنگاه $|X| \equiv |X_G| \pmod p$.

برهان. با نمادهای تساوی (۲.۱۸) می‌دانیم که بنا به‌قضیهٔ ۳.۱۶، $|x_i G| = (G:G_{x_i})$. اما

---

1. Hungerford 2. R. J. Nunke 3. Cauchy 4. J. H. McKay

$(G:G_{x_i})$، $|G|$ را عـاد می‌کند و در نتیجه p، $(G:G_{x_i})$ را و بنابراین $|x_iG|$ را، برای $s+1\leqslant i\leqslant r$، عاد می‌کند. آنگاه تساوی (۲.۱۸) نشان می‌دهد که $|X|-|X_G|$ بر p بخشپذیر است، از اینرو $|X|\equiv|X_G| \pmod p$. □

تعریف گروهی چون G یك p - گروه است، اگر مرتبهٔ هر عضو آن توانی از عدد اول p باشد. زیر گروهی از یك گروه G یك p - زیرگروه G است، اگر این زیر گروه خود یك p - گروه باشد.

هدف ما در این فصل این است که نشان دهیم هر گروه متناهی G، زیر گروهی از مرتبهٔ هر توان عددی اول که $|G|$ را عاد کند دارد. به‌عنوان اولین قدم، قضیهٔ کوشی را ثابت می‌کنیم که می‌گوید اگر p، $|G|$ را عاد کند، آنگاه G زیر گروهی از مرتبهٔ p دارد.

قضیهٔ ۲.۱۸ (کوشی) فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و p عاد کند $|G|$ را. آنگاه G عضوی از مرتبهٔ p، و بنابراین زیرگروهی از مرتبهٔ p، دارد.

برهان. مجموعهٔ X از تمام p - تایی‌های $(g_1, g_2, \cdots, g_p)$ از اعضای G را بـا این خاصیت که حاصلضرب مختصات در G برابر با e باشد، تشکیل می‌دهیم. یعنی،

$$X=\{(g_1, g_2, \cdots, g_p)|g_i\in G,\ g_1g_2\cdots g_p=e\}.$$

ادعـا می‌کنیم که p، $|X|$ را عـاد می‌کند. در تشکیل هر p - تـایی در X، می‌تـوان g_1، g_2، $\cdots$، g_{p-1} را اعضایی دلخواه از G انتخاب، وآنگاه g_p را منحصراً به‌صورت $(g_1g_2\cdots g_{p-1})^{-1}$ تعیین کرد. پس $|X|=|G|^{p-1}$ و چون p، $|G|$ را عـاد می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که $|X|$ را هم عاد می‌نماید.

فرض کنیم σ دور $(1, 2, 3, \cdots, p)$ از S_p بـاشد. فرض می‌کنیم σ بـا ضابطهٔ

$$(g_1, g_2, \cdots, g_p)\sigma=(g_{1\sigma}, g_{2\sigma}\cdots g_{p\sigma})=(g_2, g_3, \cdots, g_p, g_1)$$

روی X کنش کند. توجه کنید که $(g_2, g_3, \cdots, g_p, g_1)\in X$، زیرا از $g_1(g_2\cdots g_p)=e$ نتیجه می‌شود $g_1=(g_2g_3\cdots g_p)^{-1}$، از اینرو $(g_2g_3\cdots g_p)g_1=e$. بنابراین σ روی X کنش می‌کند، و زیر گروه $\langle\sigma\rangle$ از S_p بـه‌صورتی بدیهـی بـه وسیلهٔ تکرار روی X کنش می‌نماید.

اکنون $|\langle\sigma\rangle|=p$، ازاینرو می‌توانیم قضیهٔ ۱.۱۸ را به‌کار بریم. ضمناً می‌دانیم که $|X|\equiv|X_{\langle\sigma\rangle}| \pmod p$. چون p، $|X|$ را عاد می‌کند، باید p، $|X_{\langle\sigma\rangle}|$ را هم عاد کند. حالا $X_{\langle\sigma\rangle}$ را امتحان می‌کنیم. در اینجا $(g_1, g_2, \cdots, g_p)$ به وسیلهٔ σ و بنابراین به‌وسیلهٔ $\langle\sigma\rangle$ ثابت نگهداشته می‌شود اگر وفقط اگر $g_1=g_2=\cdots=g_p$. حداقل یك عضو از $X_{\langle\sigma\rangle}$، یعنی $(e, e, \cdots, e)$ را می‌شناسیم. چون p، $|X_{\langle\sigma\rangle}|$ را عاد می‌کند، بـاید در $X_{\langle\sigma\rangle}$ حداقل p عضو وجود داشته باشد. بنابراین عضوی مـانند a از G، $a\neq e$،

وجود دارد که $(a,a,\ldots,a)\in X_{\langle a\rangle}$ و $a^p=e$. از اینرو a مرتبهٔ p دارد. البته $\langle a\rangle$ زیرگروهی از G از مرتبهٔ p است. □

نتیجه فرض‌کنیم G گروهی متناهی باشد. آنگاه G یك p-گروه است اگر و فقط اگر $|G|$ توانی از عدد اول p باشد.

برهان. اثبات این نتیجه را به تمرین ۵.۱۸ موکول می‌کنیم. □

۲.۱۸* قضیه‌های سیلو

فرض کنیم G یك گروه باشد، و $\mathcal{S}$ گردآیهٔ تمام زیرگروههای G. با تعریف کنش G روی $\mathcal{S}$ به صورت مزدوجگیری، از $\mathcal{S}$ یك G-مجموعه می‌سازیم. بدین معنی که اگر $H\in\mathcal{S}$ یعنی $H\leqslant G$ و $g\in G$، آنگاه کنش g بر H زیرگروه مزدوج $g^{-1}Hg$ را نتیجه می‌دهد. (برای پرهیز از اشتباه هرگز این کنش را به صورت Hg نمی‌نویسیم.) اکنون بنا به قضیهٔ ۱.۱۶، $H_G=\{g\in G\mid g^{-1}Hg=H\}$ زیرگروهی از G است. بدیهی است که H زیرگروه نورمالی از H_G می‌باشد. چون H_G از همهٔ اعضایی از G تشکیل می‌شود که تحت مزدوجگیری H را پایا نگه می‌دارند، H_G بزرگترین زیرگروه G است که H را به‌عنوان زیرگروهی نورمال در بردارد.

تعریف زیرگروه H_G که بحث آن گذشت نورمالساز H در G است و از این پس به صورت $N[H]$ نمایش داده خواهد شد.

لم ۱.۱۸ فرض کنیم H یك p-زیرگروه از گروهی متناهی چون G باشد. آنگاه
$$(N[H]:H)\equiv(G:H)(\bmod p).$$

برهان. فرض کنیم $\mathcal{R}$ مجموعهٔ همدسته‌های راست H در G باشد و فرض کنیم H روی $\mathcal{R}$ به صورت انتقال راست کنش کند، بدین معنی که $(Hx)h=H(xh)$. آنگاه $\mathcal{R}$ یك H-مجموعه می‌شود. توجه کنید که $|\mathcal{R}|=(G:H)$.

حالا $\mathcal{R}_H$، یعنی همدسته‌های راستی را که به‌وسیلهٔ تمام اعضای H ثابت نگهداشته می‌شوند تعیین می‌کنیم. اکنون $Hx=(Hx)h$ اگر و فقط اگر $H=Hxhx^{-1}$، یا اگر و فقط اگر $xhx^{-1}\in H$. پس به‌ازای هر h از H، $Hx=(Hx)h$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر h از H، $xhx^{-1}=(x^{-1})^{-1}hx^{-1}\in H$، یا اگر و فقط اگر $x^{-1}\in N[H]$، یا اگر و فقط اگر $x\in N[H]$. بنابراین همدسته‌های راست در $\mathcal{R}_H$ آنهایی هستند که در $N[H]$ قرار دارند. تعداد چنین همدسته‌هایی $(N[H]:H)$ است، از اینرو $|\mathcal{R}_H|=(N[H]:H)$.

چون H یك p-گروه است، بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۱۸ مرتبه‌اش توانی از p است. قضیهٔ ۱.۱۸ آنگاه به‌ما می‌گوید که $|\mathcal{R}|\equiv|\mathcal{R}_H|(\bmod p)$؛ یعنی، $(G:H)\equiv(N[H]:H)(\bmod p)$. □

نتیجه فرض‌کنیم H یك p - زیرگروه از گروهی متناهی چون G باشد. اگر p، $(G:H)$ را عادکند، آنگاه $N[H]\neq H$.

برهان. از لم ۱.۱۸ نتیجه می‌شود که p، $(N[H]:H)$ را عاد می‌کند که در نتیجه باید متفاوت با ۱ باشد. بنابراین $H\neq N[H]$. □

اکنون برای قضیهٔ اول سیلو، که برای هر گروه G حاکی از وجود زیر گروههای از مرتبهٔ توانهایی از عددی اول است که $|G|$ را عاد می‌کنند، آماده هستیم.

قضیهٔ ۳.۱۸ (قضیهٔ اول سیلو) فرض‌کنیم G گروهی متناهی باشد و $|G|=p^n m$ که در آن $n\geqslant 1$ و p عدد m را عاد نمی‌کند. آنگاه:

۱. به‌ازای هر i که $1\leqslant i\leqslant n$، G زیرگروهی از مرتبهٔ p^i دارد،

۲. هر زیرگروه H از G از مرتبهٔ p^i، یك زیرگروه نورمال زیرگروهی از مرتبهٔ p^{i+1}، برای $1\leqslant i<n$ است.

برهان. ۱. می‌دانیم که بنا به قضیهٔ کوشی (قضیهٔ ۲.۱۸) G زیر گروهی از مرتبهٔ p دارد. با استدلالی استقرایی نشان می‌دهیم که وجود زیر گروهی از مرتبهٔ p^i برای $i<n$ وجود زیر گروهی ازمرتبهٔ p^{i+1} را نتیجه می‌دهد. فرض‌کنیم H زیر گروهی ازمرتبهٔ p^i باشد. چون $i<n$، می‌بینیم که p، $(G:H)$ را عاد می‌کند. بنا به لم ۱.۱۸، آنگاه می‌دانیم که p عاد می‌کند $(N[H]:H)$ را. چون H یك زیر گروه نورمال $N[H]$ است می‌توان $N[H]/N$ را تشکیل داد و ملاحظه کرد که p عاد می‌کند $|N[H]/N|$ را. بنا به قضیهٔ کوشی، گروه خارج قسمت $N[H]/H$ زیر گروهی چون K از مرتبهٔ p دارد. اگر $\gamma:N[H]\to N[H]/H$ همومورفیسم کانونی باشد، آنگاه $K\gamma^{-1}=\{x\in N[H]/x\gamma\in K\}$ زیرگروهی از $N[H]$ و بنابراین از G است. این زیر گروه حاوی H است و از مرتبهٔ p^{i+1} می‌باشد.

۲. بحث قسمت ۱ را تکرار و ملاحظه می‌کنیم که $H<K\gamma^{-1}\leqslant N[H]$ که در آن $|K\gamma^{-1}|=p^{i+1}$. چون H در $N[H]$ نورمال است، مسلماً در گروه احتمالا کوچکتر $K\gamma^{-1}$ نیز نورمال می‌باشد. □

تعریف یك p - زیرگروه سیلوی P از یك گروه G عبارت است از p - زیرگروه ماکسیمالی از G؛ یعنی، p - زیر گروهی که جزء هیچ p - زیرگروه بزرگتری نباشد.

فرض‌کنیم G گروهی متناهی باشد، ومانند قضیهٔ ۳.۱۸، $|G|=p^n m$. قضیهٔ اخیر نشان می‌دهد که p - زیر گروههای سیلو G دقیقاً همان زیر گروههای از مرتبه p^n هستند. اگر P یك p - زیر گروه سیلو باشد، هر مزدوج $g^{-1}Pg$ از P هم یك p - زیر گروه سیلو است. قضیهٔ دوم سیلو حاکی است که بدین طریق هر p - زیر گروه سیلو را می‌توان از P به‌دست آورد؛ یعنی، هر دو p - زیر گروه سیلو مزدوج هستند.

قضیهٔ ۴.۱۸ (قضیهٔ دوم سیلو) فرض‌کنیم P_1 و P_2 دو p - زیرگروه سیلو از گروهی متناهی چون G باشند. در این صورت P_1 و P_2 زیرگروههای مزدوج G هستند.

برهان. در اینجا کلك این است که بگذاریم یکی‌از زیر گروهها روی همدسته‌های راست دیگری کنش کند، و قضیهٔ ۱.۱۸ را به کار ببریم. فرض کنیم $\mathcal{R}$ گردآیهٔ همدسته‌های راست P_1 باشد؛ P_2 روی $\mathcal{R}$ به توسط $(P_1x)y=P_1(xy)$، به‌ازای $y\in P_2$، کنش می‌نماید. آنگاه $\mathcal{R}$ یك P_2 - مجموعه‌است. بنا به قضیهٔ ۱.۱۸، $|\mathcal{R}_{P_2}|\equiv|\mathcal{R}|(\bmod p)$، و $|\mathcal{R}|=(G:P_1)$ بر p بخشپذیر نیست؛ ازاینرو $|\mathcal{R}_{P_2}|\neq 0$. فرض کنیم که $P_1x\in\mathcal{R}_{P_2}$. آنگاه برای هر y از P_2، $P_1xy=P_1x$، بنا براین به‌ازای هر y از P_2، $P_1xyx^{-1}=P_1$. پس به‌ازای هر y از P_2، $xyx^{-1}\in P_1$، ازاینرو $xP_2x^{-1}\leqslant P_1$. چون $|P_1|=|P_2|$ باید داشته باشیم $P_1=x^{-1}P_2x$، و بنابراین مسلماً P_1 و P_2 مزدوج هستند. □

آخرین قضیهٔ سیلو اطلاعی در بارهٔ تعداد p - زیر گروههای سیلو به ما می‌دهد. چند مثال روشن کننده پس از قضیه خواهدآمد، و تعدادی بیشتر در فصل بعد.

قضیهٔ ۵.۱۸ (قضیهٔ سوم سیلو) اگر G گروهی متناهی باشد و p عاد کند $|G|$ را، آنگاه تعداد p - زیرگروههای سیلو همنهشت ۱ است به هنگ p و $|G|$ را عاد می‌کند.

برهان. فرض کنیم P یك p - زیرگروه سیلو G باشد. فرض کنیم $\mathcal{S}$ مجموعهٔ تمام p - زیر گروههای سیلو باشد و P روی $\mathcal{S}$ با مزدوجگیری کنش کند، به‌طوری که $x\in P$ عضو T از $\mathcal{S}$ را بتوی $x^{-1}Tx$ ببرد. بنا به قضیهٔ ۱.۱۸، $|\mathcal{S}|\equiv|\mathcal{S}_P|(\bmod p)$. اکنون $\mathcal{S}_P$ را پیدا می‌کنیم. اگر $T\in\mathcal{S}_P$ آنگاه به‌ازای هر x از P، $x^{-1}Tx=T$. بنابراین $P\leqslant N[T]$. البته همچنین $T\leqslant N[T]$. چون P و T هر دو p - زیر گروههای سیلو G هستند، p - زیر گروه سیلو $N[T]$ نیزمی‌باشند. اما P و T، بنا به‌قضیهٔ ۴.۱۸، در $N[T]$ مزدوج‌هستند. چون T زیر گروه نورمالی از $N[T]$ است، در $N[T]$ تنها مزدوج خودش می‌تواند باشد. پس $T=P$. اکنون $\mathcal{S}_P=\{P\}$. چون $|\mathcal{S}|=|\mathcal{S}_P|\equiv 1\ (\bmod p)$، ملاحظه می‌کنیم که تعداد p - زیر گروههای سیلو همنهشت با ۱ است به هنگ p.

حال فرض کنیم G به وسیلهٔ مزدوجگیری روی $\mathcal{S}$ کنش کند. چون تمام p- زیر- گروههای سیلو مزدوج هستند، تحت G تنها یك مدار در $\mathcal{S}$ وجود دارد. اگر $P\in\mathcal{S}$، آنگاه $G_p=N[P]$. پس بنا به‌قضیهٔ ۳.۱۶، $|\mathcal{S}|=|\text{مدار } P|=(G:G_P)$. اما $(G:G_P)$ مقسوم‌علیهی از $|G|$ است، بنابراین تعداد p - زیر گروههای سیلو، $|G|$ را عاد می‌کند. □

مثال ۱.۱۸ مرتبهٔ ۲ - زیر گروههای سیلو S_3 برابر با ۲ است. زیر گروههای مرتبهٔ ۲ از S_3 در مثال ۱.۴ عبارتند از:

$$\{\rho_0,\mu_1\},\{\rho_0,\mu_2\},\{\rho_0,\mu_3\}.$$

توجه کنید که سه زیر گروه وجود دارد و $۳ \equiv ۱ \pmod{۲}$. همچنین ۳ عدد ۶، یعنی مرتبهٔ $S_۳$، را عاد می‌کند. به‌آسانی می‌بینیم که

$$\{\rho_۰,\mu_۱\}i_{\rho_۲}=\{\rho_۰,\mu_۳\} \text{ و } \{\rho_۰,\mu_۱\}i_{\rho_۱}=\{\rho_۰,\mu_۲\}$$

که در آن $xi_{\rho_j}=(\rho_j)^{-۱}x\rho_j$، و این نشان می‌دهد که همهٔ آنها مزدوج هستند. □

مثال ۲.۱۸ قضیه‌های سیلو را برای نشان دادن این که هیچ گروهی از مرتبهٔ ۱۵ ساده نیست به‌کار می‌بریم. فرض کنیم G مرتبهٔ ۱۵ داشته باشد. ادعا می‌کنیم که G زیرگروه نورمالی از مرتبهٔ ۵ دارد. بنا به قضیهٔ ۱۸.۳، G حداقل یك زیرگروه از مرتبهٔ ۵ دارد، و بنا به قضیهٔ ۱۸.۵ تعداد چنین زیرگروههایی همنهشت با ۱ است به هنگ ۵ و ۱۵ را عاد می‌کند. چون ۱، ۶ و ۱۱ تنها اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۵ هستند که به هنگ ۵ با ۱ همنهشتند، و چون بین اینها تنها عدد ۱ است که ۱۵ را عاد می‌کند، می‌بینیم که G دقیقاً یك زیرگروه P از مرتبهٔ ۵ دارد. اما برای هر g از G، اتومورفیسم داخلی i_g از G با تعریف $xi_g=g^{-۱}xg$ زیرگروه P را بروی زیرگروهی چون $g^{-۱}Pg$، مجدداً از مرتبهٔ ۵، می‌نگارد. بنابراین به‌ازای هر g از G باید داشته باشیم $g^{-۱}Pg=P$؛ از اینرو P زیرگروهی نورمال از G است، و لذا G ساده نیست. □

اطمینان داریم که مثال ۲.۱۸ شمه‌ای از توان قضیهٔ ۵.۱۸ را نشان می‌دهد. هرگز قضیه‌ای که چیزی را می‌شمارد، حتی به هنگ p، دست‌کم نگیرید.

تمرین

***۱.۱۸** جاهای خالی را پر کنید.

ا) مرتبهٔ هر ۳-زیرگروه سیلو گروهی از مرتبهٔ ۱۲ برابر است با _____ .

ب) مرتبهٔ هر ۳-زیرگروه سیلو گروهی از مرتبهٔ ۵۴ برابر است با _____ .

ج) هر گروه از مرتبهٔ ۲۴ باید یا _____ یا _____ عدد ۲-زیرگروه سیلو داشته باشد. (تنها از اطلاعات داده شدهٔ در قضیهٔ ۵.۱۸ استفاده کنید.)

د) هر گروه از مرتبهٔ $۲۵۵=(۳)(۵)(۱۷)$ باید یا _____ یا _____ عدد ۳-زیرگروه سیلو و _____ یا _____ عدد ۵ زیرگروه سیلو داشته باشد. (تنها از اطلاعات داده شدهٔ در قضیهٔ ۵.۱۸ استفاده کنید.)

***۲.۱۸** تمام ۳-زیرگروههای سیلو $S_۴$ را پیدا کنید و نشان دهید که همه مزدوج هستند.

***۳.۱۸** فرض کنید G گروهی متناهی باشد و p عاد کند $|G|$ را. ثابت کنید اگر G تنها یك p-زیرگروه سیلو داشته باشد، این زیرگروه نورمال است، و از اینرو G ساده نیست.

*۴.۱۸ نشان دهید که هر گروه از مرتبهٔ ۴۵ زیرگروه نورمالی از مرتبهٔ ۹ دارد.

*۵.۱۸ نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۱۸ را ثابت کنید.

+*۶.۱۸ فرض کنید G گروهی متناهی باشد و p عاد کند $|G|$ را. فرض کنید P یك p-زیرگروه سیلو G باشد. نشان دهید که $N[N[P]]=N[P]$. [راهنمایی. دلیل بیاورید که P تنها p-زیرگروه سیلو $N[N[P]]$ است، و قضیهٔ ۴.۱۸ را به‌کار برید.]

*۷.۱۸ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) هر دو p-زیرگروه سیلو یك گروه متناهی مزدوج هستند.

— ب) قضیهٔ ۵.۱۸ نشان می‌دهد که هر گروه از مرتبهٔ ۱۵ تنها یك ۵-زیرگروه سیلو دارد.

— ج) مرتبهٔ هر p-زیرگروه سیلو از یك گروه متناهی توانی‌است از p.

— د) هر p-زیرگروه از هر گروه متناهی یك p-زیرگروه سیلو آن است.

— ه) هر گروه آبلی متناهی برای هر عدد اول p که مرتبهٔ گروه را عاد کند، دقیقاً یك p-زیرگروه سیلو دارد.

— و) نرمالساز زیرگروهی چون H از G در G، همواره زیرگروهی نورمال از G است.

— ز) اگر H زیرگروهی از G باشد، آنگاه همواره H زیرگروه‌نورمالی‌از $N[H]$ است.

— ح) یك p-زیرگروه سیلو گروه متناهی G در G نورمال است اگر و فقط اگر تنها p-زیرگروه سیلو G باشد.

— ط) اگر G گروهی‌آبلی باشد و H زیرگروهی از G، آنگاه $N[H]=H$.

— ی) هر گروه از مرتبهٔ توان اول p^n هیچ p-زیرگروه سیلو ندارد.

---

*۸.۱۸ فرض کنید G گروهی متناهی باشد و p عاد کند $|G|$ را. فرض کنید P یك p-زیرگروه سیلو G باشد و H هم p-زیرگروه دلخواهی از G باشد. نشان دهید که عضوی چون g از G وجود دارد که $g^{-1}Hg\leqslant P$.

*۹.۱۸ دو ۲-زیرگروه سیلو S_4 را پیدا کنید و نشان دهید که مزدوج هستند.

*۱۰.۱۸ نشان دهید که هر گروه از مرتبهٔ $(۳۵)^3$ زیرگروه نورمالی از مرتبهٔ ۱۲۵ دارد.

*۱۱.۱۸ نشان دهید که هیچ گروه ساده‌ای از مرتبهٔ $(۳)(۵)(۱۷)=۲۵۵$ وجود ندارد.

*۱۲.۱۸ نشان دهید که هیچ گروه ساده‌ای از مرتبهٔ $p^r m$، که در آن p اول است و $m<p$، وجود ندارد.

*۱۳.۱۸ فرض کنید G گروهی متناهی باشد. G را چون یك Gـ مجموعه در نظر بگیرید که G روی خودش توسط مزدوجگیری کنش کند.
ا) نشان دهید که G_G مرکز $Z(G)$ از G است. (بخش ۳.۱۴ را ملاحظه کنید).
ب) با استفاده از قضیهٔ ۱.۱۸ نشان دهید که مرکز هر p ـ گروه نابدیهی متناهی، نابدیهی است.

*۱۴.۱۸ نشان دهید که هر گروه متناهی از مرتبهٔ p^n زیرگروههایی نورمال چون H_i، برای $0 \leqslant i \leqslant n$، دارد به طوری که $|H_i| = p^i$ و $H_i < H_{i+1}$، برای $0 \leqslant i < n$
[راهنمایی. تمرین ۱۳.۱۸ را ملاحظه کنید، و ایده‌ای از بخش ۳.۱۴ به دست آورید.]

*۱۵.۱۸ نشان دهید که هر p ـ زیرگروه نورمال از گروهی متناهی جزء هر p ـ زیرگروه سیلو آن است.

۱۹*

کاربردهای نظریهٔ سیلو

دراین فصل کاربردهای متعددی از نظریهٔ سیلو ارائه خواهد شد. باید برایتان جالب باشد که ببینید احکام معینی در باب گروههای از مراتب خاص بـه چه آسانی به‌دست می‌آیند. باید توجه داشته باشید که ما فقط روی گروههای متناهی کار می‌کنیم و در بـارهٔ مسأله کلی تعیین ساختار تمام گروههای متناهی فقط قدمی کوچك برمی‌داریم. اگرمرتبهٔ گروه فقط چند عامل داشته باشد، فنون شرح داده شده در این فصل برای تعیین ساختار گروه می‌تواند تا حدودی ثمربخش باشد. این موضوع را در فصل ۲۲ دنبال خواهیم کرد و در آنجا نشان خواهیم داد که چگونه گاهی ممکن است تمام گروههای ازمرتبهٔ خاصی را، حتی وقتی برخی از آنها هم نباشند، (در حد ایزومورفیسم) تعیین کرد. بـاری، اگر مرتبهٔ یك گروه متناهی خیلی مرکب، یعنی شامل تعداد کثیری عامل، باشد مسأله عموماً به مراتب مشکل‌تر است.

