

تام م. آپوستل



حساب دیفرانسیل و انتگرال

جلد اول

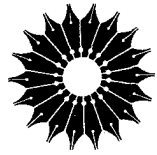
ترجمہ

علیرضا ذکائی

مہدی رضائی دلفی

علی اکبر عالم زادہ

فرخ فیروزان



حساب دیفرانسیل و انتگرال

جلد ۱

نوشتہ

تام م. اپوستل

ترجمہ

علی رضا ذکائی

مہدی رضائی دلفی

علی اکبر عالم زادہ

فرخ فیروزان

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجمان

کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال اپوستل در میان شیفتگان ریاضی کتاب ناشناخته‌ای نیست. کتابی است دزد دو جلد که از بدو انتشار هم در تدریس از آن استفاده شده و هم بعنوان یک مرجع معتبر مورد استفاده قرار گرفته است. کیفیت بارز این کتاب سطح دقت مطالب در آن است که کتاب را از کتب مشابه فعلی ممتاز می‌سازد. با اینحال تنوع مطالب در آن بحدی است که نه تنها برای تدریس در رشته ریاضی مناسبترین کتاب است بلکه هردانشجویی که بخواهد ریاضیات پایه را بروش اصولی فراگیرد می‌تواند از آن استفاده نماید. نظر به اهمیت این کتاب و همچنین نیاز مبرم دانشجویان به متن فارسی این اثر ارزنده بسر آن شدیم که به ترجمه‌اش دست یازیم، و اینک با کمال افتخار ترجمه اولین جلد آن را تقدیم می‌داریم.

در این ترجمه ما راه دقیق را پیش گرفته‌ایم؛ در برگرداندن مطالب حتی المقدور دخل و تصرف نکرده‌ایم؛ حتی واحدهای آن را که در دستگاه متریک نبودند تغییر نداده‌ایم. در عین حال از شیوایی ترجمه نیز غافل نبوده‌ایم. همواره سعی کرده‌ایم رعایت امانت را با روانی و سلاست درهم آمیزیم. ضمناً به ساختن واژه‌های جدید نیز پرداخته‌ایم مگر بهنگام ناگزیری، و کوشیده‌ایم تا از میان معادلهای فارسی موجود بهترینشان را برگزینیم. هرکجا به اسم دانشمندی برخوردیم املای فرنگی آن را (فقط یکبار) در پانوشت آورده‌ایم، و نیز چون واحدها در دستگاه متریک نبودند، برای تسهیل در امر قرائت، معادل آنها در این دستگاه را نیز در پانوشت قید کرده‌ایم. بالاخره در پایان کتاب واژه‌نامه فارسی به انگلیسی و انگلیسی به فارسی و فهرست راهنما گنجانده شده است. با آنکه کوشیدیم کتاب عاری از غلط باشد لکن این منظور بر نیامد و حین تهیه واژه‌نامه به چند نمونه از آنها برخوردیم. ما همه اشتباهات را منحصر به همین چندتا نمی‌دانیم و از خواننده می‌خواهیم چنانچه با اشتباهی مواجه شد و یا اینکه در ترجمه انحرافی مشاهده کرد به مترجمان گوشزد نماید تا در چاپ بعدی اصلاح شوند.

این کتاب اولین کتابی بود که برای چاپ در شورای گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر

مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۵۹ به تصویب رسید. در اینجا بر خود فرض می‌دانیم که از همه همکاران دانشگاهی در این شورا بخصوص آقای دکتر علی اکبر جعفریان مسؤول و هماهنگ کننده این گروه که صمیمانه در تمهید مقدمات چاپ این کتاب کوشش کردند تشکر نمایم.

در خاتمه لازم می‌دانیم از آقای دکتر نصرالله پورجوادی سرپرست محترم مرکز نشر دانشگاهی که با عنایتی خاص موجبات نشر این کتاب را فراهم نمودند و نیز آقای احمد خیرمندی سرپرست محترم چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف که قسمت حروفچینی را در جهت این کتاب بسیج نمودند سپاسگزاری نمایم. همچنین لازم است از آقای سعید رحمتی بخاطر آماده سازی تصاویر کتاب برای کلیشه و نظارت در تهیه آنها تشکر نمایم. بعلاوه زحمات آقای صفا نوربخش را در تهیه و تنظیم القاب و واژه‌نامه‌ها و فهرست راهنما ارج می‌نهم. حروفچینی این کتاب زیر نظر آقای محمدعلی میرسلطانی و با دست هنرمندان آقایان: نادر دادخواهان، صفاءالدین خندق آبادی، عبدالعلی غفوری، محمود نیاورانی، علی اکبر بورچی، و امین الله باقری صورت گرفته و چاپ آن بعهده آقای عباس قنبری بوده است. هرکس که با چاپ کتب ریاضی بشیوه دستی آشنا باشد بخوبی می‌داند که چاپ کتابی به این حجم و با این دقت و زیبایی در ظرف کمتر از ۶ ماه به افسانه بیشتر شبیه است تا به حقیقت. این کار جز در سایه تلاش و فعالیت مداوم این آقایان میسر نمی‌شد. زحماتشان را ارج می‌گذاریم و توفیق همگان را در چاپ کتب بیشتر از خداوند متعال خواهانیم.

علیرضا ذکائی، مهدی رضائی دلفی، علی اکبر عالم زاده، فرخ فیروزان

بهمن ماه ۱۳۶۰ هجری شمسی

تشکر و قدردانی

از دانشمند محترم جناب آقای دکتر علی اکبر عالم زاده در مورد زحمات بی‌شائبه ایشان در امر ویرایش علمی و دستوری این کتاب نهایت تشکر را داریم و خدمات ایشان را به ریاضیات ایران ارج می‌نهم.

علیرضا ذکائی، مهدی رضائی دلفی، فرخ فیروزان

گزیده‌ای از پیشگفتار مؤلف در چاپ اول

بنظر می‌رسد بر سر اینکه اولین درس در حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی چه باید باشد اتفاق نظر وجود ندارد. بعضی سخت معتقدند تنها راهی که می‌توان با آن حساب دیفرانسیل و انتگرال را واقعاً فهمید این است که با بحث کاملی از دستگاه اعداد حقیقی شروع کرده و مبحث را قدم به قدم بصورت منطقی و دقیق عرضه نمود. دیگران این‌طور استدلال می‌کنند که حساب دیفرانسیل و انتگرال عمده‌تأ ایزاری در دست مهندسان و فیزیکدانان است؛ اینها براین باورند که باید در این درس، با توسل به شهود و حل مسائل متعدد که مهارت‌های صحیح بکار بردن را تقویت می‌کنند، برکاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال تکیه کرد. نکات بسیاری هستند که هر دو دیدگاه را تأیید می‌کنند. حساب دیفرانسیل و انتگرال علمی است استنتاجی و شاخه‌ای از ریاضیات محض است. در عین حال باید این نکته بسیار مهم را بخاطر داشت که این مبحث ریشه‌های عمیقی درمسائل فیزیکی داشته و قسمت اعظم نیرو و زیبایش را ازکاربردهای متنوع خود می‌گیرد. می‌توان یک بحث نظری قوی را با آموزش صحیحی از فنون درهم آمیخت، و این کتاب مبین تلاش برای برقراری یک موازنه معقول بین این دو خواهد بود. با آنکه این کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال را بعنوان یک علم استنتاجی مطرح می‌کند لکن از کاربردهای آن درمسائل فیزیکی نیز غافل نبوده است. برهان کلیه قضایای مهم در آن بصورت بخش اصلی تکامل ایده‌های ریاضی عرضه شده و اغلب پیش از برهانها بحثی هندسی یا شهودی آمده تا به شاگرد این بینش را بدهد که چرا اینها شکل خاصی بخود می‌گیرند. با آنکه این بحثهای شهودی خوانندگان بی‌میل به برهانهای مشروح را اقناع می‌کنند اما برهانهای کامل نیز برای اشخاصی که بحث دقیقتر را ترجیح می‌دهند گنجانده شده‌اند.

روش این کتاب ازگسترش تاریخی و فلسفی حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی ناشی شده است. بعنوان مثال، انتگرالگیری پیش از مشتقگیری مورد بحث است. اگرچه این ممکن است بنظر عده‌ای غریب بیاید اما از نظر تاریخی درست و از جنبه آموزشی بقاعده است. بعلاوه، این بهترین راه برای معنی بخشیدن به ارتباط واقعی بین انتگرال و مشتق خواهد بود.

مفهوم انتگرال ابتدا برای توابع پله‌ای تعریف شده است. چون انتگرال یک تابع پله‌ای چیزی جز یک مجموع متناهی نیست نظریه انتگرالگیری در این حالت بغایت ساده خواهد بود. دانشجو ضمن اینکه خواص انتگرال توابع پله‌ای را یاد می‌گیرد دربارگیری نماد جمع‌بندی تجربه آموخته و همزمان با آن با نمادگذاری درانتگرالها آشنا می‌شود. این زمینه را طوری فراهم می‌کند که انتقال از توابع پله‌ای به توابع کلیتر سهل و طبیعی جلوه خواهد کرد.

پیشگفتار مؤلف در چاپ دوم

چاپ دوم از بسیاری جهات با چاپ اول متفاوت است. در این چاپ جبر خطی یکپارچه شده، قضایای مقدار میانگین و کاربردهای عادی حساب دیفرانسیل و انتگرال جلوتر معرفی گشته، و تعداد زیادی تمرین جدید و آسانتر اضافه شده است. با یک نگاه به فهرست مطالب معلوم می شود که کتاب به فصلهای کوچکتر تقسیم شده که هر یک در اطراف مفهوم مهمی دور می زنند. بعضی از بخشها را از نو نوشته و تجدید سازمان داده ام تا انگیزه های بهتری فراهم سازند و سیر اندیشه ها را بهبود بخشند.

همانند چاپ اول، پیش از هر مفهوم جدید و مهم مقدمه ای تاریخی ذکر شده که نحوه تکامل آن از یک مفهوم فیزیکی شهودی اولیه تا تنظیمش بصورت دقیق ریاضی را منعکس می نماید. به شاگرد شمه ای از تلاشهای گذشته و پیروزی مردانی که بیشترین نقش را در این مبحث داشته اند بازگو شده است. در نتیجه شاگرد، بجای آنکه ناظر غیر فعالی بر نتایج باشد، در تکامل تدریجی مفاهیم نقش فعالی خواهد داشت.

چاپ دوم، همچون چاپ اول، به دو جلد تقسیم شده است. دو سوم اول جلد یک به حساب توابع یک متغیره، بانضمام سریهای نامتناهی و آشنائی با معادلات دیفرانسیل، می پردازد. یکسوم آخرش جبر خطی را با کاربردهای آن در هندسه و آنالیز معرفی می کند. اکثر این مطالب به حساب مربوط به مثالهایی که نظریه عمومی را منعکس می کنند خیلی تکیه دارند. این قسمت جبر و آنالیز را بطور طبیعی ترکیب کرده و زمینه را برای انتقال از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره به حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره، که در جلد دو مورد بحث است، فراهم می سازد. بسط بیشتر جبر خطی در چاپ دوم جلد دو، هر زمان که لازم شود، انجام خواهد شد.

بار دیگر مایلیم با خرسندی تمام دین خود را نسبت به پروفیسور بوهن بلاست^۱، اردلی^۲، فولر^۳، هوفمان^۴، اشپرینگر^۵ و سوکرمان^۶ یادآور شوم. تأثیر نظرات آنها در چاپ اول به چاپ دوم هم راه یافته است. در تهیه چاپ دوم از کمک اضافی پروفیسور بزیل گوردون^۷

1. H. F. Bohnenblust
4. K. Hoffman
7. Basil Gordon

2. A. Erdelyi
5. George Springer

3. F. B. Fuller
6. H. S. Zuckerman

که اصلاحات بی‌شماری را پیشنهاد کرده برخوردار بودم. همچنین از جرج اشپرینگر و ویلیام زیمر^۱ که پیشنویس نهائی را خواندند سپاسگزارم. کارکنان کمپانی نشر بلیزدل^۲، مثل همیشه، مددبخش بوده‌اند؛ توجهات مشفقانه آنها نسبت به نظرات من دربارهٔ شکل کتاب و نوع چاپ آن را ارج می‌نهم.

در خاتمه بسیار مایلم از همسر من که بطرق مختلف ضمن فراهم آمدن هر دو چاپ یاری کرده است قدردانی نمایم. برای سپاس از زحمات او این کتاب را با خرسندی تقدیمش می‌دارم.

تام م. اپوستل

پاسادنا^۳، کالیفرنیا

۱۶ سپتامبر ۱۹۶۶

1. William P. Ziemer

2. Blaisdell Publishing Company

3. Pasadena

فهرست مطالب

م. مقدمه

قسمت ۱. مقدمه تاریخی

۱	۱۰۱ م دو مفهوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۳	۲۰۱ م زمینه تاریخی
۴	۳۰۱ م روش اشباع در مورد مساحت یک قطعه سهمی
۸	۴۰۱ م* تمرینات
۹	۵۰۱ م تحلیلی انتقادی از روش ارشمیدس
۱۲	۶۰۱ م روش بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در این کتاب

قسمت ۲. چند مفهوم اساسی نظریه مجموعه‌ها

۱۳	۱۰۲ م آشنائی با نظریه مجموعه‌ها
۱۴	۲۰۲ م نمادهائی برای نمایش مجموعه‌ها
۱۵	۳۰۲ م زیرمجموعه‌ها
۱۶	۴۰۲ م اجتماعها، اشتراکها، متممها
۱۸	۵۰۲ م تمرینات

قسمت ۳. مجموعه‌ای از اصول موضوع برای دستگاه اعداد حقیقی

۲۵	۱۰۳ م مقدمه
۲۱	۲۰۳ م اصول موضوع میدان
۲۴	۳۰۳ م* تمرینات

۲۵	اصول موضوع ترتیب	۴۰۳ م
۲۷	تمرینات	۵۰۳ م*
۲۷	اعداد صحیح و اعداد گویا	۶۰۳ م
۲۹	تعبیر هندسی اعداد حقیقی بعنوان نقاطی بر یک خط	۷۰۳ م
۲۹	کران بالائی یک مجموعه، عنصر ماکزیمم، کوچکترین کران بالائی (سوپرمم)	۸۰۳ م
۳۲	اصل موضوع کوچکترین کران بالائی (اصل موضوع تامیت)	۹۰۳ م
۳۳	خاصیت ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی	۱۰۰۳ م
۳۴	خواص اساسی سوپرمم و اینفیمم	۱۱۰۳ م
۳۶	تمرینات	۱۲۰۳ م*
۳۷	وجود ریشه‌های دوم اعداد حقیقی نامنفی	۱۳۰۳ م*
۳۸	ریشه‌های مرتبه بالاتر. توانهای گویا	۱۴۰۳ م*
۳۹	نمایش اعداد حقیقی بوسیله اعشاریها	۱۵۰۳ م*

قسمت ۴. استقرای ریاضی، نماد جمع‌بندی، و مباحث مربوطه

۴۲	نمونه‌ای از اثبات باستقرای ریاضی	۱۰۴ م
۴۳	اصل استقرای ریاضی	۲۰۴ م
۴۴	اصل خوش ترتیبی	۳۰۴ م*
۴۵	تمرینات	۴۰۴ م
۴۸	اثبات اصل خوش ترتیبی	۵۰۴ م*
۴۸	نماد جمع‌بندی	۶۰۴ م
۵۱	تمرینات	۷۰۴ م
۵۳	قدر مطلقها و نامساوی مثلثی	۸۰۴ م
۵۵	تمرینات	۹۰۴ م
۵۶	تمرینات متفرقه در باب استقرا	۱۰۰۴ م*

۱. مفاهیم حساب انتگرال

۶۱	ایده‌های اساسی هندسه دکارتی	۱۰۱
۶۳	توابع. توصیف غیرصوری و چند مثال	۲۰۱
۶۷	توابع. تعریف صوری بعنوان مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب	۳۰۱*
۶۸	چند مثال دیگر از توابع حقیقی	۴۰۱
۷۱	تمرینات	۵۰۱
۷۳	مفهوم مساحت بعنوان یک تابع مجموعه‌ای	۶۰۱
۷۶	تمرینات	۷۰۱

۷۷	۸۰۱	بازدها و مجموعه‌های عرضی
۷۸	۹۰۱	افرازاها و توابع پله‌ای
۸۰	۱۰۰۱	مجموع و حاصلضرب توابع پله‌ای
۸۰	۱۱۰۱	تمرینات
۸۲	۱۲۰۱	تعریف انتگرال برای توابع پله‌ای
۸۴	۱۳۰۱	خواص انتگرال یک تابع پله‌ای
۸۸	۱۴۰۱	نمادهای دیگری برای انتگرالها
۸۸	۱۵۰۱	تمرینات
۹۲	۱۶۰۱	انتگرال توابع کلیتر
۹۴	۱۷۰۱	انتگرالهای بالائی و پائینی
۹۵	۱۸۰۱	مساحت مجموعه عرضی بیان شده بوسیله انتگرال
۹۶	۱۹۰۱	تذکرات غیرصوری در باب نظریه و فن انتگرالگیری
۹۷	۲۰۰۱	توابع یکنوا و قطعه قطعه یکنوا. تعاریف و مثالها
۹۸	۲۱۰۱	انتگرالپذیری توابع یکنوای کراندار
۱۰۰	۲۲۰۱	محاسبه انتگرال یک تابع یکنوای کراندار
۱۰۰	۲۳۰۱	محاسبه انتگرال $\int_a^b x^p dx$ وقتی p عدد صحیح مثبتی باشد
۱۰۱	۲۴۰۱	خواص اساسی انتگرال
۱۰۳	۲۵۰۱	انتگرالگیری از چند جمله‌ایها
۱۰۴	۲۶۰۱	تمرینات
۱۰۶	۲۷۰۱	برهانهای خواص اساسی انتگرال

۲. برخی از کاربردهای انتگرالگیری

۱۱۱	۱۰۲	مقدمه
۱۱۱	۲۰۲	مساحت ناحیه بین دو نمودار که بصورت انتگرال بیان شده است
۱۱۳	۳۰۲	مثالهای حل شده
۱۱۷	۴۰۲	تمرینات
۱۱۹	۵۰۲	توابع مثلثاتی
۱۲۲	۶۰۲	دستورهای انتگرالگیری برای سینوس و کسینوس
۱۲۷	۷۰۲	توصیف هندسی توابع سینوس و کسینوس
۱۳۱	۸۰۲	تمرینات
۱۳۵	۹۰۲	مختصات قطبی
۱۳۷	۱۰۰۲	انتگرال مساحت در مختصات قطبی
۱۳۹	۱۱۰۲	تمرینات
۱۳۹	۱۲۰۲	کاربرد انتگرالگیری در محاسبه حجم

۱۴۳	تمرینات	۱۳.۲
۱۴۵	کاربرد انتگرالگیری در مفهوم کار	۱۴.۲
۱۴۷	تمرینات	۱۵.۲
۱۴۸	مقدار متوسط یک تابع	۱۶.۲
۱۵۰	تمرینات	۱۷.۲
۱۵۲	انتگرال بعنوان تابعی از حد بالائی. انتگرالهای نامعین	۱۸.۲
۱۵۶	تمرینات	۱۹.۲

۳. توابع پیوسته

۱۵۸	توصیف غیر صوری پیوستگی	۱.۳
۱۵۹	تعریف حد یک تابع	۲.۳
۱۶۳	تعریف پیوستگی یک تابع	۳.۳
۱۶۵	قضایای اساسی حد. مثالهایی دیگر از توابع پیوسته	۴.۳
۱۶۹	برهانهای قضایای اساسی حد	۵.۳
۱۷۲	تمرینات	۶.۳
۱۷۵	توابع مرکب و پیوستگی	۷.۳
۱۷۷	تمرینات	۸.۳
۱۷۸	قضیه بولتزانو برای توابع پیوسته	۹.۳
۱۸۰	قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته	۱۰.۳
۱۸۱	تمرینات	۱۱.۳
۱۸۲	فرایند معکوس سازی	۱۲.۳
۱۸۳	خواصی از تابعها که در معکوس سازی حفظ می شوند	۱۳.۳
۱۸۵	معکوسهای توابع قطعه قطعه یکنوا	۱۴.۳
۱۸۶	تمرینات	۱۵.۳
۱۸۷	قضیه مقدار اکستريم برای توابع پیوسته	۱۶.۳
۱۸۹	قضیه پیمای کوچک برای توابع پیوسته (پیوستگی یکشکل)	۱۷.۳
۱۹۰	قضیه انتگرالپذیری برای توابع پیوسته	۱۸.۳
۱۹۲	قضایای مقدار میانگین برای انتگرالهای توابع پیوسته	۱۹.۳
۱۹۳	تمرینات	۲۰.۳

۴. حساب دیفرانسیل

۱۹۵	مقدمه تاریخی	۱.۴
-----	--------------	-----

۱۹۶	مسئله‌ای مربوط به سرعت	۲۰۴
۱۹۹	مشتق یک تابع	۳۰۴
۲۰۰	مثالهای از مشتقات	۴۰۴
۲۰۴	جبر مشتقات	۵۰۴
۲۰۷	تمرینات	۶۰۴
۲۱۰	تعبیر هندسی مشتق بعنوان شیب	۷۰۴
۲۱۳	نمادهای دیگری برای مشتقات	۸۰۴
۲۱۵	تمرینات	۹۰۴
۲۱۷	قاعده زنجیره‌ای برای مشتگیری از توابع مرکب	۱۰۰۴
۲۱۹	کاربردهای قاعده زنجیره‌ای. میزانهای وابسته و مشتگیری ضمنی	۱۱۰۴
۲۲۲	تمرینات	۱۲۰۴
۲۲۵	کاربردهای مشتگیری در مقادیر اکستريم توابع	۱۳۰۴
۲۲۸	قضیه مقدار میانگین برای مشتقات	۱۴۰۴
۲۳۱	تمرینات	۱۵۰۴
۲۳۲	کاربردهای قضیه مقدار میانگین در خواص هندسی توابع	۱۶۰۴
۲۳۳	آزمون مشتق دوم برای اکسترمها	۱۷۰۴
۲۳۵	رسم منحنی	۱۸۰۴
۲۳۷	تمرینات	۱۹۰۴
۲۳۷	مثالهای حل شده‌ای از مسائل اکسترم	۲۰۰۴
۲۴۱	تمرینات	۲۱۰۴
۲۴۳	مشتقات جزئی	۲۲۰۴*
۲۴۹	تمرینات	۲۳۰۴*

۵. رابطه بین انتگرالگیری و مشتگیری

۲۵۰	مشتق انتگرال نامعین. اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال	۱۰۵
۲۵۳	قضیه مشتق صفر	۲۰۵
۲۵۳	توابع اولیه و دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال	۳۰۵
۲۵۶	خواصی از یک تابع که از خواص مشتقش نتیجه می‌شوند	۴۰۵
۲۵۶	تمرینات	۵۰۵
۲۶۰	نماد لایب نیتز برای اولیه‌ها	۶۰۵
۲۶۲	انتگرالگیری بوسیله جانشانی	۷۰۵
۲۶۷	تمرینات	۸۰۵
۲۶۸	انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء	۹۰۵
۲۷۲	تمرینات	۱۰۰۵

۶. توابع لگاریتم، نمائی، و مثلثاتی معکوس

۲۸۰	۱.۶ مقدمه
۲۸۱	۲.۶ انگیزه تعریف لگاریتم طبیعی بصورت انتگرال
۲۸۴	۳.۶ تعریف لگاریتم. خواص اساسی
۲۸۵	۴.۶ نمودار لگاریتم طبیعی
۲۸۵	۵.۶ نتایج معادله تابعی $L(ab) = L(a) + L(b)$
۲۸۷	۶.۶ لگاریتمها در هر پایه مثبت $b \neq 1$
۲۸۸	۷.۶ دستورهای مشتقگیری و انتگرالگیری مربوط به لگاریتمها
۲۹۱	۸.۶ مشتقگیری لگاریتمی
۲۹۲	۹.۶ تمرینات
۲۹۵	۱۰.۶ تقریبهای چندجمله‌ای برای لگاریتم
۲۹۹	۱۱.۶ تمرینات
۲۹۹	۱۲.۶ تابع نمائی
۳۰۱	۱۳.۶ تابعهای نمائی بیان شده بصورت توانهایی از e
۳۰۲	۱۴.۶ تعریف e^x برای x های حقیقی دلخواه
۳۰۳	۱۵.۶ تعریف a^x برای $a > 0$ و x حقیقی
۳۰۳	۱۶.۶ دستورهای مشتقگیری و انتگرالگیری مربوط به تابعهای نمائی
۳۰۷	۱۷.۶ تمرینات
۳۱۰	۱۸.۶ توابع هذلولوی
۳۱۱	۱۹.۶ تمرینات
۳۱۲	۲۰.۶ مشتقات توابع معکوس
۳۱۳	۲۱.۶ معکوسهای توابع مثلثاتی
۳۱۷	۲۲.۶ تمرینات
۳۲۰	۲۳.۶ انتگرالگیری بوسیله کسره‌های جزئی
۳۲۸	۲۴.۶ انتگرالهایی که به انتگرالهای توابع گویا قابل تبدیلند
۳۳۰	۲۵.۶ تمرینات
۳۳۲	۲۶.۶ تمرینات متفرقه برای دوره

۷. تقریبهای چندجمله‌ای برای توابع

۳۳۹	چند جمله‌ایهای تیلور تولید شده بوسیله یک تابع	۲۰۷
۳۴۲	حساب چند جمله‌ایهای تیلور	۳۰۷
۳۴۵	تمرینات	۴۰۷
۳۴۶	دستور تیلور با باقیمانده	۵۰۷
۳۴۸	تخمین خطا در دستور تیلور	۶۰۷
۳۵۲	شکلهای دیگر باقیمانده در دستور تیلور	۷۰۷*
۳۵۳	تمرینات	۸۰۷
۳۵۵	چند نکته دیگر در باره خطا در دستور تیلور. نماد o	۹۰۷
۳۵۹	کاربردهائی در صورت مبهم	۱۰۰۷
۳۶۱	تمرینات	۱۱۰۷
۳۶۳	قاعده هوییتال در مورد صورت مبهم $0/0$	۱۲۰۷
۳۶۷	تمرینات	۱۳۰۷
۳۶۹	علامات $+\infty$ و $-\infty$. تعمیم قاعده هوییتال	۱۴۰۷
۳۷۱	حدود نامتناهی	۱۵۰۷
۳۷۳	رفتار $\log x$ و e^x بازای x های بزرگ	۱۶۰۷
۳۷۶	تمرینات	۱۷۰۷

۸. آشنائی با معادلات دیفرانسیل

۳۷۹	مقدمه	۱۰۸
۳۸۰	اصطلاحات و نمادها	۲۰۸
۳۸۲	معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای تابع نمائی	۳۰۸
۳۸۳	معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول	۴۰۸
۳۸۷	تمرینات	۵۰۸
۳۸۹	چند مسئله فیزیکی که به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول منجر می‌شوند	۶۰۸
۳۹۶	تمرینات	۷۰۸
۴۰۱	معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت	۸۰۸
۴۰۱	وجود جوابهای معادله $y'' + by = 0$	۹۰۸
۴۰۲	تقلیل معادله کلی به حالت خاص $y'' + by = 0$	۱۰۰۸
۴۰۳	قضیه یکنوائی برای معادله $y'' + by = 0$	۱۱۰۸
۴۰۵	حل کامل معادله $y'' + by = 0$	۱۲۰۸
۴۰۶	حل کامل معادله $y'' + ay' + by = 0$	۱۳۰۸
۴۰۸	تمرینات	۱۴۰۸
۴۱۰	معادلات خطی مرتبه دوم غیر همگن با ضرایب ثابت	۱۵۰۸

۱۶.۸ روشهایی خاص برای تعیین یک جواب خصوصی معادله غیر همگن

$$y'' + ay' + by = R$$

۴۱۳

۱۷.۸ تمرینات

۴۱۵

۱۸.۸ چند نمونه از مسائل فیزیکی که به معادلات مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت

۴۱۶

منجر می شوند

۴۲۲

۱۹.۸ تمرینات

۴۲۳

۲۰.۸ چند تذکر درباره معادلات دیفرانسیل غیر خطی

۴۲۵

۲۱.۸ منحنیهای انتگرال و راستاهای میدان

۴۲۹

۲۲.۸ تمرینات

۴۳۰

۲۳.۸ معادلات جدائی پذیر مرتبه اول

۴۳۲

۲۴.۸ تمرینات

۴۳۳

۲۵.۸ معادلات مرتبه اول همگن

۴۳۶

۲۶.۸ تمرینات

۴۳۷

۲۷.۸ چند مسئله هندسی و فیزیکی که به معادلات مرتبه اول منجر می شوند

۴۴۲

۲۸.۸ تمرینات متفرقه برای دوره

۹. اعداد مختلط

۴۴۶

۱.۹ مقدمه تاریخی

۴۴۷

۲.۹ تعاریف و خواص میدان

۴۴۹

۳.۹ اعداد مختلط بعنوان تعمیمی از اعداد حقیقی

۴۵۰

۴.۹ یک موهومی i

۴۵۱

۵.۹ تعبیر هندسی. کالبد و شناسه

۴۵۴

۶.۹ تمرینات

۴۵۵

۷.۹ تابعهای نمائی مختلط

۴۵۸

۸.۹ توابع مختلط

۴۶۰

۹.۹ چند مثال از دستورهای مشتقگیری و انتگرالگیری

۴۶۱

۱۰.۹ تمرینات

۱۰. دنباله‌ها، سریهای نامتناهی، انتگرالهای مجازی

۴۶۵

۱.۱۰ پارادکس زنو

۴۷۰

۲.۱۰ دنباله‌ها

۴۷۳

۳.۱۰ دنباله‌های یکنوا از اعداد حقیقی

۴۷۴

۴.۱۰ تمرینات

۴۷۷	سریهای نامتناهی	۵۰۱۰
۴۷۹	خاصیت خطی سریهای همگرا	۶۰۱۰
۴۸۰	سریهای توی هم رو	۷۰۱۰
۴۸۲	سری هندسی	۸۰۱۰
۴۸۵	تمرینات	۹۰۱۰
۴۸۸	تمرینات مربوط به بسطهای اعشاری	۱۰۰۱۰*
۴۸۹	آزمونهای برای همگرایی	۱۱۰۱۰
۴۹۱	آزمونهای مقایسه‌ای برای سریهای با جملات نامنفی	۱۲۰۱۰
۴۹۳	آزمون انتگرال	۱۳۰۱۰
۴۹۵	تمرینات	۱۴۰۱۰
۴۹۶	آزمون ریشه و آزمون نسبت برای سریهای با جملات نامنفی	۱۵۰۱۰
۴۹۹	تمرینات	۱۶۰۱۰
۵۰۰	سریهای متناوب	۱۷۰۱۰
۵۰۴	همگرایی مشروط و همگرایی مطلق	۱۸۰۱۰
۵۰۵	آزمونهای همگرایی دیریکله و آبل	۱۹۰۱۰
۵۰۸	تمرینات	۲۰۰۱۰
۵۱۰	تجدید آرایش در سریها	۲۱۰۱۰*
۵۱۴	تمرینات متفرقه برای دوره	۲۲۰۱۰
۵۱۷	انتگرالهای مجازی	۲۳۰۱۰
۵۲۲	تمرینات	۲۴۰۱۰

۱۱. دنباله‌ها و سریهای توابع

۵۲۵	همگرایی نقطه به نقطه دنباله‌های توابع	۱۰۱۱
۵۲۷	همگرایی یکشکل دنباله‌های توابع	۲۰۱۱
۵۲۸	همگرایی یکشکل و پیوستگی	۳۰۱۱
۵۲۹	همگرایی یکشکل و انتگرالگیری	۴۰۱۱
۵۳۰	یک شرط کافی برای همگرایی یکشکل	۵۰۱۱
۵۳۲	سریهای توانی. دایره همگرایی	۶۰۱۱
۵۳۴	تمرینات	۷۰۱۱
۵۳۶	خواص توابعی که با سریهای توانی حقیقی نمایش داده می‌شوند	۸۰۱۱
۵۳۹	سری تیلور تولید شده بوسیله یک تابع	۹۰۱۱
۵۴۰	شرطی کافی برای همگرایی یک سری تیلور	۱۰۰۱۱
۵۴۱	بسطهایی بصورت سری توانی برای توابع نمائی و مثلثاتی	۱۱۰۱۱
۵۴۲	قضیه برنشتاین	۱۲۰۱۱*

۵۴۴	تمرینات	۱۳.۱۱
۵۴۵	سریهای توانی و معادلات دیفرانسیل	۱۴.۱۱
۵۴۸	سری دوجمله‌ای	۱۵.۱۱
۵۴۹	تمرینات	۱۶.۱۱

۱۲. جبر برداری

۵۵۳	مقدمه تاریخی	۱.۱۲
۵۵۴	فضای برداری n تائیه‌ها از اعداد حقیقی	۲.۱۲
۵۵۷	تعبیر هندسی برای $n \leq 3$	۳.۱۲
۵۵۹	تمرینات	۴.۱۲
۵۶۱	ضرب نقطه‌ای	۵.۱۲
۵۶۲	طول یا نرم یک بردار	۶.۱۲
۵۶۵	تعامد بردارها	۷.۱۲
۵۶۶	تمرینات	۸.۱۲
۵۶۸	تصویرها. زاویه بین بردارها در فضای n بعدی	۹.۱۲
۵۷۰	بردارهای یک‌مختصات	۱۰.۱۲
۵۷۲	تمرینات	۱۱.۱۲
۵۷۴	پیمای خطی یک مجموعه متاهی از بردارها	۱۲.۱۲
۵۷۶	استقلال خطی	۱۳.۱۲
۵۷۹	پایه‌ها	۱۴.۱۲
۵۸۰	تمرینات	۱۵.۱۲
۵۸۳	فضای برداری $V_n(C)$ از n تائیه‌های مختلط	۱۶.۱۲
۵۸۵	تمرینات	۱۷.۱۲

۱۳. کاربردهای جبر برداری در هندسه تحلیلی

۵۸۷	مقدمه	۱.۱۳
۵۸۸	خطوط در فضای n بعدی	۲.۱۳
۵۸۹	چند خاصیت ساده خطوط مستقیم	۳.۱۳
۵۹۲	خطوط و توابع برداری	۴.۱۳
۵۹۵	تمرینات	۵.۱۳
۵۹۶	صفحات در فضای n بعدی اقلیدسی	۶.۱۳
۶۰۱	صفحات و توابع برداری	۷.۱۳
۶۰۲	تمرینات	۸.۱۳

۶۰۳	ضرب خارجی	۹۰۱۳
۶۰۷	حاصلضرب خارجی بیان شده بصورت یک دترمینان	۱۰۰۱۳
۶۰۸	تمرینات	۱۱۰۱۳
۶۱۰	ضرب سه گانه اسکالر	۱۲۰۱۳
۶۱۳	قاعده کرامر برای حل یک دستگاه از سه معادله خطی	۱۳۰۱۳
۶۱۴	تمرینات	۱۴۰۱۳
۶۱۷	بردارهای قائم برصفحات	۱۵۰۱۳
۶۱۹	معادلات دکارتی خطی صفحات	۱۶۰۱۳
۶۲۰	تمرینات	۱۷۰۱۳
۶۲۳	مقاطع مخروطی	۱۸۰۱۳
۶۲۶	خروج از مرکز مقاطع مخروطی	۱۹۰۱۳
۶۲۸	معادلات قطبی مقاطع مخروطی	۲۰۰۱۳
۶۲۹	تمرینات	۲۱۰۱۳
۶۳۱	مقاطع مخروطی متقارن نسبت به مبدأ	۲۲۰۱۳
۶۳۲	معادلات دکارتی مقاطع مخروطی	۲۳۰۱۳
۶۳۶	تمرینات	۲۴۰۱۳
۶۳۷	تمرینات متفرقه در باب مقاطع مخروطی	۲۵۰۱۳

۱۴. حساب توابع برداری

۶۴۱	توابع برداری از یک متغیر حقیقی	۱۰۱۴
۶۴۱	اعمال جبری. مؤلفه ها	۲۰۱۴
۶۴۲	حدود، مشتقات، و انتگرالها	۳۰۱۴
۶۴۵	تمرینات	۴۰۱۴
۶۴۷	کاربرد در منحنیها. تماس	۵۰۱۴
۶۵۱	کاربردهائی در حرکت منحنی الخط. سرعت، تندی، شتاب	۶۰۱۴
۶۵۵	تمرینات	۷۰۱۴
۶۵۷	ماس یک، قائم اصلی، و صفحه بوسان یک منحنی	۸۰۱۴
۶۶۰	تمرینات	۹۰۱۴
۶۶۲	تعریف طول قوس	۱۰۰۱۴
۶۶۵	جمع پذیری طول قوس	۱۱۰۱۴
۶۶۶	تابع طول قوس	۱۲۰۱۴
۶۶۸	تمرینات	۱۳۰۱۴
۶۷۱	انحنای یک منحنی	۱۴۰۱۴
۶۷۳	تمرینات	۱۵۰۱۴

۶۷۵	سرعت و شتاب در مختصات قطبی	۱۶.۱۴
۶۷۷	حرکت در صفحه با شتاب شعاعی	۱۷.۱۴
۶۷۸	مختصات استوانه‌ای	۱۸.۱۴
۶۷۹	تمرینات	۱۹.۱۴
۶۸۱	کاربردهائی در حرکت سیارات	۲۰.۱۴
۶۸۶	تمرینات متفرقه برای دوره	۲۱.۱۴

۱۵. فضاهای خطی

۶۸۹	مقدمه	۱.۱۵
۶۸۹	تعریف فضای خطی	۲.۱۵
۶۹۱	مثالهایی از فضاهای خطی	۳.۱۵
۶۹۳	نتایج مقدماتی اصول موضوع	۴.۱۵
۶۹۴	تمرینات	۵.۱۵
۶۹۶	زیرفضاهای یک فضای خطی	۶.۱۵
۶۹۷	مجموعه‌های وابسته و مستقل در یک فضای خطی	۷.۱۵
۶۹۹	پایه‌ها و بعد	۸.۱۵
۷۰۱	تمرینات	۹.۱۵
۷۰۲	ضربهای داخلی، فضاهای اقلیدسی، نرمها	۱۰.۱۵
۷۰۷	تعامد در یک فضای اقلیدسی	۱۱.۱۵
۷۰۹	تمرینات	۱۲.۱۵
۷۱۳	ساختن مجموعه‌های متعامد. فرایندهای گرام - اسمیت	۱۳.۱۵
۷۱۸	متممهای متعامد. تصاویر	۱۴.۱۵
۷۲۰	بهترین تقریب عناصرها در یک فضای اقلیدسی بوسیلهٔ عناصری	۱۵.۱۵
۷۲۲	در یک زیرفضای با بعد متناهی	۱۶.۱۵

۱۶. تبدیلات خطی و ماتریسها

۷۲۵	تبدیلات خطی	۱.۱۶
۷۲۷	فضای پوچ و برد	۲.۱۶
۷۲۸	پوچی و رتبه	۳.۱۶
۷۳۰	تمرینات	۴.۱۶
۷۳۲	اعمال جبری بر تبدیلات خطی	۵.۱۶
۷۳۵	معکوسها	۶.۱۶

۷۳۷	تبدیلات خطی یک به یک	۷۰۱۶
۷۴۰	تمرینات	۸۰۱۶
۷۴۳	تبدیلات خطی با مقادیر مقرر	۹۰۱۶
۷۴۴	نمایشهای ماتریسی تبدیلات خطی	۱۰۰۱۶
۷۴۷	ساختن نمایش ماتریسی بشکل قطری	۱۱۰۱۶
۷۴۹	تمرینات	۱۲۰۱۶
۷۵۱	فضاهای خطی ماتریسها	۱۳۰۱۶
۷۵۳	یکریختی بین تبدیلات خطی و ماتریسها	۱۴۰۱۶
۷۵۴	ضرب ماتریسها	۱۵۰۱۶
۷۵۸	تمرینات	۱۶۰۱۶
۷۵۹	دستگاههای معادلات خطی	۱۷۰۱۶
۷۶۲	فنون محاسبه	۱۸۰۱۶
۷۶۷	معکوسهای ماتریسهای مربعی	۱۹۰۱۶
۷۶۹	تمرینات	۲۰۰۱۶
۷۷۱	تمرینات متفرقه دربارهٔ ماتریسها	۲۱۰۱۶
۷۷۴	جواب تمرینات	
۸۴۴	واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی	
۸۷۳	واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی	
۹۰۲	فهرست راهنما	

مقدمه

قسمت ۱. مقدمه تاریخی

۱.۱م دو مفهوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

پیشرفت شایان توجه علم و صنعت در قرن گذشته بمیزان زیادی مرسوم گسترش ریاضیات است. آن شاخه از ریاضیات که بنام حساب دیفرانسیل و انتگرال معروف شده وسیله‌ای طبیعی و توانا برای حل مسائل متنوعی است که در فیزیک، هیت، مهندسی، شیمی، زمین‌شناسی، زیست‌شناسی، و مباحثی دیگر از جمله (تأخیدی اخیراً) برخی از علوم اجتماعی مطرح می‌شوند.

برای آنکه خواننده را با مسائل متنوعی که توسط روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی می‌شوند آشنا سازیم، در اینجا چند سؤال نمونه از تمریناتی را که در فصلهای بعدی این کتاب آمده‌اند ذکر می‌کنیم:

با چه سرعتی باید یک موشک را به فضا پرتاب کرد تا هرگز به زمین باز نگردد؟ شعاع کوچکترین قرص مستدیری که بتواند هر مثلث متساوی‌الساقین با محیط L را بپوشاند چیست؟ چنانچه در یک کره توپر شعاع ۲۳ سوراخی بشعاع ۲ در امتداد مرکز ایجاد کنیم چه حجمی از آن کاسته خواهد شد؟ اگر تعدادی از یک نوع باکتری بمیزانی متناسب با تعداد آنها در هر لحظه رشد کنند و عده آنها در هر ساعت دو برابر گردد، افزایش آنها پس از ۱۰ ساعت چه خواهد بود؟ اگر یک نیروی ۱۰ پوندی^۱ طول فنر قابل ارتجاعی را یک اینچ^۲ افزایش دهد، کار لازم برای ازدیاد طول فنر بمقدار یک فوت^۳ چقدر است؟

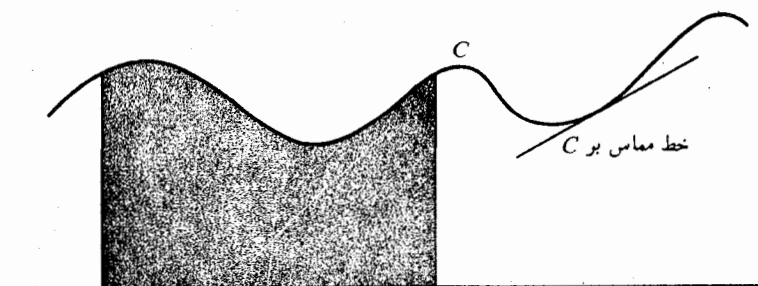
این مثالها، که از مباحث مختلفی اختیار شده‌اند، چند سؤال فنی را نشان می‌دهند که می‌توان با کاربردهای جاری حساب دیفرانسیل و انتگرال بیش و کم بدانها پاسخ گفت.

حساب دیفرانسیل و انتگرال چیزی بیش از یک وسیله فنی است. این مبحث مجموعه‌ای است از اندیشه‌های دلربا و مهیجی که قرن‌ها مورد توجه متفکرین بوده‌اند. این تفکرات

۱. یک پوند = ۴۵۳٫۵۹ گرم ۲. یک اینچ = ۲٫۵۴ سانتیمتر ۳. یک فوت = ۳۰٫۴۸ سانتیمتر

با مفاهیم سرعت، مساحت، حجم، میزان دشت، پیوستگی، خط مماس، و مفاهیمی دیگر از مباحثی مختلف در ارتباط باشند. حساب دیفرانسیل و انتگرال ما را وادار می سازد تا تأمل نموده و بدقت درباره معانی این مفاهیمها تعمق کنیم. کیفیت قابل ملاحظه دیگر این مبحث قدرت متحدکننده آن است. اکثر این افکار را می توان چنان تنظیم کرد که در اطراف دو مسئله نسبتاً خاص که دارای طبیعتی هندسی اند دور بزنند. ما اینک به شرح مختصر این مسائل می پردازیم:

منحنی C را بالای خط پایه افقی (بطوری که در شکل ۱.۴ م. نموده شده) در نظر بگیرید. فرض کنیم منحنی این خاصیت را دارا باشد که هر خط قائم آن را حداکثر یکبار قطع کند. قسمت سایه دار شکل از آن نقاطی تشکیل شده است که زیر منحنی C ، بالای خط پایه، و بین دوپاره خط قائم موازی که C را به پایه وصل می کنند قرار دارند. اولین مسئله اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال چنین است: تعیین عددی که همین مساحت این ناحیه سایه دار باشد. حال به خط مماسی که بر منحنی مطابق شکل ۱.۴ م. رسم شده توجه کنید. دومین مسئله اساسی را می توان این طور بیان کرد: تعیین عددی که شیب این خط را اندازه بگیرد.

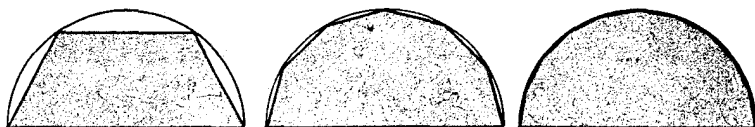


شکل ۱.۴

اساساً کار حساب دیفرانسیل و انتگرال تنظیم و حل دقیق این دو مسئله خاص است. این مبحث به ما توانائی تعریف مفاهیم مساحت و خط مماس را می بخشد و این امکان را می دهد که سطح ناحیه ای مفروض یا شیب خط مماس داده شده ای را محاسبه کنیم. حساب انتگرال به مسئله مساحت می پردازد و در فصل ۱ مطرح می شود. حساب دیفرانسیل با مسئله مماسها سرو کار داشته و در فصل ۴ معرفی خواهد شد.

مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال نیاز به زمینه ای در ریاضیات دارد. فصل حاضر به این زمینه رسیدگی می کند و به چهار قسمت تقسیم شده است: قسمت ۱ جنبه تاریخی مبحث را تدارک می بیند؛ قسمت ۲ برخی از نمادها و اصطلاحات ریاضی مجموعه ها را مورد بحث قرار می دهد؛ قسمت ۳ به دستگاه اعداد حقیقی می پردازد؛ و در قسمت ۴ سخن از استقرای ریاضی و نماد جمع بندی خواهد بود. چنانچه خواننده با این مباحث آشناست می تواند مستقیماً به حساب انتگرال در فصل ۱ بپردازد. در غیر این صورت لازم است پیش از شروع فصل ۱ با مطالبی که در بخشهای بی ستاره این مقدمه آمده اند آشنا شود.