*۱.۱۹ کاربرد در p ـ گروهها و تساوی همادی

قضیهٔ ۱.۱۹ هرگروه ازمرتبهٔ توان عددی اول (یعنی هر p- گروه متناهی) حلپذیراست.

برهان. اگر مرتبهٔ G برابر با p^r باشد، آنگاه بلافاصله از قضیهٔ ۳.۱۸ نتیجه می‌شود که برای $1 \leqslant i \leqslant r$، گروه G زیرگروههایی چون H_i از مرتبهٔ p^i داردکه هر یك در زیر گروهی از مرتبهٔ p^{i+1} نورمال است. بنابراین

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_r = G$$

یك سری ترکیبی است که درآن گروههای خارج قسمت، از مرتبهٔ p هستند و لذا آبلی ودر واقع دوری. پس، G حلپذیر است. □

در اثبات قدیمی قضیه‌های سیلو از تساوی همادی استفاده می‌شد. روش اثبات در فصل ۱۸ چنان بود که لزومی به ذکر صریح تساوی همادی نبود. البته تساوی (۲.۱۸) صورتی کلی از همان تساوی است. اکنون جهت آشنایی شما تساوی همادی کلاسیك را شرح می‌دهیم.

فرض کنیم X یك G-مجموعهٔ متناهی باشد که درآن G گروهی متناهی است. تساوی (۲.۱۸) بیان می‌کند که

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=s+1}^{r} |x_i G| \qquad (۱.۱۹)$$

که‌درآن x_i عضوی از iمین مدار X است. اکنون حالت خاص تساوی (۱.۱۹) را بررسی می‌کنیم که در آن $X=G$ واکنش G بر G توسط مزدوجگیری است؛ از اینرو g از G عضو x از $X=G$ را به $g^{-1}xg$ می‌برد. دراین صورت

$$X_G = \{x \in G | g^{-1}xg = x \text{ ، } G \text{ از } g \text{ به‌ازای‌هر}\}$$
$$= \{x \in G | xg = gx \text{ ، } G \text{ از } g \text{ به‌ازای هر}\} = Z(G),$$

یعنی مرکز G است. اگر در تساوی (۱.۱۹) قرار دهیم $c = |Z(G)|$ و $n_i = |x_i G|$، آنگاه تساوی

$$|G| = c + n_{c+1} + \cdots + n_r \qquad (۲.۱۹)$$

را به‌دست می‌آوریم که درآن n_i تعداد اعضای iمین مدار G تحت مزدوجگیری توسط خودش‌است. توجه‌کنید که برای $c+1 \leqslant i \leqslant r$، n_i عاد می‌کند $|G|$ را، چون می‌دانیم که در تساوی (۱.۱۹)، $|x_i G| = (G : G_{x_i})$ که خود مقسوم علیهی است از $|G|$.

تعریف تساوی (۲.۱۹) تساوی همادی G است. هرمدار G تحت مزدوجگیری توسط G یك هماد مزدوج G می‌باشد.

مثال ۱.۱۹ به سهولت می‌توان امتحان کرد که برای S_3 از مثال ۱.۴، همادهای مزدوج عبارتنداز

$$\{\rho_0\},\ \{\rho_1, \rho_2\},\ \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

معادلهٔ همادی S_3 عبارت است از

$$6 = 1 + 2 + 3 . \quad □$$

برای روشن ساختن موارد استفادهٔ تساوی همادی، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که اثبات آن را قبلا درتمرین ۱۳.۱۸ (ب) از شما خواسته بودیم.

قضیهٔ ۲.۱۹ مرکز هر p- گروه نابدیهی G نابدیهی است.

برهان. درتساوی (۲.۱۹) درمورد G، برای $c+1 \leqslant i \leqslant r$، هر n_i عاد می‌کند $|G|$ را؛ از این‌رو p هر n_i را عاد می‌کند، والبته p، عاد می‌کند $|G|$ را. بنابراین p، c را عاد می‌کند. اکنون $e \in Z(G)$، از این‌رو $c \geqslant 1$. بنابراین $c \geqslant p$، و عضوی چون a از $Z(G)$ هست که $a \neq e$. □

اینك به‌بیان لمی در مورد ضرب مستقیم می‌پردازیم که در برخی از قضیه‌های ذیل به‌کار خواهد رفت.

لم ۱.۱۹ فرض‌کنیم G گروهی شامل زیر گروههای نورمال H و K باشد به‌طوری‌که $H \cap K = \{e\}$ و $H \vee K = G$. آنگاه G با $H \times K$ ایزومورف است.

برهان. نشان می‌دهیم که سه شرط قضیهٔ ۶.۸ برقرارند. با توجه به‌این‌که $H \cap K = \{e\}$ و $H \vee K = G$، تنها به نشان دادن این‌که برای $h \in H$, $k \in K$، $hk = kh$ نیاز داریم. برگردان $hkh^{-1}k^{-1}$ را درنظر می‌گیریم. دسته‌بندی $(hkh^{-1})k^{-1}$ نشان می‌دهد که این برگردان عضو K است. زیرا K نورمال است و $hkh^{-1} \in K$. به همین طریق، دسته‌بندی $h(kh^{-1}k^{-1})$ نشان می‌دهد که این برگردان عضو H است. بنابراین، $hkh^{-1}k^{-1} \in (H \cap K)$، یعنی $hkh^{-1}k^{-1} = e$ یا $hk = kh$. پس اثبات لم تمام است. □

قضیهٔ ۳.۱۹ به‌ازای هر عدد اول p، هرگروه چون G از مرتبه p^2 آبلی است.

برهان. اگر G دوری نباشد، غیر از e هر عضو آن باید از مرتبهٔ p باشد. فرض‌کنیم a چنین عضوی باشد. آنگاه زیرگروه دوری $\langle a \rangle$ از مرتبهٔ p تمام G نیست. همچنین فرض‌کنیم $b \in G$ و $b \notin \langle a \rangle$. در این صورت $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$، زیرا عضوی مانند c از $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ که $c \neq e$، هر دو $\langle a \rangle$ و $\langle b \rangle$ را تولید می‌کند و نتیجه می‌دهد $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ که خلاف فرض است. بنا به قضیهٔ ۳.۱۸، $\langle a \rangle$ در زیر گروهی از مرتبهٔ p^2 از G نورمال است؛ یعنی، درتمام G نورمال است. عیناً $\langle b \rangle$ در G نورمال‌است. اکنون $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle$ زیر گروهی از G است زیرگروه دوری $\langle a \rangle$ را شامل می‌باشد و مرتبه‌اش هم p^2 را عاد می‌کند؛ بنابراین $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle$ باید تمام G باشد. از اینرو فرضهای لم ۱.۱۹ برقرار می‌باشند، و G با $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ایزومورف و در نتیجه آبلی است. □

۲.۱۹* کاربردهای دیگر

اکنون بدین بحث می‌پردازیم که آیا از مرتبه‌های معینی گروهی ساده وجود دارد؟ قبلا دیده‌ایم که هرگروه از مرتبهٔ عددی اول ساده است. همچنین اظهارکرده‌ایم که برای هر

عدد طبیعی n تا کمتر از ۵، گروه A_n ساده است و A_5 کوچکترین گروه ساده‌ای است که از مرتبه‌ای اول نیست. گمان معروف برنساید بیان می‌کرد که مرتبهٔ هر گروه سادهٔ متناهی اگر اول نباشد حتماً زوج است. اثبات این امر توسط تامپسون[1] و فایت[2] در سالهای اخیر [۲۱]، یك پیروزی بزرگ به‌حساب آمد.

قضیهٔ ۴.۱۹ اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند و $p<q$ آنگاه هرگروه G از مرتبهٔ pq یك زیر گروه منحصر به فرد از مرتبهٔ q دارد و این زیر گروه در G نورمال است. بنابراین G ساده نیست. اگر q همنهشت با ۱ به‌هنگ p نباشد آنگاه G آبلی و دوری است.

برهان. قضیه‌های ۳.۱۸ و ۵.۱۸ به ما می‌گویند که G دارای حداقل یك qـ زیر گروه سیلو است و تعداد چنین زیر گروههایی به‌هنگ q با ۱ همنهشت است و pq را عاد می‌کند و بنابراین باید p را عاد کند. چون $p<q$، تنها امکان عدد ۱ است. بنابراین تنها یك q-زیر گروه سیلو Q از G وجود دارد. این گروه Q بایددر G نورمال باشد. زیرا تحت یك اتومورفیسم داخلی بایستی به گروهی از همان مرتبه، و درنتیجه به‌خودش، برده شود. پس G ساده نیست.

به همین ترتیب، گروه G دارای یك p-زیر گروه سیلو چون P است و تعداد این زیر گروهها q را عاد می‌کند و به‌هنگ p همنهشت است با ۱. چنین عددی باید یا ۱ یا q باشد. اگر q به‌هنگ p با ۱ همنهشت نباشد، آنگاه تعداد این زیر گروهها باید ۱ باشد و P در G نورمال خواهد بود. فرض کنیم $q\not\equiv 1 \pmod p$. چون هرعضو Q غیراز e ازمرتبهٔ q است وهرعضو P غیراز e ازمرتبهٔ p، داریم $Q\cap P=\{e\}$. همچنین $Q\vee P$ باید زیر گروهی از G باشد و دارای زیر گروه واقعی Q که مرتبه‌اش هم مقسوم علیهی از pq است. پس $Q\vee P=G$ و بنا به لم ۱.۱۹، G با $Q\times P$ و در واقع با $\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_q$ ایزومورف است. درنتیجه G آبلی و دوری است. □

برای چند بحث شمارشی زیر، به لم دیگری نیازمندیم.

لم ۲.۱۹ اگر H و K زیرگروههایی متناهی از گروهی چون G باشند، آنگاه

$$|HK|=\frac{(|H|)(|K|)}{|H\cap K|}.$$

برهان. یادآوری می‌کنیم که $HK=\{hk|h\in H\ ,\ k\in K\}$. فرض کنیم $|H|=r$ و $|K|=s$ و $|H\cap K|=t$. به‌وضوح HK حداکثر rs عضو دارد. اما، امکان دارد که برای $h_1, h_2\in H$ و $k_1, k_2\in K$، h_1k_1 برابر با h_2k_2 باشد. بنابراین امکان افت

1. Thompson 2. Feit

هست. اگر $h_1k_1 = h_2k_2$ آنگاه قرار می‌دهیم

$$x = (h_2)^{-1}h_1 = k_2(k_1)^{-1} .$$

اکنون $x = (h_2)^{-1}h_1$ نشان می‌دهد که $x \in H$ ، و $x = k_2(k_1)^{-1}$ نشان می‌دهد که $x \in K$. پس $x \in (H \cap K)$ ، و

$$k_2 = xk_1 \quad \text{و} \quad h_2 = h_1x^{-1}$$

از طرف دیگر، اگر برای‌هر y از $(H \cap K)$ قرار دهیم $h_3 = h_1y^{-1}$ و $k_3 = yk_1$ ، به سادگی واضح است که $h_3k_3 = h_1k_1$ ؛ بدین شرط که $h_3 \in H$ و $k_3 \in K$. بنابراین هر عضو hk از HK درست‌به‌اندازهٔ تعداد اعضای $H \cap K$ ، یعنی t بار،می‌تواند به‌صورت h_ik_i برای $h_i \in H$ و $k_i \in K$ نمایش داده شود. از اینجا نتیجه می‌شود که تعداد اعضای HK برابر است با rs/t . □

لم‌قبل نتیجهٔ دیگری است که چیزی را می‌شمارد، بنابراین‌آن را دست‌کم نگیرید. این‌لم به‌طریق زیر به‌کار خواهد رفت: یك گروه متناهی نمی‌تواند زیر گروههایی چون H و K داشته باشد که خیلی بزرگ باشند و مقطع آنها خیلی‌کوچك باشد، چون دراین صورت مرتبهٔ HK مجبور است ازمرتبهٔ G تجاوزکند،که غیرممکن است. به‌عنوان مثال، یك گروه از مرتبهٔ ۲۴ نمی‌تواند دوزیرگروه از مراتب ۱۲ و ۸ داشته باشد با مقطعی از مرتبهٔ ۲.

باقیماندهٔ این‌فصل تشکیل می‌شود ازمثالهایی نشاندهندهٔ چگونگی‌اثبات این موضوع که همهٔ گروههای از مرتبه‌های خاصی آبلی هستند و یا این‌که زیر گروههای نورمال نابدیهی دارند، یعنی‌که ساده نیستند. ما ازخاصیتی استفاده می‌کنیم‌که قبلاتنها در تمرینها آمده بود. هر زیرگروه H با اندیس ۲ در گروهی متناهی همواره نورمال است؛ برای این‌که، بنا به‌شمارش، می‌بینیم‌که تنها همدسته‌های چپ عبارتند از خود H و همدستهٔ متشکل از تمام اعضای G که‌در H نیستند. همدسته‌های راست هم همانها هستند. بنابراین هر همدستهٔ راست یك همدستهٔ چپ نیز هست و بنا به قضیهٔ ۱.۱۲و بحث متعاقب آن، H در G نورمال است.

مثال ۲.۱۹ هیچ گروه از مرتبهٔ p^r ، که در آن p عددی اول باشد، برای $r > 1$ ساده نیست. بنا به‌قضیهٔ ۳.۱۸ چنین گروهی مثلا G شامل یك زیر گروه از مرتبهٔ p^{r-1} است که در زیرگروهی از مرتبهٔ p^r ، که بایدلزوماً خود G باشد، نورمال است. بنابراین هیچ گروهی از مرتبهٔ ۱۶ ساده نیست زیرا زیرگروه نورمالی از مرتبهٔ ۸ دارد. □

مثال ۳.۱۹ هرگروه از مرتبهٔ ۱۵ دوری است (و بنابراین آبلی و غیرساده، چون ۱۵ اول نیست). علت این است که $3 \times 5 = 15$ و ۵ همنهشت با ۱ به هنگ ۳ نیست. بنا به‌قضیهٔ ۴.۱۹ کارتمام است. □

مثال ۴.۱۹ هیچ گروه از مرتبهٔ ۲۰ ساده نیست، چون که اگر G چنین گروهی باشد آنگاه G شامل ۵- زیر گروههای سیلو است به تعداد عددی همنهشت با ۱ به هنگ ۵ و مقسوم‌علیهی از ۲۰ و بنابراین تنها به تعداد ۱. این ۵- زیر گروه سیلو آنگاه نورمال است، چون تمام مزدوجهای آن باید خودش باشند. □

مثال ۵.۱۹ هیچ گروهی از مرتبهٔ ۳۰ ساده نیست. ملاحظه کرده‌ایم که اگر به‌ازای مقسوم علیه اولی چون p از ۳۰، فقط یك p- زیر گروه سیلو وجود داشته باشد حکم حاصل می‌شود. بنا به‌قضیهٔ ۵.۱۸، تعداد ممکن برای ۵- زیر گروههای سیلو ۱ یا ۶ است و تعداد ممکن برای ۳- زیر گروههای سیلو ۱ یا ۱۰. اما اگر G دارای شش ۵- زیر گروه سیلو باشد، آنگاه مقطع هر دوتایی از آنها زیر گروهی است که مرتبهٔ هر یك از آنها ۵ را عاد می کند و بنابراین چیزی جز $\{e\}$ نیست. نتیجه این که هریك شامل چهار عضو از مرتبهٔ ۵ است که در بقیه نیستند. بنابراین G باید بیست‌وچهار عضو از مرتبهٔ ۵ داشته باشد. همچنین اگر گروه دارای ده ۳- زیر گروه سیلو باشد، آنگاه باید ۲۰ عضو از مرتبهٔ ۳ داشته باشد. این دونوع زیر گروههای سیلو توأماً حداقل چهل و چهار عضو G را لازم دارند. بنابراین G زیر گروه نورمال از مرتبهٔ ۵ یا ۳ دارد. □

مثال ۶.۱۹ هیچ گروهی از مرتبهٔ ۴۸ ساده نیست. در حقیقت نشان خواهیم داد که هر گروه از مرتبهٔ ۴۸ زیر گروه نورمالی از مرتبهٔ ۱۶ یا ازمرتبهٔ ۸ دارد. بنا به قضیهٔ ۵.۱۸ گروه G یك یا سه‌تا ۲- زیر گروه سیلو از مرتبهٔ ۱۶ دارد. اگر درست یك زیر گروه از مرتبهٔ ۱۶ داشته باشد آنگاه بنابر آنچه مکرراً گفته شده است، این زیر گروه در G نورمال است.

فرض کنیم که سه زیر گروه از مرتبهٔ ۱۶ وجود داشته باشد و H و K دوتا از آنها باشند. دراین‌صورت مرتبهٔ $H \cap K$ باید ۸ باشد؛ چه اگر مرتبهٔ $H \cap K$ کوچکتر از یا مساوی با ۴ باشد، آنگاه، بنا به‌لم ۲.۱۹، HK باید حداقل $(۱۶)(۱۶)/۴ = ۶۴$ عضو داشته باشد که متناقض است با این که G دارای چهل و هشت عضو می‌باشد. بنابراین $H \cap K$ در هردو H و K نورمال است (به‌خاطر داشتن اندیس ۲ یا بنا به‌قضیهٔ ۳.۱۸). از اینجا نتیجه می‌شود که نورمالساز $H \cap K$ شامل H و K هر دو است و باید مرتبهٔ آن مضربی بزرگتر ازیك از ۱۶ باشد و مقسوم‌علیهی از ۴۸ ولذا خود ۴۸. بنابراین $H \cap K$ باید در G نورمال باشد. □

مثال ۷.۱۹ هیچ گروهی از مرتبهٔ ۳۶ ساده نیست. اگر G چنین گروهی باشد باید یك یا چهار زیر گروه از مرتبهٔ ۹ داشته باشد. اگر فقط یك زیر گروه مرتبهٔ ۹ داشته باشد، آن زیر گروه در G نورمال است. فرض کنیم G دارای ۴ زیر گروه از مرتبهٔ ۹ باشد و H و K دو تا از آنها باشند. مانند مثال ۶.۱۹، $H \cap K$ باید حداقل ۳ عضو داشته باشد و یا این که HK باید دارای هشتاد و یك عضو باشد که غیرممکن است. بنابراین مرتبهٔ

نورمالساز $H \cap K$ مضربی بزرگتر از یك ۹ است و مقسوم‌علیهی از ۳۶؛ پس این مرتبه باید یا ۱۸ باشد یا ۳۶. اگر این مرتبه ۱۸ باشد، اندیس نورمالساز ۲ است و بنابراین در G نورمال می‌باشد. اگر این مرتبه ۳۶ باشد، آنگاه $H \cap K$ در G نورمال است. □

مثال ۸.۱۹ هر گروه از مرتبهٔ $(۱۷)(۵)(۳) = ۲۵۵$ آبلی است (و بنابراین بنا به قضیهٔ ۳.۹ دوری است و از آنجا که عدد ۲۵۵ مرکب است، ساده نیست). فرض کنیم G گروهی از مرتبهٔ ۲۵۵ باشد. بنا به‌قضیهٔ ۵.۱۸ گروه G دارای تنها یك زیرگروه از مرتبهٔ ۱۷ است. پس G/H از مرتبهٔ ۱۵ است و بنابر مثال ۳.۱۹ آبلی. بنا به قضیهٔ ۶.۱۲، ملاحظه می‌کنیم که زیرگروه برگردان G' از G زیرگروه H هم هست. پس به‌عنوان زیرگروهی از H، مرتبهٔ G' برابر است با ۱ یا ۱۷. قضیهٔ ۵.۱۸ همچنین نشان می‌دهد که G دارای ۱ یا ۸۵ زیرگروه ازمرتبهٔ ۳ و دارای ۱ یا ۵۱ زیرگروه ازمرتبهٔ ۵ است. اما وجود ۸۵ زیرگروه از مرتبهٔ ۳ مستلزم وجود ۱۷۰ عضو از مرتبهٔ ۳ است و وجود ۵۱ زیرگروه ازمرتبهٔ ۵ مستلزم وجود ۲۰۴ عضو ازمرتبهٔ ۵ در G است. وجود هر دومستلزم‌وجود حداقل ۳۷۵ عضو در G است که ممکن نیست. بنابراین زیرگروهی چون K از مرتبهٔ ۳ یا مرتبهٔ ۵ و نورمال در G وجود دارد. پس G/K یا از مرتبهٔ $(۱۷)(۵)$ یا از مرتبهٔ $(۱۷)(۳)$ است، و در هرحالت قضیهٔ ۴.۱۹ نشان می‌دهد که G/K آبلی است. ازاین رو $G' \leqslant K$ و مرتبهٔ آن ۱، ۳ یا ۵ است. چون شرط $G' \leqslant H$ نشان داد که مرتبهٔ G' ۱۷ است یا ۱، نتیجه می‌گیریم که مرتبهٔ G' برابر با ۱ است. بنابراین $G' = \{e\}$ و $G/G' \simeq G$ آبلی است. اکنون قضیهٔ ۳.۹ نشان می‌دهد که G دوری است. □

تمرین

***۱.۱۹** با استدلالی مشابه آنچه درمثالهای این فصل به‌کار رفت، خود را متقاعد کنید که هرگروه متناهی از مرتبهٔ غیراول وکوچکتر از ۶۰ زیرگروهی نورمال، واقعی و نابدیهی دارد و بنابراین ساده نیست. نیازی به‌نوشتن جزئیات نیست. (مشکلترین حالتها درمثالها بررسی شده‌اند.)

***۲.۱۹** ثابت کنید که هرگروه از مرتبهٔ $(۴۷)(۷)(۵)$ آبلی و دوری است.

***۳.۱۹** درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

— ا) هرگروه از مرتبهٔ ۱۵۹ دوری است.

— ب) هرگروه از مرتبهٔ ۱۰۲ زیرگروهی نورمال، واقعی و نابدیهی دارد.

— ج) هرگروه حلپذیر، از مرتبهٔ توانی از یك عدد اول است.

— د) هرگروه از مرتبهٔ توانی ازیك عدد اول حلپذیر است.

— ه) بسیار خسته‌کننده خواهدبود که با روشهای به‌کارگرفته شدهٔ درمتن نشان دهیم که

هیچ گروه از مرتبهٔ عددی غیراول بین ۶۰ و ۱۶۸ ساده نیست.

— و) هیچ گروه از مرتبهٔ ۲۱ ساده نیست.

— ز) هر گروه ازمرتبهٔ ۱۲۵ حداقل ۵ عضو دارد که باهریك از اعضای گروه تعویضپذیر می باشند.

— ح) هر گروه ازمرتبهٔ ۴۲ زیر گروه نورمالی از مرتبهٔ ۷ دارد.

— ط) هر گروه از مرتبهٔ ۴۲ زیر گروه نورمالی از مرتبهٔ ۸ دارد.

— ی) تنها گروههای ساده عبارتند ازگروههای $\mathbf{Z}_p$ و A_n که درآن p عددی اول است و $n \neq ۴$.

---

*۴.۱۹ ثابت کنید که هیچ گروه از مرتبهٔ ۹۶ ساده نیست.

*۵.۱۹ ثابت کنید که هیچ گروه از مرتبهٔ ۱۶۰ ساده نیست.

*۶.۱۹ فرض کنید $D_۴$ گروه تقارنهای مربع از مثال ۲.۴ باشد.

— ا) تجزیهٔ $D_۴$ به همادهای مزدوج را پیدا کنید.

— ب) تساوی همادی $D_۴$ را بنویسید.

*۷.۱۹ این تمرین همادهای مزدوج S_n را به‌ازای هرعدد طبیعی n تعیین می کند.

ا) نشان دهید که اگر $\sigma = (a_۱, a_۲, \cdots, a_m)$ یك دوراز S_n باشدو τ عضوی‌از S_n، آنگاه $\tau^{-۱}\sigma\tau = (a_۱\tau, a_۲\tau, \cdots, a_m\tau)$.

ب) از (ا) نتیجه بگیرید که هردو دور هم‌طول‌از S_n مزدوج هستند.

ج) از (ا) و (ب) نتیجه بگیرید که حاصلضربی از s دور مجزای از S_n به‌طولهای r_i برای $i = ۱, ۲, \cdots, s$ با هرحاصلضرب دیگری از s دورمجزای به‌طولهای r_i از S_n مزدوج می باشد.

د) نشان دهید که تعداد همادهای مزدوج S_n برابر است با $p(n)$ ، که $p(n)$ عبارت‌است از تعداد راههایی که، قطع نظر از ترتیب عوامل جمع، می‌توان n را به‌صورت مجموعی از اعداد طبیعی نوشت. عدد $p(n)$ **تعداد افرازهای** n است.

ه) $p(n)$ را برای $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ حساب کنید.

*۸.۱۹ همادهای مزدوج و تساوی همادی $S_۴$ را بنویسید. [راهنمایی : تمرین ۷.۱۹ را به‌کار برید.]

*۹.۱۹ تساوی همادی $S_۵$ و $S_۶$ را بیابید. [راهنمایی : تمرین ۷.۱۹ را به‌کاربرید.]