حساب انتگرال بیش از ۲۰۰۰ سال قبل هنگامی پدید آمد که یونانیان بکمک فرایندی که خود دوش اشباع می نامیدند سعی در تعیین مساحتها داشتند. اندیشه های ضروری این روش بسیار ساده اند و می توان آنها را مختصراً چنین وصف کرد: اگر سطح ناحیه مفروضی خواسته شده باشد ما در آن یک ناحیه چندضلعی محاط می کنیم که به ناحیه داده شده نزدیک بوده و بتوان مساحت آن را آسان حساب کرد. بعد ناحیه چندضلعی دیگری اختیار می کنیم که تقریب بهتری باشد و این عمل را، با اختیار چندضلعیهای با اضلاع بیشتر و بیشتر، ادامه می دهیم تا ناحیه مفروض اشباع گردد. این روش در شکل ۲.۴ برای یک ناحیه نیمه مستدیر نشان داده شده است. روش مزبور توسط ارشمیدس^۱ (۲۱۲-۲۸۷ ق.م.) جهت یافتن دستورهای دقیق برای مساحت دایره و معدودی شکل خاص دیگر با موفقیت بکار رفت.



شکل ۲.۴ روش اشباع در مورد يك ناحیه نیمه مستدیر.

تکمیل روش اشباع و رای آنچه توسط ارشمیدس انجام یافت مجبور بود قریب به هجده قرن صبر کند تا استفاده از علامات و فنون جبری جزء متعارفی از ریاضیات گردد. جبر مقدّماتی که اکثر دانش آموزان دبیرستان امروز با آن آشنا هستند در زمان ارشمیدس کاملاً ناشناخته بود، و تقریباً ممکن نبود بتوان روش او را، بدون استفاده از راهی مناسب برای بیان محاسبات نسبتاً طویل بشکلی فشرده و ساده، برای هرده کلی از ناحیه ها تعمیم داد. در قرن شانزدهم میلادی تغییری کند اما انقلابی در تکامل نمادهای ریاضی آغاز شد. دستگاه پرزحمت اعداد رومی بتدریج جای خود را به نشانه های هندو عربی که امروزه بکار می روند داد، علامات + و - برای اولین بار معرفی گشتند، و مزایای نمادگذاری اعشاری کم کم شناخته شدند. در طول همین دوره بود که موفقیت های چشمگیر ریاضیدانان ایتالیائی، تارناگلیا^۲، کاردانو^۳، و فراری^۴ در یافتن جوابهای جبری معادلات درجه سوم و چهارم موجب فعالیت گسترده ای در ریاضیات شد و به رشد و قبول یک زبان جبری جدید و برتر کمک نمود. با معرفی همه جانبه علامات جبری مناسب، توجه به روش قدیمی اشباع دوباره زنده شد و نتایج متفرق بسیاری در قرن ۱۶ م توسط پیشتا زانی چون کاوالیری^۵، تورچلی^۶، ربروال^۷، فرما^۸، پاسکال^۹، و والیس^{۱۰} کشف گردیدند.

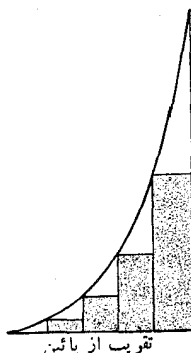
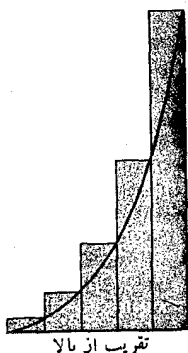
روش اشباع بتدریج به میحنی بدل گشت که امروز حساب انتگرال نام دارد، نظامی است جدید و توانا با کاربردهائی بسیار متنوع که تنها در مسائل هندسی مربوط به سطوح

- | | | | |
|---------------|--------------|-------------|------------|
| 1. Archimedes | 2. Tartaglia | 3. Cardano | 4. Ferrari |
| 5. Cavalieri | 6. Toricelli | 7. Roberval | 8. Fermat |
| 9. Pascal | 10. Wallis | | |

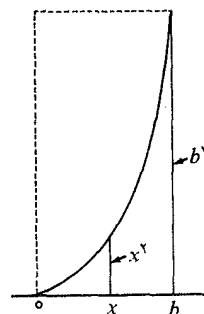
و احجام نیستند بلکه در مسائل سایر علوم نیز می‌باشند. این شاخه از ریاضیات، که برخی از کیفیات اصلی روش اشباع در آن حفظ شده، عظیمترین جنبش خود را در قرن ۱۷م داشت، که بمیزان زیادی مرهون کوششهای اسحق نیوتن^۱ (۱۶۴۲-۱۷۲۷) و گوته‌رید لایب‌نیتز^۲ (۱۶۴۶-۱۷۱۶) بوده است؛ و گسترش این مبحث تا قرن ۱۹م بخوبی ادامه یافت تا اینکه توسط مردانی چون آگوستن-لوئی کشی^۳ (۱۷۸۹-۱۸۵۷) و برنهارد ریمان^۴ (۱۸۲۶-۱۸۶۶) بر پایهٔ ریاضی محکمی استوار گردید. هنوز هم تهذیبها و توسیعیهای دیگری از این نظریه در ریاضیات معاصر صورت می‌گیرند.

۳۰۱م روش اشباع در مورد مساحت يك قطعه سهمی

پیش از آنکه بحث حساب انتگرال را بروشی منظم شروع کنیم آموزنده است که روش اشباع را مستقیماً در مورد یکی از اشکال خاصی که توسط خود ارشمیدس بررسی شده بکار بندیم. ناحیهٔ موردنظر در شکل ۳۰م. نموده شده است و می‌توان آن را چنین وصف کرد: هرگاه نقطه‌ای دلخواه بر قاعدهٔ این شکل اختیار کرده و فاصلهٔ آن تا o را با x نشان دهیم آنگاه فاصلهٔ قائم این نقطه تا منحنی x^2 می‌باشد. بخصوص، اگر طول خود قاعده برابر b باشد، ارتفاع شکل مساوی b^2 خواهد بود. فاصلهٔ قائم x تا منحنی را «عرض» در x می‌نامند. خود منحنی نمونه‌ای است از یک سهمی. ناحیهٔ محصور به آن و دوپاره خط یک قطعه سهمی نامیده می‌شود.



شکل ۳۰.م



شکل ۳۰.م. يك قطعه سهمی

همانطور که دیده می‌شود، شکل ۳۰.م را می‌توان در مستطیلی بقاعدهٔ b و ارتفاع b^2 محاط کرد. با معاینهٔ این شکل درمی‌یابیم که مساحت قطعه سهمی از نصف مساحت مستطیل کمتر است. ارشمیدس کشف حیرت‌آوری کرد و آن این بود که مساحت قطعه سهمی درست

1. Isaac Newton

2. Gottfried Leibniz

3. Augustin-Louis Cauchy

4. Bernhard Riemann

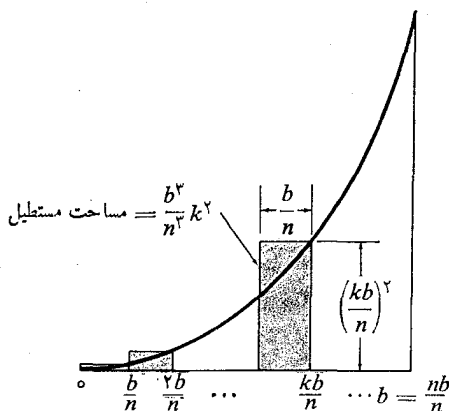
یکسوم مساحت مستطیل است، یعنی $A = b^3/3$ که در آن A مساحت قطعه سهمی می باشد. بزودی نحوه بدست آوردن این نتیجه را نشان می دهیم.

لازم است خاطر نشان کنیم که قطعه سهمی شکل م. ۳ دقیقاً همان قطعه سهمیی که ارشمیدس کشید نیست و جزئیاتی که می آیند درست همانهایی که مورد استفاده او قرار گرفته اند نمی باشند. معهذا اندیشه های اصلی همان اندیشه های ارشمیدس اند؛ آنچه که در اینجا عرضه می شود روش اشباع است منتها با نمادهای امروزی.

این روش بزبان ساده چنین بیان می شود: شکل را به نوارهایی تقسیم می کنیم و، با استفاده از دو مجموعه از مستطیلهائی که در شکل م. ۴ نموده شده اند، دو تقریب برای ناحیه، یکی از پائین و دیگری از بالا، بدست می آوریم. (استفاده از مستطیلهای بی جای چند ضایعهای دلخواه برای ساده کردن محاسبات است.) مساحت قطعه سهمی از مساحت همه مستطیلهای داخلی بیشتر ولی از مساحت کلیه مستطیلهای خارجی کمتر است.

اگر هر نوار را باز تقسیم کنیم تا تقریبی جدید با عده بیشتری نوار بدست آید، مساحت همه مستطیلهای داخلی افزایش می یابد حال آنکه مساحت کلیه مستطیلهای خارجی کاهش خواهد یافت. ارشمیدس دریافت که می توان، با انتخاب تعدادی کافی نوار، مساحت تقریبی قطعه سهمی را تا هر درجه از دقت که مطلوب باشد بدست آورد.

حال می پردازیم به محاسبات واقعاً مورد نیاز در این حالت. برای سادگی، قاعده را به n قسمت مساوی هریک بطول b/n تقسیم می کنیم (ر.ک. شکل م. ۵). نقاط تقسیم بازاری



شکل م. ۵ محاسبه مساحت يك قطعه سهمی.

این مقادیر از x بدست می آیند:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b.$$

نقطه نمونه تقسیم متناظر $x = kb/n$ است که در آن k مقادیر متوالی

$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ را می‌گیرد. در هر نقطه kb/n مستطیلی خارجی با ارتفاع $(kb/n)^2$ را مطابق شکل ۵.۴ می‌سازیم. مساحت این مستطیل برابر است با حاصلضرب قاعده در ارتفاع و مساوی

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} k^2$$

خواهند بود. مجموع مساحت کلیه مستطیلهای خارجی را S_n می‌نامیم. در اینصورت، با توجه به اینکه مساحت مستطیل k ام برابر $k^2(b^3/n^3)$ است، دستور زیر بدست می‌آید:

$$(1.4) \quad S_n = \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

بهین نحو، دستوری برای مجموع مساحت‌های کلیه مستطیلهای داخلی، یعنی s_n ، حاصل می‌شود:

$$(2.4) \quad s_n = \frac{b^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2].$$

این ما را به مرحله بسیار مهم محاسبه می‌رساند. توجه کنید که سازه‌ای که در معادله (1.4) در b^3/n^3 ضرب شده مجموع مجذورات n عدد صحیح اولیه است:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

[سازه متناظر در معادله (2.4) نیز همان است جز آنکه مجموع فقط $n-1$ جمله دارد.] بازای مقدار بزرگ n ، محاسبه این مجموع از طریق جمع مستقیم جمله‌ها پر زحمت و خسته کننده است. خوشبختانه اتحاد جالب

$$(3.4) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

وجود دارد که محاسبه این مجموع را از راهی ساده‌تر ممکن می‌سازد.

این اتحاد بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ معتبر بوده و می‌شود آن را این طور ثابت کرد: با دستور $1 + 3k + 3k^2 + k^3 = (k+1)^3$ شروع کرده آن را ب شکل زیر می‌نویسیم:

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

با فرض $n-1, n, \dots, 2, 1, k$ ، این $n-1$ دستور را بدست می‌آوریم:

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1^3,$$

$$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3,$$

⋮

$$3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3.$$

چنانچه اینها را بهم بیفزائیم همه جملات طرف راست بغیر از دو جمله حذف گشته و نتیجه می گیریم که

$$3[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - 1^3.$$

دومین مجموع سمت چپ مجموع جملات یک تصاعد حسابی بوده و به $\frac{1}{2}n(n-1)$ خلاصه می شود. لذا از این معادله آخر خواهیم داشت

$$(4.2) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

که با افزودن n^2 به دو طرفش، اتحاد (3.2) را بدست می آوریم.
برای مقاصد ما دانستن روابط (3.2) و (4.2) تا این حد دقیق لازم نیست. آنچه که مورد حاجت ما است دو نامساوی

$$(5.0) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

می باشند که برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ برقرارند. این نامساویها را می توان از (3.2) و (4.2) با سانی نتیجه گرفته یا اینکه آنها را مستقیماً باستقرا ثابت کرد. (اثبات استقرائی آن در بخش 1.4 داده شده است.)

چنانچه دو نامساوی (5.0) را در b^3/n^3 ضرب و از (1.0) و (2.0) استفاده کنیم نتیجه می گیریم که برای هر n ,

$$(6.0) \quad s_n < \frac{b^3}{3} < S_n.$$

نامساویهای (6.0) به ما می گویند که $b^3/3$ ، برای هر n ، بین s_n و S_n است. حال ثابت می کنیم که $b^3/3$ تنها عددی است که از این خاصیت برخوردار است. بعبارت دیگر، حکم می کنیم که هرگاه A عددی باشد که در نامساویهای

$$(7.0) \quad s_n < A < S_n$$

بازی هر عدد صحیح مثبت n صدق کند آنگاه $A = b^3/3$. از این مطلب بود که ارشمیدس مساحت قطعه سهمی را برابر $b^3/3$ نتیجه گرفت.

برای اثبات $A = b^3/3$ از نامساویهای (5.0) یکبار دیگر استفاده می کنیم. با افزودن n^2 به دو طرف نامساوی سمت چپ (5.0) خواهیم داشت

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

با ضرب این در b^3/n^3 و استفاده از (1.0) درمی یابیم که

$$(۸.۲) \quad S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}.$$

بهین ترتیب، اگر n^2 را از طرفین نامساوی سمت راست (۵.۲) کم و سپس آن را در b^3/n^3 ضرب کنیم به نامساوی

$$(۹.۲) \quad \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n$$

خواهیم رسید. بنابراین، هر A ای که در (۷.۲) صدق کند باید در

$$(۱۰.۲) \quad \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n},$$

بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، نیز صدق نماید. حال گوئیم فقط این سه حالت ممکن است:

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3}, \quad A = \frac{b^3}{3}.$$

هرگاه نشان دهیم که برقراری هریک از دو حالت اول منجر به تناقض می شود آنگاه باید داشته باشیم $A = b^3/3$ ، چون، بسبب شرلوک هولمز، این همه حالات را بتحلیل خواهد برد.

فرض کنید نامساوی $A > b^3/3$ درست می بود. از دومین نامساوی در (۱۰.۲) نتیجه می گیریم که بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ،

$$(۱۱.۲) \quad A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n}.$$

چون $A - b^3/3$ مثبت است می توانیم دو طرف (۱۱.۲) را بر $A - b^3/3$ تقسیم کرده و سپس، با ضرب نامساوی حاصل در n ، به عبارت معادل

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3} \quad \text{« بازای هر } n \text{ »}$$

برسیم. اما این نامساوی بازای $n \geq b^3/(A - b^3/3)$ بوضوح درست نیست. لذا نامساوی $A > b^3/3$ منجر به تناقض می شود. با استدلالی مشابه می توانیم نشان دهیم که نامساوی $A < b^3/3$ نیز به تناقض می رسد، و در نتیجه، همانطور که حکم شد، باید داشته باشیم $A = b^3/3$.

۴.۱ تمرینات

۱. (الف) ناحیه شکل ۳.۲ را این طور تغییر دهید که عرض در هر ix را (بجای x^2) برابر

$۲x^۲$ بگیرید. شکل جدید را رسم نمایید. در این مورد به کلیه مراحل عمده بخش پیش رسیدگی کرده و ببینید این تغییر چه تاثیری در محاسبه مساحت دارد. همین اعمال را در حالتی که عرض در هر x مقادیر زیر باشد انجام دهید:

$$(ب) ۳x^۲, (پ) \frac{1}{۴}x^۲, (ت) ۲x^۲ + ۱, (ث) ax^۲ + c.$$

۲. ناحیه شکل ۳.م را این طور تغییر دهید که عرض در هر x را (بجای $x^۲$) برابر $x^۳$ بگیرید. شکل جدید را رسم کنید.

(الف) از ترسیمی شبیه شکل ۵.م استفاده کرده و نشان دهید که مجموعهای خارجی و داخلی S_n و s_n با دستورهایی زیر داده می شوند:

$$S_n = \frac{b^۴}{n^۴} (1^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳), s_n = \frac{b^۴}{n^۴} \times [1^۳ + ۲^۳ + \dots + (n-1)^۳].$$

(ب) با استفاده از نامساویهای

$$(۱۲.م) \quad 1^۳ + ۲^۳ + \dots + (n-1)^۳ < \frac{n^۴}{۴} < 1^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳$$

(که می توان آنها را باستقرای ریاضی ثابت کرد؛ ر.ک. بخش م ۲.۴)، نشان دهید که بازای هر n ، $s_n < b^۴/۴ < S_n$ ، و ثابت کنید $b^۴/۴$ تنها عددی است که بازای هر n بین s_n و S_n قرار دارد.

(پ) اگر عرض در هر x برابر $ax^۳ + c$ فرض شود چه عددی جای $b^۴/۴$ قرار خواهد گرفت؟

۳. نامساویهای (۵.م) و (۱۲.م) حالات خاصی از نامساویهای کلیتر

$$(۱۳.م) \quad 1^k + ۲^k + \dots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + ۲^k + \dots + n^k$$

می باشند که بازای هر دو عدد صحیح $n \geq ۱$ و $k \geq ۱$ برقرارند. (۱۳.م) را معتبر دانسته و نتایج تمرین ۲ را تعمیم دهید.

م ۵.۱ تحلیلی انتقادی از روش ارشمیدس

ارشمیدس از محاسباتی شبیه آنچه در بخش م ۳.۱ آمده نتیجه گرفت که مساحت قطعه سهمی مورد بحث $b^۳/۳$ است. نزدیک به ۲۰۰۰ سال این مطلب بعنوان قضیه ای ریاضی مورد قبول عام بود تا اینکه معلوم شد که باید از دیدگاهی انتقادیتر مورد امتحان مجدد قرار گیرد. برای درک اینکه چرا اعتبار نتیجه گیری ارشمیدس باید مورد سؤال باشد دانستن برخی از تحولات مهمی که در تاریخ اخیر ریاضیات رخ داده ضروری است.

هرشاخه از معرفت مجموعه‌ای است از اندیشه‌ها که توسط کلمات و علامات وصف شده‌اند، و نمی‌شود پی بدین اندیشه‌ها برد مگر آنکه معانی دقیق کلمات و علامات بکاررفته را بدانیم. شاخه‌هایی از معرفت، بنام دستگاههای استنتاجی، وجود دارند که فرشان با دیگران در این است که در آنها تعدادی مفهوم «تعریف نشده» از قبل اختیار می‌شوند و بقیه مفاهیم دستگاه برحسب آنها تعریف می‌گردند. چند گزاره دربارهٔ این مفاهیم تعریف نشده بعنوان اصول موضوع یا اصول مسلم اختیار می‌شوند و سایر گزاره‌ها را که می‌توان از آنها نتیجه گرفت قضایا می‌خوانند. آشنا ترین دستگاه استنتاجی نظریهٔ اقلیدسی هندسهٔ مقدماتی است که از زمان یونانیان باستان تاکنون توسط افراد درس خوانده مورد مطالعه بوده است.

روح ریاضیات اولیهٔ یونان، بانضمام تأکیدش بر نظری و اصل موضوعی بودن هندسه بصورتی که در کتاب اصول اقلیدس آمده، تا دورهٔ رنسانس برافکار ریاضیدانان حاکم بود. با ظهور جبر در قرن ۱۶ دورهٔ جدید و پرتوانی در تکامل ریاضیات آغاز شد و ۳۵۰ سال بعد شاهد سلی از کشفیات پراهمیت بود. آنچه که در این مرحله آشکارا حضور نداشت استدلال دقیق منطقی روش استنتاجی و استفادهٔ آن از اصول موضوع، تعاریف، و قضایا بود. در عوض پیش‌تازان قرون ۱۶، ۱۷، ۱۸ به معجون غریبی از استدلال استنتاجی با دید شهودی، کارحدسی محض، و عرفان پناه برده بودند، و عجیب نیست که بعدها نادرست بودن برخی از کارهای آنها معلوم شد. بهر حال کشفیات مهمی که در این عصر صورت گرفت از حیث تعداد حیرت‌آورند، و قسمت اعظمی از کار آنها در آزمون تاریخ پذیرفته شده است - که باید بخاطر آن مهارت و هوش غیرعادی این پیش‌تازان را ستود.

وقتی کشفیات جدید رو بکاهش‌گذار دورهٔ نو و منتقدانه‌تری پدیدار گشت. رفته رفته ریاضیدانان حس کردند که برای استواری ریاضیات نو بر پایه‌ای محکم باید به اندیشه‌های قدیمی روش استنتاجی رو آورند. این دورهٔ تکامل، که از اوایل قرن ۱۹ شروع و تا به امروز ادامه یافته، به آن درجه از خلوص و تجرید منطقی رسیده که کلیهٔ سنتهای علمی یونان را تحت الشعاع قرار داده است و، همزمان با آن، درک روشتری از میانی نه تنها حساب دیفرانسیل و انتگرال بلکه تمام ریاضیات را فراهم آورده است.

حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان بطرق بسیاری بعنوان یک دستگاه استنتاجی عرضه کرد. یک راه ممکن آن است که اعداد حقیقی بعنوان اشیاء تعریف نشده‌ای اختیار شوند. سپس می‌توان چند قاعده در مورد اعمال حاکم بر اعداد حقیقی را بعنوان اصول موضوع انتخاب کرد. یک چنین مجموعه از اصول موضوع در قسمت ۳ این مقدمه آمده است. بعد باید مفاهیم جدید، نظیر انتگرال، حد، پیوستگی، مشتق، برحسب اعداد حقیقی تعریف گردند. سپس خواص این مفاهیم، بعنوان قضایا، از اصول موضوع نتیجه خواهند شد. چنانچه به نتیجهٔ ارشمیدس در مورد مساحت یک قطعه سهمی بصورت جزئی از دستگاه استنتاجی حساب دیفرانسیل و انتگرال نگاه شود، نمی‌توان آن را بعنوان یک قضیه پذیرفت مگر آنکه اول تعریف مقبولی از مساحت داده شود. معلوم نیست که اصولاً ارشمیدس

آنچه را که او مساحت می‌انگاشت تعریف دقیق کرده باشد. بنظر می‌رسد که او مسلم می‌دانسته که هر ناحیه مساحتی مربوط به خود دارد. اوسپس براساس این فرض مساحت نواحی خاصی را محاسبه می‌کند. ارشمیدس در محاسباتش از حقایق دربارهٔ مساحت استفاده کرد که اثبات آنها بدون روشن بودن منظور ما از مساحت ممکن نیست. بعنوان مثال، او فرض می‌کرد که اگر یک ناحیه در داخل ناحیهٔ دیگر قرار داشته باشد مساحت ناحیهٔ کوچکتر نمی‌تواند از مساحت ناحیهٔ بزرگتر بیشتر باشد. همچنین، اگر ناحیه‌ای به دو یا چند قسمت تقسیم شود، مجموع مساحت کلیهٔ قسمت‌ها مساوی مساحت کل ناحیه خواهد بود. همهٔ اینها خواصی هستند که ما یلیم مساحت داشته باشد، و مصرأ می‌خواهیم که هر تعریف مساحت این خواص را ایجاب نماید. کاملاً امکان دارد که خود ارشمیدس مساحت را بعنوان مفهومی تعریف نشده گرفته و سپس خواصی را که هم اکنون ذکر کردیم بعنوان اصول موضوع مساحت بکار برده باشد. امروزه ما کار ارشمیدس را ارج می‌نهیم نه بدان خاطر که در محاسبهٔ مساحت اشکالی خاص یاور ما است بلکه بیشتر بدان دلیل که راهی معقول برای تعریف مفهوم مساحت برای اشکالی بیش و کم دلخواه ارائه می‌دهد. همانطور که معلوم خواهد شد، روش ارشمیدس راهی برای تعریف مفهومی بغایت کلیتر بنام انتگرال پیشنهاد می‌کند. انتگرال نیز بنوبهٔ خود برای محاسبهٔ نه فقط مساحت بلکه کمیت‌های نظیر طول قوس، حجم، کار، و غیره بکار خواهد رفت.

اگر به جلو نگاه کرده و از اصطلاحات حساب انتگرال استفاده نماییم می‌بینیم که محاسبه‌ای که در بخش م ۳۰۱ در مورد قطعه سهمی انجام شد اغلب باین صورت بیان می‌شود:

$$\text{«انتگرال } x^2 \text{ از } 0 \text{ تا } b \text{ برابر } b^3/3 \text{ است.»}$$

این محاسبه بطور علامتی بصورت

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

نوشته می‌شود. علامت $\int$ (S کشیده) را علامت انتگرال می‌نامند و در سال ۱۶۷۵ توسط لایبنیتز معرفی شده است. فرایندی که عدد $b^3/3$ را بدست می‌دهد عمل انتگرالگیری خوانده می‌شود. اعداد ۰ و b که به علامت انتگرال متصلند حدود انتگرالگیری نام دارند. علامت $\int_0^b x^2 dx$ را باید یکجا در نظر گرفت. تعریف آن بدین صورت تلقی می‌شود درست بهمان صورتی که فرهنگ لغت واژه «سنگسار» را بدون آنکه اشاره‌ای به «سن»، «گس»، یا «ار» کند توصیف می‌نماید.

بسیاری از ریاضیدانان قدیمی علامت لایبنیتز برای انتگرال را از روی میل پذیرفتند زیرا که می‌خواستند انتگرالگیری را نوعی «عمل جمع‌بندی» تلقی کنند که آنها را قادر می‌ساخت تا تعدادی نامتناهی «کمیت بی‌نهایت کوچک» را باهم جمع نمایند. مثلاً مساحت قطعه سهمی بعنوان مجموع تعدادی نامتناهی مستطیل بی‌نهایت باریک بارتفاع x^2 و قاعدهٔ dx توجیه می‌شد. علامت انتگرال نمایشگر فرایند جمع مساحت کلیهٔ این مستطیلهای باریک بود. این نوع تفکر الهام بخش و اغلب بسیار سودمند است اما اطلاق معینی دقیق به فکر

یک «کمیت بی نهایت کوچک» آسان نیست. امروزه انتگرال برحسب مفهوم عدد حقیقی تعریف می شود بدون آنکه از تفکراتی چون «بی نهایت کوچکها» استفاده ای شده باشد. این تعریف در فصل ۱ داده شده است.

م ۶.۱ روش بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در این کتاب

هر بحث دقیق و کاملی از حساب انتگرال یا حساب دیفرانسیل سرانجام به مطالعه دقیق از دستگاه اعداد حقیقی مربوط می شود. این مطالعه، اگر بطور کامل صورت گیرد، خود برنامه ای جالب اما قدری طولانی است که شرح کامل آن محتاج کتاب کوچکی خواهد بود. روش این کتاب آن است که کار با اعداد حقیقی بعنوان اشیاء تعریف نشده شروع می شود و فقط تعدادی از خواص اساسی اعداد حقیقی ذکر می گردند که ما آنها را بعنوان اصول موضوع اختیار خواهیم کرد. این اصول و برخی از ساده ترین قضایائی که می توان از آنها نتیجه گرفت در قسمت ۳ این فصل مورد بحث واقع می شوند.

احتمالاً خواننده ضمن مطالعه خود درجبر مقدماتی با اکثر خواص اعداد حقیقی مورد بحث در اینجا آشنا شده است. اما چند خاصیت از اعداد حقیقی هستند که معمولاً در جبر مقدماتی مورد توجه نبوده ولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال نقش مهمی ایفا می کنند. این خواص از اصل موضوع کوچکترین کران بالائی (که به اصل موضوع قاطعیت یا اصل موضوع پیوستگی نیز مشهور است) ریشه می گیرند که در اینجا بتفصیل شرح داده خواهد شد. ممکن است خواننده بخواهد قسمت ۳ را پیش از پرداختن به چهارچوب اصلی متن مطالعه کند یا اینکه خواندن این مطالب را به وقتی موکول سازد که به قسمتهائی از نظریه رسیده که از خواص کوچکترین کران بالائی استفاده می شود. مطالبی از کتاب که به اصل موضوع کوچکترین کران بالائی مربوط می شوند بوضوح مشخص خواهند شد.

برای آنکه حساب دیفرانسیل و انتگرال بعنوان یک نظریه ریاضی کامل و صوری عرضه شود لازم است که، علاوه بر اصول موضوع دستگاه اعداد حقیقی، فهرستی از «روشهای اثبات» مختلف بمنظور استنتاج قضایا از اصول موضوع بیان گردد. پس از این کار، هر گزاره در نظریه یا باید بعنوان یک «قانون مقرر» (یعنی اصل موضوع، تعریف، یا قضیه ای که قبلاً ثابت شده) یا نتیجه ای که در اثر بکار بستن یکی از روشهای اثبات قابل قبول درمورد یک قانون مقرر بدست می آید توجیه گردد. هر برنامه از این قبیل بسیار طولانی و کسل کننده است و به درک مبتدی از مطلب مقدار ناچیزی می افزاید. خوشبختانه برای درکی عالی و کسب معرفتی مؤثر از حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم نیست باین طریق عمل شود. در این کتاب این مبحث بروش غیرصوری معرفی شده و از درک شهودی هندسی، هرجا که مناسب بوده، استفاده فراوان گشته است. در عین حال بحث بگونه ای است که با استانداردهای نوین دقت و روشنی اندیشه هماهنگی دارد. کلیه قضایای مهم این مبحث صریحاً بیان و دقیقاً ثابت شده اند.

برای احتراز از قطع جریان اصلی تفکرات، بعضی از برهانها در بخشهای ستاره دار

جداگانه می‌آیند. بهمین دلیل برخی از فصلها با مطالبی تکمیلی همراهند که در آنها بتفصیل به چند مبحث مهم که به حساب دیفرانسیل و انتگرال مربوط می‌شوند پرداخته شده است. بعضی از این مباحث نیز ستاره دارند تا نشان دهند که می‌توان، بدون برهم‌زدن پیوستگی مطالب، آنها را حذف نمود و یا خواندنشان را بتأخیر انداخت. میزان اختیار از بخشهای ستاره‌دار تا حدودی به زمینه و مهارت خواننده و تا اندازه‌ای به عمق علاقه او بستگی دارد. شخصی که اصولاً به فنون اساسی علاقه دارد می‌تواند از بخشهای ستاره‌دار بگذرد. آنهایی که دوره کاملتری از حساب دیفرانسیل و انتگرال (هم نظریه و هم فن) مورد توجهشان است باید برخی از بخشهای ستاره‌دار را بخوانند.

قسمت ۲. چند مفهوم اساسی نظریه مجموعه‌ها

م ۱۰۲ آشنایی با نظریه مجموعه‌ها

در بحث از هر شاخهٔ ریاضیات، چه آنالیز باشد یا جبر یا هندسه، استفاده از نمادها و اصطلاحات نظریهٔ مجموعه‌ها یاری دهنده است. این مبحث، که بوسیلهٔ بول^۱ و کانتور^۲ در نیمهٔ دوم قرن ۱۹ م عرضه شد، تأثیر بسزائی در پیشرفت ریاضی در قرن ۲۰ م داشته است. این نظریه بسیاری از تفکرات بظاهر نامربوط را بهم پیوسته و در تحویل بسیاری از مفاهیم ریاضی به مبانی منطقی‌شان بطریقی زیبا و منظم یاری نموده است. ارائهٔ کامل نظریهٔ مجموعه‌ها مستلزم بحثی طولانی است که ما آن را از حوصلهٔ این کتاب خارج می‌دانیم. خوشبختانه عددهٔ مفاهیم اساسی در آن اندک است و می‌توان با بحثی غیر ضروری شناخت مؤثری از روشها و تفکرات این نظریه را ارائه داد. در واقع به بحث در بارهٔ نه یک نظریهٔ بسیار تازه بلکه توافق در مورد اصطلاحات دقیقی که ما یلیم در مورد تفکراتی بیش و کم آشنا بکار بریم خواهیم پرداخت.

در ریاضیات واژهٔ «مجموعه» برای نمایش دسته‌ای از چیزها که بعنوان یک شیئی واحد در نظر گرفته شده بکار می‌رود. همهٔ دسته‌هایی که اسامی «گله»، «قبیله»، «جمعیت»، «تیم»، و «حوزهٔ انتخابیه» را در خاطر می‌آورند نمونه‌هایی از مجموعه‌ها می‌باشند. اشیاء منفرد در دسته را عنصرها یا عضوهای مجموعه می‌خوانند و می‌گویند که اینها به مجموعه تعلق دارند.

۱. جرج بول (George Boole) (۱۸۶۴-۱۸۱۵) یک ریاضیدان و منطقی انگلیسی بود. کتاب او (*An Investigation of the Laws of Thought*)، که در سال ۱۸۵۴ منتشر شد، ابداع اولین دستگاه عملی منطق علامتی را خبر داد.

۲. گئورگ کانتور (Georg F.L.P. Cantor) (۱۹۱۸-۱۸۴۵) و مکتبش نظریهٔ فوین مجموعه‌ها را در فاصلهٔ سالهای ۱۸۷۴ تا ۱۸۹۵ بوجو آوردند.

و یا محتوا در مجموعه اند. می گویند خود مجموعه حاوی عنصرهای خویش بوده و یا از آنها تشکیل شده است.

ما اصولاً به مجموعه‌هایی از اشیاء ریاضی، نظیر مجموعه‌هایی از اعداد، مجموعه‌هایی از منحنیها، مجموعه‌هایی از اشکال هندسی، و مانند اینها، توجه خواهیم کرد. در بسیاری از کاربردها مناسب آن است که با مجموعه‌هایی کار کنیم که دربارهٔ ماهیت تک تک اشیاء آنها فرض خاصی نشده باشد. این قبیل مجموعه‌ها را مجموعه‌های مجرد می‌نامند. نظریهٔ مجموعه‌های مجرد برای رسیدگی به چنین دسته‌هایی از اشیاء دلخواه پدید آمده است، و از این تعمیم است که نظریه قدرت خویش را می‌یابد.

م ۲.۲ نمادهایی برای نمایش مجموعه‌ها

مجموعه‌ها معمولاً با حروف بزرگ $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ و عنصرها با حرفهای کوچک $a, b, c, \dots, x, y, z$ نموده می‌شوند. ما نماد خاص

$$x \in S$$

را باین معنی که « x یک عنصر S است» یا « x به S تعلق دارد» بکار می‌بریم. چنانچه x متعلق به S نباشد می‌نویسیم $x \notin S$. هرکجا مناسب بود مجموعه‌ها را با نمایش عنصرها- نشان بین دو ابرو نشان می‌دهیم؛ مثلاً مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و مثبت کوچکتر از ۱۰ با علامت $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ نموده می‌شود حال آنکه مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح زوج بصورت $\{۲, ۴, ۶, \dots\}$ نشان داده خواهد شد؛ در نمایش اخیر سه نقطه جای «و غیره» را گرفته است. از نقاط فقط زمانی استفاده می‌شود که معنی «و غیره» روشن باشد. گاهی روش قرار دادن اعضای یک مجموعه در داخل دو ابرو را نمادگذاری نوبتی می‌خوانند.

اولین مفهوم اساسی که یک مجموعه را به دیگری مربوط می‌سازد تساوی مجموعه‌ها است:

تعریف تساوی مجموعه‌ها. دو مجموعهٔ A و B مساوی (یا همانند) نامند اگر که عنصرهای تشکیل دهندهٔ آنها دقیقاً یکی باشند، که در این حالت می‌نویسیم $A = B$. چنانچه یکی از مجموعه‌ها عنصری غیر متعلق به دیگری داشته باشد می‌گوئیم مجموعه‌ها متساوی نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$.

مثال ۱. بر طبق این تعریف، دو مجموعهٔ $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ مساویند زیرا که هر دو از چهار عدد صحیح ۲، ۴، ۶، و ۸ تشکیل شده‌اند. لذا، هنگامی که برای توصیف مجموعه از نمادگذاری نوبتی استفاده می‌کنیم، ترتیب آمدن عنصرها اهمیتی نخواهد داشت.

مثال ۲. مجموعه‌های $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ ، با اینکه عنصرهای ۲ و ۴ در دومی دوبار آمده‌اند، مساویند. هر دو مجموعه حاوی چهار عنصر ۲، ۴، ۶، و ۸ هستند و لاغیر؛ بنابراین، تعریف ما را مکلف می‌کند که این مجموعه‌ها را مساوی بخوانیم. این مثال نشان می‌دهد که در نمادگذاری نوبتی اصراری در متمایز بودن اشیاء نداریم. مثالی مشابه مجموعه حروف کلمه تشعشعات است که مساوی $\{الف, ع, ش, ت\}$ بوده و از چهار حرف متمایز ت، ش، ع، و الف تشکیل شده است.

۳.۲ زیرمجموعه‌ها

از مجموعه داده شده S می‌توان مجموعه‌های جدیدی را، بنام زیرمجموعه‌های S ، ساخت. بعنوان مثال، مجموعه مرکب از اعداد صحیح مثبت کوچکتر از ۱۰ که بر ۴ بخشپذیرند (مجموعه $\{۴, ۸\}$) زیرمجموعه‌ای از مجموعه همه عددهای صحیح زوج کمتر از ۱۰ است. در حالت کلی تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف زیرمجموعه. مجموعه A را يك زیرمجموعه B نامیم، و می‌نویسیم

$$A \subseteq B,$$

اگر که هر عنصر A به B نیز متعلق باشد. همچنین می‌گوییم A محتوای B است یا B حاوی A می‌باشد. رابطه $\subseteq$ را رابطه شمول مجموعه‌ها می‌خوانند.

گزاره $A \subseteq B$ امکان برقراری $B \subseteq A$ را رد نمی‌کند. درواقع ممکن است که هر دو رابطه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ را داشته باشیم، اما این فقط وقتی رخ می‌دهد که عنصرهای A و B یکی باشند. بعبارت دیگر،

$$A = B \text{ اگر و فقط اگر } A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A.$$

این قضیه نتیجه فوری تعاریف پیشگفته تساوی و شمول است. هرگاه $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ آنگاه می‌گوییم A یک زیرمجموعه حقیقی B است؛ این مطلب را با نوشتن $A \subset B$ نشان می‌دهیم.

درکلیه کاربردهای ما از نظریه مجموعه‌ها، مجموعه ثابتی چون S از پیش در اختیار ما است و ما فقط به زیرمجموعه‌های این مجموعه مفروض توجه داریم. مجموعه زمینه S ممکن است از یک کاربرد به کاربرد دیگر تغییر کند؛ این مجموعه در هر بحث خاص مجموعه عمومی خوانده می‌شود. نماد

$$\{x \mid x \in S \text{ و } x \text{ در } P \text{ صدق می‌کند}\}$$

نمایشگر مجموعه همه عنصرهایی چون x در S است که در خاصیت P صدق می‌کنند. هنگامی که مجموعه عمومی مورد مراجعه ما روشن باشد دیگر به S اشاره‌ای نکرده و فقط می‌نویسیم $\{x \mid x \text{ در } P \text{ صدق می‌کند}\}$ این نماد چنین خوانده می‌شود: «مجموعه همه x هایی که

در P صدق می‌کنند.» گویند که این مجموعه‌ها بوسیلهٔ یک خاصیت معرف توصیف شده‌اند. مثلاً می‌توان مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت را با $\{x | x > 0\}$ معرفی کرد؛ مجموعهٔ عمومی S در این حالت مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی است. بهمین نحو، مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت زوج $\{2, 4, 6, \dots\}$ را می‌شود بصورت $\{x \text{ عدد صحیح مثبت زوجی است} | x\}$ عرضه کرد. البته حرف x یک حرف ظاهری است و می‌توان آن را با هر علامت مناسب دیگری عوض کرد. مثلاً می‌توان نوشت

$$\{x | x > 0\} = \{y | y > 0\} = \{t | t > 0\},$$

و مانند اینها.

ممکن است مجموعه‌ای حاوی هیچ عنصری نباشد. این مجموعه مجموعهٔ تهی یا مجموعهٔ خالی نام داشته و با علامت $\emptyset$ نشان داده می‌شود. ما $\emptyset$ را زیرمجموعهٔ هر مجموعه خواهیم انگاشت. برخی تصور یک مجموعه را بمثابةٔ یک ظرف (نظیر کیسه یا جعبه) که حاوی اشیائی (عصرهایش) است مفید می‌دانند. در اینصورت مجموعهٔ تهی مثل یک ظرف تهی خواهد بود.

برای احتراز از مشکلات منطقی باید میان عنصر x و مجموعهٔ $\{x\}$ ، که تنها عنصرش x است، تمایز بگذاریم. (یک جعبه با کلاهی در آن با خود آن کلاه تصوراً متمایز است.) خصوصاً مجموعهٔ تهی $\emptyset$ همان مجموعهٔ $\{\emptyset\}$ نیست. درواقع مجموعهٔ تهی $\emptyset$ حاوی عنصری نیست حال آنکه مجموعهٔ $\{\emptyset\}$ دارای یک عنصر، یعنی $\emptyset$ ، خواهد بود. (هرجعبه که حاوی جعبه‌ای تهی باشد تهی نیست.) گاهی مجموعه‌هایی را که درست از یک عنصر تشکیل شده‌اند مجموعه‌های تک عنصری می‌نامند.

نمودارها اغلب برای مجسم ساختن روابط بین مجموعه‌ها یاری دهنده‌اند. مثلاً می‌توان مجموعهٔ S را بعنوان یک ناحیه در صفحه و هر عنصر آن را چون نقطه‌ای در آن دانست. در اینصورت زیرمجموعه‌های S بعنوان دسته‌هایی از نقاط داخل S متصور خواهند شد. بعنوان مثال، در شکل م. ۶ (ب)، قسمت سایه‌دار یک زیرمجموعهٔ A و نیز یک زیرمجموعهٔ B است. این چنین کمکهای بصری، که نمودارهای ون^۱ خوانده می‌شوند، در آزمون اعتبار قضایای نظریهٔ مجموعه‌ها و یا پیشنهاد روشهایی جهت اثبات آنها مفیدند. البته خود برهانها باید فقط به تعاریف و مفاهیم متکی باشند نه نمودارها.

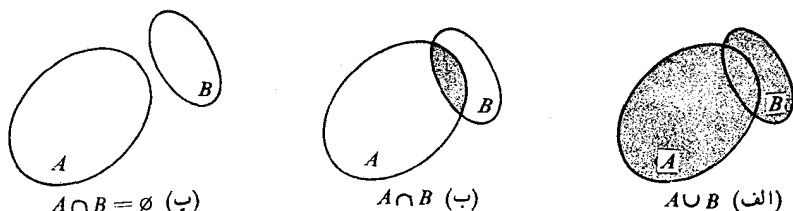
م ۴.۲ اجتماعها، اشتراکها، متممها

از دو مجموعهٔ مفروض A و B می‌توانیم مجموعهٔ جدیدی بنام اجتماع A و B را تشکیل دهیم. این مجموعهٔ جدید با علامت

$$A \cup B \quad (\text{بخوانید: «} A \text{ اجتماع } B \text{»})$$

نموده شده و مساوی مجموعهٔ آن عنصرهایی که در A یا در B و یا در هر دو هستند تعریف

می‌گردد. یعنی $A \cup B$ مجموعه همهٔ عنصرهایی است که لااقل به یکی از مجموعه‌های A و B تعلق دارند. مثالی در شکل ۶.م (الف) ارائه شده که در آن قسمت سایه‌دار نمایشگر



شکل ۶.م اجتماعها و اشتراکها.

$A \cup B$ است.

بهین نحو، اشتراك A و B ، که با

$A \cap B$ (بخوانید: « A اشتراك B »)

نموده می‌شود، مساوی مجموعه همهٔ عنصرهایی تعریف می‌گردد که در هر دوی A و B مشترکند. این با قسمت سایه‌دار شکل ۶.م (ب) نموده شده است. در شکل ۶.م (ب) دو مجموعه A و B عنصر مشترکی ندارند؛ در این حالت اشتراك آنها مجموعه تهی $\emptyset$ خواهد بود. دو مجموعه A و B را ازهم جدا گویند اگر که $A \cap B = \emptyset$.

چنانچه A و B مجموعه‌هایی باشند تفاضل $A - B$ (که متمم B نسبت به A نیز خوانده می‌شود) مساوی مجموعه همهٔ عنصرهایی از A که در B نیستند تعریف می‌گردد. لذا، طبق تعریف،

$$A - B = \{x \mid x \notin B \text{ و } x \in A\}.$$

در شکل ۶.م (ب) قسمت بی سایه A نمایشگر $A - B$ و قسمت بی سایه B نشان دهنده $B - A$ خواهد بود.

اعمال اجتماع و اشتراك با جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی (درعین داشتن اختلاف) تشابهات صوری فراوانی دارند. بعنوان مثال، چون در تعریفهای اجتماع و اشتراك ترتیب دخالتی ندارد، نتیجه می‌شود که $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$. یعنی اجتماع و اشتراك اعمالی تعویضپذیرند. همچنین تعاریف طوری هستند که اعمال شرکتپذیر می‌شوند:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ و } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

اینها و قضایای دیگر مربوط به «جبر مجموعه‌ها» بعنوان تمرینهایی در بخش ۵.۲ آمده‌اند. یکی از بهترین طریقی که خواننده می‌تواند بوسیلهٔ آن با اصطلاحات و نمادهای فوق آشنا شود این است که هر یک از این قوانین را ثابت کند. نوع استدلالی که لازم است بلافاصله پس از تمرینات خواهد آمد.

اعمال اجتماع و اشتراك را می‌توان به دسته‌های متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌ها

باین صورت تعمیم داد: فرض کنیم F رده‌ای^۱ ناتهی از مجموعه‌ها باشد. اجتماع کلیه مجموعه‌ها در F مجموعه آن عنصرهایی تعریف می‌شود که لااقل به یکی از مجموعه‌های F تعلق دارند و با علامت

$$\bigcup_{A \in F} A$$

نموده خواهد شد. چنانچه F دسته‌ای متاهی از مجموعه‌ها باشد، مثلاً^۲

$$F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\},$$

می‌نویسیم

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

بهمین نحو، اشتراک همه مجموعه‌ها در F مجموعه آن عنصرهایی تعریف می‌شود که به هر مجموعه در F تعلق دارند؛ این مجموعه با علامت

$$\bigcap_{A \in F} A$$

نموده می‌شود. برای دسته‌های متاهی (مثل بالا) می‌نویسیم

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

اجتماعها و اشتراکها بنحوی تعریف شده‌اند که برای آنها قوانین شرکتپذیری خودبخود برقرارند. لذا وقتی می‌نویسیم $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ یا $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ هیچ ابهامی در کار نمی‌آید.