*۱۰.۱۹ نشان دهید که تعداد همادهای مزدوج S_n برابر با تعداد گروههای آبلی متفاوت (درحد ایزومورفیسم) از مرتبهٔ p^n می‌باشد، که درآن p عـددی اول است. [راهنمایی: تمرین ۷.۱۹ را به‌کار برید.]

*۱۱.۱۹ نشان دهید اگر $n>2$، مـرکز S_n زیـر گروه متشکل از تنها جایگشت همانی است. [راهنمایی: تمرین ۷.۱۹ را به‌کار ببرید.]

۲۰*

گروه آبلی آزاد

در این فصل مفهوم گروه آبلی آزاد را معرفی و احکامی در بارهٔ آن ثابت می کنیم. این فصل با عرضهٔ اثباتی از قضیهٔ اساسی گروههای آبلی متناهیاً تولید شده (قضیهٔ ۹.۳) خاتمه می‌پذیرد.

۱.۲۰* گروه آبلی آزاد

لازم است مفاهیم مجموعه‌ای مولد برای یك گروه G و گروهی متناهیاً تولید شده را، به صورتی که درآغاز فصل ۹ ارائه شد، مروری بکنید. در این فصل منحصراً گروههای آبلی را مورد بحث قرار می‌دهیم و نمادگذاری جمعی را به صورت زیر به‌کار می‌بریم.

۰ برای همانی، $+$ برای عمل،

به ازای هر n از $\mathbb{Z}^+$ و a از G

$$\left.\begin{aligned} na &= \underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ عامل}} \\ -na &= \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots+(-a)}_{n \text{ عامل}} \end{aligned}\right\}$$

$0a=0$، برای صفر طرف چپ از $\mathbf{Z}$ و صفر طرف راست از G.

به استفاده از نماد $\times$ برای حاصلضرب مستقیم گروهها ادامه می‌دهیم و نمادگذاری را به حاصلجمع مستقیم تغییر نمی‌دهیم.

البته؛ $\{(1,0),(0,1)\}$ مجموعهٔ مولدی برای گروه $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ است، چون به‌ازای هر (n,m) از $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$، $(n,m)=n(1,0)+m(0,1)$. این مجموعهٔ مولد دارای این خاصیت است که هر عضو $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ را می‌توان به طور منحصر به فردی به صورت $n(1,0)+m(0,1)$ نوشت، بدین معنی که ضرایب n و m در $\mathbf{Z}$ منحصر به‌فردمی‌باشند.

قضیهٔ ۱.۲۰ فرض‌کنیم X زیر مجموعه‌ای از یک‌گروه آبلی ناصفر G باشد. شرایط زیر در مورد X هم ارز هستند.

۱. هرعضوناصفر a از G را به‌ازای $n_i\neq 0$ از $\mathbf{Z}$ و x_iهای متمایز از X می‌توان به طور منحصر به فردی به صورت $a=n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r$ نوشت.

۲. X گروه G را تولید می‌کند و به ازای $n_i\in\mathbf{Z}$ و x_i های متمایز از X، $n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r=0$ اگر و فقط اگر $n_1=n_2=\dots=n_r=0$.

برهان. فرض‌کنیم شرط ۱ درست باشد. چون $G\neq\{0\}$، داریم $X\neq\{0\}$. از ۱ نتیجه می‌شود که $0\notin X$، زیرا اگر $x_i=0$ و $x_j\neq 0$، آنگاه $x_j=x_i+x_j$، که با یکتایی نمایش x_j متناقض است. بنا به ۱ مطمئناً X، G را تولید می‌کند و البته هرگاه $n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r=0$، $n_1=n_2=\dots=n_r=0$. فرض کنیم $n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r=0$ و برخی از n_iها مخالف ۰ باشند. با حذف جمله های دارای ضریب صفر و تجدید شماره گذاری می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ n_iهای مخالف صفر هستند. آنگاه

$$x_1=x_1+(n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r)$$
$$=(n_1+1)x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r,$$

که دو راه برای نوشتن $x_1\neq 0$ به دست می‌آید، و متناقض با فرض یکتایی در شرط ۱ است. پس شرط ۱ شرط ۲ را نتیجه می‌دهد.

اکنون نشان می‌دهیم که از شرط ۲ شرط ۱ نتیجه می‌شود. فرض‌کنیم $a\in G$. چون X، G را تولیدمی کند، می بینیم که a رامی‌توان به‌صورت $a=n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r$ نوشت. فرض‌کنیم a را بتوان برحسب اعضای X به صورت دیگری هم نوشت. با استفاده از چند ضریب صفر در هر دو عبارت، می‌توان فرض‌کرد که هر دو شامل اعضای یکسانی از X و به صورت زیر هستند،

$$a=n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_rx_r,$$
$$a=m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_rx_r.$$

با کم کردن، به دست می‌آوریم

$$0=(n_1-m_1)x_1+(n_2-m_2)x_2+\dots+(n_r-m_r)x_r,$$

از اینرو بنا به شرط ۲، $n_i - m_i = 0$، و $n_i = m_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, r$. پس ضرایب منحصر به فرد هستند. □

تعریف هر گروه آبلی که مجموعهٔ مولدی ناتهی چون X داشته باشد و واجد شرایط مذکور در قضیهٔ ۱.۲۰ باشد، یك گروه آبلی آزاد نامیده می‌شود و X مبنایی برای گروه است.

مثال ۱.۲۰ گروه $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ آبلی آزاد است و $\{(1,0),(0,1)\}$ یك مبنای آن است. بدیهی است که مبنایی برای گروه آبلی آزاد $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ عبارت است از $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$، و به‌همین ترتیب. بنابراین حاصلضربهای مستقیم متناهی گروه $\mathbf{Z}$ با خودش گروههای آبلی آزاد هستند. □

مثال ۲.۲۰ گروه $\mathbf{Z}_n$ آبلی آزاد نیست، زیرا برای هر x از $\mathbf{Z}_n$، و $n \neq 0$، $nx = 0$، که شرط ۲ را نقض می‌کند. □

فرض کنیم که گروه آبلی آزادی چون G مبنایی متناهی چون $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ داشته باشد. اگر $a \in G$ و $a \neq 0$، آنگاه a عبارت منحصر به فردی به صورت

$$a = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_r x_r \text{ ، } n_i \in \mathbf{Z}$$

دارد. نگاشت

$$\phi : G \to \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}}_{r \text{ عامل}}$$

را به توسط $a\phi = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ و $0\phi = (0, 0, \ldots, 0)$ تعریف می‌کنیم. اثبات این که ϕ یك ایزومورفیسم است آسان می‌باشد. جزئیات را به تمرین وا می‌گذاریم (تمرین ۱.۲۰ را ملاحظه کنید) و این حکم را به‌صورت یك قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۲۰ اگر G یك گروه آبلی آزاد ناصفر با مبنایی r عضوی باشد، آنگاه G با $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}$ از r عامل ایزومورف است.

این یك واقعیت است که هر دو مبنای یك گروه آبلی آزاد G به تعداد مساوی عضو دارند. ما این را تنها در حالتی که G مبنایی متناهی داشته باشد ثابت می‌کنیم، البته این حکم در حالتی هم که هر مبنای G نامتناهی باشد صادق است. اثبات واقعاً زیباست و تعداد اعضای یك مبنا را برحسب اندازهٔ یك گروه خارج قسمت به‌آسانی مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۳.۲۰ فرض کنیم $G \neq \{0\}$ یك گروه آبلی آزاد با مبنایی متناهی باشد. آنگاه هر مبنای G متناهی است، و تعداد اعضای همهٔ مبناها یکی است.

برهان. فرض کنیم G مبنایی چون $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ داشته باشد. آنگاه G با $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}$ از r عامل ایزومورف است. قرار می‌دهیم $2G=\{2g \mid g\in G\}$. آزمایش این که $2G$ زیرگروهی از G است آسان است. چون $G\simeq\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}$ از r عامل، داریم

$$G/2G\simeq(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z})/(2\mathbf{Z}\times 2\mathbf{Z}\times\cdots\times 2\mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2\times\cdots\times\mathbf{Z}_2$$

از r عامل. بنابراین $|G/2G|=2^r$، از اینرو تعداد اعضای هر مبنای متناهی X برابر است با $\log_2|G/2G|$. پس تعداد اعضای هر دو مبنای متناهی یکی است.

باقی می‌ماند نشان دهیم که G نمی‌تواند مبنایی نامتناهی هم داشته باشد. فرض کنیم Y مبنایی برای G، و $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ مجموعه‌ای از اعضای متمایز Y باشد. فرض کنیم H زیرگروه تولید شدهٔ بدوسیلهٔ $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ از G باشد، و فرض کنیم K زیرگروه تولیدشده با بقیهٔ اعضای Y باشد. به‌سهولت می‌توان ملاحظه کرد که $G\simeq H\times K$، از اینرو $G/2G\simeq(H\times K)/(2H\times 2K)\simeq(H/2H)\times(K/2K)$. چون $|H/2H|=2^s$، می‌بینیم که $|G/2G|\geqslant 2^s$. با توجه بدین که $|G/2G|=2^r$، ملاحظه می‌کنیم که $s\leqslant r$. پس Y نمی‌تواند مجموعه‌ای نامتناهی باشد، زیرا می‌توانستیم قرار دهیم $s>r$. □

تعریف اگر G گروه آبلی آزادی باشد، رتبهٔ G تعداد اعضای مبنایی از G است. (همهٔ مبناها یك تعداد عضو دارند.)

*۲.۲۰ اثبات قضیهٔ اساسی

قضیهٔ اساسی (قضیهٔ ۳.۹) را بدین صورت ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهیم هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده با گروه خارج قسمتی به‌صورت

$$(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z})/(d_1\mathbf{Z}\times d_2\mathbf{Z}\times\cdots\times d_s\mathbf{Z}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\})$$

ایزومورف است، که هر دو «صورت» و «مخرج» n عامل دارند و d_1 عاد می‌کند d_2 را، که خود عاد می‌کند d_3 را، ...، که خود عاد می‌کند d_s را. تجزیهٔ ۲ در قضیهٔ ۳.۹ آنگاه به‌سهولت نتیجه می‌شود.

برای این که نشان دهیم G با چنین گروه خارج قسمتی ایزومورف است، نشان می‌دهیم که همومورفیسمی از $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}$ بروی G وجود دارد که هسته‌اش به‌صورت $d_1\mathbf{Z}\times d_2\mathbf{Z}\times\cdots\times d_s\mathbf{Z}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}$ است. حکم آنگاه بنا به قضیهٔ ۳.۱۳ به دست می‌آید. قضیه‌های زیر جزئیات استدلال را نشان می‌دهند. هدف ما در این پارگرافهای توجیهی آن این است که ضمن مطالعهٔ مطالب زیر بتوانید ببینید که به کجا می‌روید.

قضیهٔ ۴.۲۰ فرض کنیم G یك گروه آبلی متناهیاً تولید شده با مجموعهٔ مولد $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ باشد. نگاشت.

$$\phi: \underbrace{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}}_{n \text{ عامل}} \to G$$

با تعریف $(h_1, h_2, \ldots, h_n)\phi = h_1a_1 + h_2a_2 + \cdots + h_na_n$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه ϕ همومورفیسمی بروی G است.

برهان. با توجه به معنی h_ia_i برای $h_i \in \mathbf{Z}$ و $a_i \in G$، بلافاصله ملاحظه می‌کنید که
$[(h_1, \ldots, h_n) + (k_1, \ldots, k_n)]\phi = (h_1+k_1, \ldots, h_n+k_n)\phi = (h_1+k_1)a_1 + \cdots + (h_n+k_n)a_n = (h_1a_1 + k_1a_1) + \cdots + (h_na_n + k_na_n) = (h_1a_1 + \cdots + h_na_n) + (k_1a_1 + \cdots + k_na_n) = (h_1, \ldots, h_n)\phi + (k_1, \ldots, k_n)\phi.$
چون $\{a_1, \ldots, a_n\}$، G را تولید می‌کند، بداهتاً همومورفیسم ϕ بروست. □

اکنون به اثبات یك «خاصیت جایگزینی» می‌پردازیم که اصلاح یك مبنا را ممکن می‌سازد.

قضیهٔ ۵.۲۰ اگر $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ مبنایی برای یك گروه آبلی G باشد و $t \in \mathbf{Z}$، آنگاه برای $i \neq j$، مجموعهٔ $Y = \{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + tx_i, x_{j+1}, \ldots, x_r\}$ هم مبنایی برای G است.

برهان. چون $x_j = (-t)x_i + 1(x_j + tx_i)$، ملاحظه می‌کنید که x_j را می‌توان از Y به دست آورد، و لذا Y هم G را تولید می‌کند. فرض کنیم

$$n_1x_1 + \cdots + n_{j-1}x_{j-1} + n_j(x_j + tx_i) + n_{j+1}x_{j+1} + \cdots + n_rx_r = 0.$$

آنگاه

$$n_1x_1 + \cdots + (n_i + n_jt)x_i + \cdots + n_jx_j + \cdots + n_rx_r = 0,$$

و چون X یك مبناست، $n_1 = \cdots = n_i + n_jt = \cdots = n_j = \cdots = n_r = 0$. از $n_j = 0$ و $n_i + n_jt = 0$ نتیجه می‌شود که $n_i = 0$، از اینرو

$$n_1 = \cdots = n_i = \cdots = n_i = \cdots = n_r = 0$$

و شرط ۲ از قضیهٔ ۱.۲۰ برقرار است. پس Y یك مبناست. □

مثال ۳.۲۰ $\{(1,0), (0,1)\}$ مبنایی برای $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ است. $\{(1,0), (4,1)\}$ هم مبنایی دیگر است، زیرا $(4,1) = 4(1,0) + (0,1)$. ولی، $\{(3,0), (0,1)\}$ یك مبنا نیست. زیرا، مثلا، نمی‌توانید $(2,0)$ را به صورت $n_1(3,0) + n_2(0,1)$ برای

$n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$، بنویسید. دراینجا $(3,0)=(1,0)+2(1,0)$، و به‌جای این‌که مضربی از یك عضو مبنا به عضو دیگر مبنا افزوده شود به خودش افزوده شده است. □

یك گروه آبلی آزاد با رتبهٔ متناهی می‌تواند مبناهای زیادی داشته باشد. نشان می‌دهیم که اگر $K \leqslant G$ آنگاه K هم آبلی آزاد است و رتبهٔ آن از رتبهٔ G تجاوز نمی‌کند. با همین اهمیت، G و K مبناهایی دارند که به‌طور جالبی به‌هم مربوط هستند.

قضیهٔ ۶.۲۰ فرض‌کنیم G یك گروه آبلی آزاد با رتبهٔ n باشد و فرض‌کنیم K زیرگروه ناصفری از G باشد. آنگاه K آبلی آزاد است با رتبهٔ $s \leqslant n$. به علاوه برای G مبنایی چون $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و اعدادی طبیعی چون $d_1, d_2, \ldots, d_s$ وجود دارند که برای $i=1, 2, \ldots, s-1$، d_i عاد می‌کند d_{i+1} را، و $\{d_1x_1, d_2x_2, \ldots, d_s x_s\}$ هم مبنایی برای K است.

برهان. نشان می‌دهیم K مبنایی به‌صورت فوق دارد که مسلماً نشان می‌دهد آبلی آزاد و از رتبهٔ حداکثر n است. فرض‌کنیم $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ مبنایی برای G باشد. تمام اعضای ناصفر K را می‌توان به‌صورت

$$k_1y_1+\cdots+k_ny_n$$

نوشت که برخی از $|k_i|$ ها ناصفرند. در بین همهٔ مبناهای Y برای G، مبنایی چون Y_1 را انتخاب می‌کنیم که وقتی تمام اعضای ناصفر K را برحسب اعضای مبنای Y_1 می‌نویسیم حداقل چنین مقادیر ناصفر $|k_i|$ به دست آید. با تجدید شماره‌گذاری اعضای Y_1 در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد عضوی چون w_1 در K وجود دارد که

$$w_1=d_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n$$

و در آن $a_1>0$ و d_1 کوچکترین ضریب قابل حصول به‌صورتی که بیان شد باشد. با استفاده از الگوریتم تقسیم، می‌نویسیم $k_j=d_1q_j+r_j$ که در آن $0 \leqslant r_j<d_1$ برای $j=2, \ldots, n$. آنگاه

$$w_1=d_1(y_1+q_2y_2+\cdots+q_ny_n)+r_2y_2+\cdots+r_ny_n. \qquad (1.20)$$

اکنون $x_1=y_1+q_2y_2+\cdots+q_ny_n$. بنا به قضیهٔ ۵.۲۰، $\{x_1, y_2, \ldots, y_n\}$ نیز مبنایی برای G است. بنا به‌تساوی (۱.۲۰) و انتخاب Y_1 برای مینیمال بودن ضریب d_1، ملاحظه می‌کنید که $r_2=\cdots=r_n=0$. پس $d_1x_1 \in K$.

اکنون مبناهای به‌صورت $\{x_1, y_2, \ldots, y_n\}$ را برای G در نظر می‌گیریم. هر عضو K را می‌توان به صورت زیر

$$h_1x_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n$$

بیان کرد. چون $d_1x_1 \in K$، می‌توان مضرب مناسبی از d_1x_1 را کم کرد، و آنگاه با استفاده از مینیمال بودن d_1 ملاحظه نمود که h_1 مضربی است از d_1، ودرنتیجه دریافت که $k_2y_2+\cdots+k_ny_n$ واقعاً در K است. دربین همهٔ چنین مبناهای $\{x_1,y_2,\ldots,y_n\}$ یك Y_2 را انتخاب می‌کنیم که به‌مینیمال بودن قدر مطلق ضریبی چون $k_i \neq 0$ منجر شود. (ممکن‌است تمام k_i ها همیشه صفر باشند. دراین حالت K به‌وسیلهٔ d_1x_1 تولیدمی‌شود واثبات‌کامل‌است.) باتجدید شماره گذاری اعضای Y_2 می‌توان فرض کرد که عضوی چون $w_2 \in K_2$ وجود دارد که

$$w_2 = d_2y_2 + \cdots + k_ny_n$$

و $d_2 > 0$ وهمان‌طوری که‌اخیراً بیان شد d_2 مینیمال‌است. دقیقاً مانندپاراگراف‌قبل،می‌توان مبنای $\{x_1,x_2,y_3,\ldots,y_n\}$ را به‌مبنایی چون $y_2=\{x_1,y_2,\ldots,y_n\}$ برای G تعدیل کرد که درآن $d_1x_1 \in K$ و $d_2x_2 \in K$. بانوشتن $d_2=d_1q+r$ بافرض $0 \leqslant r \leqslant d_1$ می‌بینیم که $\{x_1+qx_2,x_2,y_3,\ldots,y_n\}$ هم مبنایی برای G است، و $d_1x_1+d_2x_2=d_1(x_1+qx_2)+rx_2$ در K قرار دارد. بنا به مینیمال بودن d_1، ملاحظه می‌کنیم که $r=0$ و از اینرو d_1 عاد می‌کند d_2 را.

اکنون تمام مبناهای به‌صورت $\{x_1,x_2,y_2,\ldots,y_n\}$ برای G رادرنظرمی‌گیریم و اعضای به صورت $k_3y_3+\cdots+k_ny_n$ را بررسی می‌کنیم. روش‌کار روشن است. این روش ادامه می‌یابد تا مبنایی چون $\{x_1,x_2,\ldots,x_s,y_{s+1},\ldots,y_n\}$ به دست آید که تنها عضو k به‌صورت $k_{s+1}y_{s+1}+\cdots+k_ny_n$ صفر باشد، یعنی همهٔ k_i ها صفر باشند. آنگاه قرار می‌دهیم $x_{s+1}=y_{s+1},\ldots,x_n=y_n$ و مبنایی برای G به شکلی که در صورت قضیهٔ ۶.۲۰ توصیف شد به دست می‌آید. □

قضیهٔ ۷.۲۰ هرگروه‌آبلی متناهیاً تولید شده با گروهی به صورت

$$\mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{m_r} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}$$

ایزومورف است‌که در آن برای $i=1,\ldots r-1$، m_i، m_{i+1} را عاد می‌کند.

برهان. به‌منظور اثبات این قضیه،مناسب است که‌از نمادگذاری $\mathbf{Z}/1\mathbf{Z}=\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\simeq\mathbf{Z}_1=\{0\}$ استفاده شود. فرض کنیم G به‌وسیلهٔ n عضو، به‌طور متناهی تولید بشود. فرض کنیم با n عامل $F=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}$. هومومورفیسم $\phi: F \to G$ درقضیهٔ ۴.۲۰ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم K هستهٔ این هومومورفیسم باشد. آنگاه مبنایی برای F به‌صورت $\{x_1,\ldots,x_n\}$ وجود دارد به طوری که $\{d_1x_1,\ldots,d_sx_s\}$ مبنایی برای K باشد و d_i عاد کند d_{i+1} را برای $i=1,\ldots,s-1$. بنا به قضیهٔ ۳.۱۳، G با F/K ایزومورف است. اما

$$F/K \simeq (\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z})/(d_1\mathbf{Z}\times d_2\mathbf{Z}\times\cdots\times d_s\mathbf{Z}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\})$$
$$\simeq \mathbf{Z}_{d_1}\times\mathbf{Z}_{d_2}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{d_s}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}.$$

امکان دارد که $d_1=1$، که در این حالت $\mathbf{Z}_{d_1}=\{0\}$ و می‌توان آن را (در حد ایزومورفیسم) از حاصلضرب حذف کرد. عیناً d_2 ممکن است ۱ باشد و غیره. m_1 را اولین d_i بزرگتر از ۱ قرار می‌دهیم، m_2 را d_i بعدی و الی آخر، و بدین‌ترتیب حکم بلافاصله به‌دست می‌آید. □

سخت‌ترین قسمت اثبات قضیهٔ ۳.۹ را عرضه‌کرده‌ایم. البته تجزیه به توانهای اول نیز وجود دارد، زیرا هر گروه $\mathbf{Z}_{m_i}$ را می‌توان به عوامل توانهای اول نیز تجزیه کرد. تنها قسمت باقیمانده از قضیهٔ ۳.۹ یکتایی عدد بتی، ضرایب تاب و توانهای اول است. عدد بتی به صورت رتبهٔ گروه آزاد G/T ظاهر می‌شود که T زیر گروه تاب G است. این رتبه بنا به قضیهٔ ۳.۲۰ پایاست، و این یکتایی عدد بتی را نشان می‌دهد. نشان دادن یکتایی ضرایب تاب و توانهای اول کمی مشکلتر است. تمرینهای عرضه شده یکتایی آنها را نشان خواهند داد (تمرینهای ۱۲.۲۰ الی ۲۰.۲۰ را ببینید.)

تمرین

*۱.۲۰ اثبات قضیهٔ ۲.۲۰ را کامل کنید.

*۲.۲۰ مبنایی چون $\{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)\}$ را برای $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ پیدا کنید که در آن $a_i\neq 0$، $b_i\neq 0$ و $c_i\neq 0$. (جوابهای زیادی وجود دارند.)

*۳.۲۰ آیا $\{(2,1), (3,1)\}$ مبنایی برای $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ است؟ جواب خود را ثابت کنید.

*۴.۲۰ آیا $\{(2,1), (4,1)\}$ مبنایی برای $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ است؟ جواب خود را ثابت کنید.

*۵.۲۰ شرایطی برای $a, b, c, d\in\mathbf{Z}$ بیابید که $\{(a, b), (c, d)\}$ مبنایی برای $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ باشد. [راهنمایی: $x(a,b)+y(c,d)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ را در $\mathbf{R}$ حل کنید، و ملاحظه کنید که چه وقت مقدارها واقعاً در $\mathbf{Z}$ قرار دارند.]

+۶.۲۰ نشان دهید که هر گروه آبلی آزاد یك عضو ناصفر از مرتبهٔ متناهی ندارد.

*۷.۲۰ درستی یا نادرستی هر یك از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

— ا) هر گروه آبلی آزاد بدون تاب است.

— ب) هر گروه آبلی متناهیاً تولید شدهٔ فارغ از تاب یك گروه آبلی آزاد است.

— ج) گروه آبلی آزادی با رتبهٔ هر عدد طبیعی وجود دارد.

— د) یك گروه آبلی متناهیاً تولید شده، آبلی آزاد است اگر عدد بتی آن مساوی تعداد اعضای مجموعهٔ مولدی از آن باشد.

— ه) اگر X گروه آبلی آزادی چون G را تولید کند و $X \subseteq Y \subseteq G$، آنگاه Y هم G را تولید می‌کند.

— و) اگر X مبنایی برای گروه آبلی آزادی چون G باشد و $X \subseteq Y \subseteq G$، آنگاه Y هم مبنایی برای G است.

— ز) هر گروه آبلی آزاد ناصفر بینهایت مبنا دارد.

— ح) هر گروه آبلی آزاد با رتبهٔ حداقل ۲، بینهایت مبنا دارد.

— ط) اگر K زیر گروهی از یك گروه آبلی آزاد متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه K آبلی آزاد است.

— ی) اگر K زیر گروهی از یك گروه آبلی آزاد متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه G/K آبلی آزاد است.