۵.۲ تمرینات

۱. مجموعه‌های زیر از اعداد حقیقی را با استفاده از نمادگذاری نوبتی نشان دهید:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x^2 - 1 = 0\}, & D &= \{x \mid x^3 - 2x^2 + x = 2\}, \\ B &= \{x \mid (x-1)^2 = 0\}, & E &= \{x \mid (x+8)^2 = 9^2\}, \\ C &= \{x \mid x+8 = 9\}, & F &= \{x \mid (x^2 + 16x)^2 = 17^2\}. \end{aligned}$$

۱. برای ساده کردن بیان، هر دسته از مجموعه‌ها را یک رده می‌خوانیم. حروف رومن بزرگ $A, B, C, \dots$ برای نمایش رده‌ها بکار می‌روند. البته اصطلاحات و نمادهای معمولی نظریه مجموعه‌ها در مورد رده‌ها هم بکار می‌روند. لذا، مثلاً، $A \in F$ باین معنی است که A یکی از مجموعه‌ها در رده F است، و $A \subseteq B$ یعنی اینکه هر مجموعه در A در B نیز هست، و مانند اینها.

۲. توجه کنید که برای مجموعه‌های تمرین ۱، $B \subseteq A$. کلیه روابط شمول $\subseteq$ را که میان مجموعه‌های A, B, C, D, E و F برقرارند معین کنید.

۳. فرض کنید $A = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$. در اعتبار گزاره‌های زیر بحث کنید (آنها را که درستند ثابت کرده و علت نادرستی دیگران را شرح دهید):

$$(الف) \quad A \subset B \quad (ت) \quad 1 \in A$$

$$(ب) \quad A \subseteq B \quad (ث) \quad 1 \subseteq A$$

$$(پ) \quad A \in B \quad (ج) \quad 1 \subset B$$

۴. تمرین ۳ را در صورتی حل کنید که $A = \{1\}$ و $B = \{\{1\}, 1\}$.

۵. مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4\}$ داده شده است. کلیه زیرمجموعه‌های آن را نشان دهید. تعداد آنها، با احتساب $\emptyset$ و S ، ۱۶ تا است.

۶. چهار مجموعه زیر داده شده‌اند:

$$A = \{1, 2\}, B = \{\{1\}, \{2\}\}, C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

در اعتبار گزاره‌های زیر بحث کنید (آنها را که درستند ثابت کرده و علت نادرستی دیگران را شرح دهید):

$$(الف) \quad A = B \quad (ت) \quad A \in C \quad (ج) \quad B \subset D$$

$$(ب) \quad A \subseteq B \quad (ث) \quad A \subset D \quad (ح) \quad B \in D$$

$$(پ) \quad A \subset C \quad (ج) \quad B \subset C \quad (خ) \quad A \in D$$

۷. خواص زیر را در مورد تساوی مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(الف) \quad \{a, a\} = \{a\}$$

$$(ب) \quad \{a, b\} = \{b, a\}$$

$$(پ) \quad \{a\} = \{b, c\} \text{ اگر و فقط اگر } a = b = c$$

روابط مجموعه‌ای تمرینات ۸ تا ۱۹ را ثابت کنید. (برهانهای نمونه در انتهای این بخش

داده شده‌اند.)

۸. قوانین تمویضپذیری: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

۹. قوانین شرکتپذیری: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

۱۰. قوانین پخشپذیری: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$A \cap A = A, A \cup A = A \quad ۱۱.$$

$$A \cap B \subseteq A, A \subseteq A \cup B \quad ۱۲.$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A \quad ۱۳.$$

$$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A \quad ۱۴.$$

$$A \cup B \subseteq C \text{ هرگاه } B \subseteq C \text{ و } A \subseteq C \quad ۱۵.$$

$$C \subseteq A \cap B \text{ هرگاه } C \subseteq B \text{ و } C \subseteq A \quad ۱۶.$$

$$۱۷. (الف) \text{ اگر } A \subset B \text{ و } B \subset C \text{ ثابت کنید که } A \subset C.$$

(ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید که $A \subseteq C$.

(پ) درحالتی که $A \subset B$ و $B \subseteq C$ چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

(ت) اگر $x \in A$ و $A \subseteq B$ آیا $x \in B$ الزاماً درست است؟

(ث) اگر $x \in A$ و $A \in B$ و $x \in B$ الزاماً درست است؟

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \quad ۱۸.$$

۱۹. فرض کنید F رده‌ای از مجموعه‌ها باشد. در اینصورت

$$B - \bigcap_{A \in F} A = \bigcup_{A \in F} (B - A) \quad \text{و} \quad B - \bigcup_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} (B - A)$$

۲۰. (الف) ثابت کنید که یکی از دو دستور زیر همیشه درست و دیگری گاهی غلط است:

$$(یکم) \quad A - (B - C) = (A - B) \cup C$$

$$(دوم) \quad A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

(ب) برای دستوری که گاهی نادرست است شرط لازم و کافی اضافی بیان کنید که دستور تحت آن همیشه درست باشد.

برهان قانون تعویضپذیری $A \cup B = B \cup A$. فرض کنیم $X = A \cup B$ و $Y = B \cup A$. برای اثبات $X = Y$ ثابت می‌کنیم که $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$. فرض کنیم $x \in X$. پس x اقلأً در یکی از A و B است. از اینرو x دست کم در B یا A خواهد بود؛ در نتیجه $x \in Y$. لذا هر عنصر X در Y نیز هست، پس $X \subseteq Y$. بهمین نحو در می‌یابیم که $Y \subseteq X$ ، در نتیجه $X = Y$.

برهان $A \cap B \subseteq A$. هرگاه $x \in A \cap B$ آنگاه x در هر دوی A و B است. خصوصاً $x \in A$. لذا هر عنصر $A \cap B$ در A نیز هست؛ پس $A \cap B \subseteq A$.

قسمت ۳. مجموعه‌ای از اصول موضوع برای دستگاه اعداد حقیقی

م ۱.۳ مقدمه

برای معرفی دستگاه اعداد حقیقی روشهای گوناگونی وجود دارند. یک روش معروف این است که کار با اعداد صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، ... شروع و، با استفاده از آنها بعنوان مصالح ساختمانی، دستگاه جامعتری ساخته می‌شود که واجد خواص مطلوب است. بطور خلاصه، نحوه انجام این روش بدین شکل است که اعداد صحیح مثبت بعنوان مفاهیم تعریف نشده اختیار شده، چند اصل موضوع مربوط به آنها بیان می‌شود، و پس از آن، با بکارگیری اعداد

صحیح مثبت، دستگاه وسیعتری مرکب از اعداد گویای مثبت (خارج قسمتهای اعداد صحیح مثبت) بنا می‌گردد. سپس اعداد گویای مثبت، بنوبه خود، می‌توانند بعنوان پایه‌ای جهت ساختن اعداد گنگ مثبت (اعدادی حقیقی چون $\sqrt{2}$ و π که گویا نیستند) مورد استفاده قرار گیرند. قدم آخر معرفی اعداد حقیقی منفی و صفر است. مشکلتین قسمت کل فرایند رسیدن از اعداد گویا به اعداد گنگ می‌باشد.

یونانیان باستان اگرچه در بررسیهای هندسی خود نیاز به اعداد گنگ را حس کرده بودند، معهذتا تا اواخر قرن ۱۹ روشهای رضایت بخشی برای ساختن آنها از اعداد گویا معرفی نشدند. در آن زمان سه نظریه متفاوت توسط کارل وایر اشتراس^۱ (۱۸۹۷-۱۸۱۵)، گئورگ کانتور (۱۹۱۸-۱۸۴۵)، و ریشارد ددکیند^۲ (۱۹۱۶-۱۸۳۱) طرح شد. در سال ۱۸۸۹ ریاضیدان ایتالیائی جوزپه پئانو^۳ (۱۹۳۲-۱۸۵۸) پنج اصل موضوع برای اعداد صحیح مثبت وضع کرد که می‌توانست بعنوان نقطه شروع کل ساختمان مورد نظر بکار رود. جزئیات مشروح این ساختن را، که با اصول مسلم پئانو شروع و با استفاده از روش ددکیند اعداد گنگ معرفی می‌شوند، می‌توان در کتاب لاندو^۴ یافت.

دیدگاهی که ما در اینجا خواهیم پذیرفت جنبه ساختن ندارد. ما کار را از مراحل نسبتاً بعد آغاز می‌کنیم؛ خود اعداد حقیقی را بعنوان اشیاء تعریف نشده‌ای می‌گیریم که از یک عده خواص که اصول موضوع ما هستند بهره‌مندند. یعنی فرض خواهیم کرد که مجموعه‌ای چون R از اشیاء، بنام اعداد حقیقی، وجود دارد که در ۱۰ اصل موضوعی که در چند بخش بعدی آمده‌اند صدق می‌کند. کلیه خواص اعداد حقیقی را می‌توان از این اصول موضوع استنباط کرد. چنانچه اعداد حقیقی بوسیله فرایند ساختن تعریف شوند باید خواصی که ما بصورت اصول موضوع می‌آوریم بعنوان قضیه ثابت گردند.

در اصول موضوع زیر حروف کوچک $a, b, c, \dots, x, y, z$ نمایشگر اعداد حقیقی دلخواهند مگر آنکه خلاف آن گفته شود. این اصول بطور طبیعی به سه گروه تقسیم می‌شوند که ما آنها را اصول موضوع میدان، اصول موضوع ترتیب، و اصل موضوع کوچکترین کران بالائی (که اصل موضوع پیوستگی یا اصل موضوع قاطعیت نیز نامیده می‌شود) می‌خوانیم.

م ۲.۳ اصول موضوع میدان

فرض کنیم همراه مجموعه اعداد حقیقی R دو عمل بنامهای جمع و ضرب وجود دارند بطوری که بازای هر جفت عدد حقیقی x و y می‌توانیم مجموع x و y ، که عدد حقیقی دیگری است و با $x+y$ نشان داده می‌شود، و حاصلضرب x و y ، که با xy یا $x \cdot y$ نموده می‌شود، را تشکیل دهیم. فرض این است که مجموع $x+y$ و حاصلضرب xy منحصرأ بوسیله x و y معین می‌شوند. عبارت دیگر، اگر x و y داده شده باشند، دقیقاً یک عدد حقیقی $x+y$ و

1. Karl Weierstrass 2. Richard Dedekind 3. Guiseppe peano
4. E. Landau, *Foundations of Analysis* (New York, Chelsea Publishing Co., 1951).

یک عدد حقیقی xy وجود خواهند داشت. ما برای علامات $+$ و $-$ معانی خاصی جز آنچه در اصول موضوع آمده‌اند قائل نمی‌شویم.

اصل موضوع ۱. قوانین تعویضپذیری. $xy = yx, x + y = y + x$.

اصل موضوع ۲. قوانین شرکتپذیری. $x + (y + z) = (x + y) + z$
 $x(yz) = (xy)z$.

اصل موضوع ۳. قانون پخشپذیری. $x(y + z) = xy + xz$.

اصل موضوع ۴. وجود عنصرهای همانی. دو عدد حقیقی متمایز، که ما آنها را با ۰ و ۱ نشان می‌دهیم، وجود دارند بطوری که بازای هر x حقیقی داریم $x + ۰ = x$ و $۱ \cdot x = x$.

اصل موضوع ۵. وجود قرینه‌ها. بازای هر عدد حقیقی x عددی حقیقی مانند y وجود دارد بقسمی که $x + y = ۰$.

اصل موضوع ۶. وجود متقابلها. بازای هر عدد حقیقی $x \neq ۰$ عددی حقیقی چون y هست که $xy = ۱$.

توجه: اعداد ۰ و ۱ مذکور در اصول موضوع ۵ و ۶ همان ۰ و ۱ اصل موضوع ۴ می‌باشند.

از اصول موضوع بالا می‌توانیم کلیه قوانین معمولی جبر مقدماتی را نتیجه بگیریم. مهمترین آنها بصورت قضایائی در اینجا ذکر شده‌اند. در همه این قضایا علامات a, b, c, d نمایشگر اعداد حقیقی دلخواهی می‌باشند.

قضیه ۱.۰. قانون حذف برای جمع. هرگاه $a + b = a + c$ آنگاه $b = c$.
 (این مطلب، بخصوص، نشان می‌دهد که عدد ۰ مذکور در اصل موضوع ۴ منحصر-بفرد است.)

قضیه ۲.۰. امکان تفریق. بازای a و b داده شده درست یک x وجود دارد که $a + x = b$.
 این x با $b - a$ نشان داده می‌شود. بخصوص، $a - a = ۰$ را فقط می‌نویسند $-a$ و قرینه a می‌خوانند.

قضیه ۳.۰. $b - a = b + (-a)$.

قضیه ۴.م. $-(-a) = a$.

قضیه ۵.م. $a(b - c) = ab - ac$.

قضیه ۶.م. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

قضیه ۷.م. قانون حذف برای ضرب. هرگاه $ab = ac$ و $a \neq 0$ آنگاه $b = c$.
(این مطلب، بخصوص، نشان می‌دهد که عدد ۱ مذکور در اصل موضوع ۴ منحصر بفرد است.)

قضیه ۸.م. امکان تقسیم. اگر a و b با فرض $a \neq 0$ داده شده باشند درست يك x وجود دارد که $ax = b$. این x را با b/a یا $\frac{b}{a}$ نشان می‌دهند و خارج قسمت b و a می‌نامند. بخصوص، $1/a$ بصورت a^{-1} نیز نوشته شده و متقابل a خوانده می‌شود.

قضیه ۹.م. هرگاه $a \neq 0$ آنگاه $a^{-1} \cdot a = 1$.

قضیه ۱۰.م. هرگاه $a \neq 0$ آنگاه $(a^{-1})^{-1} = a$.

قضیه ۱۱.م. هرگاه $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

قضیه ۱۲.م. $(-a)b = -(ab)$ و $(-a)(-b) = ab$.

قضیه ۱۳.م. چنانچه $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$.

قضیه ۱۴.م. چنانچه $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$.

قضیه ۱۵.م. چنانچه $b \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$ ، $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$.

برای آنکه نشان دهیم چگونه این احکام را می‌شود از اصول موضوع نتیجه گرفت برهانهای قضایای ۱.م تا ۴.م را عرضه می‌کنیم. ممکن است خوانندگان علاقمند اثبات بقیه قضا یا را آموزنده بدانند.

برهان ۱.م. فرض کنیم $a + b = a + c$. بنا بر اصل موضوع ۵ عددی مثل y هست بطوری که $y + a = 0$. چون مجموعها منحصر بفردند داریم $y + (a + b) = y + (a + c)$. با استفاده از قانون شرکت پذیری خواهیم داشت $(y + a) + b = (y + a) + c$ یا $0 + b = 0 + c$. اما، بنا بر اصل موضوع ۴، داریم $0 + b = b$ و $0 + c = c$ ، پس $b = c$.

توجه کنید که این قضیه نشان می‌دهد فقط یک عدد حقیقی وجود دارد که از خاصیت ۰ مذکور در اصل موضوع ۴ برخوردار است. درواقع هرگاه ۰ و ۰' هر دو واجد این خاصیت باشند آنگاه $0 + 0' = 0 + 0 = 0$ و $0 + 0 = 0$ پس $0 + 0' = 0 + 0 = 0$ و، بنابر قانون حذف، $0 = 0'$.

برهان ۲.۲. اگر a و b مفروض باشند y را طوری اختیار می‌کنیم که $a + y = 0$ و قرار می‌دهیم $x = y + b$. دراینصورت

$$a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b.$$

بنابراین لاقلاً یک x هست که $a + x = b$. اما، بنابر قضیه ۱.۰م، از این x ها حداکثر یکی وجود دارد. پس فقط یک x با این خاصیت وجود خواهد داشت.

برهان ۳.۰م. فرض کنیم $x = b - a$ و $y = b + (-a)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $x = y$ داریم $x + a = b$ (بنابر تعریف $b - a$) و

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

لذا $x + a = y + a = b$ و در نتیجه، بنابر قضیه ۱.۰م، $x = y$.

برهان ۴.۰م. بنابر تعریف $-a$ داریم $a + (-a) = 0$. اما این معادله به مامی‌گوید که a قرینه $-a$ است. یعنی، همانطور که حکم شده، $a = -(-a)$.

۳.۳* تمرینات

۱. قضایای ۵.۰م تا ۱۵.۰م را با استفاده از اصول موضوع ۱ تا ۶ و قضایای ۱.۰م تا ۴.۰م ثابت کنید.

در تمرینهای ۲ تا ۱۰ احکام یا معادلات داده شده را ثابت کنید. در این راه می‌توانید از اصول موضوع ۱ تا ۶ و قضایای ۱.۰م تا ۱۵.۰م استفاده نمایید.

۲. $0 = 0$.

۳. $1 = 1$.

۴. صفر متقابل ندارد.

۵. $-(a + b) = -a - b$.

۶. $-(a - b) = -a + b$.

۷. $(a - b) + (b - c) = a - c$.

۸. هرگاه $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه $b^{-1} a^{-1} = (ab)^{-1}$.

۹. چنانچه $b \neq 0$ ، $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$.

۱۰. چنانچه $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/(bd)$.

۴.۳ اصول موضوع ترتیب

این اصول موضوع به مفهومی مربوط می‌شوند که ترتیبی میان اعداد حقیقی برقرار می‌کند. این ترتیب ما را قادر می‌سازد تا دربارهٔ اینکه عددی حقیقی از دیگری بزرگتر یا کوچکتر است احکامی بیان داریم. ما خواص ترتیب را بصورت مجموعه‌ای از اصول موضوع دربارهٔ مفهوم جدید تعریف نشده‌ای بنام مثبت بودن معرفی می‌کنیم، و بعد اصطلاحاتی چون کوچکتر از و بزرگتر از را برحسب مثبت بودن تعریف خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ معینی چون $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$ ، بنام مجموعهٔ اعداد مثبت، وجود دارد که در سه اصل موضوع ترتیب زیر صدق می‌کند:

اصل موضوع ۷. اگر x و y در $\mathbf{R}^+$ باشند $x + y$ و xy نیز چنین‌اند.

اصل موضوع ۸. بازای هر عدد حقیقی $x \neq 0$ یا $x \in \mathbf{R}^+$ یا $x \in \mathbf{R}^+ -$ اما هر دو امکان‌پذیر نیست.

اصل موضوع ۹. $0 \notin \mathbf{R}^+$.

حال می‌توانیم علامات $<$ ، $>$ ، $\leq$ ، و $\geq$ را، که بترتیب کوچکتر از، بزرگتر از، کوچکتر یا مساوی، و بزرگتر یا مساوی خوانده می‌شوند، این طور تعریف کنیم:

$x < y$ یعنی $x - y$ مثبت است؛

$x > y$ یعنی $y < x$ ؛

$x \leq y$ یعنی $x < y$ یا $x = y$ ؛

$x \geq y$ یعنی $y \leq x$.

لذا $0 < x$ اگر و فقط اگر x مثبت باشد. اگر $0 < x$ می‌گوئیم x منفی است؛ چنانچه $0 \geq x$ می‌گوئیم x نا منفی است. معمولاً جفتی از نامساویهای همزمان مثل $x < y$ و $y < z$ به شکل ساده‌تر $x < y < z$ نوشته می‌شود؛ نامساویهای مرکب $x \leq y < z$ ، $x < y \leq z$ ، $x \leq y \leq z$ معانی مشابهی خواهند داشت. از اصول موضوع ترتیب می‌توانیم کلیهٔ قواعد معمولی محاسبه با نامساویها را نتیجه بگیریم. مهمترین اینها در اینجا بصورت قضایائی ذکر شده‌اند.

قضیهٔ ۱۶.م. قانون تئلیت. بازای اعداد حقیقی و دلخواه a و b دقیقاً یکی از سه رابطهٔ $a < b$ ، $a = b$ برقرار است.

قضیه ۱۷.۴. قانون تعدی. هرگاه $a < b$ و $b < c$ و $a < c$ آنگاه $a < c$.

قضیه ۱۸.۴. هرگاه $a < b$ آنگاه $a + c < b + c$.

قضیه ۱۹.۴. هرگاه $a < b$ و $c > 0$ آنگاه $ac < bc$.

قضیه ۲۰.۴. هرگاه $a \neq 0$ آنگاه $a^2 > 0$.

قضیه ۲۱.۴. $1 > 0$.

قضیه ۲۲.۴. هرگاه $a < b$ و $c < 0$ آنگاه $ac > bc$.

قضیه ۲۳.۴. هرگاه $a < b$ آنگاه $-a > -b$. بخصوص، هرگاه $a < 0$ آنگاه $-a > 0$.

قضیه ۲۴.۴. هرگاه $ab > 0$ آنگاه a و b یا هر دو مثبت اند یا هر دو منفی.

قضیه ۲۵.۴. هرگاه $a < c$ و $b < d$ آنگاه $a + b < c + d$.

باز در اینجا فقط معدودی از این قضایا را بعنوان نمونه ثابت می‌کنیم تا نحوه اثباتها را نشان داده باشیم. اثبات قضایای دیگر بعنوان تمرین باقی می‌مانند.

برهان ۱۶.۴. فرض کنیم $x = b - a$. هرگاه $x = 0$ آنگاه $b - a = 0$ و $a - b = 0$ و در نتیجه، بنا بر اصل موضوع ۹، نمی‌توانیم داشته باشیم $a > b$ یا $a < b$. اگر $x \neq 0$ اصل موضوع ۸ به ما می‌گوید که یا $x > 0$ یا $x < 0$ ولی هر دو برقرار نیستند؛ یعنی یا $a < b$ یا $b < a$ اما هر دو درست نمی‌باشند. بنا بر این، از سه رابطه $a < b$ ، $a = b$ و $b < a$ دقیقاً یکی برقرار خواهد بود.

برهان ۱۷.۴. هرگاه $a < b$ و $b < c$ آنگاه $b - a > 0$ و $c - b > 0$. بنا بر اصل موضوع ۷ می‌توانیم اینها را بهم بیفزاییم تا بدست آید که

$$(b - a) + (c - b) > 0.$$

یعنی $c - a > 0$ و در نتیجه $c > a$.

برهان ۱۸.۴. فرض کنیم $x = a + c$ و $y = b + c$. در این صورت $y - x = b - a$. اما چون $a < b$ ، $b - a > 0$. پس $y - x > 0$ و این بدان معنی است که $x < y$.

برهان ۱۹.۴. هرگاه $a < b$ آنگاه $b - a > 0$. هرگاه $c > 0$ آنگاه، بنا بر

اصل موضوع ۷، می‌توانیم c را در $(b-a)$ ضرب کنیم تا $c(b-a) > 0$ بدست آید. اما $(b-a)c = bc - ac$ پس $bc - ac > 0$ و این، همانطور که حکم شده، یعنی $ac < bc$.

برهان م. ۲۰. هرگاه $a > 0$ آنگاه، بنابر اصل موضوع ۷، $a \cdot a > 0$. هرگاه $a < 0$ آنگاه $-a > 0$ و در نتیجه، طبق اصل موضوع ۷، $(-a) \cdot (-a) > 0$. در هر حالت داریم $a^2 > 0$.

برهان م. ۲۱. قضیه م. ۲۰ را با فرض $a = 1$ بکار ببرید.

م. ۵.۳ تمرینات

۱. قضایای م. ۲۲ تا م. ۲۵ را با استفاده از قضایای پیشتر و اصول موضوع ۱ تا ۹ ثابت کنید.