---

*۸.۲۰ با یك مثال نشان دهید که امکان دارد زیر گروهی واقعی از یك گروه آبلی آزاد با رتبه r نیز با رتبهٔ r باشد.

*۹.۲۰ نشان دهید که اگر G و G' گروههای آبلی آزادی باشند، آنگاه $G \times G'$ نیز آبلی آزاد است.

*۱۰.۲۰ نشان دهید که گروههای آبلی آزاد با رتبهٔ متناهی دقیقاً گروههای آبلی متناهیاً تولید شده‌ای هستند که عضو ناصفری از مرتبهٔ متناهی ندارند.

*۱۱.۲۰ نشان دهید که $\mathbf{Q}$ تحت جمع یك گروه آبلی آزاد نیست. [راهنمایی: نشان دهید که هیچ دو عدد گویای متمایز n/m و r/s نمی‌توانند به مجموعه‌ای واجد شرط ۲ از قضیهٔ ۱.۲۰ تعلق داشته باشند.]

تمرینهای ۱۲ تا ۱۷ دربارهٔ یکتایی توانهای اول پدیدآمده در تجزیهٔ زیرگروه تاب یك گروه آبلی متناهیاً تولید شده به توانهای اول، بحث می‌کنند.

*۱۲.۲۰ فرض کنید p عدد اول ثابتی باشد. نشان دهید اعضایی از T که مرتبهٔ آنها توانی از p است، همراه با صفر، زیر گروهی چون T_p از T تشکیل می‌دهند.

*۱۳.۲۰ نشان دهید که در هر تجزیه به‌توانهای اول T، زیر گروه T_p مذکور در تمرین قبل، با حاصلضرب مستقیم آن تعداد از عوامل دوری که مرتبهٔ آنها توانی از p است ایزومورف است. [این، مسأله را تحویل می‌کند به‌این که نشان دهیم T_p نمی‌تواند تجزیه‌ای اساساً متفاوت با حاصلضرب گروههای دوری داشته باشد.]

*۱۴.۲۰ فرض کنید G گروهی آبلی و n عددی طبیعی باشد. نشان دهید که $G[n]=\{x\in G|nx=0\}$ زیرگروهی از G است. (در نمادگذاری ضربی، $G[n]=\{x\in G|x^n=e\}$.)

*۱۵.۲۰ با مراجعه به تمرین ۱۴.۲۰، نشان دهید که برای هر $r\geqslant 1$ و هر عدد اول p، $\mathbf{Z}_{p^r}[p]\simeq\mathbf{Z}_p$.

*۱۶.۲۰ با استفاده از تمرین ۱۵.۲۰، نشان دهید که

$$(\mathbf{Z}_{p^{r_1}}\times\mathbf{Z}_{p^{r_2}}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{p^{r_m}})[p]\simeq\underbrace{\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p\times\cdots\times\mathbf{Z}_p}_{m\ \text{عامل}}$$

در صورتی که هر $r_i\geqslant 1$.

*۱۷.۲۰ فرض کنید G گروه آبلی متناهیاً تولید شده‌ای باشد و T_p زیرگروه تعریف شده در تمرین ۱۲.۲۰. فرض کنید

$$T_p\simeq\mathbf{Z}_{p^{r_1}}\times\mathbf{Z}_{p^{r_2}}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{p^{r_m}}\simeq\mathbf{Z}_{p^{s_1}}\times\mathbf{Z}_{p^{s_2}}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{p^{s_n}}$$

که در آن $1\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_m$ و $1\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n$. برای تکمیل نمایش یکتایی تجزیه به توانهای اول نیاز به نشان‌دادن $m=n$ و $r_i=s_i$، برای $i=1,\cdots,n$، داریم.

ا) برای نشان دادن $n=m$ تمرین ۱۶.۲۰ را به‌کار ببرید.

ب) فرض کنید برای هر i، اگر $i<j$، آنگاه $r_i=s_i$. نشان دهید که $r_j=s_j$، که این اثبات را کامل می‌کند. [راهنمایی: فرض کنید $r_j<s_j$. زیرگروه $p^{r_j}T_p=\{p^{r_j}x|x\in T_p\}$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که آنگاه این زیرگروه دو تجزیه به توانهای اول مشتمل بر تعداد متفاوتی عامل ناصفر دارد. سپس استدلال کنید که این بنا به قسمت (۱) از این تمرین غیر ممکن است.]

فرض کنید T زیرگروه تاب یك گروه آبلی متناهیاً تولید شده باشد. فرض کنید $T\simeq\mathbf{Z}_{m_1}\times\mathbf{Z}_{m_2}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{m_r}\simeq\mathbf{Z}_{n_1}\times\mathbf{Z}_{n_2}\times\cdots\times\mathbf{Z}_{n_s}$ که در آن m_i عاد می‌کند m_{i+1} (، برای $i=1,\cdots,r-1$ و n_j عاد می‌کند n_{j+1} (، برای $n=1,\cdots,s-1$، و $m_i>1$ و $n_i>1$. می‌خواهیم نشان دهیم $r=s$ و $m_k=n_k$، برای $k=1,\cdots,r$ که این یکتایی ضرایب تاب را نشان می‌دهد. این کار در تمرینهای ۱۸ تا ۲۰ به انجام خواهد رسید.

*۱۸.۲۰ مشخص کنید که چگونه از یك تجزیهٔ ضرایب تاب می‌توان یك تجزیه به توانهای اول را به دست آورد. (مشاهده کنید که تمرینهای قبل نشان می‌دهند که توانهای اول به دست آمده منحصر به فردند.)

*۱۹.۲۰ با استفاده از تمرین ۱۸.۲۰ استدلال کنید که m_r و n_s را می‌توان به طریق زیر مشخص کرد. فرض کنید p_1 ، . . . و p_t مقسوم علیه‌های متمایز اول $|T|$ باشند، و فرض کنید $p_1^{h_1} \ldots p_t^{h_t}$ بزرگترین توانهای اعداد اول پدیدآمده در تجزیه به توانهای اول (منحصر به‌فرد) را داشته‌باشد. آنگاه $m_r = n_s = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_t^{h_t}$.

*۲۰.۲۰ m_{r-1} و n_{s-1} را مشخص کنید، و نشان دهید که مساوی هستند. در ادامهٔ آن نشان دهید که برای $i = 1, \ldots, r-1$ ، $m_{r-i} = n_{s-i}$ ، و این که $r = s$.

۲۱*

گروه آزاد

در این فصل و فصل بعد قسمتی از نظریهٔ گروهها را مورد بحث قرار می‌دهیم که نه تنها در جبر، بلکه در توپولوژی نیز بسیار مورد توجه است. در بارهٔ گروههای آزاد و نمایش گروهها می‌توان شرحی عالی و قابل فهم در کراول[1] و فاکس[2] [۴۵، فصول ۳ و ۴] پیدا کرد.

۱.۲۱* کلمه‌ها و کلمه‌های مختصر

فرض کنیم A مجموعه‌ای (نه‌لزوماً متناهی) از اعضای a_i برای $i \in I$ باشد. ما A را به‌عنوان یك **الفبا** و هر a_i را به‌عنوان یك **حرف** از این الفبا تصور می‌کنیم. هر نمادی به صورت a_i^n را که در آن $n \in Z$ یك **هجا** و هر تعداد متناهی هجا را که به دنبال هم نوشته شوند یك **کلمه** می‌نامیم. همچنین **کلمهٔ تهی** را معرفی می‌کنیم که در آن هیچ هجایی وجود ندارد.

مثال ۱.۲۱ فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. آنگاه، با پیروی از این قرارداد که a_i^1 همان a_i است،

$$a_3^2 \quad \text{و} \quad a_2^3a_2^{-1}a_3a_1^2a_1^{-7} \quad ، \quad a_1a_3^{-4}a_2^2a_3$$

همه کلمه خواهند بود □

---

1. Crowell 2. Fox

دو قاعدهٔ طبیعی برای پیرایش کلمات وجود دارند که آنها را **ادغامهای مقدماتی** می‌نامیم. اول قاعده‌ای است که به موجب آن $a_i^m a_i^n$ در یك کلمه، با a_i^{m+n} جایگزین می‌شود. قاعدهٔ دوم عبارت است از جایگزین کردن ۱ به جای هر a_i^0 موجود در یك کلمه، یعنی حذف a_i^0 از کلمه. با تعدادی متناهی ادغام مقدماتی هر کلمه را می‌توان به یك **کلمهٔ مختصر**، کلمه‌ای که در آن هیچ ادغام مقدماتی دیگری ممکن نباشد تبدیل کرد. توجه داشته باشید که این ادغامهای مقدماتی به‌طور صوری منجر به قواعد معمول محاسبات توانهای صحیح می‌گردند.

مثال ۲.۲۱ شکل مختصر کلمهٔ $a_2^3 a_2^{-1} a_3 a_1 a_1^{-7}$ از مثال ۱.۲۱ عبارت است از $a_2^2 a_3 a_1^{-5}$. □

در اینجا لازم است یك بار و برای همیشه گفته شود که ما از نکات بسیاری، که برخی از کتابها معمولا با بحثهای استقرایی کاملا پیچیده و تقسیم شده به چندین حالت، صفحات متعددی را به اثبات اختصاص می‌دهند، با بیانی اجمالی در می‌گذریم. مثلا، فرض کنید کلمه‌ای به شما داده شده و می‌خواهید شکل مختصر آن را پیدا کنید. ممکن است در بدو امر بتوان، چند ادغام مقدماتی متفاوت را به کار برد. از کجا می‌دانید که کلمهٔ مختصر به‌دست آمده، از ترتیب به‌کاربردن ادغامهای مقدماتی مستقل است. احتمالا دانشجویان پاسخ می‌دهند که این بدیهی است. ولی بعضی از مؤلفین کوشش وافری برای اثبات آن به‌کار می‌برند. نگارنده در اینجا تمایل به توافق با نظر دانشجویان دارد. او اثبات مطالبی از این قبیل را کسل کننده می‌داند و هیچگاه اثبات آنها به وی احساس آرامش بیشتری نداده است. به هرحال، نگارنده اولین کسی است که اذعان دارد ریاضیدان بزرگی نیست. جهت احترام به ریاضیدانهایی که احساس می‌کنند این گونه مطالب حتماً به بحث قابل ملاحظه‌ای نیازمند است، در موقع بیان چنین احکامی موقعیت را با عبارت «بدیهی به نظر می‌رسد که» و با حفظ علامتهای نقل قول مشخص خواهیم کرد.

۲.۲۱* گروه آزاد

فرض کنیم $F[A]$ مجموعهٔ تمام کلمه‌های مختصر حاصل از الفبای A باشد. به طریقی طبیعی از $F[A]$ یك گروه می‌سازیم. به‌ازای هردو کلمهٔ w_1 و w_2 از $F[A]$ کلمهٔ $w_1 w_2$ را کلمهٔ مختصر حاصل از توالی $w_1 w_2$ از دو کلمه تعریف می‌کنیم.

مثال ۳.۲۱ اگر

$$w_1 = a_2^3 a_1^{-5} a_3^2$$

و

$$w_2 = a_3^{-2} a_1^2 a_3 a_2^{-2}$$

آنگاه $w_1 \cdot w_2 = a_2^3 a_1^{-3} a_3 a_2^{-2}$. □

«بدیهی به نظر می‌رسد که» این عمل ضرب تعریف شدهٔ در $F[A]$ خوشتعریف و شرکتپذیراست. واضح است که کلمهٔ تهی ۱ به عنوان عضوی همانی عمل می‌کند. «بدیهی به نظر می‌رسد که» به‌ازای هر کلمهٔ مختصر مفروض w از $F[A]$ کلمهٔ w^{-1} حاصل از w با ابتدا نوشتن هجاهای w به‌ترتیب عکس و سپس، جایگزین کردن هر $a_i^{\pm}$ با $a_i^{\mp}$ نیز کلمه‌ای مختصر است، و داریم

$$w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$$

تعریف گروه $F[A]$ که اینك بیان شد، گروه‌آزاد تولید شده به‌وسیلهٔ A نام دارد.

به قضیهٔ ۹.۱ و تعریف قبل از آن مراجعه و ملاحظه کنید که معنای فعلی اصطلاح تولید شده با معنای قبلی آن سازگار است.

با انتخاب گروهی چون G و مجموعهٔ مولدی چون $\{a_i | i \in I\}$، ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا G بر مجموعهٔ $\{a_i\}$ آزاد است، یعنی، آیا G اساساً گروه‌آزاد تولید شده به وسیلهٔ $\{a_i\}$ است؟ ابتدا دقیقاً تعریف می‌کنیم که این یعنی چه.

تعریف اگر G گروهی با مجموعهٔ مولدی چون $A = \{a_i\}$ باشد و اگر G تحت نگاشتی چون $\phi : G \to F[A]$ با تعریف $a_i\phi = a_i$، با $F[A]$ ایزومورف باشد، آنگاه می‌گوییم G بر $\{a_i\}$ آزاداست و a_i ها مولدهای آزاد G هستند. یك گروه را آزادمی‌نامیم اگر بر مجموعه‌ای ناتهی چون $\{a_i\}$ آزاد باشد.

مثال ۴.۲۱ تنها گروه‌آزادی که قبلا آورده شده‌است گروه $\mathbf{Z}$ است که بر یك مولد، آزاد است. واضح است که هر گروه آزاد نامتناهی است. □

برای اثبات سه‌قضیهٔ بعد به منابع جبر مراجعه کنید. ما این‌قضیه‌ها را به‌کارنخواهیم برد. این احکام جالب صرفاً محض اطلاعتان بیان می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۲۱ اگر گروه G هم بر مجموعهٔ $\{a_i\}$ و هم بر مجموعهٔ $\{b_i\}$ آزاد باشد آنگاه تعداد اعضای $\{a_i\}$ با تعداد اعضای $\{b_i\}$ برابر است، یعنی هر دو مجموعهٔ مولدهای آزاد یك‌گروه‌آزاد دارای یك عدد اصلی هستند.

تعریف اگر G بر $\{a_i\}$ آزاد باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعهٔ $\{a_i\}$ را رتبهٔ گروه‌آزاد G می‌نامیم.
در واقع، با توجه به قضیهٔ ۱.۲۱، قضیهٔ بعدکاملا واضح می‌باشد.

قضیهٔ ۲.۲۱ دوگروه‌آزاد ایزومورف هستند، اگر و فقط اگر دارای یك رتبه‌باشند.

قضیهٔ ۳.۲۱ هر زیرگروه نابدیهی واقعی از گروهی آزاد خودآزاد است.

مثال ۵.۲۱ فرض کنیم $F[\{x,y\}]$ گروه آزاد بر $\{x,y\}$ باشد و برای $k \geqslant 0$

$$y_k = x^k y x^{-k}.$$

بدون هیچ اشکالی می‌توانید خود را متقاعد کنید که y_k ها برای $k \geqslant 0$، مولدهای آن زیرگروه از $F[\{x,y\}]$ هستند که خود تولید می‌کنند. این مثال روشن می‌کند که هرچند هر زیرگروه یك گروه آزاد خودآزاد است، اما رتبهٔ آن ممکن است به مراتب بزرگتر از رتبهٔ تمام گروه باشد! □

۳.۲۱* همومورفیسمهای گروههای آزاد

کارمان در اینجا عمدتاً دربارهٔ همومورفیسمهایی است که بر گروهی آزاد تعریف می‌شوند. نتایج به‌دست‌آمده ساده و زیبا هستند.

قضیهٔ ۴.۲۱ فرض کنیم G به وسیلهٔ $\{a_i | i \in I\}$ تولید شده و G' گروه دلخواهی باشد. اگر a'_i ها برای $i \in I$ اعضایی، نه لزوماً متمایز از G' باشند آنگاه حداکثر یك همومورفیسم $\phi : G \to G'$ وجود دارد که $a_i\phi = a'_i$. اگر G بر $\{a_i\}$ آزاد باشد آنگاه دقیقاً یك همومورفیسم بدین‌صورت وجود دارد.

برهان. فرض کنیم ϕ همومورفیسمی از G به توی G' باضابطهٔ $a_i\phi = a'_i$ باشد. اکنون بنا به قضیهٔ ۱.۹، هر عضو x از G را می‌توان به صورت

$$x = \prod_j a_{i_j}^{n_j}$$

نوشت که در آن طرف راست حاصلضربی متناهی از مولدهای a_i است و a^{i}_j های موجود در حاصلضرب لزوماً متمایز نیستند. چون ϕ همومورفیسم است، باید داشته باشیم

$$x\phi = \prod_j (a_{i_j}^{n_j})\phi = \prod_j (a'_{i_j})^{n_j}.$$

بنابراین هر همومورفیسم ϕ با مقدارهای آن در اعضای یك مجموعهٔ مولد کاملا تعیین می‌شود. این نشان می‌دهد که حداکثر یك همومورفیسم با ضابطهٔ $a_i\phi = a'_i$ وجود دارد.

اکنون فرض کنیم G بر مجموعهٔ $\{a_i\}$ آزاد باشد، یعنی $G = F[\{a_i\}]$. برای عضو

$$x = \prod_j a_{i_j}^{n_j}$$

از G، نگاشت $\psi : G \to G'$ را با ضابطهٔ

$$x\psi = \prod_j (a'_{i_j})^{n_j}$$

تعریف می‌کنیم. این نگاشت خوشتعریف است، چون $F[\{a_i\}]$ دقیقاً از کلمه‌های مختصر تشکیل می‌شود و هیچ دو حاصلضرب صوری متفاوتی در $F[\{a_i\}]$ برابر نیستند. با توجه بدین‌که قواعد محاسبهٔ توانها در G' به‌طور صوری همانند قواعد محاسبهٔ توانهـا در G هستند، واضح است‌که برای هر x و y از G، $(xy)\psi = (x\psi)(y\psi)$ وبنابراین ψ در واقع یك همومورفیسم است. □

شاید بهتر بود قسمت اول این‌قضیه را به جای ارجاع به بخش تمرینها، قبلا ثابت می‌کردیم. توجه‌کنیدکه این قضیه حـاکی است که هر همومورفیسم یك گروه کاملا تعیین می‌شود، درصورتی‌که مقدارش در هر عضو یك مجموعهٔ مولد از گروه مشخص باشد. این‌مطلب واقعاً خیلی بدیهی است و می‌توانست بلا فـاصله پس از تعریف همومورفیسم بیان شود. بالاخص هر همومورفیسم یك‌گروه دوری با مقدارش در هر یك از مولدهای گـروه کاملا تعیین می‌شود.

قضیهٔ ۵.۲۱ هرگروه G' تصویر همومورف گروهی‌آزاد چون G است.

برهان. فرض‌کنیم $G' = \{a'_i\}$ و $\{a_i\}$ مجموعه‌ای با همان تعداد عضو چون G' باشد. فرض‌کنیم $G = F[\{a_i\}]$. آنگاه بنا به قضیهٔ ۴.۲۱، همومورفیسمی چون $\psi : G \to G'$ با ضابطهٔ $a_i\psi = a'_i$ وجود دارد. واضح است‌که تحت ψ تصویر G تمام G' است. □

* ۴.۲۱ نگاهی دیگر به‌گروه آبلی آزاد

این مهم‌است‌که مفهوم گروه‌آزاد را با مفهوم گروه‌آبلی‌آزاد خلط نکنید. یك گروه‌آزاد بر بیش از یك مولدآبلی نیست. در فصل قبل، گروه‌آبلی‌آزاد را به عنوان گروهی‌آبلی کـه مبنایی، یعنی مجموعهٔ مولدی واجد خواص مذکور در قضیهٔ ۱.۲۰، دارد تعریف‌کردیم. برای مطالعهٔ گروه‌آبلی‌آزاد، از طریق گروههای‌آزاد راه دیگری هم وجود دارد. اکنون به بیان این راه می‌پردازیم.

فرض‌کنیم $F[A]$ گروه‌آزاد بر مجموعهٔ A باشد. فعلا به جـای $F[A]$ می‌نویسیم F. دقت‌کنیدکه اگر A بیش از یك عضو داشته بـاشد F آبلی نیست. فرض‌کنیم F' زیرگروه برگردان F باشد. آنگاه F/F گروهی‌آبلی است، و پر واضح است‌که گروه آبلی‌آزادی است بـا مبنای $\{a+F' | a \in A\}$. اگر به $a+F$ نـام جدید a بدهیم، می‌توانیم F'/F را به‌عنوان گروه‌آبلی‌آزادی بـا مبنای A در نظر بگیریم. این نشان می‌دهدکه گروه‌آبلی‌آزادی بـا مبنایی مفروض را چگونه می‌توان ساخت. هر گروه‌آبلی آزاد را، در حد ایزومورفیسم، می‌توان با این مدل ساخت. یعنی، اگر G آبلی‌آزاد با

مبنای X باشد، گروه آزاد $F[X]$ را تشکیل می‌دهیم، گروه خارج قسمت $F[X]$ به هنگ زیر گروه برگردان آن را تشکیل می‌دهیم، و آنگاه گروهی ایزومورف با G را به دست خواهیم آورد.

قضیه‌های ۱.۲۱، ۲.۲۱ و ۳.۲۱ هم برای گروههای آبلی آزاد برقرار هستند و هم برای گروههای آزاد. در حقیقت، نسخهٔ آبلی قضیهٔ ۳.۲۱ در حالت رتبهٔ متناهی در قضیهٔ ۶.۲۰ ثابت شد. برخلاف مثال ۵.۲۱ در مورد گروههای آزاد، این یك واقعیت است که در مورد گروههای آبلی آزاد، رتبهٔ هر زیر گروه حداکثر رتبهٔ تمام گروه است. قضیهٔ ۶.۲۰ این مطلب را در حالت رتبهٔ متناهی نشان داد.

تمرین

*۱.۲۱ صورت مختصر و معکوس صورت مختصر هر یك از کلمه‌های زیر را پیدا کنید.

ا) $a^2b^{-1}b^3a^3c^{-1}c^4b^{-2}$ ب) $a^2a^{-3}b^3a^4c^4e^2a^{-1}$.

*۲.۲۱ در حالتی که $\{a,b,c\}$ یك مجموعهٔ مولد تشکیل دهندهٔ یك مبنا برای یك گروه آبلی آزاد، باشد، حاصلضربهای مذکور در قسمتهای (ا) و (ب) از تمرین ۱.۲۱ را حساب کنید. معکوس هر یك از این دو حاصلضرب را نیز بیابید.

*۳.۲۱ چندهمومورفیسم متفاوت از گروهی آزاد با رتبهٔ ۲ بتوی هریك از گروههای زیر وجود دارد؟

ا) $\mathbb{Z}_4$ ، ب) $\mathbb{Z}_6$ ، ج) S_3

*۴.۲۱ چند همومورفیسم متفاوت از گروهی آزاد با رتبهٔ ۲ بروی هر یك از گروههای ذیل وجود دارد؟

ا) $\mathbb{Z}_4$ ، ب) $\mathbb{Z}_6$ ، ج) S_3.

*۵.۲۱ چند همومورفیسم متفاوت از گروهی آزاد با رتبهٔ ۲ بروی هر یك از گروههای زیر وجود دارد؟

ا) $\mathbb{Z}_4$ ، ب) $\mathbb{Z}_6$ ، ج) S_3.

*۶.۲۱ چندهمومورفیسم متفاوت از گروهی آبلی آزاد با رتبهٔ ۲ بروی هریك از گروههای زیر وجود دارد؟

ا) $\mathbb{Z}_4$ ، ب) $\mathbb{Z}_6$ ، ج) S_3.

+*۷.۲۱ یکی از موارد عبارت «بدیهی به‌نظر می‌رسد» موجود در این فصل را در نظر

بگیرید و عکس‌العمل خود را بیان کنید.

*۸.۲۱ درستی یا نادرستی هر یك از گزاره های زیر را تعیین کنید.

— ا) هرزیر گروه واقعی از گروهی آزاد یك گروه آزاد است.

— ب) هر زیر گروه واقعی از هر گروه آبلی آزاد گروهی آزاد است.

— ج) تصویر همومورف هر گروه آزاد، گروهی آزاد است.

— د) هر گروه آبلی آزاد مبنایی دارد.

— ه) گروههـای آبلی آزاد با رتبهٔ متناهی دقیقاً همان گروههـای آبلی متناهیاً تولید شده هستند.

— و) هیچ گروه آزادی آبلی نیست.

— ز) هیچ گروه آبلی آزادی، آزاد نیست.

— ح) هیچ گروه آبلی آزاد با رتبهٔ بزرگتر از ۱ آزاد نیست.

— ط) هر دو گروه آزاد ایزومورف هستند.

— ی) هر دو گروه آبلی آزاد همرتبه ایزومورف هستند.

---

*۹.۲۱ فرض کنید G گروه آبلی متناهیاً تولید شده‌ای با عضو همانی ۰ باشد. مجموعه‌ای متناهی چون $\{b_1,\dots,b_n\}$ از اعضای G **مبنایی برای** G است اگر $\{b_1,\dots,b_n\}$ گروه G را تولید کند و $\sum_{i=1}^{n} m_i b_i = 0$ اگر و فقط اگر $m_i b_i = 0$ که در آنها $m_i \in \mathbf{Z}$.

ا) نشان دهید که $\{2,3\}$ مبنایی برای $\mathbf{Z}_4$ نیست. مبنایی برای $\mathbf{Z}_4$ بیابید.

ب) نشان دهید که $\{1\}$ و $\{2,3\}$ مبناهایی برای $\mathbf{Z}_6$ هستند. (این نشان می‌دهد که درمورد یك گروه آبلی متناهیاً تولید شدهٔ با تاب چون G، تعداد اعضای مبناهای متفاوت ممکن است تغییر کند، یعنی لازم نیست که یك پایای گروه G باشد.)

ج) آیا مبنای هر گروه آبلی آزاد طبق تعریفی که در متن آمد با تعریف مبنا در این تمرین مطابقت دارد؟

د) نشان دهید که هر گروه آبلی متناهی، مبنایی چون $\{b_1,\dots,b_n\}$ دارد که مرتبهٔ b_i مرتبهٔ b_{i+1} را عاد می‌کند. می‌توانید از تمام قضیه‌های متن، حتی آنهـا که ثابت هم نشده‌اند استفاده کنید.

روش معاصر در عرضهٔ جبر، که اغلب (بالاخص به وسیلهٔ پیروان ن. بورباکی[1]) برای معرفی یك موجود جدید جبری به‌کار برده می‌شود چنین است.

۱. بیان خواصی جبری که این موجود جدید باید واجدشان باشد

۲. اثبـات این‌که هر دو موجود جبری واجد این خواص، ایزومورف هستند؛ یعنی، این

---

1. N. Bourbaki

خواص موجود را مشخص می‌کنند.
۳. نشان دادن این‌که حداقل یکی از این موجودها وجود دارد.
سه تمرین بعد این روش را درمورد سه‌موجود جبری‌که همهٔ دانشجویان قبلا آنها را دیده‌اند، روشن می‌سازند. برای این‌که نـامشان را افشا نکنیم ، در دو تمرین اول و دوم ، از اسامی ساختگی استفاده می‌کنیم . در قسمت‌آخر این دو تمرین ، اسامی واقعی‌آنهـا را از شمـا جویا می‌شویم.

***۱۰.۲۱** فرض‌کنید G یك‌گروه بـاشد . گروهی‌آبلی چون G^* را یك **گروه بلیپ** G گوییم در صورتی‌که همومورفیسم ثـابتی چون ϕ از G بروی G^* وجود داشته بـاشد به طوری‌که هر همومورفیسم ψ از گـروه G بتوی یك‌گروه‌آبلی G' را بتوان به‌صورت $\psi=\phi\theta$ ، که درآن θ همومورفیسمی از G^* بتوی G' است ، تجزیه‌کرد . (شکل ۱.۲۱ ملاحظه شود.)
ا) نشان دهیدکه هردو گـروه بلیپ G ایزومورف هستند. [راهنمایی: فرض‌کنید G_1^* و G_2^* دو گروه بلیپ G باشند. آنگاه هر یك از همومورفیسمهای ثابت $\phi_1:G\to G_1^*$ و $\phi_2:G\to G_2^*$ می‌تواند از طریق گروه بلیپ دیگر ، بنا به تعریف گروه بلیپ ، تجزیه شود ؛ یعنی ، $\phi_1=\phi_2\theta_1$ و $\phi_2=\phi_1\theta_2$. نشان دهیدکـه θ_1 ایزومورفیسمی از G_2^* بروی G_1^* است. تمرین ۱۶.۱۳ را به‌کار ببرید.]
ب) نشان‌دهیدکه هر گروه G گروه بلیپی چون G^* دارد.
ج) کدام یك از مفاهیمی‌که مـا قبلا معـرفی کـرده‌ایم بـا مفهوم‌گروه بلیپ G مطابقت دارد.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & G' \\ & G^* \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

شکل ۱.۲۱

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & G' \\ & G \arrow[ur, "\phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

شکل ۲.۲۱

***۱۱.۲۱** فرض‌کنید S مجموعه‌ای دلخواه باشد. گروهی چون G همراه با تابع ثابتی چون $g:S\to G$ یك **گروه بلاپ‌بر** S تشکیل می‌دهند ، اگـر برای هـر گروه G' و هر نگـاشت $f:S\to G'$ همومورفیسم منحصربه‌فردی چون ϕ_f از G بتوی G' وجـود داشته باشد به‌طوری‌که $f=g\phi_f$ (شکل ۲.۲۱ ملاحظه شود.)
ا) فرض‌کنید S مجموعهٔ ثـابتی بـاشد . نشان دهیدکه اگر گروه G_1 همراه بـا تـابع $g_1:S\to G_1$ و گـروه G_2 همراه با تابع $g_2:S\to G_2$ دو گروه بلاپ‌بر S باشند، آنگاه G_1 و G_2 ایزومورف هستند . [راهنمایی: نشان دهیدکـه g_1 و g_2 نگـاشتهایی یك به یك هستند و Sg_1 و Sg_2 به ترتیب G_1 و G_2 را تولید می‌کنند. آنگاه به‌طریق

مشابه آنچه که در راهنمایی تمرین ۱۰.۲۱ گفته شد، کار را ادامه دهید.]

ب) فرض کنید S یك مجموعه باشد. نشان دهید که یك گروه بلاپ بر S وجود دارد. شما می‌توانید هر قضیه‌ای از متن را به‌کار ببرید.

ج) کدام یك از مفاهیمی که قبلا تعریف شده‌اند با مفهوم گروه بلاپ بر S مطابقت دارد.

*۱۲.۲۱ یك گروه آبلی آزاد را با استفاده از خواصش، شبیهٔ آنچه در تمرین ۱۱.۲۱ به‌کار گرفته شد، مشخص کنید.

۲۲*

نمایش گروه

۱.۲۲* تعریف

به‌پیروی از اغلب منابع نمایش گروه، در این فصل عضو همانی گروه را ۱ می‌گیریم. ایدهٔ نمایش گروه عبارت است از تشکیل یك گروه با ارائهٔ مجموعه‌ای از مولدهای گروه و تساویها یا رابطه‌های معینی که می‌خواهید مولدها درآنها صدق کنند. انتظار دارید که گروه تا آنجاکه ممکن است مشروط به این روابط داده شدهٔ بر مولدها آزاد باشد.

مثال ۱.۲۲ فرض کنیم G دارای مولدهای x و y است و بجز درمورد رابطهٔ $xy=yx$ آزاد است. این رابطه را به‌صورت $xyx^{-1}y^{-1}=1$، هم می‌توان بیان کرد. واضح است هرچند $xyx^{-1}y^{-1}$ تنها یکی‌از برگردانهای بسیار $F[\{x,y\}]$ است، $xy=yx$ دقیقاً چیزی است که برای تعویض‌پذیر ساختن G مورد نیاز است. بنابراین G آبلی‌آزاد است بر دو مولد و با $F[\{x,y\}]$ به هنگ زیرگروه برگردانش ایزومورف است. این زیر گروه برگردان $F[\{x,y\}]$ کوچکترین زیرگروه نورمال شامل $xyx^{-1}y^{-1}$ است، زیرا هر زیرگروه نورمال شامل $xyx^{-1}y^{-1}$ خارج قسمتی را به‌دست می‌دهد که آبلی است، و از اینرو بنابه قضیهٔ ۶.۱۲ شامل زیرگروه برگردان هم هست. □

مثال قبل وضعیت عمومی را روشن می‌سازد. فرض کنید $F[A]$ گروهی آزاد باشد و فرض کنید می‌خواهید گروه جدیدی را بسازید که تا آنجاکه ممکن است شبیهٔ $F[A]$ باشد، مشروط بر این که تساویهای معینی برقرار باشند. هر تساوی را می‌توان به‌صورتی نوشت که طرف دومش یك باشد. از اینرو می‌توان تساویها را به صورت $r_i=1$، که

$r_i \in F[A]$، فرض کرد. واضح است که، اگر بخواهید $r_i = 1$، آنگاه به‌ازای هر x از $F[A]$ و n از $\mathbf{Z}$ باید داشته باشید

$$x^{-1}(r_i^n)x = 1.$$

همچنین هرحاصلضربی از اعضای مساوی ۱ باید مساوی ۱ باشد. بنابراین هرحاصلضرب متناهی به صورت

$$\prod_j x_j^{-1}(r_{i_j}^{n_j})x_j,$$

که درآن لازم نیست r_{i_j} ها متمایز باشند، باید در گروه جدید مساوی ۱ باشد. امتحان این که مجموعهٔ تمام این حاصلضربهای متناهی زیرگروهی نورمال چون R از $F[A]$ است بسیارآسان است. بنابراین در هر گروهی که حتی‌الامکان شبیه $F[A]$ باشد، مشروط بر شرایط $r_i = 1$، به‌ازای هر r از R نیز باید داشته باشیم $r = 1$. اما $F[A]/R$ به $F[A]$ شباهت دارد (به خاطر داشته باشید که همدسته‌ها را با انتخاب معرفها در هم ضرب می‌کنیم) بجز این که R برای تشکیل عضو همانی ۱ در هم فرو ریخته است. بنابراین گروهی که به دنبال آن هستیم (حداقل ایزومورف با $F[A]/R$) است. این گروه را می‌توانیم به عنوان گروه تولیدشده به‌وسیلهٔ مجموعهٔ مولد A و مجموعهٔ $\{r_i\}$ در نظر بگیریم.

تعریف فرض کنیم A یك مجموعه باشدو $\{r_i\} \subseteq F[A]$. فرض کنیم R کوچکترین زیرگروه نورمال شامل r_i از $F[A]$ باشد. ایزومورفیسمی چون ϕ از $F[A]/R$ بروی گروهی چون G یك نمایش G نامیده می‌شود. مجموعه‌های A و $\{r_i\}$ یك نمایش گروه را عرضه می‌دارند. مجموعهٔ A مجموعهٔ مولدهای این نمایش و هر r_i یك رابط خوانده می‌شود. هر r از R یك حاصل از $\{r_i\}$ است. هر تساوی $r_i = 1$ یك رابطه است. یك نمایش متناهی این است که A و $\{r_i\}$ هردو مجموعه‌هایی متناهی باشند.

ممکن است تعریف پیچیده به نظر آید، اما واقعاً این‌طور نیست. در مثال ۱.۲۲، $\{x, y\}$ مجموعهٔ مولدها و $xyx^{-1}y^{-1}$ یك رابط است. تساوی $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ یا $xy = yx$، یك رابطه است. این مثالی از یك نمایش متناهی است.

اگر یك نمایش گروه دارای مولدهای x_j و رابطهای r_i باشد، نمادهای

$$(x_j : r_i = 1) \qquad \text{یا} \qquad (x_j : r_i)$$

را برای نمایش گروه به‌کار خواهیم برد. به $F[\{x_j\}]/R$ به عنوان گروه با نمایش $(x_j : r_i)$ ارجاع خواهیم داد.

*۲.۲۲ نمایشهای ایزومورف

مثال ۲.۲۲ نمایش گروه با

$$\{r_i\}=\{a^6\} \qquad \text{و} \qquad A=\{a\}$$

یعنی ، نمایش

$$(a:a^6=1)$$

را در نظر می گیریم. این گروه که با یك مولد a ، و با رابطهٔ $a^6=1$ ، تعریف می‌شود ، به وضوح با $\mathbf{Z}_6$ ایزومورف است.

اکنون گروه تعریف شده با دومولد a و b ، با روابط $a^2=1$، $b^3=1$، $ab=ba$، یعنی گروه با نمایش

$$(a,b:a^2,b^3,aba^{-1}b^{-1})$$

را درنظرمی گیریم. شرط $a^2=1$ نتیجه می‌دهد $a^{-1}=a$ وشرط $b^3=1$ نتیجه می‌دهد $b^{-1}=b^2$. پس هر عضو این گروه را می‌توان به‌صورت توانهای نامنفی a و b نوشت. رابطهٔ $aba^{-1}b^{-1}=1$ ، یعنی $ab=ba$ ، به‌ما اجازه می‌دهد که ابتدا تمام عاملهای شامل a و سپس تمام عاملهای شامل b را بنویسیم. بنابراین هرعضو گروه با حاصلضربی چون $a^m b^n$ مساوی است. اما $a^2=1$ و $b^3=1$ نشان می‌دهند که درست ۶ عضو متمایز وجود دارد :

$$1,b,b^2,a,ab,ab^2$$

بنابراین این نمایش هم گروهی از مرتبهٔ ۶ را به‌دست می‌دهد که آبلی‌است ، و بنا به قضیهٔ ۳.۹ این‌هم باید دوری و ایزومورف با $\mathbf{Z}_6$ باشد. □

مثال قبل نشان می‌دهد که ممکن است نمایشهای متفاوتی گروههای ایزومورف را ارائه دهند. وقتی چنین روی دهد، ما **نمایشهای ایزومورف** خواهیم داشت. تعیین این که آیا دو نمایش ایزومورف هستند ممکن است خیلی دشوار باشد. اخیراً نشان داده شده است (رابین[1] [۲۲] ملاحظه شود) که تعدادی از این مسائل در ارتباط با این نظریه عموماً قابل حل نیستند ، یعنی ، روشی عادی و خوشتعریف برای کشف یك راه حل در تمام حالات وجود ندارد. این مسائل جلناپذیر مشتملند بر مسأله تشخیص این که آیا دو نمایش ایزومورف هستند ، آیا گروه عرضه شدهٔ با یك نمایش متناهی ، آزاد ، آبلی یا بدیهی‌است و همچنین مشتملند بر مسأله مشهور مسأله کلمه برای تعیین این که آیا یك کلمهٔ مفروض r حاصلی از مجموعهٔ مفروض کلماتی چون $\{r_i\}$ هست یا نه.

---

1. Rabin

اهمیت این مطالب در قضیهٔ ۵.۲۱ مشخص می‌شود که تضمین می‌کند هر گروه نمایشی دارد.

مثال ۳.۲۲ نشان می‌دهیم که

$$(x,\ y : y^2x = y,\ yx^2y = x)$$

نمایشی از گروه متناهی یك عضوی است. تنها احتیاج داریم نشان دهیم که x و y حاصل رابطهای y^2xy^{-1} و yx^2yx^{-1} هستند، یا این که $x=1$ و $y=1$ را می‌توان از $y^2x=y$ و $yx^2y=x$ به‌دست آورد. هردو روش را روشن می‌سازیم.

به‌عنوان حاصلی از y^2xy^{-1}، yx را بامزدوجگیری به‌وسیلهٔ y به‌دست می‌آوریم. از yx می‌توان $x^{-1}y^{-1}$ را به‌دست‌آورد، و سپس $(x^{-1}y^{-1})(yx^2yx^{-1})$، xyx^{-1} را به دست می‌دهد. با مزدوجگیری xyx^{-1} به وسیلهٔ x، y را پیدا می‌کنیم. از y، y^{-1} به‌دست می‌آید، و $y^{-1}(yx)$ همان x است.

با کار کردن با رابطه‌ها بجای رابطها، از $y^2x=y$ با ضرب از چپ در y^{-1}، $yx=1$ را به‌دست می‌آوریم. باقراردادن $yx=1$ در $yx^2y=x$، یعنی $(yx)(xy)=x$ نتیجه می‌گیریم $xy=x$. سپس با ضرب از چپ در x^{-1} خواهیم داشت $y=1$. با جایگزینی در $yx=1$ به‌دست می‌آوریم $x=1$.

هردو روش به‌یك مقدارکار می‌انجامند، اما به‌دلیلی به‌نظر اغلب ما می‌رسد که‌کار با رابطه‌ها طبیعی‌تر است. □

۳.۲۲* کاربرد

این فصل را با دو مثال خاتمه می‌دهیم.

مثال ۴.۲۲ تمام گروههای‌از مرتبهٔ ۱۰ رادرحدایزومورفیسم تعیین‌می‌کنیم. بنا به قضیهٔ ۳.۹ می‌دانیم که هر گروه آبلی از مرتبهٔ ۱۰ با $\mathbf{Z}_{10}$ ایزومورف است. فرض‌کنیم G گروهی ناآبلی‌از مرتبهٔ ۱۰ باشد. بنا به‌نظریهٔ سیلو، G زیر گروهی چون H از مرتبهٔ ۵ دارد، و H باید دوری باشد. فرض‌کنیم a مولدی از H باشد. بنابراین G/H از مرتبهٔ ۲ واز اینرو با $\mathbf{Z}_2$ ایزومورف است. اگر $b\in G$ و $b\neq H$، باید داشته باشیم $b^2\in H$. چون هرعضو H بجز ۱ دارای مرتبهٔ ۵ است، اگر b^2 مساوی ۱ نباشد، آنگاه b^2 از مرتبهٔ ۵ خواهدبود، از اینرو b باید مرتبهٔ ۱۰ داشته باشد. این، چنین معنی می‌دهد که G دوری خواهد بود، متناقض‌بافرضمان که G آبلی‌نیست. پس $b^2=1$. سرانجام، چون H زیر گروه‌نورمالی از G است، $bHb^{-1}=H$؛ از اینرو بالاخص، $bab^{-1}\in H$. چون مزدوجگیری به‌وسیلهٔ b^{-1} اتومورفیسمی از H است، bab^{-1} بایدعضو مرتبهٔ ۵ دیگری از H باشد، بنابراین bab^{-1} مساوی a، a^2، a^3 یا a^4 است. اما $bab^{-1}=a$ نتیجه خواهد داد $ba=ab$، و

واضح است که G آبلی خواهد بود، چون a و b گروه G را تولید می‌کنند. بنابراین امکانهای نمایش G عبارتند از

۱. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b)$،

۲. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3 b)$،

۳. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4 b)$.

توجه کنید که این نمایشها، هر سه، گروهی از مرتبهٔ حداکثر ۱۰ می‌توانند تولید کنند، زیرا رابطهٔ $ba = a^i b$ ما را قادر می‌سازد که هر حاصلضربی از aها و bها را به صورت $a^a b^b$ بیان کنیم. آنگاه $a^5 = 1$ و $b^2 = 1$ نشان می‌دهند که مجموعهٔ

$$S = \{a^0 b^0, a^1 b^0, a^2 b^0, a^3 b^0, a^4 b^0, a^0 b^1, a^1 b^1, a^2 b^1, a^3 b^1, a^4 b^1\}$$

شامل تمام اعضای G است.

هنوز واضح نیست که تمام این اعضای S متمایز هستند تا در هر سه حالت گروهی از مرتبهٔ ۱۰ داشته باشیم. برای مثال گروه با نمایش

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b)$$

گروهی را به‌دست می‌دهد که در آن، با استفاده از شرکتپذیری، داریم

$$a = b^2 a = (bb)a = b(ba) = b(a^2 b) = (ba)(ab)$$
$$= (a^2 b)(ab) = a^2(ba)b = a^2(a^2 b)b = a^4 b^2 = a^4 .$$

پس در این گروه، $a = a^4$، از اینرو $a^3 = 1$، که همراه با $a^5 = 1$ نتیجه می‌دهد $a^2 = 1$. اما $a^2 = 1$ همراه با $a^3 = 1$ به معنی $a = 1$ است. بنابراین هر عضو گروه با نمایش

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ab = a^2 b)$$

مساوی ۱ یا b است، یعنی، این گروه با $\mathbf{Z}_2$ ایزومورف است. بررسی مشابهی درمورد

$$(bb)a = b(ba)$$

برای

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ab = a^3 b)$$

نشان می‌دهد که مجدداً $a = a^4$، از اینرو این یکی هم گروهی ایزومورف با $\mathbf{Z}_2$ را به‌دست می‌دهد. تنها

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4 b)$$

به عنوان نامزدی برای گروهی ناآبلی از مرتبهٔ ۱۰ باقی می‌ماند. در این حالت، می‌توان نشان داد که تمام اعضای S متمایزند، از اینرو این نمایش حتماً گروهی از مرتبهٔ ۱۰ را

عرضه می‌دارد. چگونه می‌توان نشان داد که همهٔ اعضای S اعضای متمایز G را معرفی می‌کنند. راه ساده این است که ملاحظه کنیم حداقل یك گروه ناآبلی از مرتبهٔ ۱۰ وجود دارد، گروه دو وجهی D_5. چون G تنها نامزد باقیمانده‌است، باید داشته‌باشیم $G \simeq D_5$. روش دیگر به شرح زیر است. ابتدا سعی می‌کنیم با تعریف $(a^t b^t)(a^u b^v)$ مساوی $a^x b^y$، از S یك‌گروه بسازیم؛ در این تعریف برمبنای لم ۱.۶، x باقیماندهٔ تقسیم $s+u(۴^t)$ بر ۵ است و y باقیماندهٔ تقسیم $t+v$ بر ۲. به‌عبارت دیگر، رابطهٔ $ba=a^۴b$ را به‌عنوان راهنمایی برای تعریف حاصلضرب $(a^s b^t)(a^u b^v)$ از دو عضو S قرار می‌دهیم. به‌آسانی دیده می‌شود که $a^۰b^۰$ به‌عنوان عضو همانی عمل می‌کند، و به‌ازای عضومفروض $a^u b^v$، می‌توان t و s را متوالیاً با قراردادن

$$t \equiv -v \pmod ۲$$

و سپس

$$s \equiv -u\,(۴^t) \pmod ۵$$

تعیین کرد که $a^s b^t$ را به دست می‌دهد و معکوس چپی برای $a^u b^v$ است. آنگاه ساختار گروهی بر s خواهیم داشت اگر و فقط اگر قانون شرکتپذیری برقرار باشد. در تمرین ۷.۲۲ از شما می‌خواهیم که محاسبهٔ مستقیم شرکتپذیری را انجام دهید و شرطی برای S کشف کنید که تحت چنین تعریفی از ضرب یك گروه بشود. ملاك تمرین در این حالت به برقراری همنهشتی

$$۴^۲ \equiv ۱ \pmod ۵$$

تبدیل می‌شود. پس حتماً گروهی از مرتبهٔ ۱۰ به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که

$$۲^۲ \not\equiv ۱ \pmod ۵$$

و

$$۳^۲ \not\equiv ۱ \pmod ۵,$$

از اینرو تمرین ۷.۲۲ همچنین نشان می‌دهد که

$$(a,\ b : a^۵ = ۱,\ b^۲ = ۱,\ ba = a^۲b)$$

و

$$(a,\ b : a^۵ = ۱,\ b^۲ = ۱,\ ba = a^۳b)$$

گروههایی از مرتبهٔ ۱۰ به‌دست نمی‌دهند. □

مثال ۵.۲۲ تمام گروههای از مرتبهٔ ۸ را، درحدایزومورفیسم، تعیین می‌کنیم. سه گروه آبلی ممکن از مرتبهٔ ۸ را می‌شناسیم:

$$\mathbf{Z}_۸,\quad \mathbf{Z}_۲ \times \mathbf{Z}_۴,\quad \mathbf{Z}_۲ \times \mathbf{Z}_۲ \times \mathbf{Z}_۲.$$

با استفاده از مولدها و رابطه‌ها، نمایش گروههای ناآبلی را ارائه می‌کنیم.

فرض کنیم G ناآبلی از مرتبهٔ ۸ باشد. چون G غیرآبلی‌است، عضوی ازمرتبهٔ ۸ ندارد، پس هر عضو غیر همانی، از مرتبهٔ ۲ یا ۴ است. اگر مرتبهٔ هر عضو ۲ باشد، آنگاه برای a و b از G، خواهیم داشت $abab=1$. آنگاه چون همچنین $a^2=1$ و $b^2=1$، خواهیم داشت

$$ba=a^2bab^2=a(ab)^2b=ab,$$

که خلاف آبلی بودن G است. پس G عضوی از مرتبهٔ ۴ دارد.

فرض کنیم $\langle a\rangle$ یك زیرگروه مرتبهٔ ۴ از G باشد. اگر $b\notin\langle a\rangle$، همدسته‌های $\langle a\rangle$ و $b\langle a\rangle$ تمام G هستند. بنابراین a و b مولدهایی برای G هستند و $a^4=1$. چون $\langle a\rangle$ در G نورمال‌است (بنا به‌نظریهٔ سیلو، یا چون اندیس آن۲است)، $G/\langle a\rangle$ با $\mathbf{Z}_2$ ایزومورف است و داریم $b^2\in\langle a\rangle$، اگر $b^2=a$ یا $b^2=a^3$، آنگاه مرتبهٔ b باید ۸ باشد. پس $b^2=1$ یا $b^2=a^2$. سرانجام چون $\langle a\rangle$ نورمال است داریم $bab^{-1}\in\langle a\rangle$؛ و چون $b\langle a\rangle b^{-1}$ هم یك زیرگروه مزدوج با $\langle a\rangle$ است، و درنتیجه ایزومورف با $\langle a\rangle$، می‌بینیم که bab^{-1} باید عضوی از مرتبهٔ ۴ باشد؟ پس $bab^{-1}=a$ یا $bab^{-1}=a^3$. اگر bab^{-1} مساوی a باشد، آنگاه ba مساوی ab خواهد شد، که G را آبلی می‌سازد. پس $bab^{-1}=a^3$ و لذا $ba=a^3b$. بنابراین دو امکان برای G داریم:

$$G_1=(a,\ b: a^4=1,\ b^2=1,\ ba=a^3b)$$

و

$$G_2=(a,\ b: a^4=1,\ b^2=a^2,\ ba=a^3b).$$

توجه کنید که $a^{-1}=a^3$ و b^{-1} در G_1 مساوی با b و در G_2 مساوی با b^3 است. این احکام، همراه با رابطهٔ $ba=a^3b$، ما را قادر می‌سازد که هر عضو G_i را به صورت a^mb^n بیان کنیم؛ مانند مثالهای ۲.۲۲ و ۴.۲۲. چون $a^4=1$ ونیزیا $b^2=1$ یا $b^2=a^2$، اعضای ممکن در هر گروه عبارت‌اند از

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ab,\ a^2b,\ a^3b.$$

بنابراین G_1 و G_2 هر یك حداکثر از مرتبهٔ ۸ است. این‌که G_1 گروهی از مرتبهٔ ۸ است می‌تواند از تمرین ۷.۲۲ دیده شود. استدلالی شبیه آنچه درتمرین۷.۲۲ به‌کار رفت نشان می‌دهد که G_2 هم مرتبهٔ ۸ دارد.