در تمرینهای ۲ تا ۱۰ احکام یا نامساویهای داده شده را ثابت کنید. در این راه می‌توانید از اصول موضوع ۱ تا ۹ و قضایای م. ۱۰ تا م. ۲۵ استفاده نمایید.

۲. هیچ عددی حقیقی مثل x وجود ندارد که $x^2 + 1 = 0$.

۳. مجموع دو عدد منفی عددی است منفی.

۴. هرگاه $a > 0$ آنگاه $a > 1/a$ ؛ هرگاه $a < 0$ آنگاه $a < 1/a$.

۵. هرگاه $a < b$ آنگاه $a^{-1} < b^{-1}$ و $0 < b^{-1}$.

۶. هرگاه $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$.

۷. هرگاه $a \leq b$ و $b \leq c$ و $a = c$ آنگاه $b = c$.

۸. برای هر a و b حقیقی داریم $a^2 + b^2 \geq 0$. هرگاه a و b هر دو ۰ نباشند آنگاه $a^2 + b^2 > 0$.

۹. هیچ عددی حقیقی مانند a وجود ندارد که برای هر x حقیقی $x \leq a$.

۱۰. هرگاه x این خاصیت را دارا باشد که برای هر عدد حقیقی و مثبت h ، $0 \leq x < h$ ، آنگاه $x = 0$.

م. ۶.۳ اعداد صحیح و اعداد گویا

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند که از دیگران متمایزند بدان علت که اعضای آنها از خواصی برخوردارند که همه اعداد حقیقی آنها را ندارند. در این بخش دو تا از این زیرمجموعه‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم، یکی مجموعه اعداد صحیح و دیگری مجموعه اعداد گویا. برای معرفی اعداد صحیح مثبت از عدد ۱، که وجودش توسط اصل موضوع ۴ تضمین

شده، آغاز می‌کنیم. عدد $۱ + ۱$ با ۲ ، عدد $۱ + ۲$ با ۳ ، و مانند اینها، نموده می‌شوند. اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... که باین ترتیب با جمع مکرر ۱ حاصل می‌شوند جملگی مثبت‌اند و آنها را اعداد صحیح مثبت می‌خوانند. به بیان دقیق، این توصیف اعداد صحیح مثبت صد درصد کامل نیست زیرا ما منظور خود را از عبارات «و مانند اینها» یا «جمع مکرر» مشروحاً توضیح نداده‌ایم. اگر چه ممکن است معانی شهودی این عبارات روشن باشند، اما در هر بحث دقیقی از دستگاه اعداد حقیقی لازم است تعریف دقیقتری از اعداد صحیح مثبت داده شود. برای انجام این کار روشهای بسیاری وجود دارند. یک روش مناسب آن است که ابتدا مفهوم مجموعه استقرائی معرفی شود.

تعریف مجموعه استقرائی. هر مجموعه از اعداد حقیقی یک مجموعه استقرائی خوانده می‌شود اگر که دارای دوخاصیت زیر باشد:

(الف) عدد ۱ در این مجموعه باشد؛

(ب) بازای هر x در مجموعه $x + ۱$ نیز در آن مجموعه باشد.

مثلاً R یک مجموعه استقرائی است. مجموعه R^+ نیز بهمچنین. حال اعداد صحیح مثبت را آن عددهای حقیقی تعریف می‌کنیم که به هر مجموعه استقرائی متعلق باشند.

تعریف اعداد صحیح مثبت. هر عدد حقیقی یک عدد صحیح مثبت خوانده می‌شود اگر که به هر مجموعه استقرائی متعلق باشد.

فرض کنیم P نمایشگر همه اعداد صحیح مثبت باشد. پس P خود یک مجموعه استقرائی است زیرا که (الف) حاوی ۱ است، و (ب) چنانچه حاوی x باشد حاوی $x + ۱$ نیز خواهد بود. از آنجا که اعضای P به هر مجموعه استقرائی تعلق دارند ما P را کوچکترین مجموعه استقرائی تلقی می‌کنیم. این خاصیت مجموعه P مبنای منطقی برای نوعی از استدلال را بدست می‌دهد که ریاضیدانان آن را اثبات باستقرا می‌نامند، که بحث مفصلی از آن در قسمت ۴ این مقدمه آمده است.

قرینه‌های اعداد صحیح مثبت را عددهای صحیح منفی می‌خوانند. اعداد صحیح مثبت با انضمام اعداد صحیح منفی و ۰ (صفر) مجموعه Z را تشکیل می‌دهند که ما فقط آن را مجموعه اعداد صحیح می‌نامیم.

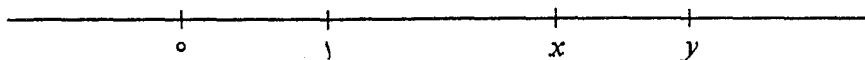
در هر بحث کاملی از دستگاه اعداد حقیقی لازم است که در این مرحله چند قضیه در باره اعداد صحیح ثابت شوند. مثلاً ثابت شود که مجموع، تفاضل، یا حاصلضرب دو عدد صحیح عددی صحیح است ولی خارج قسمت دو عدد صحیح لزوماً چنین نیست. بهر حال ما وارد جزئیات این چنین برهانها نخواهیم شد.

خارج قسمتهای اعداد صحیح a/b (که $b \neq ۰$) را اعداد گویا می‌خوانند. مجموعه اعداد گویا، که با Q نموده می‌شود، حاوی Z بعنوان یک زیرمجموعه است. خواننده باید درک کند که Q در کلیه اصول موضوع میدان و ترتیب صدق می‌نماید. باین دلیل است که

می‌گوئیم مجموعه اعداد گویا یک میدان مرتب است. اعدادی حقیقی که در Q نیستند گنگ خوانده می‌شوند.

م ۷.۳ تعبیر هندسی اعداد حقیقی بعنوان نقاطی بر یک خط

خواننده بی‌شک با نمایش هندسی اعداد حقیقی بوسیله نقاط برخطی مستقیم آشنا است. نقطه‌ای برای نمایش o و نقطه‌ای دیگر، درست راست o ، برای نمایش 1 ، صورتی که در شکل م. ۷.۳ مجسم شده، اختیار می‌شود. این انتخاب مقیاس را مشخص می‌کند. هرگاه شخص مجموعه مناسبی از اصول موضوع برای هندسه اقلیدسی را بپذیرد آنگاه هر عدد حقیقی دقیقاً متناظر یک نقطه بر این خط است و، بعکس، هر نقطه بر خط متناظر یک و فقط یک عدد حقیقی خواهد بود. باین دلیل است که اغلب خط را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌خوانند، و معمول است که لغات عدد حقیقی و نقطه را بیک معنی بکار می‌برند. لذا، بجای آنکه بگوئیم نقطه متناظر عدد حقیقی x ، غالباً می‌گوئیم نقطه x .



شکل م. ۷.۳ اعداد حقیقی که بطور هندسی بر یک خط نموده شده‌اند.

رابطه ترتیبی موجود میان اعداد حقیقی دارای تعبیر هندسی ساده‌ای است. اگر $x < y$ ، همانطور که در شکل م. ۷.۳ نموده شده، نقطه x درست چپ y قرار دارد. اعداد مثبت درست راست o و اعداد منفی در طرف چپ آن واقعند. چنانچه $a < b$ نقطه x در نامساویهای $a < x < b$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر x بین a و b باشد.

این شیوه نمایش اعداد حقیقی بطریق هندسی کمکی است بسیار با ارزش که در کشف و درک بهتر برخی از خواص اعداد حقیقی ما را یاری می‌دهد. اما خواننده باید درک کند که کلیه خواص اعداد حقیقی که بعنوان قضیه پذیرفته می‌شوند باید از اصول موضوع بدون توسل به هندسه قابل نتیجه‌گیری باشند. این بدان معنی نیست که شخص نباید در مطالعه خواص اعداد حقیقی از هندسه مدد گیرد. بعکس، هندسه اغلب برای قضیه‌ای خاص روش اثبات تکلیف می‌کند، و گاهی یک استدلال هندسی از یک برهان تحلیلی محض (برهانی که کاملاً به اصول موضوع اعداد حقیقی متکی باشد) روشنگرانه‌تر است. در این کتاب استدلال‌ات هندسی تا حدود زیادی جهت فراهم ساختن موجبات یا روشن کردن بحثی خاص بکار می‌روند. معیناً برهانهای کلیه قضایای مهم بشکل تحلیلی عرضه شده‌اند.

م ۸.۳ کران بالایی یک مجموعه، عنصر ماکزیمم، کوچکترین کران بالایی (سوپریمم)

نه اصل موضوع یاد شده در بالا حاوی کلیه خواصی از اعداد حقیقی است که معمولاً درجبر مقدماتی مطرح می‌شوند. اصل موضوع دیگری در حساب دیفرانسیل و انتگرال هست با

اهمیتی اساسی که معمولاً در درسهای جبرمقدماتی بحثی از آن نمی‌شود. این اصل موضوع (یا خاصیتی معادل آن) در اثبات وجود اعداد گنگ مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد.

اعداد گنگ در جبرمقدماتی زمانی ظاهر می‌شوند که ما سعی در حل برخی از معادلات درجه دوم داریم. بعنوان مثال، عددی حقیقی مانند x مطلوب است که $x^2 = 2$. از نه اصل موضوع بالا نمی‌توانیم وجود چنین x ی را در R ثابت کنیم، زیرا Q نیز در این نه اصل موضوع صدق می‌کند و عدد گویائی چون x که مربعش ۲ باشد وجود ندارد. (برهانی از این مطلب در تمرین ۱۱ از بخش ۳.۱۲ مختصرأ شرح داده شده است.) اصل موضوع ۱۵ به ما این امکان را می‌دهد که اعداد گنگ را در دستگاه اعداد حقیقی معرفی کنیم، و این اصل است که به دستگاه اعداد حقیقی خاصیت پیوستگی می‌بخشد که یکی از پایه‌های اساسی نهاد منطقی حساب دیفرانسیل و انتگرال بشمار می‌آید.

پیش از توصیف اصل موضوع ۱۵ بجا است چند اصطلاح و نماد دیگر را معرفی کنیم. فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی بوده و عددی چون B وجود داشته باشد بطوری که بازای هر x در S ،

$$x \leq B.$$

در اینصورت می‌گویند S از بالا به B کراندار است. عدد B را یک کران بالائی برای S می‌خوانند. می‌گوئیم يك کران بالائی زیرا هر عدد بزرگتر از B نیز يك کران بالائی خواهد بود. هرگاه کران بالائی B عضو S هم باشد آنگاه B را بزرگترین عضو یا عنصر ماکزیمم S می‌خوانند. از این B ها حداکثر یکی می‌تواند وجود داشته باشد. درصورت وجود می‌نویسیم

$$B = \max S.$$

لذا درصورتی $B = \max S$ که $B \in S$ و بازای هر x در S ، $x \leq B$. هر مجموعه بدون کران بالائی از بالا بی‌کران نامیده می‌شود.

مثالهای زیر معانی این اصطلاحات را روشن خواهند کرد.

مثال ۱. فرض می‌کنیم S مجموعه همه اعداد حقیقی مثبت باشد. این مجموعه از بالا بی‌کران است. دارای هیچ کران بالائی و عنصر ماکزیمم نیست.

مثال ۲. فرض می‌کنیم S مجموعه همه x هایی حقیقی باشد که در $0 \leq x \leq 1$ صدق می‌کنند. این مجموعه از بالا به ۱ کراندار است. درواقع ۱ عنصر ماکزیمم آن می‌باشد.

مثال ۳. فرض می‌کنیم T مجموعه همه x هایی حقیقی باشد که در $0 \leq x < 1$ صدق می‌کنند. این همان مجموعه مثال ۲ است جز آنکه نقطه ۱ را ندارد. این مجموعه از بالا به ۱ کراندار است ولی عنصر ماکزیمم ندارد.

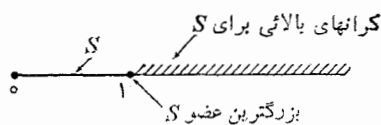
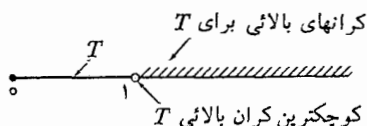
برخی از مجموعه‌ها، شبیه مجموعه مثال ۳، از بالا کراندار هستند ولی عنصر ماکزیم ندارند. برای این مجموعه‌ها مفهومی وجود دارد که جای عنصر ماکزیم را می‌گیرد. این مفهوم کوچکترین کران بالایی مجموعه خوانده شده و این طور تعریف می‌گردد:

تعریف کوچکترین کران بالایی. عدد B را يك کوچکترین کران بالایی مجموعه ناتهی S نامند اگر که این دو خاصیت را دارا باشد:

(الف) B يك کران بالایی برای S باشد؛

(ب) هیچ عدد کوچکتر از B يك کران بالایی برای S نباشد.

چنانچه S عنصر ماکزیم داشته باشد این ماکزیم يك کوچکترین کران بالایی برای S نیز هست. اما اگر S دارای عنصر ماکزیم نباشد هنوز ممکن است کوچکترین کران بالایی داشته باشد. در مثال ۳ فوق عدد ۱ يك کوچکترین کران بالایی برای T است گرچه T عنصر ماکزیم ندارد. (ر.ک. شکل ۸.۴).



(الف) S دارای بزرگترین عضو است؛ (ب) T بزرگترین عضو ندارد اما دارای کوچکترین کران بالایی هست؛ $\sup T = 1$ $\max S = 1$

شکل ۸.۴ کرانه‌ای بالایی، عنصر ماکزیم، سوپرمم.

قضیه ۲۶.۴. دو عدد مختلف نمی‌توانند کوچکترین کران بالایی يك مجموعه باشند.

برهان. فرض کنیم B و C دو کوچکترین کران بالایی برای مجموعه S باشند. خاصیت (ب) ایجاب می‌کند که $C \geq B$ زیرا B يك کوچکترین کران بالایی است؛ بهمین نحو $B \geq C$ چونکه C يك کوچکترین کران بالایی می‌باشد. لذا داریم $B = C$.

این قضیه به ما می‌گوید که اگر برای مجموعه S کوچکترین کران بالایی وجود داشته باشد فقط یکی وجود دارد و ما می‌توانیم از کوچکترین کران بالایی سخن بگوئیم. معمول شده است که بجای کوچکترین کران بالایی يك مجموعه اصطلاح خلاصه‌تر سوپرمم، با علامت اختصاری $\sup$ ، را بکار می‌برند. ما این قرارداد را می‌پذیریم و می‌نویسیم

$$B = \sup S$$

تا نشان دهیم که B کوچکترین کران بالایی، یا سوپرمم، S است.

م ۹.۳ اصل موضوع کوچکترین کران بالائی (اصل موضوع تامیت)

حال آماده‌ایم تا اصل موضوع کوچکترین کران بالائی برای دستگاه اعداد حقیقی را بیان کنیم.

اصل موضوع ۱۰. هر مجموعهٔ ناتهی S از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد سوپرم دارد؛ یعنی عددی حقیقی مثل B هست بطوری که $B = \sup S$.

بار دیگر تأکید می‌کنیم که سوپرم S لزوماً عضوی از S نیست. درواقع $\sup S$ متعلق به S است اگر و فقط اگر S دارای عنصرماکزیم باشد، که دراینصورت $\max S = \sup S$.

تعاریف اصطلاحات کران پائینی، از پائین کراندار، کوچکترین عضو (یا عنصرمینیم) را می‌توان مشابهاً تنظیم کرد. خواننده باید اینها را برای خویش تنظیم کند. اگر S دارای عنصرمینیم باشد آن را با $\min S$ می‌نمایانیم.

عدد L را یک بزرگترین کران پائینی (یا اینفیم) S می‌خوانند اگر که (الف) L یک کران پائینی برای S باشد، و (ب) هیچ عدد بزرگتر از L یک کران پائینی برای S نباشد. اینفیم S ، درصورت وجود، منحصر بفرد است و ما آن را با $\inf S$ نشان می‌دهیم. هرگاه S دارای عنصرمینیم باشد آنگاه $\min S = \inf S$.
با استفاده از اصل موضوع ۱۰ می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ م ۲۷. هر مجموعهٔ ناتهی S که از پائین کراندار باشد بزرگترین کران پائینی دارد؛ یعنی عددی حقیقی مثل L هست بطوری که $L = \inf S$.

برهان. فرض کنیم S — مجموعهٔ قرینه‌های اعداد در S باشد. دراینصورت S — ناتهی و از بالا کراندار است. اصل موضوع ۱۰ به ما می‌گوید که عددی مانند B وجود دارد که سوپرم S — است. آسانی می‌شود تحقیق کرد که $-B = \inf S$.

بار دیگر به امثلهٔ بخش پیش باز می‌گردیم. در مثال ۱، که مجموعهٔ S مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت است، عدد ۰ اینفیم S می‌باشد. این مجموعه عنصرمینیم ندارد. در مثالهای ۲ و ۳ عدد ۰ عنصرمینیم خواهد بود.

در همهٔ این مثالها تصمیم‌گیری در این مورد که مجموعهٔ S از بالا یا پائین کراندار است یا خیر آسان بود، و همچنین تعیین اعداد $\sup S$ و $\inf S$ ساده بودند. مثال بعدی نشان می‌دهد که تعیین وجود کرانه‌های بالائی یا پائینی ممکن است مشکل باشد.

مثال ۴. فرض می‌کنیم S مجموعهٔ همهٔ اعدادی بشکل $(1 + 1/n)$ باشد که $n = 1, 2, 3, \dots$. مثلاً، با فرض $n = 1, 2, 3$ ، درمی‌یابیم که اعداد

۲، $\frac{9}{4}$ و $\frac{64}{27}$ در S اند. هر عدد در این مجموعه از ۱ بزرگتر است، پس مجموعه از پائین کراندار بوده و در نتیجه اینفیم دارد. بامختصر همتی می توانیم نشان دهیم که ۲ کوچکترین عنصر S است، پس $\inf S = \min S = 2$. مجموعه S از بالا نیز کراندار است اگر چه اثبات این مطلب چندان آسان نیست. (سعی کنید!) همینکه از بالا کراندار بودن S را بدانیم اصل موضوع ۱۰ به ما می گوید که عددی سوپریم S است. در این حالت تعیین مقدار $\sup S$ از شکل توصیفی S آسان نیست. در یکی از فصلهای آتی خواهیم آموخت که $\sup S$ عددی گنگ و تقریباً برابر 2.718 می باشد. این عدد مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال است که عدد اویلر e خوانده می شود.

م ۱۰.۳ خاصیت ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی

این بخش حاوی چند خاصیت مهم دستگاه اعداد حقیقی است که نتایج اصل موضوع کوچکترین کران بالائی می باشند.

قضیه م ۲۸. مجموعه P متشکل از اعداد صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، ... از بالا بی کران است.

برهان. فرض کنیم P از بالا کراندار باشد. نشان خواهیم داد که این به تناقض منجر می شود. گوئیم چون P ناتهی است اصل موضوع ۱۰ به ما می گوید که P کوچکترین کران بالائی، مثلاً b ، دارد. عدد $b - 1$ ، که از b کمتر است، نمی تواند یک کران بالائی برای P باشد. پس لااقل یک عدد صحیح مثبت مانند n هست که $n > b - 1$. برای این n داریم $n + 1 > b$. از آنجا که $n + 1$ در P است این با کران بالائی بودن b برای P تعارض خواهد داشت.

بعنوان نتایجی از قضیه م ۲۸ بی درنگ به مطالب زیر می رسم.

قضیه م ۲۹. برای هر x حقیقی عدد صحیح مثبتی چون n هست که $n > x$.

برهان. اگر چنین نمی بود x کران بالائی P می شد که متناقض قضیه م ۲۸ بود.

قضیه م ۳۰. اگر $x > 0$ و y عدد حقیقی دلخواهی باشد عدد صحیح مثبتی مثل n هست که $nx > y$.

برهان. قضیه م ۲۹ را با گذاردن y/x بجای x بکار برید.

خاصیتی که در قضیه م ۳۰ توصیف شده خاصیت ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی نام

دارد. این خاصیت از نظر هندسی بدین معنی است که هر پاره خط، هر قدر هم که طویل باشد، را می توان با تعدادی متناهی پاره خط بطول مثبت مفروضی، هر قدر هم که این طول کوچک باشد، پوشاند. بعبارت دیگر، با استفاده بتعدادی کافی بار، می توان بوسیله یک خط کش کوچک فاصله های دراز دلخواه را اندازه گرفت. ارشمیدس دریافت که این یک خاصیت اساسی خط مستقیم است و آن را بعنوان یکی از اصول موضوع هندسه صریحاً بیان داشت. در قرنهای ۱۹م و ۲۰م هندسه های غیرارشمیدسی ساخته شده اند که در آنها این اصل رد شده است.

با خاصیت ارشمیدسی می توان قضیه زیر را ثابت کرد که در بحث ما از حساب انتگرال مفید فایده واقع می شود.

قضیه ۳۱.۴. هرگاه سه عدد حقیقی a, x, y در نامساویهای

(۱۴.۴)

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ صدق کنند آنگاه $x = a$.

برهان. اگر $x > a$ قضیه ۳۰.۴ به ما می گوید که عدد صحیح مثبتی چون n صادق در $y > n(x - a)$ وجود دارد، که ناقض (۱۴.۴) می باشد. لذا نمی توانیم $x > a$ را داشته باشیم، پس باید داشته باشیم $x = a$.

۱۱.۳ خواص اساسی سوپریم و اینفیمم

در این بخش سه خاصیت اساسی سوپریم و اینفیمم که ما در بحث خود از حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد استفاده قرار خواهیم داد مطرح می شوند. اولین خاصیت می گوید که هر مجموعه از اعداد سوپریم دار حاوی نقاطی است که به سوپریم آن دلخواهانه نزدیکند؛ بهمین نحو، یک مجموعه اینفیمم دار حاوی نقاطی است که بدلخواه نزدیک اینفیمم آن می باشند.

قضیه ۳۲.۴. فرض کنیم h عدد مثبت مفروضی و S مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد.

(الف) هرگاه S سوپریم داشته باشد آنگاه بازای x در S داریم

$$x > \sup S - h.$$

(ب) هرگاه S اینفیمم داشته باشد آنگاه بازای x در S داریم

$$x < \inf S + h.$$

برهان (الف). اگر بازای هر x در S می داشتیم $x \leq \sup S - h$ آنگاه $\sup S - h$ یک کران بالائی برای S کوچکتر از کوچکترین کران بالائی آن می شد. پس باید بازای

لااقل یک x در S داشته باشیم $x > \sup S - h$. این (الف) را ثابت می‌کند. برهان (ب) بهمین نحو خواهد بود.

قضیه ۳۳.۴. خاصیت جمعپذیری. چنانچه زیرمجموعه‌های ناتهی A و B از $\mathbf{R}$ داده شده باشند فرض می‌کنیم

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(الف) هرگاه هر يك از A و B سوپرم داشته باشد آنگاه C سوپرم دارد و

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

(ب) هرگاه هر يك از A و B اینفیم داشته باشد آنگاه C اینفیم دارد و

$$\inf C = \inf A + \inf B.$$

برهان. فرض کنیم هر يك از A و B سوپرم داشته باشد. هرگاه $c \in C$ آنگاه $c = a + b$ که در آن $a \in A$ و $b \in B$. بنابراین $c \leq \sup A + \sup B$ ؛ پس $\sup A + \sup B$ یک کران بالائی برای C است. این نشان می‌دهد که C سوپرم دارد و

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

حال فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد. بنا بر قضیه ۳۲.۴ (با فرض $h = 1/n$) عنصرهائی چون a در A و b در B وجود دارند بطوری که

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \quad b > \sup B - \frac{1}{n}.$$

با جمع این نامساویها خواهیم داشت

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}$$

یا

$$\sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n}$$

زیرا $a + b \leq \sup C$. بنابراین نشان داده‌ایم که برای هر عدد صحیح $n \geq 1$

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}.$$

بنابر قضیه ۳۱.۴ باید داشته باشیم $\sup C = \sup A + \sup B$. این (الف) را ثابت می‌کند، و برهان (ب) مشابه خواهد بود.