چون $ba=a^3b\neq ab$، ملاحظه می‌کنیم که هر دوگروه ناآبلی هستند. این‌که دو گروه ایزومورف نیستند ازاین واقعیت ناشی می‌شود که G_1 فقط دوعضو ازمرتبهٔ ۴ دارد؛ به‌نام a و a^3. از طرف دیگر، در G_2 تمام اعضا غیر از ۱ و a^2، از مرتبهٔ ۴ هستند. محاسبهٔ جدولهای این دو گروه را به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم که در تمرین ۳.۲۲ آنها را عرضه نمایید. برای روشن‌شدن، فرض کنید می‌خواهید $(a^2b)(a^3b)$ را حساب کنید. با

استفادهٔ مکرر از $ba=a^3b$، به‌دست می‌آوریم:

$$(a^2b)(a^3b)=a^2(ba)a^2b=a^5(ba)ab=a^8(ba)b=a^{11}b^2 .$$

آنگاه برای G_1 داریم

$$a^{11}b^2=a^{11}=a^3,$$

در حالی‌که در G_2 به‌دست می‌آوریم

$$a^{11}b^2=a^{13}=a .$$

گروه G_1 **گروه هشتین** است و چیزی جز دوست قدیمیمان گروه D_4 از تقارنهای مربع نیست. گروه G_2 **گروه کواترنیون** نام دارد؛ وجه تسمیه در بخش ۴.۲۵ بیان خواهد شد[1]. □

تمرین

***۱.۲۲** نمایشی از $\mathbf{Z}_4$ ارائه دهید که شامل یك مولد باشد؛ شامل دو مولد باشد؛ شامل سه مولد باشد.

***۲.۲۲** نمایشی از S_3 شامل سه مولد ارائه دهید.

***۳.۲۲** جدولهای گروه هشتین

$$(a,\ b : a^4=1,\ b^2=1,\ ba=a^3b)$$

و گروه کواترنیون

$$(a,\ b : a^4=1,\ a^2=b^2,\ ba=a^3b)$$

را ارائه کنید. در هر دو حالت، اعضا را به ترتیب ۱، a، a^2، a^3، b، ab، a^2b و a^3b بنویسید. (توجه کنید که لازم نیست هر حاصلضربی را حساب کنید. می‌دانید که این نمایشها گروههای از مرتبهٔ ۸ را به دست می‌دهند، و هنگامی که به‌اندازهٔ کافی حاصلضرب حساب کرده باشید تا این‌که در هر سطر و هر ستون جدول هر عضو دقیقاً یك بار بیاید، تکلیف بقیه روشن است.)

***۴.۲۲** درستی یا نادرستی هر یك از گزاره های زیر را مشخص کنید.

— ا) هر گروه نمایشی دارد.

— ب) هر گروه نمایشهای متفاوت بسیاری دارد.

— ج) هر گروه دو نمایش دارد که ایزومورف نیستند.

— د) هر گروه نمایشی متناهی دارد.

---

۱. این بخش درقسمت دوم کتاب آمده که به‌صورت مجلد جداگانه‌ای چاپ خواهد شد. - م.

— ه) هر گروه با نمایشی متناهی از مرتبهٔ متناهی است.
— و) هر گروه دوری دارای نمایشی با درست یك مولد است.
— ز) هر مزدوج یك رابط حاصلی ازآن رابط است.
— ح) دو نمایش با تعداد مساوی مولد همیشه ایزومورف هستند.
— ط) در هر نمایش یك گروه آبلی، مجموعهٔ حاصلهای رابطها شامل زیرگروه برگردان گروه آزاد بر مولدهاست.
— ی) هر نمایش یك گروه آزاد تنها دارای رابط ۱ است.

***۵.۲۲** نشان دهید که

$$(a,\ b : a^{۳}=۱,\ b^{۲}=۱,\ ba=a^{۲}b)$$

یك گروه از مرتبهٔ ۶ را به دست می‌دهد. نشان دهید که این گروه ناآبلی است.

***۶.۲۲** نشان دهید که نمایش

$$(a,\ b : a^{۳}=۱,\ b^{۲}=۱,\ ba=a^{۲}b)$$

از تمرین ۵.۲۲ (در حد ایزومورفیسم) تنها گروه آبلی از مرتبهٔ ۶ را به دست می‌دهد، و بنابراین یك گروه ایزومورف با $S_{۳}$ را ارائه می‌کند.

***۷.۲۲** فرض کنید

$$S=\{a^{i}b^{j} \mid ۰ \leqslant i < m,\ ۰ \leqslant j < n\},$$

یعنی، S شامل تمام حاصلضربهای صوری $a^{i}b^{j}$ با شروع از $a^{۰}b^{۰}$ و خاتمهٔ به $a^{m-۱}b^{n-۱}$ باشد. فرض کنید r عدد صحیح مثبتی باشد و حاصلضرب در S را با

$$(a^{t}b^{t})(a^{u}b^{v})=a^{x}b^{y},$$

که درآن x باقیماندهٔ تقسیم $s+u(r^{t})$ بر m و y باقیماندهٔ تقسیم $t+v$ بر n، برمبنای لم ۱.۶، است تعریف کنید.
ا) نشان دهید که شرطی لازم وکافی برای برقراری شرکتپذیری و برای این که تحت این ضرب S گروه باشد این‌است که $r^{n}\equiv ۱ \pmod{m}$.
ب) از قسمت (ا) نتیجه بگیرید که نمایش گروه

$$(a,\ b : a^{m}=۱,\ b^{n}=۱,\ ba=a^{r}b)$$

گروهی از مرتبهٔ mn را به دست می‌دهد اگر و فقط اگر $(r^{n}\equiv ۱ \bmod m)$.

***۸.۲۲** تمام گروههای از مرتبهٔ ۱۴ را درحد ایزومورفیسم به دست‌آورید. [راهنمایی: از دستورالعمل تمرین ۴.۲۲ پیروی کنید و تمرین (ب) ۷.۲۲ را به‌کار ببرید.]

*۹.۲۲ تمام گروههای از مرتبهٔ ۲۱ را در حد ایزومورفیسم به‌دست آورید. [راهنمایی: از دستورالعمل تمرین ۴.۲۲ پیروی کنید و تمرین (ب) ۷.۲۲ را به‌کار برید. ممکن است به نظر برسد که دو نمایش ارائه دهندهٔ گروههای ناآبلی وجود دارد. نشان دهید که آنها ایزومورف هستند.]

*۱۰.۲۲ نشان دهید که اگر $n=pq$، که در آن p و q اعدادی اول هستند و $q>p$ و $q\equiv 1 \pmod p$، آنگاه دقیقاً یك گروه ناآبلی (در حد ایزومورفیسم) از مرتبهٔ n وجود دارد. فرض کنید (چنان‌که بعداً ثابت خواهد شد) $q-1$ عضو ناصفر $\mathbf{Z}_q$ گروهی دوری چون $\mathbf{Z}_q^*$ تحت ضرب به هنگ q تشکیل می‌دهند. [راهنمایی: جوابهای $x^p\equiv 1 \pmod q$ زیرگروهی دوری از $\mathbf{Z}_q^*$ با اعضای ۱، r، ...، و r^{p-1} از $\mathbf{Z}_q^*$ تشکیل می‌دهند. درگروه با نمایش $(a,b: a^q=1,\ b^p=1,\ ba=a^r b)$، داریم $bab^{-1}=a^r$، از اینرو $b^j a b^{-j}=a^{(r^j)}$. بنابراین، چون برای $j=1,\dots,p-1$، b^j گروه $\langle b\rangle$ را تولید می‌کند؛ این نمایش با

$$(a,\ b: a^q=1,\ (b^j)^p=1,\ (b^j)a=a^{(r^j)}\ (b^j)$$

ایزومورف است، و لذا تمام نمایشهای $(a,\ b: a^q=1,\ b^p=1,\ ba=a^{(r^j)}b)$ ایزومورف هستند.]

*۱۱.۲۲ تمام گروههای از مرتبهٔ ۱۲ را (در حد ایزومورفیسم) به دست آورید.

*۱۲.۲۲ تمام گروههای از مرتبهٔ ۳۰ را (درحد ایزومورفیسم) به دست آورید.

پیوست

استقرای ریاضی

گاهی می‌خواهیم ثابت کنیم که گزاره‌ای در بارهٔ اعداد صحیح مثبت به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت یا شاید دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از اعداد صحیح متوالی برقرار است. چنین اثباتهایی با به‌کاربردن استقرای ریاضی به‌انجام می‌رسند.

اصل موضوع استقرا فرض‌کنیم S زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{Z}^+$ باشد و در شرایط زیر صدق کند:

$1 \in S$ و،

اگر $k \in S$ آنگاه $(k+1) \in S$.

در این صورت $S = \mathbf{Z}^+$.

از این اصل بلافاصله روش استقرای ریاضی به‌دست می‌آید.

استقرای ریاضی فرض کنیم $P(n)$ گزاره‌ای درمورد عدد صحیح و مثبت n باشد. فرض‌کنیم‌که

$P(1)$ درست است و،

اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+1)$ نیز درست است.

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

اغلب اوقات می‌خواهید نشان دهید که $P(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ برقرار است. اگر بخواهید تنها نشان دهید که $P(n)$ به‌ازای r، $r+1$، $r+2$، ...، $s-1$ و s برقرار است، آنگاه نشان می‌دهید که $P(r)$ درست است و درستی $P(k)$ درستی $P(k+1)$ را ایجاب می‌کند؛ $r \leqslant k \leqslant s-1$. توجه کنید r می‌تواند هرعدد صحیحی از $\mathbf{Z}$، اعم از مثبت، منفی، یا صفر باشد.

مثال پ ۱ می‌خواهیم فرمول

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (پ۱)$$

در مورد مجموع تصاعد حسابی را با به‌کاربردن استقرای ریاضی، ثابت کنیم.

ما $P(n)$ را این گزاره می‌گیریم که (پ۱) درست است. به‌ازای $n=۱$ به دست می‌آوریم

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۱(۲)}{۲}=۱,$$

و لذا $P(۱)$ درست است.

فرض کنیم که $P(k)$ درست است، از این‌رو

$$۱+۲+\cdots+k=\frac{k(k+۱)}{۲}$$

اکنون

$$\begin{aligned}۱+۲+\cdots+(k+۱)&=(۱+۲+\cdots+k)+(k+۱)\\&=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)=\frac{k^۲+k+۲k+۲}{۲}\\&=\frac{k^۲+۳k+۲}{۲}=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}\end{aligned}$$

بنابراین $P(k+۱)$ برقرار است. پس رابطهٔ (پ۱) به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}^+$ درست است. □

مثال پ ۲ می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموعه‌ای n عضوی، $n\in\{۰,۱,۲,\ldots\}=\mathbf{Z}^+\cup\{۰\}$، کلا ۲^n زیر مجموعه دارد.

این‌بار استقرا را از $n=۰$ شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای متناهی باشد و $|S|=n$. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$P(n):\ S \text{ دارای } ۲^n \text{ زیر مجموعه است} \qquad (پ۲)$$

اگر $|S|=۰$، آنگاه $S=\varnothing$ فقط یك زیر مجموعه دارد، که عبارت است از $\varnothing$. چون $۲^۰=۱$، ملاحظه می‌کنیم که $P(۰)$ برقرار است.

فرض می‌کنیم $P(k)$ درست باشد، و نیز فرض می‌کنیم S دارای $k+۱$ عضو است. فرض کنیم c یکی از اعضای S باشد. در این صورت $S-\{c\}$ دارای k عضو است، و بنابراین ۲^k زیر مجموعه دارد. اکنون هر زیر مجموعه از S یا شامل c است یا شامل c نیست. آنهایی که شامل c نیستند زیرمجموعه‌های $S-\{c\}$ هستند؛ از این‌رو، بنا بر فرض استقرا، تعداد آنها ۲^k است. هر زیر مجموعه‌ای که شامل c باشد از الحاق c به یکی از ۲^k زیر مجموعهٔ بدون c تشکیل می‌شود. اینها هم ۲^k زیر مجموعه می‌شوند.

بنابراین تعداد کل زیر مجموعه‌های S عبارت است از

$$۲^k+۲^k=۲^k(۲)=۲^{k+۱}$$

پس $P(k+۱)$ برقرار است. لذا $P(n)$ به‌ازای $n=۰$ و هر $n\in \mathbf{Z}^+$ درست است. □

مثال پ ۳ فرض کنیم $x\in \mathbf{R}$، $x>-۱$ و $x\neq ۰$. می‌خواهیم نشان دهیم به‌ازای هر $n\in \mathbf{Z}^+$، $n\geqslant ۲$، $(۱+x)^n>۱+nx$.

فرض می‌کنیم گزارهٔ $P(n)$ عبارت باشد از

$$(۱+x)^n>۱+nx. \qquad (پ۳)$$

(توجه کنید که $P(۱)$ درست نیست.) دراین‌صورت $P(۲)$ گزارهٔ $(۱+x)^۲>۱+۲x$ است. اینک $(۱+x)^۲=۱+۲x+x^۲$، و $x^۲>۰$ چون $x\neq ۰$. پس $(۱+x)^۲>۱+۲x$، و از این‌رو $P(۲)$ برقرار است.

فرض می‌کنیم که $P(k)$ برقرار باشد؛ بنابراین

$$(۱+x)^k>۱+kx \qquad (پ۴)$$

اکنون $۱+x>۰$ چون $x>-۱$. با ضرب کردن طرفین تساوی (پ۴) در $۱+x$، به دست می‌آوریم:

$$(۱+x)^{k+۱}>(۱+kx)(۱+x)=۱+(k+۱)x+kx^۲.$$

چون $kx^۲\geqslant ۰$، ملاحظه می‌کنیم که $P(k+۱)$ برقرار است. پس $P(n)$ به‌ازای هر $n\in \mathbf{Z}^+$، $n\geqslant ۲$، برقرار است. □

در خاتمه، تذکر می‌دهیم که ممکن است در مواردی مجبور شوید از استقرای قوی استفاده کنید، که در آن گزارهٔ

اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+۱)$ درست است

جایگزین می‌شود با

اگر $P(m)$ برای $۱\leqslant m\leqslant k$ درست باشد، آنگاه $P(k+۱)$ درست است.

بازهم، باعلم به‌این که $P(k)$ برقرار است سعی می‌کنید نشان‌دهید که $P(k+۱)$ برقرار است. اما اگر به مرحله‌ای از استقرا رسیده‌اید که درستی $P(k)$ ثابت شده‌است، آنگاه می‌دانید که $P(m)$ برای $۱\leqslant m\leqslant k$ بر قرار است؛ بنابراین فرض قویتر گزارهٔ دوم مجاز است.

تمرین

پ۱ نشان دهید که برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

پ۲ نشان دهید که برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

پ۳ نشان دهید که برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

پ۴ نشان دهید که برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

پ۵ به استقرا ثابت کنید که اگر $a, r \in \mathbf{R}$ و $r \neq -1$ آنگاه برای $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$a+ar+ar^2+\dots+ar^n=a(1-r^{n+1})/(1-r)$$

پ۶ عیب «استدلال» زیر را پیدا کنید.

ثابت می‌کنیم که هر دو عدد صحیح مثبت متساویند. ما از استقرا روی ماکسیمم دو عدد استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $P(n)$ عبارت باشد از این گزاره که هر دو عدد صحیح مثبت که ماکسیمم آنها n باشد متساویند.

چون تنها دوعدد صحیح مثبت که ماکسیمم آنها ۱ باشد عبارتند از ۱ و ۱، مشاهده می‌کنیم که $P(1)$ برقرار است.

فرض کنیم $P(k)$ برقرار باشد، و r و s اعدادی صحیح ومثبت باشندوبزرگترین آنها $k+1$ باشد. در این صورت ماکسیمم دو عدد $r-1$ و $s-1$، k است، از این رو بنا بر فرض استقرا، $r-1=s-1$. درنتیجه $r=s$. پس $P(k+1)$ برقراراست، و بنابراین $P(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ برقرار است.

پ۷ استدلال زیر را نقدکنید.

می‌خواهیم نشان دهیم که هرعددصحیح مثبت یك ویژگی‌جالب دارد. فرض می‌کنیم $P(n)$ این گزاره باشدکه n یك ویژگی جالب دارد. استقرای قوی را به‌کار می‌بریم.

مسلماً $P(1)$ درست‌است، چون ۱ عضو همسانی ضرب است، که قطعاً یك ویژگی جالب برای ۱ است.

فرض کنیم $P(m)$ برای $1 \leqslant m \leqslant k$ برقرارباشد. اگر $P(k+1)$ برقرارنباشد، آنگاه $k+1$ کوچکترین‌عددصحیح مثبت بدون یك ویژگی‌جالب خواهد بود، که خودش، به نوبهٔ خود، یك ویژگی جالب برای $k+1$ است. از این‌رو، $P(k+1)$ باید برقرار باشد. پس $P(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ برقرار است.

پ۸ ما واقعاً هرگزنتوانسته‌ایم عیبی در قسمت (ا) بیابیم. شانس خودتان را با آن امتحان کنید و سپس (ب) را پاسخ دهید.

ا) قاتلی به‌اعدام محکوم شده است. او از قاضی می‌خواهد که او را از روز اعدام مطلع

نسازد. قاضی به او می‌گوید «من حکم می‌کنم شما را در ساعت ۱۰ صبح یکی از روزهای ماه ژانویهٔ آینده اعدام کنند، اما قول می‌دهم که تاساعت ۸ صبح همان روزی که برای بردن شما می‌آیند از اینکه درآن روز اعدام خواهید شدآگاه نشوید.» مجرم به سلول خود بازمی‌گردد و به‌ترتیب ذیل به‌اثبات این حکم که در ژانویه اعدام نخواهد شد می‌پردازد:

فرض کنیم $P(n)$ این گزاره باشد که من درروز $(۳۱ - n)$ ژانویه اعدام نخواهم شد. می‌خواهم $P(n)$ را برای $۰ \leqslant n \leqslant ۳۰$ ثابت کنم. من نمی‌توانم روز ۳۱ ژانویه اعدام شوم، زیرا این آخرین روز ماه‌است و من باید درآن ماه اعدام شوم، و قبل از ساعت ۸ صبح آن روز من خواهم دانست که درآن روز اعدام می‌شوم و این برخلاف رأی قاضی است. پس $P(۰)$ برقرار است. فرض کنیم که $P(m)$ برای $۰ \leqslant m \leqslant k$، که $k \leqslant ۲۹$، برقرار باشد. یعنی، فرض کنیم که من نمی‌توانم از روز $(۳۱ - k)$ تا آخر ژانویه اعدام شوم. در این صورت $(۳۱ - k - ۱)$ بایدآخرین روز ممکن از ماه ژانویه برای اعدام من باشد، و بنابراین من قبل از ساعت ۸ صبح آن روز آگاه خواهم شد که‌آن روز روز موعود است؛ بازهم خلاف رأی قاضی. پس من نمی‌توانم در روز $(۳۱ - (k + ۱))$ اعدام شوم، و از این‌رو $P(k + ۱)$ برقرار است. در نتیجه من نمی‌توانم در ژانویه اعدام شوم.

(اما، مجرم روز ۱۷ ژانویه اعدام شد.)

ب) یك مربی کلاسی را ۵ روز در هفته آموزش می‌دهد؛ دوشنبه تا جمعه او به کلاس خود می‌گوید که در یکی از روزهای آخرین هفتهٔ کلاس امتحان دیگری هم خواهند داشت؛ اما قبل ازحضور درکلاس از روز امتحان با خبر نخواهند شد. با این شرایط آخرین روز برگزاری امتحان چه روزی است؟

پاسخها و توصیه‌ها

فصل ۰

۱.۰ $\{-\sqrt{۳}, \sqrt{۳}\}$

۳.۰ $\{۱, -۱, ۲, -۲, ۳, -۳, ۴, -۴, ۵, -۵, ۶, -۶, ۱۰, -۱۰, ۱۲, -۱۲\ ۱۵, -۱۵, ۲۰, -۲۰, ۳۰, -۳۰, ۶۰, -۶۰,\}$

۵.۰ مجموعه نیست (خوشتعریف نیست).

۷.۰ مجموعهٔ $\varnothing$

۹.۰ مجموعهٔ Q

۱۱.۰ نسبت هم‌ارزی نیست.

۱۳.۰ نسبت هم‌ارزی است؛ $\bar{۰}=\{۰\}$؛ $\bar{a}=\{a, -a\}$ به‌ازای هر عدد ناصفر $a\in\mathbf{R}$.

۱۵.۰ نسبت هم‌ارزی است؛ $\bar{۱}=\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$، $\overline{۱۰}=\{۱۰, ۱۱, \ldots, ۹۹\}$، $\overline{۱۰۰}=\{۱۰۰, ۱۰۱, \ldots, ۹۹۹\}$، و به‌طور کلی

$$\overline{۱۰^n}=\{۱۰^n, ۱۰^n+۱, \ldots, ۱۰^{n+۱}-۱\}.$$

۱۷.۰ نسبت هم‌ارزی است؛

$$\bar{۱}=\{۱, ۳, ۵, ۷, \ldots\}=\{۲(n-۱)+۱ \mid n\in\mathbf{Z}^+\}$$
$$\bar{۲}=\{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\}=\{۲n \mid n\in\mathbf{Z}^+\}.$$

۱۹.۰ (نمی‌خواهیم حال شما را با این یکی بگیریم.)

۲۱.۰ ۲

۲۳.۰ ۱۵

فصل ۱

۱.۱ ا) e، b و a ب) a، a. نمی‌توانید بگویید. ج) a، c.
* شرکتپذیر نیست. د) نه، $b*e \neq e*b$.

۳.۱ d، c، c، d

۷.۱ ن د ن ن ن د د د د ن

۹.۱ ۱. ۱۶. ۱۹۶۸۳. $n^{(n^2)}$.

۱۱.۱ ا) دو عمل دوتایی* و $'*$ به یك مجموعهٔ S **یك نوع ساختار جبری** می‌دهند، در صورتی‌که هر $x \in S$ همتایی چون $x' \in S$ داشته باشد به طوری‌که تناظر $x \longleftrightarrow x'$ یك به یك باشد و به‌ازای هر a و b از S $(a*b)' = a'*'b'$.
(این را به‌صورتهای دیگری هم می‌توان بیان کرد.)
ب) ۱۰

فصل ۲

۱.۲ ا) نه. گ۳ برقرار نیست. ب) نه. گ۱ برقرار نیست. ج) آری
د) نه. برای $a = 0$ گ۳ برقرار نیست. ه) آری و) آری

۳.۲ پاسخ جزئی : $(a*b'*c)' = c'*b*a'$

۷.۲

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

(پاسخهای دیگری هم ممکن است.)

۹.۲ ج) $-\frac{1}{3}$

فصل ۳

۱.۳ ا) آری ب) نه ج) آری د) آری ه) آری و) نه

۳.۳ ا) ۰، ۲۵، ۵۰، ۲۵−، ۵۰− ب) ۱، $\frac{1}{2}$، ۲، ۴، $\frac{1}{4}$
ج) ۱، π، π^2، $1/\pi$، $1/\pi^2$ (پاسخهای دیگری ممکن است.)

۵.۳ ا)

	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۲	۲	۳	۴	۵	۰	۱
۳	۳	۴	۵	۰	۱	۲
۴	۴	۵	۰	۱	۲	۳
۵	۵	۰	۱	۲	۳	۴

ب) $\langle ۲\rangle = \langle ۴\rangle = \{۰, ۲, ۴\}$

$\langle ۳\rangle = \{۰, ۳\}$

$\langle ۱\rangle = \langle ۵\rangle = \mathbf{Z}_۶$

ج) ۱ و ۵

۷.۳ د ن د ن ن د ن ن د ن

د) گروهی یك عضوی مانند $\{e\}$ تنها یك زیر گروه (غیر واقعی) دارد.

۱۹.۳ ۴ـ گروه کلاین V یك مثال است.

فصل ۴

۱.۴ ا) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۶ & ۵ & ۴ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۵ & ۶ & ۳ \end{pmatrix}$

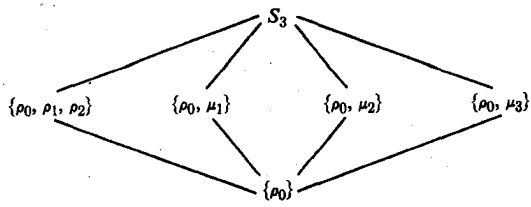
ج) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۶ & ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۵ & ۱ & ۶ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$

ه) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۶ & ۱ & ۵ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$

۳.۴ ا) $\langle \rho_۱\rangle = \langle \rho_۲\rangle = \{\rho_۰, \rho_۱, \rho_۲\}$

$\langle \mu_۱\rangle = \{\rho_۰, \mu_۱\}$

ب)



۷.۴ S_3 یك مثال است. تمرین ۳.۴ (ب) را ملاحظه کنید.

۹.۴ $|D_n| = 2n$

۱۳.۴ ا) آری ب) نه (بسته نیست) ج) نه (معکوس ندارد) د) آری

فصل ۵

۱.۵ ا)
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۴ & ۵ & ۳ & ۷ & ۱ & ۶ & ۸ & ۲ \end{pmatrix}$$

ب)
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۳ & ۷ & ۲ & ۸ & ۵ & ۴ & ۱ & ۶ \end{pmatrix}$$

ج)
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۵ & ۸ & ۳ & ۲ & ۷ & ۶ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

۵.۵ ا) ۴ ب) هر دور به طول n از مرتبهٔ n است.
ج) σ از مرتبهٔ ۶ است؛ τ از مرتبهٔ ۴ است.
د) (ا) ۶، (ب) ۶، (ج) ۸
ه) مرتبهٔ جایگشتی که به‌صورت حاصلضربی از دورهای مجزا بیان شده‌است برابر است با کوچکترین مضرب مشترك طولهای این دورها.

فصل ۶

۱.۶ ۲، ۴، ۴، ۱۶

۳.۶ ا) ۶ ب) ۷ ج) ۴ د) ۸ ه) تعدادی نامتناهی

۵.۶
$\mathbf{Z}_۶$: ۱, ۲, ۳, ۶
$\mathbf{Z}_۸$: ۱, ۲, ۴, ۸

$Z_{۱۲}$: ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲
$Z_{۶۰}$: ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۲۰, ۳۰, ۶۰
$Z_{۱۷}$: ۱, ۱۷

۷.۶ $S_۳$ مثال نقضی به‌دست می‌دهد.

۹.۶ $(xax^{-۱})^۲$ را بررسی کنید.

۱۱.۶ $(p-۱)(q-۱)$

فصل ۷

۱.۷ ۱) $Z_۴$ دوری است در حالی که V نیست.
۲) $Z_۴$ فقط دو عضو دارد که جواب معادلهٔ $x+x=۰$ هستند، در حالی که V چهار جواب برای معادلهٔ متناظر $x^۲=e$ دارد.

۵.۷ د د ن د ن د د د ن د

۱۵.۷ پاسخ جزئی : $a\psi=a-۱$

فصل ۸

۱.۸

مرتبه	عضو
۲	(۰, ۲)
۲	(۱, ۲)
۴	(۰, ۳)
۴	(۱, ۳)

مرتبه	عضو
۱	(۰, ۰)
۲	(۱, ۰)
۴	(۰, ۱)
۴	(۱, ۱)

گروه دوری نیست.

۵.۸ $Z_{۲۰}\times Z_۳$ ، $Z_{۱۵}\times Z_۴$ ، $Z_{۱۲}\times Z_۵$ ، $Z_۵\times Z_۳\times Z_۴$

۷.۸ د د ن د ن ن ن ن ن د

۹.۸ پاسخ جزئی : هفت تا ازآنها وجود دارد.

۱۳.۸ $S_۳$

۱۵.۸ اگر گروهی‌چون G حاصلضرب داخلی زیر گروههای آبلی باشد، آنگاه G آبلی است.

۱۹.۸ $HK=\{\rho_۰, \rho_۲, \mu_۱, \mu_۲\}$; $H\backslash K=S_۳$

فصل ۹

۱.۹ برای ۷۲۰ : $Z_{۱۶}\times Z_۹\times Z_۵\simeq Z_{۷۲۰}$

$Z_2 \times Z_8 \times Z_9 \times Z_5 \simeq Z_2 \times Z_{360}$
$Z_4 \times Z_4 \times Z_9 \times Z_5 \simeq Z_4 \times Z_{180}$
$Z_2 \times Z_2 \times Z_4 \times Z_9 \times Z_5 \simeq Z_2 \times Z_2 \times Z_{180}$
$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_5 \simeq Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_{90}$
$Z_{16} \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5 \simeq Z_3 \times Z_{240}$
$Z_2 \times Z_8 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5 \simeq Z_6 \times Z_{120}$
$Z_4 \times Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5 \simeq Z_{12} \times Z_{60}$
$Z_2 \times Z_2 \times Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5 \simeq Z_2 \times Z_6 \times Z_{60}$
$Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5 \simeq Z_2 \times Z_2 \times Z_6 \times Z_{30}$

برای ۱۰۸۹:
$Z_9 \times Z_{121} \simeq Z_{1089}$
$Z_3 \times Z_3 \times Z_{121} \simeq Z_3 \times Z_{363}$
$Z_9 \times Z_{11} \times Z_{11} \simeq Z_{11} \times Z_{99}$
$Z_3 \times Z_3 \times Z_{11} \times Z_{11} \simeq Z_{33} \times Z_{33}$

۳.۹ $\{2, 3\}$ مولد Z_{12} است. $\{4, 6\}$ مولد $\langle 2 \rangle$ است. $\{8, 6, 10\}$ مولد $\langle 2 \rangle$ است.

۷.۹ سه تا از مرتبهٔ ۲۴ وجود دارد. دو تا از مرتبهٔ ۲۵ وجود دارد. شش‌تا از مرتبهٔ (۲۵)(۲۴) وجود دارد.

۹.۹ ۴۹

۱۳.۹ تعداد یکی است.

۱۷.۹ یك زیرگروه از S_n ممکن است نتواند توسط دوعضو تولید شود.

۱۹.۹ ج) $\phi: G \to Z \times Z$ که در آن $(a, b)\phi = \left(a, \frac{b-a}{10}\right)$.

فصل ۱۰

۵.۱۰ پاسخ جزئی گروه از مرتبهٔ ۴۸ است.

۷.۱۰ ج) ۴۳۲ د) $|H| = 6$؛ $H \simeq S_3$.

فصل ۱۱

۱.۱۱ ۱۸ ب) ۸ ج) ۶

۳.۱۱ پاسخ جزئی : همدسته‌های چپ عبارتند از

$e = (0, 0) + \langle (1, 2) \rangle = \{(0, 0), (1, 2)\}$,
$a = (1, 0) + \langle (1, 2) \rangle = \{(1, 0), (0, 2)\}$,

$b=(0,1)+\langle(1,2)\rangle=\{(0,1),(1,3)\}$,
$c=(1,1)+\langle(1,2)\rangle=\{(1,1),(0,3)\}$.
عمل القایی در مجموعهٔ همدسته‌های چپ خوشتعریف است، و آنها تشکیل گروه می‌دهند. گروه همدسته‌ها با $\mathbf{Z}_4$ ایزومورف است.

فصل ۱۲

۱.۱۲ ا) هنگامی که با یك گروه خارج قسمت G/H کار می‌کنیم، a و b را اعضایی از G می‌گیریم، نه اعضایی از G/H. احتمالا دانشجو نفهمیده است که اعضای G/H چگونه‌اند و نمی‌تواند هیچ مطلب درستی در بارهٔ آنها بنویسد.
ب) باید نشان دهیم که G/H آبلی است. فرض کنید aH و bH دوعضو از G/H باشند.

۳.۱۲ ا) ۳ ب) ۴ ج) ۸ د) ۴ ه) ۶

۵.۱۲ ا) $\mathbf{Z}$ ب) $\mathbf{Z}$ ج) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$

۷.۱۲ $\{\rho_0,\mu_1\}$، $\{\rho_0,\mu_2\}$، $\{\rho_0,\mu_3\}$.

۹.۱۲ د د د د ن د ن د ن

و) $\mathbf{Z}$ بدون تاب است اما $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\simeq\mathbf{Z}_n$ یك گروه تابی است.
ح) برای $n>2$، S_n آبلی نیست اما $S_n/A_n\simeq\mathbf{Z}_2$ و $\mathbf{Z}_2$ آبلی است
ب) $n\mathbf{R}=\mathbf{R}$ ازاین‌رو $\mathbf{R}/n\mathbf{R}$ از مرتبهٔ ۱ است.

۲۳.۱۲ $G'=\{\rho_0,\rho_2\}$

فصل ۱۳

۱.۱۳ ا) آری. $\mathbf{Z}=$(تصویر ϕ). $\{0\}=$(هستهٔ ϕ).
ب) نه. $2=\left(\frac{3}{2}\right)\phi+\left(\frac{3}{2}\right)\phi\neq 3\phi=3$.
ج) آری. $\mathbf{R}^+=$(تصویر ϕ). $\{1,-1\}=$(هستهٔ ϕ).
د) آری. $\mathbf{Z}_2=$(تصویر ϕ). $\{0,2,4\}=$(هستهٔ ϕ).
ه) نه. در $\mathbf{Z}_2$، $0=1+1=5\phi+5\phi\neq(5+5)\phi=1\phi=1$.

۳.۱۳ ۲ تا از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{Z}$؛ ۲ تا از $\mathbf{Z}$ بتوی $\mathbf{Z}_2$؛ ۱ تا از $\mathbf{Z}$ بروی $\mathbf{Z}_2$.

۵.۱۳ ۰ تا از $\mathbf{Z}_{12}$ بروی $\mathbf{Z}_5$؛ ۶ تا از $\mathbf{Z}_{12}$ بتوی $\mathbf{Z}_6$؛ ۲ تا از $\mathbf{Z}_{12}$ بتوی $\mathbf{Z}_6$؛ ۲ تا از $\mathbf{Z}_{12}$ بتوی $\mathbf{Z}_{14}$؛ ۴ تا از $\mathbf{Z}_{12}$ بتوی $\mathbf{Z}_{16}$.

۷.۱۳ د د ن د ن ن د د د ن

ه) اگر ϕ همومورفیسمی از G باشد، آنگاه $|G\phi| = |G|/|(\text{هستهٔ } \phi)|$.
و) رجوع کنید به (ه).
ز) نگاشتی که هر عضو یك گروه را به عضو همانی گروهی می‌نگارد همواره یك همومورفیسم است.
ح) رجوع کنید به (ز). ط) رجوع کنید به تمرین ۶.۱۳. ی) رجوع کنید به تمرین ۱.۱۳.

۹.۱۳ A_n

۱۱.۱۳ پاسخ جزئی: $(\text{تصویر } \phi) = \langle a \rangle$. $(\text{هستهٔ } \phi) = n\mathbf{Z}$ به‌ازای برخی از اعداد نامنفی $n \in \mathbf{Z}$ (شامل ۰ ، ۱ $(n=$).

۱۳.۱۳ ی) پاسخ جزئی: اگر r متباین با $|G|$ باشد، $(\text{هستهٔ } \phi_r) \neq \{e\}$ و ϕ_r نگاشتی بروی G نیست. پس به‌ازای بعضی اعضای $a \in G$، $x^r = a$ جواب ندارد. در حالت خاصی که $|G|$ عاد می‌کند r را، $x^r = a$ به‌ازای هر $a \neq e$ جواب‌ندارد.

۱۵.۱۳ پاسخ جزئی: ϕ یك ایزومورفیسم است در صورتی که $(\text{هستهٔ } \phi) = \{e\}$، یعنی که، مرکز G گروه بدیهی $\{e\}$ باشد.

فصل ۱۴

۱.۱۴ تظریفهای
$\{0\} < 60\mathbf{Z} < 20\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ از $\{0\} < 2940\mathbf{Z} < 60\mathbf{Z} < 20\mathbf{Z} < 4\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$
و $\{0\} < 245\mathbf{Z} < 49\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$ از $\{0\} < 2940\mathbf{Z} < 980\mathbf{Z} < 245\mathbf{Z} < 49\mathbf{Z} < \mathbf{Z}$
ایزومورف هستند.

۳.۱۴ آنها همه به‌صورت $\{(0, 0)\} < H < \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5$ هستند، که درآن H می‌تواند هریك‌از زیرگروههای $\langle(0, 1)\rangle$، $\langle(0, 0)\rangle$، $\langle(1, 1)\rangle$، $\langle(1, 2)\rangle$، $\langle(1, 3)\rangle$، و $\langle(1, 4)\rangle$ باشد. بنابراین کلا شش‌تاهست.

۱۱.۱۴ $\{\rho_0\} \times \mathbf{Z}_4$

۱۳.۱۴ $\{\rho_0\} \times \mathbf{Z}_4 \leqslant \{\rho_0\} \times \mathbf{Z}_4 \leqslant \{\rho_0\} \times \mathbf{Z}_4 < \cdots$

فصل ۱۵

۳.۱۵ ی) G/L

۵.۱۵ ا) $K = \{0, 3, 6, 9\}$
ب) $0 + K = \{0,3,6,9\}$، $1 + K = \{1,4,7,10\}$، $2 + K = \{2,5,8,11\}$.

ج) $(0+K)\psi=0$، $(1+K)\psi=1$، $(2+K)\psi=2$

۷.۱۵ ا) $HN=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$، $H\cap N=\{0,12\}$

ب) $0+N=\{0,6,12,18\}$، $2+N=\{2,8,14,20\}$،
$4+N=\{4,10,16,22\}$

ج) $0+(H\cap N)=\{0,\ 12\}$، $4+(H\cap N)=\{4,\ 16\}$،
$8+\{H\cap N\}=\{8,\ 20\}$

د) $(0+N)\psi=0+(H\cap N)$، $(2+N)\psi=8+(H\cap N)$،
$(4+N)\psi=4+(H\cap N)$

۹.۱۵ ا) $0+H=\{0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$، $1+H=\{1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21\}$،
$2+H=\{2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22\}$، $3+H=\{3,7,11,15,19,23\}$،

ب) $0+K=\{0,8,16\}$، $1+K=\{1,9,17\}$، $2+K=\{2,10,18\}$،
$3+K=\{3,11,19\}$، $4+K=\{4,12,20\}$، $5+K=\{5,14,21\}$،
$6+K=\{6,14,22\}$، $7+K=\{7,15,23\}$،

ج) $0+K=\{0,8,16\}$، $4+K=\{4,12,20\}$،

د) $(0+K)+(H/K)$
$=H/K=\{0+K,4+K\}=\{\{0,8,16\},\{4,12,20\}\}$
$(1+K)+(H/K)=\{1+K,5+K\}=\{\{1,9,17\},\{5,14,21\}\}$،
$(2+K)+(H/K)=\{2+K,6+K\}=\{\{2,10,18\},\{6,14,22\}\}$،
$(3+K)+(H/K)=\{3+K,6+K\}=\{\{3,11,19\},\{7,15,23\}\}$.

ح) $(0+H)\psi=(0+K)+(H/K)$، $(1+H)\psi=(1+K)+(H/K)$،
$(2+H)\psi=(2+K)+(H/K)$، $(3+H)\psi=(1+K)+(H/K)$

۱۱.۱۵

ایزومورفیسم	زنجیر (۴)	زنجیر (۳)
$\{0\}/\{0\}\simeq\{0\}/\{0\}\simeq\{0\}$	$\{0\}\leqslant\{0\}\leqslant\langle 18\rangle\leqslant\langle 18\rangle$	$\{0\}\leqslant\{0\}\leqslant\langle 12\rangle$
$\langle 12\rangle/\{0\}\simeq\langle 6\rangle/\langle 18\rangle\simeq Z_2$	$\leqslant\langle 6\rangle\leqslant\langle 3\rangle\leqslant Z_{36}$	$\leqslant\langle 6\rangle\leqslant\langle 3\rangle$
$\langle 6\rangle/\langle 12\rangle\simeq\langle 18\rangle/\{0\}\simeq Z_2$		$\leqslant\langle 3\rangle\leqslant Z_{36}$
$\langle 3\rangle/\langle 6\rangle\simeq\langle 3\rangle/\langle 6\rangle\simeq Z_2$		
$\langle 3\rangle/\langle 3\rangle\simeq\langle 18\rangle/\langle 18\rangle\simeq\{0\}$		
$Z_{36}/\langle 3\rangle\simeq Z_{36}/\langle 3\rangle\simeq Z_3$		

فصل ۱۶

۱.۱۶ $X_{\rho_0}=X$ ، $X_{\rho_1}=\{C\}$ ، $X_{\rho_2}=\{m_1, m_2, d_1, d_2, C\}$ ، $X_{\rho_3}=\{C\}$
$X_{\mu_1}=\{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$ ، $X_{\mu_2}=\{s_2, s_4, m_1, m_2, C, P_2, P_4\}$
$X_{\delta_1}=\{2, 4, d_1, d_2, C\}$ ، $X_{\delta_2}=\{1, 3, d_1, d_2, C\}$

۳.۱۶
$\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ، $\{m_1, m_2\}$ ، $\{d_1, d_2\}$ ، $\{C\}$ ، $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

۵.۱۶ هرزیر G-مجموعه از G-مجموعه‌ای مانند X از اتحاد تعدادی از مدارهای X تحت G تشکیل می‌شود.

۷.۱۶ ا) نه
ب) $\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ، $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

۱۱.۱۶ ب) مجموعهٔ نقاط واقع بر دایرهٔ به مرکز مبدأ که از نقطهٔ P می گذرد.
ج) زیر گروه دوری $\langle 2\pi \rangle$ از $G=\mathbf{R}$.

۱۵.۱۶ ا) $K=g_0^{-1}Hg_0$
ب) مدعا : H و K باید زیر گروههای مزدوج G باشند.

۱۷.۱۶ X Y Z سه‌تا ازآنها وجود دارد.

	a	a	b	a	b	c
۰	a	a	b	a	b	c
۱	a	b	a	b	c	a
۲	a	a	b	c	a	b
۳	a	b	a	a	b	c
۴	a	a	b	b	c	a
۵	a	b	a	c	a	b

فصل ۱۷

۱.۱۷ ۵

۳.۱۷ ۲

۵.۱۷ ۱۱۷۱۲

۷.۱۷ ا) ۴۵ ب) ۲۳۱

۹.۱۷ ا) ۹۰ ب) ۶۴۲۶

فصل ۱۸

۱.۱۸ ا) ۳ ب) ۲۷ ج) ۱، ۳ د) ۱، ۸۵، ۱، ۵۱

۷.۱۸ د د د ن د ن د د ن ن

۹.۱۸ $H=\{l, (۱, ۲, ۳, ۴), (۱, ۳), (۲, ۴), (۱, ۴, ۳, ۲), (۱, ۳), (۲, ۴), (۱, ۲)(۳, ۴), (۱, ۴)(۲, ۳)\}.$

$K=\{l, (۱, ۳, ۲, ۴), (۱, ۲)(۳, ۴), (۱, ۴, ۲, ۳), (۱, ۲), (۳, ۴), (۱, ۳)(۲, ۴), (۱, ۴)(۲,۳)\}.$

$K=(۲, ۳)H(۲, ۳).$

فصل ۱۹

۳.۱۹ د د ن د د د د د ن ن

ه) این تا حدودی به‌نظر بستگی دارد.

ط) یك گروه از مرتبهٔ ۴۲ نمی‌تواند زیر گروهی از مرتبهٔ ۸ داشته باشد، زیرا ۸ عاد نمی‌کند ۴۲ را.

۷.۱۹ ه) $p(۱)=۱$. $p(۲)=۲$. $p(۳)=۳$. $p(۴)۵$. $p(۵)=۷$. $p(۶)=۱۱$. $p(۷)=۱۵$.

۹.۱۹ $۱۲۰=۱+۱۰+۱۵+۲۰+۲۰+۳۰+۲۴,$

$۷۲۰=۱+۱۵+۴۵+۴۰+۱۵+۱۲۰+۹۰+۴۰+۹۰+۱۴۴+۱۲۰.$

فصل ۲۰

۳.۲۰ پاسخ جزئی : آری

۵.۲۰ $|ad-bc|=۱$

۷.۲۰ د د د د ن ن د د ن

فصل ۲۱

۱.۲۱ ا) $a^{۲}b^{۲}a^{۳}c^{۳}b^{-۲}$، $b^{۲}c^{-۳}a^{-۳}b^{-۲}a^{-۲}$

ب) $a^{-1}b^{3}a^{4}c^{6}a^{-1}$ ، $ac^{-6}a^{-4}b^{-3}a$

۳.۲۱ ا) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۳۶

۵.۲۱ ا) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۱۸

۹.۲۱ ا) پاسخ جزئی : $\{1\}$ مبنایی است برای $\mathbf{Z}_4$. ج) آری.

۱۱.۲۱ ج) یك گروه بلاپ بر S با گروه‌آزاد $F[S]$ بر S ایزومورف است.

فصل ۲۲

۱.۲۲ $(a:a^4=1)$ $(a,\ b:a^4=1,\ b=a^2)$. $(a,\ b,\ c:a=1,\ b^4=1,\ c=1)$.
(پاسخهای دیگری هم ممکن است.)

۳.۲۲ گروه هشتین

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	1	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	1	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	1	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1

گروه کواترنیون : عیناً مانند جدول گروه هشتین بجز شانزده درآیهٔ گوشهٔ پایین سمت راست به‌صورت مقابل

a^2	a	1	a^3
a^3	a^2	a	1
1	a^3	a^2	a
a	1	a^3	a^2

۹.۲۲ Z_{21} . $(a, b: a^7=1, b^3=1, ba=a^2b)$

۱۱.۲۲ Z_{12} . $Z_2 \times Z_6$

$A_4 \simeq (a, b, c: a^2=b^2=c^3=1, ab=ba, ca=bc, cb=abc, cab=ac)$
$\simeq (s, t: s^3=1, t^2=1, (st)^3=1)$.

$D_6 \simeq (a, b: a^6=1, b^2=1, ba=a^5b)$.
$(a, b: a^3=1, b^4=1, ba=a^2b)$.

(برای حل کامل رجوع کنید به [۷، صفحه ۲۴۶]).

پیوست

پ۷. مفهوم «ویژگی جالب» به‌دقت مشخص نشده‌است وخوشتعریف نیست. همچنین، ما در ریاضیات بامنطق دوارزشی سروکارداریم؛ یك گزاره یادرست است یا غلط، ونمی‌تواند هم درست باشد وهم غلط. به‌نظرمی‌رسداین حکم که نداشتن یك ویژگی جالب، یك ویژگی جالب است، با این منطق دوارزشی متناقض باشد. ما دراین استدلال گفته‌ایم که عدد صحیح، یك ویژگی جالب را هم دارد و هم ندارد.

نمادها

$\in,\ a \in S$	عضویت، ۷
$\varnothing$	مجموعهٔ تهی، ۷
$\notin,\ a \notin S$	عدم عضویت، ۷
$\{x \mid P(x)\}$	مجموعهٔ تمام xها به‌طوری‌که $P(x)$، ۷
$\mathbf{Z}$	اعداد صحیح، ۷ گروه جمعی اعداد صحیح، ۷۰
$\mathbf{Z}^+$	اعداد صحیح مثبت (طبیعی)، ۷
$\mathbf{Q}$	اعداد گویا، ۸
$\mathbf{Q}^+$	اعداد گویای مثبت، ۸
$\mathbf{R}$	اعداد حقیقی ، ۸
$\mathbf{R}^+$	اعداد حقیقی مثبت، ۸
$\mathbf{C}$	اعداد مختلط
$\equiv,\ a \equiv b \pmod{n}$	همنهشتی، ۱۱، ۱۳۶
$*,\ a*b$	عمل دوتایی، ۱۴
$\langle G, *\rangle$	گروه، ۲۵
گ۱، گ۲، گ۳	اصول موضوع گروه، ۲۵
e	عضو همانی، ۲۵
$a^{-1},\ -a$	معکوس a، ۳۶، ۳۷
$\lvert S \rvert$	مرتبهٔ S، ۳۷
$B \subseteq A$	زیر مجموعه، جزئیت مجموعه، ۳۸
$B \subset A$	زیر مجموعهٔ واقعی، ۳۸
$H \leqslant G$	زیر گروه، ۳۸
$H < G$	زیر گروه واقعی، ۳۸
$\langle a \rangle$	زیر گروه دوری تولیدشده توسط a، ۴۲، ۶۷
$n\mathbf{Z}$	زیر گروه $\mathbf{Z}$ تولیدشده توسط n، ۴۲
$\phi(a),\ a\phi,\ a^{\phi}$	تصویر a تحت ϕ، ۴۷، ۴۸

$\phi : A \to B$	نگاشت A بتوی B، ۴۷
$\phi\psi$	تابع مرکب، ۴۸
S_A	گروه جایگشتهای A، ۵۱
I	نگاشت همانی، ۵۱
S_n	گروه متقارن روی n حرف، ۵۲
$n!$	n فاکتوریل، ۵۲
D_n	nمین گروه دو وجهی، ۵۳
A_n	گروه متناوب روی n حرف، ۵۵
$\mathbf{Z}_n$	گروه دوری $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ تحت جمع به‌هنگ n، ۷۱
	گروه همادهای مانده‌ای به‌هنگ n، ۱۳۶
بمعم	بزرگترین مقسوم علیه مشترك، ۷۲
$\simeq$, $G \simeq G'$	گروههای ایزومورف، ۷۸
S^*	اعضای ناصفر S، ۸۲
$\prod_{i=1}^{n} S_i$, $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$	حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها، ۹۰، ۹۱
$\prod_{i=1}^{n} G_i$	حاصلضرب مستقیم گروهها، ۹۱
$\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$	حاصلجمع مستقیم گروهها، ۹۲
$\bar{G}_i$	زیر گروه طبیعی $\prod_{i=1}^{n} G_i$، ۹۴
$\bigcap_{i \in I} S_i$, $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$	مقطع زیر مجموعه‌ها، ۹۵
HK	مجموعهٔ حاصلضرب، ۹۶
$H \vee K$	وست زیر گروهها، ۹۶
aH, $a+H$	همدستهٔ چپ، ۱۲۳
Ha, $H+a$	همدستهٔ راست، ۱۲۳
$(G:H)$	اندیس H در G، ۱۲۹
φ	تابع فی ـ اویلر، ۱۳۱
i_g	مزدوجگیری g، ۱۳۴
G/N	گروه خارج قسمت، ۱۳۶
G'	زیر گروه برگردان، ۱۴۱
γ	نگاشت کانونی همادمانده‌ای، ۱۴۹
$\mathcal{J}_G$	مجموعهٔ اتومورفیسمهای داخلی G، ۱۵۷
$Z(G)$	مرکز G، ۱۶۳
X_g	زیر مجموعهٔ متشکل از اعضایی از X که به وسیلهٔ g پایا می‌ماند، ۱۸۰

G_x	زیر گروه همروندی متشکل از اعضایی از G که x را پایا نگه می‌دارند، ۱۸۱
xG	مدار x تحت G، ۱۸۱
G_Y	زیرگروهی از G که هر عضو Y را ثابت نگه می‌دارد، ۱۸۳
X_G	زیر مجموعهٔ متشکل از اعضای پایای X توسط G، ۱۹۳
$N[H]$	نورمالساز H، ۱۹۵
$F[A]$	گروه آزاد بر A، ۲۲۳
$(x_j: r_i)$، $(x_j: r_i = ۱)$	نمایش گروه، ۲۳۱

کتابنامه

کتابهای کلاسیک

1. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, Book II of Part I, *Algèbre*. Paris: Hermann, 1942-58.
2. N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, vols. I, 1951, II, 1953, and III, 1964.
3. O. Schreier and E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory* (English translation), second edition. New York: Chelsea, 1959.
4. B. L. van der Waerden, *Modern Algebra* (English translation). New York: Ungar, vols. I, 1949, and II, 1950.