قضیه ۳۴.۴. دو زیرمجموعه ناتهی S و T از $\mathbf{R}$ چنان مفروضند که برای هر s در S و

هر t در T ،

$$s \leq t.$$

در این صورت S سوپرمم دارد و T اینفیمم و در نامساوی

$$\sup S \leq \inf T$$

صدق می‌کنند.

برهان. هر t در T یک کران بالایی برای S است. بنابراین S دارای سوپرممی است که در نامساوی $\sup S \leq t$ بازای هر t در T صدق می‌کند. لذا $\sup S$ یک کران پائینی برای T است، پس T اینفیممی دارد که نمی‌تواند از $\sup S$ کمتر باشد. بعبارت دیگر، همانطور که حکم شده، داریم $\sup S \leq \inf T$.

* ۱۲.۳ تمرینات

۱. اگر x و y اعداد حقیقی دلخواهی بوده و $x < y$ ثابت کنید حداقل یک z حقیقی هست که در نامساویهای $y < z < x$ صدق می‌کند.
۲. چنانچه x عدد حقیقی دلخواهی باشد ثابت کنید اعداد صحیحی چون m و n وجود دارند بطوری که $m < x < n$.
۳. اگر $0 < x$ ثابت کنید عدد صحیح مثبتی چون n هست که $1/n < x$.
۴. اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد ثابت کنید فقط یک عدد صحیح مانند n هست که در نامساویهای $1 < x < n+1$ صدق می‌کند. این n را بزرگترین عدد صحیح در x نامیده و با $[x]$ نشان می‌دهند. مثلاً $[5] = 5$ ، $[\frac{5}{2}] = 2$ ، $[-\frac{8}{3}] = -3$.
۵. اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد ثابت کنید فقط یک عدد صحیح مانند n هست که در نامساویهای $1 < x < n+1$ صدق می‌کند.
۶. اگر x و y اعداد حقیقی دلخواهی بوده و $x < y$ ثابت کنید حداقل یک (و در نتیجه بی‌نهایت) عدد گویا مثل r هست که در $y < r < x$ صدق می‌کند. این خاصیت را اغلب این‌طور توصیف می‌کنند که می‌گویند اعداد گویا در دستگاه اعداد حقیقی چگال می‌باشند.
۷. اگر x گویا، $x \neq 0$ ، و y گنگ باشد ثابت کنید $x+y$ ، $x-y$ ، xy ، x/y و y/x همه گنگند.
۸. آیا مجموع یا حاصلضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟
۹. اگر x و y اعداد حقیقی دلخواهی بوده و $x < y$ ثابت کنید حداقل یک (و در نتیجه بی‌نهایت) عدد گنگ مانند z هست که در $y < z < x$ صدق می‌کند.
۱۰. عدد صحیح n را زوج می‌خوانند اگر که بازای عدد صحیحی چون m ، $n = 2m$ ؛ و آن را فرد می‌شمارند اگر که $n+1$ زوج باشد. این احکام را ثابت کنید: (الف) یک عدد صحیح نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد.

- (ب) هر عدد صحیح یا زوج است یا فرد.
- (پ) مجموع یا حاصلضرب دو عدد زوج عددی زوج است. دربارهٔ مجموع یا حاصلضرب دو عدد فرد چه می‌توانید بگوئید؟
- (ت) چنانچه n^2 زوج باشد n نیز چنین است. هرگاه $a^2 = 2b^2$ که در آن a و b اعداد صحیح باشند آنگاه a و b هر دو زوجند.
- (ث) هر عدد گویا را می‌توان بشکل a/b درآورد که در آن a و b اعدادی صحیح بوده و حداقل یکی فرد باشد.
۱۱. ثابت کنید عدد گویائی که مربعش ۲ باشد وجود ندارد.

[دانهائی: به برهان خلف بروید. فرض کنید $(a/b)^2 = 2$ که در آن a و b اعدادی صحیح بوده و لااقل یکی از آنها فرد است. از قسمتهای تمرین ۱۰ برای بدست آوردن تناقض استفاده کنید.]

۱۲. خاصیت ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی بعنوان نتیجه‌ای از اصل موضوع کوچکترین کران بالائی بدست آمد. ثابت کنید مجموعهٔ اعداد گویا دارای خاصیت ارشمیدسی است اما واجد خاصیت کوچکترین کران بالائی نیست. این نشان می‌دهد که خاصیت ارشمیدسی اصل موضوع کوچکترین کران بالائی را ایجاب نخواهد کرد.

* ۱۳.۳ وجود ریشه‌های دوم اعداد حقیقی نامنفی

قبلاً اشاره شد که معادلهٔ $x^2 = 2$ در میان اعداد گویا جواب ندارد. بکمک اصل موضوع ۱۰ می‌توانیم ثابت کنیم که اگر $a \geq 0$ معادلهٔ $x^2 = a$ در بین اعداد حقیقی جواب خواهد داشت. هر x این چنینی یک ریشهٔ دوم a خوانده می‌شود.

ابتدا ببینیم، بدون استفاده از اصل موضوع ۱۰، دربارهٔ ریشه‌های دوم چه می‌توانیم بگوئیم. اعداد منفی نمی‌توانند ریشهٔ دوم داشته باشند زیرا که هرگاه $x^2 = a$ آنگاه a ، بدلیل مربع بودن، باید نامنفی باشد (بنابر قضیهٔ ۲۰.۴). بعلاوه، هرگاه $a = 0$ آنگاه $x = 0$ تنها ریشهٔ دوم است (بنابر قضیهٔ ۱۱.۴). پس فرض می‌کنیم $a > 0$. هرگاه $x^2 = a$ آنگاه $x \neq 0$ و $x^2 = a$ و $(-x)^2 = a$ ، در نتیجه x و قرینهٔ آن ریشه‌های دوم خواهند بود. بعبارت دیگر، هرگاه a ریشهٔ دوم داشته باشد آنگاه دو ریشهٔ دوم دارد، یکی مثبت و دیگری منفی. همچنین حداکثر دو ریشهٔ دوم دارد زیرا که هرگاه $x^2 = a$ و $y^2 = a$ آنگاه $y^2 = x^2$ و لذا $(x+y)(x-y) = 0$ ، و در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۱.۴، یا $x = y$ یا $x = -y$. لذا اگر a ریشهٔ دوم داشته باشد درست دو ریشهٔ دوم دارد.

وجود لااقل یک ریشهٔ دوم را می‌توان از قضیهٔ مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، بنام قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته، نتیجه گرفت، اما اینکه ببینیم چگونه وجود یک ریشهٔ دوم را می‌توان مستقیماً بوسیلهٔ اصل موضوع ۱۰ ثابت کرد ممکن است آموزنده باشد.

قضیهٔ ۳۵.۴. هر عدد حقیقی نامنفی a دارای ریشهٔ دوم نامنفی منحصر بفردی است.

توجه: اگر $a \geq 0$ ریشه دوم نامنفی آن را با $a^{1/2}$ یا با $\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. چنانچه $a > 0$ ریشه دوم منفی آن $-a^{1/2}$ یا $-\sqrt{a}$ خواهد بود.

بوهان. هرگاه $a = 0$ تنها ریشه دوم است. پس فرض می‌کنیم $a > 0$.
 را مجموعه همه x های مثبتي می‌انگاریم که $x^2 \leq a$. چون $a > (1+a)^2$ پس عدد $1+a$ یک کران بالائی برای S است. همچنین S ناتهی است زیرا که عدد $a/(1+a)$ در S می‌باشد؛ درواقع $a^2 \leq a(1+a)$ ، و در نتیجه $a^2/(1+a) \leq a$. بنا بر اصل موضوع ۱۰، S دارای کوچکترین کران بالائی است که ما آن را b خواهیم نامید. توجه کنید که $b \geq a/(1+a)$ ، پس $b > 0$. فقط سه حالت امکان پذیر است: $b^2 < a$ ، $b^2 = a$ یا $b^2 > a$.

فرض کنیم $b^2 > a$ و $\frac{1}{2}(b+a/b) = c$ در اینصورت $c = b - (b^2 - a)/(2b)$ و $0 < c < b$

$c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/(4b^2) = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$.
 بنا براین، بازای هر x در S ، $c^2 > x^2$ ، و در نتیجه، بازای هر x در S ، $c > x$. این بدان معنی است که c یک کران بالائی برای S می‌باشد. چون $c < b$ تناقضی خواهیم داشت زیرا b کوچکترین کران بالائی برای S بود. پس نامساوی $b^2 > a$ ممکن نیست.

فرض کنیم $b^2 < a$. چون $b > 0$ می‌توانیم عدد مثبت c را طوری اختیار کنیم که $c < (a - b^2)/(3b)$ و $c < b$ در اینصورت داریم

$(b+c)^2 = b^2 + c(2b+c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a$.
 بنا براین $b+c$ در S است. چون $b+c > b$ این با کران بالائی بودن b برای S تعارض دارد. پس نامساوی $b^2 < a$ مقدور نیست و تنها حالتی که می‌ماند $b^2 = a$ خواهد بود.

* ۱۴.۳ ریشه‌های مرتبه بالاتر. توانهای گویا

می‌توان با استفاده از اصل موضوع کوچکترین کران بالائی نیز وجود ریشه‌های مرتبه بالاتر را نشان داد. مثلاً هرگاه n یک عدد فرد مثبت باشد آنگاه بازای هر x حقیقی دقیقاً یک y حقیقی هست که $y^n = x$. این y را ریشه n ام x خوانده و آن را با

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ یا } y = x^{1/n} \quad (15.4)$$

نشان می‌دهند. وضعیت برای وقتی که n زوج باشد اندکی متفاوت است. در این حالت، اگر x منفی باشد، y حقیقی که $y^n = x$ وجود ندارد زیرا بازای هر y حقیقی $y^n \geq 0$. اما اگر x مثبت باشد می‌توان نشان داد که یک و فقط یک y مثبت هست که $y^n = x$. این y را ریشه n ام مثبت x نامیده و با علامات (۱۵.۴) نشان می‌دهند. چون n زوج است $y^n = (-y)^n = y^n$ و در نتیجه هر $x > 0$ دو ریشه n ام حقیقی دارد، یکی y و دیگری $-y$.
 بهر حال علامات $x^{1/n}$ و $\sqrt[n]{x}$ به ریشه n ام مثبت اختصاص دارند. ما در اینجا به اثبات این

احکام نمی‌پردازیم زیرا که آنها بعداً بعنوان نتایجی از قضیهٔ مقدارمیان‌ی برای توابع پیوسته بدست خواهند آمد (ر.ک. بخش ۱۰.۳).

اگر r عدد گویای مثبتی باشد، مثلاً $r = m/n$ که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند، x^r را مساوی $(x^m)^{1/n}$ ، یعنی ریشهٔ n م x^m ، در صورت وجود، تعریف می‌کنیم. چنانچه $x \neq 0$ تعریف می‌کنیم $x^{-r} = 1/x^r$ هر وقت که x^r تعریف شده باشد. از این تعاریف با سانی تحقیق می‌شود که قوانین معمولی نماها، یعنی

$$(x^r)^s = x^{rs}, \quad (x^r)^s = x^{rs}, \quad x^r \cdot x^s = x^{r+s}$$

در مورد نماهای گویا معتبرند.

۱۵.۳ نمایش اعداد حقیقی بوسیلهٔ اعشاریها

هر عدد حقیقی بشکل

$$(۱۶.۴) \quad r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

که در آن a_0 یک عدد صحیح نامنفی بوده و $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد صحیحی صادق در $0 \leq a_i \leq 9$ باشند، را معمولاً بشکل خلاصه‌تر زیر می‌نویسند:

$$r = a_0.a_1a_2\dots a_n.$$

این را نمایش اعشاری متناهی r می‌نامند. مثلاً

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \quad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0.02, \quad \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7.25.$$

اعداد حقیقی مثل اینها لزوماً گویا هستند و، در واقع، کلیهٔ آنها بشکل $r = a/10^n$ می‌باشند که در آن a عددی صحیح است. اما برای هر عدد گویا نمی‌توان نمایش اعشاری متناهی یافت. مثلاً هرگاه $\frac{1}{3}$ را می‌شد این‌طور نمایش داد آنگاه بازای عدد صحیحی چون a

می‌داشتیم $\frac{1}{3} = a/10^n$ یا $3a = 10^n$. اما این ممکن نیست زیرا ۳ سازهٔ هیچ توانی از ۱۰ نمی‌باشد.

معهداً می‌توانیم عدد حقیقی دلخواه $x > 0$ را، با انتخاب n بقدر کافی بزرگ، با هر درجهٔ دقتی که مطلوب باشد به مجموعی بشکل (۱۶.۴) نزدیک کنیم. دلیل این کار ممکن است از استدلال هندسی زیر مشهود باشد: هرگاه x یک عدد صحیح نباشد آنگاه x بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، مثلاً $a < x < a+1$. می‌توان خط واصل بین a و $a+1$ را به ده قسمت مساوی تقسیم کرد. هرگاه x یکی از نقاط تقسیم نباشد آنگاه x باید بین دو نقطهٔ تقسیم متوالی قرار گیرد. این جفتی از نامساویها بشکل

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

را بدست می‌دهد که در آنها a_1 عدد صحیحی است ($0 \leq a_1 \leq 9$). حال پاره خط
اصل بین $a_0 + \frac{a_1}{10}$ و $a_0 + \frac{(a_1 + 1)}{10}$ را به ده قسمت مساوی (هر یک بطول
 10^{-2}) تقسیم می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. هرگاه پس از چند مرحله یکی از نقاط
تقسیم بر x منطبق شود آنگاه x عددی بشکل (16.4) خواهد بود. در غیر این صورت این عمل
تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد، و مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد صحیح $a_1, a_2, a_3, \dots$ تولید
می‌کند. در این حالت می‌گوئیم x دارای نمایش اعشاری نامتناهی

$$x = a_0.a_1a_2a_3\dots$$

است. در مرحله n م x در نامساویهای

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

صدق می‌کند. این دو تقریب را به x ، یکی از بالا و دیگری از پایین، بوسیلهٔ دو نمایش اعشاری
متناهی که باندازهٔ 10^{-n} با هم تفاوت دارند بدست می‌دهد. بنابراین، با اختیار n بقدر
کافی بزرگ، می‌توانیم در تقریبهایمان به هر درجه‌ای از دقت که مطلوب باشد برسیم.

وقتی $x = \frac{1}{3}$ باسانی تحقیق می‌شود که $a_0 = 0$ و بازای هر $n \geq 1$ ، $a_n = 3$

و در نتیجه بسط اعشاری نامتناهی متناظر چنین خواهد بود:

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

هر عدد گنگ دارای نمایش اعشاری نامتناهی است. بعنوان مثال، وقتی که $x = \sqrt{2}$ ،
می‌توان با آزمایش و خطا هر تعداد رقم در بسط را که بخواهیم محاسبه نماییم. لذا $\sqrt{2}$
بین 1.4 و 1.5 قرار دارد زیرا $1.4^2 < 2 < 1.5^2$. به همین نحو، با مجذور کردن
و مقایسه نمودن با 2 ، تقریبهای دیگر زیر را بدست می‌آوریم:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42, \quad 1.414 < \sqrt{2} < 1.415,$$

$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143.$$

توجه کنید که فرایند فوق دنباله‌ای از بازه‌ها بطولهای 10^{-1} ، 10^{-2} ، 10^{-3} ،
را تولید می‌کند که هر یک محتوا در بازهٔ قبلی بوده و هر کدام حاوی نقطهٔ x می‌باشد. این
مثالی است از آنچه بنام دنباله‌ای از بازه‌های تسودتسو معروف است، مفهومی که گاهی از
آن بعنوان پایه‌ای برای ساختن اعداد گنگ از اعداد گویا استفاده می‌شود.

از آنجا که در این کتاب خیلی کم با اعشاریها سروکار داریم بیش از این به خواص
آنها نخواهیم پرداخت جز آنکه متذکر شویم چگونه بکمک اصل موضوع کوچکترین

کران بالائی می توان بسطهای اعشاری را بطور تحلیلی تعریف کرد.
چنانچه x عدد حقیقی مثبت دلخواهی باشد a_0 را بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x می گیریم. با انتخاب a_0 فرض می کنیم a_1 بزرگترین عدد صحیحی باشد که

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x.$$

بطور کلی، اگر $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ اختیار شده باشند، فرض می کنیم a_n نشانگر بزرگترین عدد صحیحی باشد که

$$(17.4) \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x.$$

S را مجموعه همه اعداد

$$(18.4) \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

می انگاریم که بدین طریق، برای $n = 0, 1, 2, \dots$ بدست می آیند. در این صورت S ناتهی و از بالا کراندار بوده و بآسانی تحقیق می شود که x عملاً کوچکترین کران بالائی S است. اعداد صحیح $a_0, a_1, a_2, \dots$ حاصل را می توان بکار برد و بسط اعشاری x را تعریف کرده و نوشت

$$x = a_0.a_1a_2a_3\dots,$$

که معنی اش این باشد که رقم n ام a_n بزرگترین عدد صحیحی است که در (17.4) صدق می کند. بعنوان مثال، اگر $x = \frac{1}{8}$ ، خواهیم یافت $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ ، و برای هر $n \geq 4, a_n = 0$. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{8} = 0.125\dots$$

چنانچه علامت نامساوی $\leq$ در (17.4) را با $<$ عوض کنیم تعریف بسطهای اعشاری اندکی متفاوت بدستمان می رسد. کوچکترین کران بالائی کلیه اعداد بشکل (18.4) باز هم x است اگر چه اعداد صحیح $a_0, a_1, a_2, \dots$ لزوماً همانهایی که در (17.4) صدق می کنند نمی باشند. مثلاً اگر این تعریف دوم در مورد $x = \frac{1}{8}$ بکار رود خواهیم یافت $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 9, \dots$ این منجر به نمایش اعشاری نامتناهی

$$\frac{1}{8} = 0.124999\dots$$

می گردد. این مطلب که یک عدد حقیقی ممکن است صاحب دو نمایش اعشاری متفاوت باشد

صرفاً انعکاس این واقعیت است که دو مجموعه متفاوت از اعداد حقیقی می‌توانند از یک سو پریم برخوردار باشند.

قسمت ۴. استقرای ریاضی، نماد جمع‌بندی، و مباحث مربوطه

۱.۴م نمونه‌ای از اثبات باستقرای ریاضی

بزرگترین عدد صحیح وجود ندارد زیرا وقتی ۱ را به عدد صحیح k می‌افزائیم $k+1$ بدست می‌آوریم که از k بزرگتر است. معه‌ذا، اگر از عدد ۱ شروع کنیم، می‌توانیم در چند مرحله، که در هر مرحله از k به $k+1$ می‌رویم، به هر عدد صحیح مثبت برسیم. این مبنای نوعی استدلال است که ریاضیدانان آن را اثبات باستقرا می‌خوانند. ما فایده این روش را با اثبات جفتی نامساوی که در بخش ۳.۱م در محاسبه مساحت یک قطعه سهمی بکار رفتند، یعنی

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2, \quad (19.4)$$

نشان می‌دهیم. ابتدا نامساوی سمت چپ را در نظر می‌گیریم و آن را $A(n)$ (حکمی شامل n) می‌نامیم. تحقیق برقراری این حکم برای چند n اولیه بطور مستقیم آسان است. لذا، مثلاً، وقتی n مقادیر ۱، ۲، ۳ را بگیرد حکم بصورت‌های زیر خواهد بود:

$$A(1): 0 < \frac{1^3}{3}, \quad A(2): 1^2 < \frac{2^3}{3}, \quad A(3): 1^2 + 2^2 < \frac{3^3}{3},$$

مشروط بر آنکه مجموع طرف چپ را برای $n=1$ مساوی ۰ بدانیم. هدف ما اثبات این مطلب است که $A(n)$ برای هر عدد صحیح مثبت n درست است. روش کار چنین خواهد بود: فرض کنیم حکم برای مقدار خاصی از n ، مثلاً $n=k$ ، ثابت شده باشد. یعنی فرض کنیم ثابت کرده‌ایم که برای k ثابتی ناکثر از ۱،

$$A(k): 1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}.$$

حال، با استفاده از این، مطلب را برای $k+1$ ، یعنی

$$A(k+1): 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}$$

را، نتیجه خواهیم گرفت. از $A(k)$ شروع کرده و k^2 را به دو طرف آن می‌افزائیم. این نامساوی

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2$$

را بدست می‌دهد. برای آنکه $A(k+1)$ را از نامساوی بالا نتیجه بگیریم کافی است نشان دهیم که

$$\frac{k^3}{3} + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}.$$

اما این فوراً از معادله

$$\frac{(k+1)^3}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} = \frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3}$$

بدست می‌آید. بنابراین نشان داده‌ایم که $A(k+1)$ از $A(k)$ نتیجه می‌شود. حال، چون برقراری $A(1)$ مستقیماً تحقیق شده، نتیجه می‌گیریم که $A(2)$ نیز درست است. با علم به صحت $A(2)$ نتیجه می‌گیریم که $A(3)$ درست است، و مانند اینها. چون بدین طریق می‌توان به هر عدد صحیح رسید پس $A(n)$ بازای هر عدد صحیح و مثبت n درست خواهد بود. این نامساوی سمت چپ (۱۹.۴) را ثابت می‌کند. نامساوی طرف راست را می‌شود بهمین نحو ثابت کرد.

۲.۴ اصل استقرای ریاضی

خواننده باید مطمئن شود که طرح برهان پیش را فهمیده است. ابتدا حکم $A(n)$ را بازای $n=1$ ثابت کردیم. بعد نشان دادیم که هرگاه حکم بازای عدد صحیح خاصی درست باشد آنگاه برای عدد صحیح بعدی نیز درست است. از این نتیجه گرفتیم که حکم برای کلیه اعداد صحیح مثبت درست خواهد بود.

فکر استقرا را می‌توان براههای غیرریاضی بسیاری مجسم کرد. بعنوان مثال، صفی از سر بازان عروسکی، که بترتیب شماره‌گذاری شده‌اند، را در ذهن بیاورید و فرض کنید طوری آرایش یافته باشند که اگر یکی از آنها، مثلاً آنکه برچسب k خورده، بیفتد سر باز بعدی را که برچسب $k+1$ دارد خواهد انداخت. در اینصورت هرکس می‌تواند تجسم کند که اگر سر باز شماره ۱ بعقب بیفتد چه رخ می‌دهد. همچنین روشن است که هرگاه یک سر باز بعدی، مثلاً آنکه برچسب n_1 خورده، اول بیفتد آنگاه همه سر بازان پشت سر او خواهند افتاد. این مطلب مبنی تعمیم جزئی روش استقرا است که می‌توان آن را بصورت زیر وصف کرد.

دو شرط مثبت با استقرا. فرض کنیم $A(n)$ حکمی شامل عدد صحیح n باشد. برقراری $A(n)$ بازای هر $n \geq n_1$ را در صورتی نتیجه می‌گیریم که بتوانیم دو مرحله زیر را بگذرانیم:

(الف) ثابت کنیم که $A(n_1)$ درست است؛

(ب) فرض کنیم k عدد صحیحی دلخواه ولی ثابت و ناکمتر از n_1 باشد. $A(k)$ را

درست گرفته و ثابت کنیم $A(k+1)$ نیز درست است.

n_1 در عمل معمولاً ۱ می باشد. توجیه منطقی این روش اثبات قضیه زیر در باب اعداد حقیقی است.