کتابهای عمومی جبر

5. A. A. Albert, *Fundamental Concepts of Higher Algebra*. Chicago: University of Chicago Press, 1956.
6. G. Birkhoff and S. Mac Lane, *A Survey of Modern Algebra*, third edition. New York: Macmillan, 1965.
7. R. A. Dean, *Elements of Abstract Algebra*. New York: Wiley, 1966.
8. I. N. Herstein, *Topics in Algebra*. New York: Blaisdell, 1964.
9. T. W. Hungerford, *Algebra*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1974.
10. R. E. Johnson, *University Algebra*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1966.
11. S. Lang, *Algebra*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
12. N. H. McCoy, *Introduction to Modern Algebra*. Boston: Allyn and

Bacon, 1960.

13. G. D. Mostow, J. H. Sampson, and J. Meyer, *Fundamental Structures of Algebra*. New York: McGraw-Hill, 1963.
14. W. W. Sawyer, *A Concrete Approach to Abstract Algebra*. San Francisco: Freeman, 1959.
15. S. Warner, *Modern Algebra*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, vols. I and II, 1965.

نظریهٔ گروهها

16. W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, second edition. New York: Dover, 1955.
17. H. S. M. Coxeter and W. O. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, second edition. Berlin: Springer, 1965.
18. M. Hall, Jr., *The Theory of Groups*. New York: Macmillan, 1959.
19. A. G. Kurosh, *The Theory of Groups*. (English translation). New York: Chelsea, vols. I 1955, and II, 1956.
20. W. Ledermann, *Introduction to the Theory of Finite Groups*, fourth revised edition. New York: Interscience, 1961.
21. J. G. Thompson and W. Feit, "Solvability of Groups of Odd Order" *pac. J. Math.*, **13** (1963), 775-1029.
22. M. A. Rabin, "Recursive Unsolvability of Group Theoretic Problems." *Ann. Math.*, **67** (1958), 172-194.

نظریهٔ حلقه‌ها

23. E. Artin, C. J. Nesbitt, and R. M. Thrall, *Rings with Minimum Condition*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1944.
24. N. H. McCoy, *Rings and Ideals* (Carus Monograph No. 8). Buffalo: The Mathematical Association of America; LaSalle, Illinois: Open Court, 1948.
25. N. H. McCoy, *The Theory of Rings*. New York: Macmillan, 1964.

نظریهٔ میدانها

26. E. Artin, *Galois Theory* (Notre Dame Mathematical Lecture No. 2), second edition. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press, 1944.

27. O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*. Princeton, N.J.: Van Nostrand, vol. I, 1958.

نظریهٔ اعداد

28. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition. Oxford: Clarendon Press, 1960.
29. S. Lang, *Algebraic Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
30. W. J. LeVeque, *Elementary Theory of Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
31. W. J. LeVeque, *Topics in Number Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 2 vols., 1956.
32. T. Nagell, *Introduction to Number Theory*. New York: Wiley, 1951.
33. I. Nivin and H. S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers*. New York: Wiley, 1960.
34. H. Pollard, *The Theory of Algebraic Numbers* (Carus Monograph No. 9) Buffalo: The Mathematical Association of America: New York: Wiley, 1950.
35. D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*. Washington: Spartan Books, vol. I, 1962.
36. B. M. Stewart, *Theory of Numbers*, second edition. New York: Macmillan, 1964.
37. J. V. Uspensky and M. H. Heaslet, *Elementary Number Theory*. New York: McGraw-Hill, 1939.
38. E. Weiss *Algebraic Number Theory*, New York: McGraw-Hill, 1963.

جبر همولوژیك

39. J. P. Jans, *Rings and Homology*. New York: Holt, 1964.
40. S. Mac Lane, *Homology*. Berlin: Springer, 1963.

مراجع دیگر

41. A. A. Albert (editor), *Studies in Modern Algebra* (MAA Studies in Mathematics, vol. 2). Buffalo: The Mathematical Association of America; Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1963.

42. E. Artin, *Geometric Algebra*. New York: Interscience, 1957.
43. R. Courant and R. Robbins, *What Is Mathematics?* Oxford: Oxford University Press, 1941.
44. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*. New York: Wiley, 1961.
45. R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. New York: Ginn, 1963.

واژه نامهٔ انگلیسی به فارسی

action	کنش
affine	مستوی
ascending central series	سری فزایندهٔ مرکزی
associativity	شرکتپذیری
betti number	عدد بتی
binary operation	عمل دوتایی
canonical mapping	نگاشت کانونی
cell	قطعه
class equation	تساوی همادی
codomain	حوزهٔ عکس
collection	گردایه
collineation	همخطی
commutativity	تعویضپذیری
commutator	برگردان
compact	فشرده
composite	مرکب
composition series	سری ترکیبی
congruence	همنهشتی
conjugate	مزدوج
conjugation	مزدوجگیری
coset	همدسته

cross ratio	نسبت متقاطع
cycle	دور
cyclic group	گروه دوری
decomposition	تجزیه
dihedral group	گروه دو وجهی
direct product	حاصلضرب مستقیم
direct sum	حاصلجمع مستقیم
discrete	گسسته
disjoint	مجزا
distributivity	توزیعپذیری
domain	حوزه، حوزهٔ مقادیر
doublly periodic	دو تناوبی
elementary contractions	ادغامهای مقدماتی
elliptic	بیضوی
equivalence relation	نسبت هم‌ارزی
Erlanger Programm	برنامهٔ ارلانگنی
factor group	گروه خارج قسمت
faithful action	کنش صادقانه
finitely generated group	گروه متناهیاً تولید شده
generator	مولد
group	گروه
group presentation	نمایش گروه
idempotent	خودنما
identity	همانی
image	تصویر
intersection	مقطع
intuitive	شهودی

invariant	پایا
inverse	معکوس
isotropy	همروندی
join	وست [از مصدر وستن به‌معنای بستن]
kernel	هسته
Kelvin viergruppe	۴ ـ گروه کلاین
least common multiple	کوچکترین مضرب مشترك
locally compact	فشردهٔ موضعی
mapping	نگاشت
measure	اندازه
normalizer	نورمالساز
octic group	گروه هشتین
orbit	مدار
order	مرتبه
partition	افراز
permutation	جایگشت
presentation	نمایش
product	حاصلضرب
projective geometry	هندسهٔ تصویری
quaternion	کواترنیون
quotient group	گروه خارج قسمت
range	دامنه
rank	رتبه
reflection	انعکاس
relation	نسبت ، رابطه
relator	رابط

refinement	تظریف
rigid	صلب
representation	نمایش
representative	نماینده
residue class	هماد مانده‌ای
rotation	دوران
semigroup	نیمگروه
simple group	گروه ساده
solvable group	گروه حلپذیر
structure	ساختار
subinvariant	زیر پایا
subscript	زیروند
superscript	زبروند [این دو واژه با قیاس به واژه‌های پیشوند و پسوند توسط مترجم وضع شده‌اند.]
symmetric group	گروه متقارن
torsion coefficient	ضریب تاب
torsion free	بدون تاب
torsion group	گروه تابی
transformation	تبدیل
translation	انتقال
transposition	ترانهش

واژه نامهٔ فارسی به انگلیسی

ادغامهای مقدماتی	elementary contractions
افراز	partition
انتقال	translation
اندازه	measure
انعکاس	reflection
بدون تاب	torsion free
برگردان	commutator
برنامه ارلانگنی	Erlanger Programm
بیضوی	elliptic
پایا	invariant
تبدیل	transformation
تجزیه	decomposition
ترانهش	transposition
تساوی همادی	class equation
تصویر	image
تظریف	refinement
تعویضپذیری	commutativity
توزیعپذیری	distributivity
جایگشت	permutation

Klein viergruppe	۴ - گروه کلاین
direct sum	حاصلجمع مستقیم
product	حاصلضرب
direct product	حاصلضرب مستقیم
domain	حوزه، حوزهٔ مقادیر
codomain	حوزهٔ عکس
idempotent	خود نما
range	دامنه
doublly periodic	دو تناوبی
cycle	دور
rotation	دوران
relator	رابط
rank	رتبه
superscript	زبروند
subinvariant	زیر پایا
subscript	زیروند
structure	ساختار
composition series	سری ترکیبی
ascending central series	سری فزایندهٔ مرکزی
associativity	شرکتپذیری
rigid	صلب
torsion coefficient	ضریب تاب
betti number	عدد بتی
binary operation	عمل دوتایی
compact	فشرده

locally compact	فشرده موضعی
cell	قطعه
action	کنش
faithful action	کنش صادقانه
quaternion	کواترنیون
least common multiple	کوچکترین مضرب مشترك
collection	گردایه
group	گروه
torsion group	گروه تابی
cyclic group	گروه دوری
dihedral group	گروه دو وجهی
solvable group	گروه حلپذیر
factor group	گروه خارج قسمت
qutient group	گروه خارج قسمت
simple group	گروه ساده
symmetric group	گروه متقارن
finitely generated group	گروه متناهیاً تولید شده
octic group	گروه هشتین
discrete	گسسته
disjoint	مجزا
orbit	مدار
order	مرتبه
composite	مرکب
conjugate	مزدوج
conjugation	مزدوجگیری
affine	مستوی
inverse	معکوس
intersection	مقطع

generator	مولد
normalizer	نورمالساز
relation	نسبت ، رابطه
cross ratio	نسبت متقاطع
equivalence relation	نسبت هم‌ارزی
mapping	نگاشت
canonical mapping	نگاشت کانونی
presentation	نمایش
representation	نمایش
group presentation	نمایش گروه
representative	نماینده
semigroup	نیمگروه
join	وست [از مصدر وستن به معنای بستن]
kernel	هسته
residue class	هماد مانده‌ای
identity	همانی
collineation	همخطی
coset	همدسته
isotropy	همروندی
congruence	همنهشتی
projective geometry	هندسهٔ تصویری

فهرست راهنما

آبلی، گروه، ۲۷
گروه ـ آزاد، ۲۱۲
گروه، متناهیاً تولید شده، ۱۵۲
اپیمورفیسم، ۱۵۴
اتومورف، ۱۱۸
اتومورفیسم، ۸۸، ۱۵۷
ـ داخلی، ۱۳۴
ادغامهای مقدماتی، ۲۲۲
ارلانگن، ۱۱۱
آزاد، گروه، ۲۲۳
گروه آبلی ـ، ۲۱۲
استقرای ریاضی، ۲۴۰
اصل موضوع ـ. ۲۴۰
آشباخر، ام.، ۱۴۰
افراز، یك عدد، ۲۰۸
ـ یك مجموعه، ۸، ۱۲۲
الفبا، ۲۲۱
الگوریتم تقسیم، ۶۸
انتقال، ۱۱۳
ـ چپ، ۱۱۸
ـ راست، ۱۱۸
اندازه، ۱۱۸
ـ پایای چپ، ۱۱۸
ـ پایای راست، ۱۱۸
ـ هار، ۱۱۸
اندیس، ۱۲۹
ـ گذار، ۱۲۹
انژکسیون، ۴۹
انعکاس، ۱۱۳
انعکاسی، نسبت، ۹
اویلر، تابع ϕ، ۱۳۱
ایزومتری، ۱۱۲
ایزومورف، ۷۹
سریهای ـ، ۱۵۹
گروههای ـ، ۷۹
G ـ مجموعه‌های ـ، ۱۸۳
نمایشهای ـ، ۲۳۲
ایزومورفیسم، ۷۸، ۱۵۱
ـ گروه، ۷۸
ـ کانونی، طبیعی، ۱۵۱
قضیهٔ اول ـ، ۱۶۶
قضیهٔ دوم ـ، ۱۶۷
قضیهٔ سوم ـ، ۱۶۸
ـ G ـ مجموعه، ۱۸۳

برگردان، ۱۴۱
ـ گروه، ۱۴۱
زیرگروه ـ، ۱۴۱
برنامهٔ ارلانگنی، ۱۱۱
برنساید، و.، ۱۴۰
قضیهٔ شمارشی ـ، ۱۸۷
بسته تحت یك عمل، ۱۷، ۲۵، ۳۸
بوربایکی، ن.، ۴۹، ۲۲۷
بیژکسیون، ۴۹

پایا، زیرگروه، ۱۳۵
سری ـ، ۱۵۸
مجموعهٔ ـ، ۱۸۰

تامپسون، ج. گ.، ۱۴۰، ۲۰۴
تاب، ۱۰۱
بدون ـ، ۱۰۳
ضرایب ـ، ۱۰۴، ۱۰۶
گروه ـ ی، ۱۰۳
تابع، ۴۶
ـ برو، ۴۸
تصویر ـ، ۴۹
ـ مرکب، ۴۸
ـ معکوس، ۵۷
ـ یك به یك، ۴۸
تبدیل، ۱۱۱
تساوی همادی، ۲۰۲
ترانهش، ۶۱
تصویر، ۴۹
تبدیل ـ ی، ۱۱۶
صفحهٔ ـ ی، ۱۱۶
ـ معکوس، ۱۵۰
ترکیب نگاشتها، ۴۸
تظریف، ۱۵۹
تعدی، ۹
تعویضپذیر، ۱۵
اعضای ـ، ۹۵
نمودار ـ، ۸۹، ۱۵۲
تقارنی، نسبت، ۹
تناوبی، تابع، ۱۱۷
تابع دو ـ، ۱۱۷
توپولوژی، ۱۱۶
فضای ـ ك، ۱۱۶
گروه ـ ك فشردهٔ موضعی، ۱۱۸
تهی، مجموعه، ۷
کلمه ـ، ۲۲۲

جایگشت، ۴۹
ـ زوج، ۶۳
علامت ـ، ۱۵۶
ـ فرد، ۶۳
ـ متعدی،
جدول عمل دوتایی، ۱۶

مجموع به هنگ n، ۷۱
حاصل رابطها، ۲۳۱
حاصلجمع مستقیم، ۹۲
ـ خارجی، ۹۲
حاصلضرب مستقیم، ۹۱
ـ خارجی، ۹۱
ـ داخلی، ۹۵
حرف، ۲۲۱

حوزهٔ تعریف، ۴۹
حوزهٔ مقادیر، ۴۹

خط در بینهایت، ۱۱۶
خودنما، ۳۴
خوشتعریف، مجموعه، ۷
عمل ـ، ۱۷، ۱۲۲
نگاشت ـ، ۱۵۱

دور، ۵۹
ـ های مجزا، ۶۰
دوران، ۱۱۲، ۱۲۷
دوری، ۴۲، ۶۷
زیر گروه ـ، ۶۷
گروه ـ، ۴۲، ۶۷
نمادگذاری ـ، ۵۸
دو وجهی، ۵۳، ۵۶

رابط، ۲۳۱
حاصل ـ ها، ۲۳۱
رابطه، ۲۳۱
رابین، م.، ۲۳۲
رتبهٔ گروه، ۲۱۳
ـ آزاد، ۲۲۳

زبروند، ۱۳
زنجیر گروهها، ۱۷۲
زیر پایا، ۱۵۸
زیر گروه، ۳۷
ـ بدیهی، ۳۸
p ـ زیر گروه، ۱۹۴

ـ دوری، ۴۱
ـ نورمال، ۱۳۵
ـ نورمال ماکسیمال، ۱۵۳
ـ واقعی، ۳۸
ـ همروندی، ۱۸۱
زیر مجموعه، ۳۷
ـ واقعی، ۳۸
زیر G ـ مجموعه، ۱۸۳
زیر نورمال، ۱۵۸
زیروند، ۱۴

ژوردان ـ هولدر، قضیه، ۱۶۰

ساسنهاوس، لم، ۱۷۱
سری، ۱۵۸
ـ اصلی (عمده)، ۱۶۰
ـ ترکیبی، ۱۶۰
تظریف ـ، ۱۵۹
ـ زیر نورمال، ۱۵۸
ـ فزایندهٔ مرکزی، ۱۶۳
ـ نورمال (پایا)، ۱۵۸
سورژکسیون، ۴۹
سیلو، قضیه‌های ـ، ۱۹۶، ۱۹۷
p ـ زیر گروه ـ، ۱۹۶

شرایر، قضیه، ۱۶۰، ۱۷۱
شرکتپذیر، ۱۵

صفحهٔ تصویری، ۱۱۶

ضرایب تاب، ۱۵۴

ضرب، مؤلفه‌ای، ۹۱
ـ جایگشتها، ۴۹

عدد، بتی، ۱۰۴
ـ خالی از مربع، ۱۰۷
عضو، ۷
علامت جایگشت، ۱۵۶
عمل دوتایی، ۱۴، ۱۷۷
ـ القایی، ۳۸، ۱۲۲
ـ تعویضپذیر، ۱۵
جدول ـ، ۱۶
ـ شرکتپذیر، ۱۵
غیر واقعی، زیر مجموعهٔ ـ، ۳۸
زیرگروه ـ، ۳۸

فاکس، د. اچ.، ۲۲۱
فایت، د.، ۱۴۰، ۲۰۴

قانون حذف، ۲۵
قضیهٔ اساسی، حساب، ۱۶۵
ـ گروههای آبلی متناهیاً تولید شده، ۱۰۳-۲۱۳

کاکستر، اچ. س. م.، ۱۱۳
کراول، د. اچ.، ۲۲۱
کلاین، ف.، ۱۱۱
گروه ـ، ۳۸
کلمه، ۲۲۱
ـ تهی، ۲۲۲
ـ مختصر، ۲۲۱
مسأله ـ، ۲۳۲

کنش، ۱۷۷
ـ صادقانه، ۱۸۳
ـ متعدی، ۱۸۳
کواترنیون، گروه، ۲۳۷
کوشی، قضیه، ۱۹۴
کیلی، قضیه، ۸۳

گروه، ۲۵
ـ آبلی، ۲۷
ـ آبلی آزاد، ۲۱۲
ـ آزاد، ۲۲۳
ـ بدون تاب، ۱۰۳
برگردان ـ، ۱۴۱
p ـ گروه، ۱۹۴
ـ تابی، ۱۰۳
ـ تجزیه‌پذیر، ۱۰۷
ـ تجزیه ناپذیر، ۱۰۷
ـ تقارنهای مربع، ۵۳
ـ حرکتهای صلب مکعب، ۵۸
ـ حلپذیر، ۱۶۲
ـ خارج قسمت، ۱۳۶
خواص ساختاری ـ، ۸۱
ـ دوری، ۴۲
ـ دو وجهی، ۵۳، ۵۶
زیر ـ، ۳۷
ـ ساده، ۱۳۹
ـ کلاین، ۳۸
کنش ـ، ۱۷۷
ـ متعدی، ۵۷
ـ متقارن، ۵۲
ـ متناوب، ۶۳

ـ متناهی ، ۲۹
ـ متناهیاً تولید شده ، ۱۵۲
مرکز ـ ، ۴۵
ـ مستوی ، ۱۱۹
نسخهٔ آبلی شدهٔ ـ ، ۱۴۱
نمایش ـ ، ۲۳۱
ـ هشتین ، ۵۳ ، ۲۳۷
گریس ، آد . ال . ، ۱۲۱

لاتیس ، ۳۹
لاگرانژ ، قضیه ، ۱۲۸

مبنا ، ۲۱۲ ، ۲۲۷
ـ ی گروه آبلی متناهیاً تولیدشده ، ۲۲۷
ـ ی گروه آبلی آزاد ، ۲۱۲
متعدی ، نسبت ـ ، ۹
جایگشت ـ ، ۵۷
G ـ مجموعهٔ ـ ، ۱۸۳
متناهیاً تولید شده ، ۱۵۲
مجموعه ، ۶
افراز ـ ، ۸
تبدیل ـ ، ۱۱۱
ـ تهی ، ۷
ـ خوشتعریف ، ۷
زیر ـ ، ۳۷
زیر G ـ مجموعه ، ۱۸۳
ضرب دکارتی ـ ها ، ۹۵
کنش گروه بر ـ ، ۱۷۷
مقطع ـ ها ، ۹۵
G ـ مجموعه ، ۱۷۷
مدار ، ۵۷ ، ۱۸۱

مرتبه ، ۳۷
ـ گروه ، ۳۷
ـ مجموعه ، ۳۷
ـ یك عضو ، ۶۵ ، ۹۴
مرکز گروه ، ۴۵ ، ۱۶۳
مزدوج ، زیر گروههای ـ ، ۱۳۶
مزدوجگیری ، ۱۳۴
مستوی ، گروه ـ ، ۱۱۹
هندسهٔ ـ ، ۱۱۹
معکوس ، ۲۵
تصویر ـ ، ۱۵۰
ـ چپ ، ۲۸
ـ راست ، ۲۸
نگاشت ـ ، ۵۷
مقطع ، دو زیر گروه ، ۴۵
ـ مجموعه‌ها ، ۹۵
مك‌کی ، ج . اچ . ، ۱۹۳
مولد ، ۴۲ ، ۶۷
ـ گروه ، ۶۷ ، ۱۰۲
ـ های آزاد ، ۲۲۳
ـ های نمایش ، ۲۳۱
مونومورفیسم ، ۱۵۴

نسبت ، متقاطع ، ۱۱۶
ـ هم‌ارزی ، ۸
نگاشت ، ۴۶
ـ انژکسیون ، ۴۹
ـ برو ، ۴۸
ـ بیژکسیون ، ۴۹
تصویر تحت یك ـ ، ۴۷ ، ۴۹ ، ۱۵۰
ـ طبیعی ، ۱۴۹

ـ کانونی، ۱۴۹
ـ معکوس، ۵۷
ـ یك به یك، ۴۸
نمایش، گروه، ۲۳۱
ـ منظم چپ، ۸۵
ـ منظم راست، ۸۵
نورمال، زیرگروه ـ، ۱۳۵
سری ـ، ۱۵۸
سری زیر ـ، ۱۵۸
نورمالساز، ۱۹۵
نونکه، آد. ج، ۱۹۳
نیمگروه، ۲۸

واقعی، زیرگروه ـ، ۳۸
زیر مجموعهٔ ـ، ۳۸
وست، ۹۶

هار، ا.، ۱۱۸
اندازهٔ ـ، ۱۱۸
هانگرفورد، ۱۹۳
هجا، ۱۸۸
هشتین، گروه، ۵۳، ۲۳۷
هماد، تساوی ـ ی، ۲۰۲
ـ مانده‌ای، ۱۱
ـ مزدوج، ۲۰۲
ـ هم‌ارزی، ۱۰
هم‌ارزی، نسبت، ۱۰
همانی، ۲۵
ـ چپ و راست، ۲۸
همخطی مستوی، ۱۱۹
همدسته، ۱۲۳
ـ چپ و راست، ۱۲۳
همروندی، زیرگروه، ۱۸۱
همنهشتی، ۱۱، ۷۱، ۱۳۶
ـ چپ به هنگ H، ۱۲۳
ـ راست به هنگ H، ۱۲۳
همومورفیسم، ۱۴۸
ـ گروه آزاد، ۲۲۴
قضیهٔ اساسی ـ، ۱۵۱
هستهٔ ـ، ۱۴۹
هندسه، ۱۱۱
ـ اقلیدسی، ۱۱۲
ـ تصویری، ۱۱۶
ـ مستوی، ۱۱۹

یك به یك، ۴۸