قضیه ۴.۴. م. اصل استقرای ریاضی. فرض کنیم S مجموعه ای از اعداد صحیح مثبت باشد که دو خاصیت زیر را دارد:

(الف) عدد ۱ در مجموعه S است؛

(ب) هرگاه عدد صحیح k در S باشد آنگاه $k+1$ نیز چنین است.

در این صورت هر عدد صحیح مثبت در مجموعه S خواهد بود.

برهان. خواص (الف) و (ب) به ما می گویند که S یک مجموعه استقرایی است. اما اعداد صحیح مثبت درست آن اعداد حقیقی تعریف شدند که به هر مجموعه استقرایی تعلق دارند. (ر.ک. بخش م ۶.۳). بنا بر این S حاوی هر عدد صحیح مثبت خواهد بود.

هر موقع حکمی چون $A(n)$ ، بازای هر $n \geq 1$ ، را باستقرای ریاضی ثابت می کنیم قضیه ۴.۴. م. را در مورد مجموعه S مرکب از همه اعداد صحیحی که حکم برای آنها صادق است بکار می بریم. چنانچه بخواهیم درست بودن $A(n)$ را فقط برای n های ناکثر از n_1 ثابت کنیم قضیه ۴.۴. م. را در مورد مجموعه n هائی بکار می گیریم که بازای آنها $A(n+n_1-1)$ درست است.

۴.۴ م* اصل خوش ترتیبی

خاصیت مهم دیگری از اعداد صحیح مثبت هست، بنام اصل خوش ترتیبی، که آن نیز بعنوان مبنائی برای اثباتهای باستقرا بکار برده می شود. این خاصیت را می توان چنین بیان کرد:

قضیه ۴.۷. م. اصل خوش ترتیبی. هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت حاوی کوچکترین عضو است.

توجه کنید که اصل خوش ترتیبی مربوط به مجموعه هائی از اعداد صحیح مثبت می باشد. این قضیه برای مجموعه های دلخواه از اعداد صحیح صادق نیست. مثلاً مجموعه همه اعداد صحیح کوچکترین عضو ندارد.

اصل خوش ترتیبی را می توان از اصل استقرا نتیجه گرفت. این مطلب در بخش م ۵.۴ نموده شده است. این بخش را با مثالی خاتمه می دهیم مبین آنکه چگونه از اصل خوش - ترتیبی می توان برای اثبات قضایائی، در باب اعداد صحیح مثبت استفاده کرد.

فرض کنیم $A(n)$ نشانگر حکم زیر باشد:

$$A(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

باز توجه می‌کنیم که $A(1)$ درست است زیرا

$$1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

حال گوئیم فقط دو امکان وجود دارد؛ یا

(یکم) $A(n)$ برای هر عدد صحیح مثبت درست است، یا اینکه

(دوم) حداقل یک عدد صحیح مثبت چون n هست که $A(n)$ برای آن درست نیست.

ثابت می‌کنیم که شق (دوم) منجر به تناقض می‌شود. فرض کنیم (دوم) برقرار باشد. در اینصورت، بنا بر اصل خوش ترتیبی، باید کوچکترین عدد صحیح مثبتی، مثل k ، وجود داشته باشد که برای آن $A(k)$ درست نباشد. (اصل خوش ترتیبی را در مورد مجموعه همه اعداد صحیح مثبتی چون n که برای آنها $A(n)$ درست نیست بکار می‌بریم. گزاره (دوم) بیانگر آن است که این مجموعه تهی نیست.) این k باید از ۱ بزرگتر باشد زیرا درست بودن $A(1)$ را تحقیق کرده‌ایم. همچنین حکم باید برای $k-1$ درست باشد چون k کوچکترین عدد صحیحی بود که برای آن $A(k)$ درست نیست؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$A(k-1): 1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)^3}{3} + \frac{(k-1)^2}{2} + \frac{k-1}{6}.$$

با افزودن k^2 به دو طرف آن و ساده کردن طرف راست درمی‌یابیم که

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}.$$

اما این معادله می‌گوید که $A(k)$ درست است؛ بنابراین تناقضی خواهیم داشت زیرا k عدد صحیحی است که برای آن $A(k)$ درست نیست. عبارت دیگر، درست بودن گزاره (دوم) به تناقض می‌رسد. بنابراین مطلب (یکم) برقرار است، و این ثابت می‌کند که اتحاد مورد بحث برای کلیه مقادیر $n \geq 1$ معتبر خواهد بود. نتیجه فوری این اتحاد نامساوی طرف راست (۱۹.۴) می‌باشد.

هراثبات شبیه این را که از اصل خوش ترتیبی استفاده کند نیز یک اثبات بااستقرا می‌خوانند. البته اثبات را می‌شد بشکل متداولتر نیز درآورد که در آن برقراری $A(1)$ را تحقیق کرده و بعد از $A(k)$ به $A(k+1)$ برسیم.

م ۴.۴ تمرینات

۱. دستورهای زیر را بااستقرا ثابت کنید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2 \quad (\text{الف})$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{ب})$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad (\text{پ})$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \quad (\text{ت})$$

۲. توجه کنید که

$$1 = 1,$$

$$1 - 4 = -(1 + 2),$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3,$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4).$$

قانون کلی را حدس بزنید و آن را باستقرا ثابت کنید.

۳. توجه کنید که

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}.$$

قانون کلی را حدس بزنید و آن را باستقرا ثابت کنید.

۴. توجه کنید که

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

قانون کلی را حدس بزنید و آن را باستقرا ثابت کنید.

۵. قانون کلی که حاصلضرب

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

را ساده کند حدس بزنید و آن را باستقرا ثابت کنید.

۶. فرض کنید $A(n)$ نشانگر عبارت $\frac{1}{\lambda}(2n+1)^2$ باشد. $1 + 2 + \dots + n =$

(الف) ثابت کنید هرگاه $A(k)$ بازای عدد صحیح k درست باشد آنگاه $A(k+1)$

نیز درست است.

(ب) عیب این عبارت را بگیرد: «باستقرا نتیجه می شود که $A(n)$ بازای هر n درست است.»

(پ) با تبدیل تساوی به نامساوی، $A(n)$ را چنان اصلاح کنید که بازای کلیه اعداد صحیح و مثبت n درست باشد.

۷. فرض کنید n_1 کوچکترین عدد صحیح مثبت n باشد که نامساوی

$$(1+x)^n > 1+nx+nx^2$$

بازای آنها و برای هر $x > 0$ درست است. n_1 را محاسبه نموده و ثابت کنید که نامساوی برای کلیه اعداد صحیح n ناکمتر از n_1 درست است.

۸. اگر اعداد حقیقی و مثبت $a_1, a_2, a_3, \dots$ مفروض باشند بطوری که بازای هر $n \geq 2$ ، $a_n \leq ca_{n-1}$ ، که در آن c عدد مثبت ثابتی است، با استفاده از استقرا ثابت کنید که بازای هر $n \geq 1$ ، $a_n \leq a_1 c^{n-1}$.

۹. حکم زیر را باستقرا ثابت کنید: هرگاه خطی بطول یک مفروض باشد آنگاه بازای هر عدد صحیح و مثبت n می توان بکمک خط کش و پرگار خطی بطول $\sqrt{n}$ ساخت.

۱۰. فرض کنید b عدد صحیح مثبت ثابتی را نشان دهد. حکم زیر را باستقرا ثابت کنید: بازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ اعداد صحیح نامنفی q و r وجود دارند قسمی که

$$n = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

۱۱. فرض کنید n و d نشانگر اعداد صحیحی باشند. می گوئیم d یک مقسوم علیه n است اگر که بازای عدد صحیحی چون c ، $n = cd$. عدد صحیح n را اول خوانند اگر که $n > 1$ و تنها مقسوم علیه های مثبت آن ۱ و n باشند. باستقرا ثابت کنید که هر عدد صحیح $n > 1$ یا اول است یا حاصلضربی از اعداد اول.

۱۲. نادرستی «اثبات» باستقرای زیر را شرح دهید:

حکم. دسته ای از n دختر موبود مفروض است. هرگاه لااقل یکی از دختران چشمان آبی داشته باشد آنگاه هر n تای آنها چشمان آبی خواهند داشت.

«برهان». واضح است که حکم برای وقتی که $n = 1$ درست است. مرحله رفتن از k به $k+1$ را می توان بارفتن از $n=3$ به $n=4$ مجسم ساخت. بنابراین فرض می کنیم حکم برای $n=3$ درست بوده و G_1, G_2, G_3, G_4 چهار دختر موبور باشند که اقلاً یکی از آنها، مثلاً G_1 ، چشمش آبی است. با اختیار G_1, G_2, G_3 و G_4 با هم و استفاده از این مطلب که حکم برای $n=3$ درست است درمی یابیم که G_2 و G_3 نیز چشمان آبی دارند. چنانچه عمل رادرمورد G_1, G_2, G_3 و G_4 تکرار کنیم درخواهیم یافت که G_4 نیز از چشم آبی برخوردار است. لذا هر چهار دختر چشمان آبی خواهند داشت. استدلالی مشابه این اجازه را به ما می دهد که از مرحله k به $k+1$ درحالت کلی برویم.

نتیجه. کلیه دختران موبود چشمان آبی دادند.

برهان. چون لااقل یک دترمینور چشم آبی هست پس می توانیم نتیجه پیشگفته را در مورد دسته همه دختران موبور بکار بریم.

توجه: این مثال از پولیا^۱ است که اظهار می کند شاید خواننده می خواهد اعتبار حکم را با تجربه بیازماید.

* ۵.۴ اثبات اصل خوش ترتیبی

در این بخش اصل خوش ترتیبی را از اصل استقرا نتیجه می گیریم. فرض کنیم T دسته ای ناتهی از اعداد صحیح مثبت باشد. می خواهیم ثابت کنیم T کوچکترین عضو دارد، یعنی عدد صحیح مثبتی چون t در T هست بطوری که بازای هر t در T ، $t_0 \leq t$.

فرض کنیم T کوچکترین عضو نداشته باشد. نشان می دهیم که این به تناقض می انجامد. گوئیم عدد صحیح ۱ نمی تواند در T باشد (در غیر این صورت کوچکترین عضو T خواهد بود). فرض کنیم S دسته همه اعداد صحیح مثبتی چون n را نشان دهد که بازای هر t در T ، $t < n$. حال گوئیم ۱ در S است زیرا بازای هر t در T ، $1 < t$. بعد فرض می کنیم k عدد صحیح مثبتی در S باشد. در این صورت، بازای هر t در T ، $k < t$. ثابت می کنیم $k+1$ نیز در S است. گوئیم هرگاه چنین نمی بود آنگاه بازای t_1 در T می داشتیم $k+1 \leq t_1$. چون T کوچکترین عضو ندارد پس عدد صحیحی مثل t_2 در T هست بطوری که $t_2 < t_1$ و در نتیجه $k+1 < t_2$. اما این بمعنی $t_2 \leq k$ است که متناقض آن است که بازای هر t در T ، $k < t$. بنابراین $k+1$ در S خواهد بود.

بنابر اصل استقرا S حاوی همه اعداد صحیح مثبت هست. چون T ناتهی است عدد صحیح مثبتی مانند t در T وجود دارد. اما این t باید در S هم باشد (چون S حاوی کلیه اعداد صحیح مثبت است). از تعریف S نامساوی $t < t$ نتیجه می شود که یک تناقض است. بنابراین فرض اینکه T کوچکترین عضو ندارد به تناقض می انجامد. پس T باید دارای کوچکترین عضو باشد، و این بنوبه خود ثابت می کند که اصل خوش ترتیبی نتیجه ای از اصل استقرا است.

م ۶.۴ نماد جمع بندی

در محاسبات مربوط به مساحت قطعه سهمی به مجموع

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (۲۰.۴)$$

برخورددیم. توجه کنید که جمله نمونه در این مجموع به شکل k^2 است، و همه جملات با دادن مقادیر ۱، ۲، ۳، ...، n به k بدستمان می رسد. نماد بسیار مفید و مناسبی وجود

دارد که ما را قادر می‌سازد تا مجموعه‌های این چنینی را بشکل فشرده تری بنویسیم. این نماد را نماد جمع‌بندی می‌خوانند و در آن از حرف یونانی سیگما، یعنی $\sum$ ، استفاده می‌شود. با بکار بردن نماد جمع‌بندی می‌توانیم مجموع (۲۰.۴) را بصورت زیر بنویسیم:

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

این علامت چنین خوانده می‌شود: «مجموع k^2 بازای k از ۱ تا n ». اعدادی که در پائین و بالای سیگما ظاهر می‌شوند مبین برد مقادیری هستند که توسط k گرفته می‌شوند. خود حرف k را زیرنویس جمع‌بندی می‌نامند. البته اینکه از حرف k استفاده می‌کنیم اهمیتی ندارد؛ هر حرف مناسب دیگری می‌تواند جای آن را بگیرد. مثلاً بجای $\sum_{k=1}^n k^2$ می‌توانستیم بنویسیم $\sum_{i=1}^n i^2$ ، $\sum_{j=1}^n j^2$ ، $\sum_{m=1}^n m^2$ ، و مانند اینها، که همه آنها بعنوان نمادهای دیگری برای یک چیز در نظر گرفته می‌شوند. حروف i, j, k, m ، و مانند اینها را، که در این راه بکار می‌روند، زیرنویسهای ظاهری می‌خوانند. استفاده از حرف n بعنوان زیرنویس ظاهری در این مثال خاص مناسب نیست زیرا که n قبلاً برای عددهای جملات بکار رفته است.

بطور کلی وقتی می‌خواهیم مجموع چند عدد حقیقی، مثلاً $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، را تشکیل دهیم این مجموع را با علامت

$$(21.4) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

نشان می‌دهیم که، با استفاده از نماد جمع‌بندی، می‌توانیم آن را بصورت زیر بنویسیم:

$$(22.4) \quad \sum_{k=1}^n a_k.$$

بعنوان مثال داریم

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

گاهی مناسب آن است که جمع‌بندیها را از ۰ یا مقداری بزرگتر از ۱ آغاز کنیم. مثلاً داریم

$$\sum_{i=0}^4 x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sum_{n=2}^5 n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

استفاده‌های دیگر نماد جمع‌بندی در زیر مجسم شده‌اند:

$$\sum_{m=0}^4 x^{m+1} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$$

$$\sum_{j=1}^6 2^{j-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

برای اینکه بار دیگر تأکید کنیم که انتخاب زیر نویس ظاهری مهم نیست خاطر نشان می سازیم که مجموع آخری را می توان به هر یک از اشکال زیر نیز نوشت :

$$\sum_{q=1}^6 2^{q-1} = \sum_{r=0}^5 2^r = \sum_{n=0}^5 2^{5-n} = \sum_{k=1}^6 2^{6-k}.$$

توجه: از دیدگاهی کاملاً منطقی است که علامات موجود در (۲۱.م) و (۲۲.م) در میان علامتهای اولیهٔ دستگاه اعداد حقیقی ظاهر نمی شوند. در بحثی دقیقتر می توانستیم این علامات جدید را بر حسب علامات تعریف نشدهٔ اولیهٔ دستگاهمان تعریف کنیم. این کار با عملی صورت می گیرد بنام تعریف باستقرا که، شیه اثبات باستقرا، از دو قسمت تشکیل شده است:

(الف) تعریف می کنیم

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1.$$

(ب) با فرض اینکه $\sum_{k=1}^n a_k$ را برای n ثابتی ناکمتر از یک تعریف کرده باشیم باز هم تعریف می کنیم

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}.$$

برای مجسم ساختن این مطلب، در (ب) n را مساوی ۱ می گیریم و با استفاده از (الف) بدست می آوریم که

$$\sum_{k=1}^2 a_k = \sum_{k=1}^1 a_k + a_2 = a_1 + a_2.$$

حال که $\sum_{k=1}^2 a_k$ تعریف شد می توانیم دوباره (ب) را با فرض $n=2$ بکار گیریم تا بدست آید که

$$\sum_{k=1}^3 a_k = \sum_{k=1}^2 a_k + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3.$$

بنا بر قانون شرکت پذیری برای جمع (اصل موضوع ۲)، مجموع $(a_1 + a_2) + a_3$ همان $(a_1 + a_2 + a_3)$ است، و در نتیجه اگر پراوترها را حذف کرده و بجای $\sum_{k=1}^3 a_k$ فقط بنویسیم $a_1 + a_2 + a_3$ خطر ابهام وجود نخواهد داشت. بهمین نحو داریم

$$\sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{k=1}^3 a_k + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4.$$

در این حالت می‌توانیم ثابت کنیم که مجموع $(a_1 + a_2 + a_3) + a_4$ همان $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$ یا $a_1 + (a_2 + a_3 + a_4)$ است، و در نتیجه باز می‌توان پرانتزها را بدون خطر ابهام حذف کرد، و می‌پذیریم که بنویسیم

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

چنانچه بدین روال ادامه دهیم درخواهیم یافت که (الف) و (ب) با هم تعریف کاملی از علامت $(\sum)$ را بدست می‌دهند. نماد $(\sum)$ صرفاً طریقه دیگر نوشتن $(\sum)$ است. این نماد توسط قانون شرکتپذیری کلی برای جمع توجیه می‌شود که ما در فکر بیان و یا اثبات آن در اینجا نخواهیم بود.

خواننده باید متوجه باشد که تعریف باستقرا و اثبات باستقرا از یک زمینه فکری برخوردارند. هر تعریف باستقرا یک تعریف بازگشتی نیز خوانده می‌شود.

۷.۴ م تمرینات

۱. مقادیر عددی مجموعه‌های زیر را بیابید :

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^5 (2i + 1) & (\text{ث}) & \sum_{r=0}^3 2^{2r+1} & (\text{ب}) & \sum_{k=1}^4 k & (\text{الف}) \\ \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+1)} & (\text{ج}) & \sum_{n=1}^4 n^n & (\text{ت}) & \sum_{n=2}^5 2^{n-2} & (\text{ب}) \end{array}$$

۲. خواص زیر را در مورد نماد جمع‌بندی ثابت کنید :

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0. \quad (\text{ب})$$

با استفاده از خواص تمرین ۲ در موقع ممکن، دستورهای تمرینات ۳ تا ۸ را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{k=1}^n 1 = n. \quad (\sum_{k=1}^n a_k \text{ یعنی } \sum_{k=1}^n 1 \text{ که در آن هر } a_k = 1)$$

$$[\text{داهنمائی: } 2k - 1 = k^2 - (k-1)^2] \cdot \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2. \quad ۴$$

$$[\text{داهنمائی: از تمرینهای ۳ و ۴ استفاده کنید.}] \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}. \quad ۵$$

$$[\text{داهنمائی: } k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1] \cdot \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad ۶$$

$$\cdot \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}. \quad ۷$$

$$۸. (الف) \text{ اگر } x \neq 1, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ توجه: } x^0 \text{ مساوی } ۱ \text{ تعریف شده است.}$$

$$[\text{داهنمائی: تمرین ۲ را در مورد } x^k \text{ با } (1-x) \text{ بکار برید.}]$$

(ب) مجموع وقتی که $x = 1$ برابر چیست؟

$$۹. \text{ باستقرا ثابت کنید که مجموع } \sum_{k=1}^n (-1)^k (2k+1) \text{ با } n \text{ متناسب است و ثابت تناسب را پیدا کنید.}$$

$$۱۰. (الف) \text{ تعریف معقولی برای علامت } \sum_{k=m}^{m+n} a_k \text{ بیاورید.}$$

$$(ب) \text{ باستقرا ثابت کنید که برای } n \geq 1 \text{ داریم}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

۱۱. معین کنید که هر یک از عبارات زیر درست است یا غلط. در هر مورد دلیلی برای نظر خود ارائه دهید.

$$\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{100} i^2 \quad (ت) \quad \sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4 \quad (الف)$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{100} k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2 \right) \quad (ث) \quad \sum_{j=0}^{100} 2 = 200 \quad (ب)$$

$$\sum_{k=0}^{100} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{100} k \right)^2 \quad (ج) \quad \sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k \quad (پ)$$

۱۲. قاعده‌ای کلی برای ساده سازی مجموع

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

حدس بزنید و آن را ثابت کنید.

$$۱۳. \text{ ثابت کنید اگر } n \geq 1, 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}),$$

بعد، با استفاده از این، ثابت کنید اگر $m \geq 2$ ،

$$2\sqrt{m} - 2 < \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m} - 1.$$

خصوصاً، وقتی $m = 10^6$ ، مجموع فوق بین ۱۹۹۸ و ۱۹۹۹ قرار می‌گیرد.

۸.۴م قدرمطلقها و نامساوی مثلثی

محاسبات با نامساویها در حساب دیفرانسیل و انتگرال مکرر پیش می‌آیند. آنهایی که در رابطه با مفهوم قدرمطلق صورت می‌گیرند از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. اگر x عددی حقیقی باشد قدرمطلق آن عدد حقیقی نامنفیی است که با $|x|$ نشان داده شده و بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

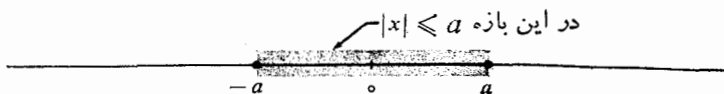
توجه کنید که $|x| \leq x \leq |x|$ — هنگامی که اعداد حقیقی بصورت هندسی بر محور حقیقی نموده شده‌اند عدد $|x|$ را فاصله x از ۰ می‌خوانند. هرگاه $a > 0$ و نقطه x بین a و $-a$ قرار داشته باشد آنگاه $|x|$ از a به ۰ نزدیکتر است. بیان تحلیلی این مطلب توسط قضیه زیر داده می‌شود.

قضیه ۳۸.م. هرگاه $a \geq 0$ آنگاه $|x| \leq a$ اگر و فقط اگر $-a \leq x \leq a$ —

برهان. دو مطلب هست که باید ثابت شود: اول اینکه نامساوی $|x| \leq a$ دونا مساوی $-a \leq x \leq a$ را ایجاب می‌کند و، بعکس، $-a \leq x \leq a$ نامساوی $|x| \leq a$ را نتیجه خواهد داد.

فرض کنیم $|x| \leq a$. در اینصورت نیز داریم $-a \leq -|x|$. اما یا $x = |x|$ یا $x = -|x|$ و در نتیجه $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. این مطلب اول را ثابت می‌کند.

برای اثبات عکس فرض کنیم $-a \leq x \leq a$. پس اگر $x \geq 0$ داریم $|x| = x \leq a$ ، حال آنکه اگر $x \leq 0$ خواهیم داشت $-a \leq x \leq 0$ و این برهان را تمام می‌کند. شکل ۹.م. معنی هندسی این قضیه را روشن می‌سازد.



شکل ۹.م. معنی هندسی قضیه ۳۸.م.

بعنوان نتیجه‌ای از قضیه ۳۸.۴ م. باسانی می‌توان نامساوی مهمی را بدست آورد مبین آنکه قدر مطلق مجموع دو عدد حقیقی نمی‌تواند از مجموع قدرمطلقهای آنها بیشتر شود.

قضیه ۳۹.۴ م. بازای اعداد حقیقی و دلخواه x و y داریم

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

توجه: این خاصیت را نامساوی مثلثی می‌خوانند زیرا، وقتی درمورد بردارها تعمیم یابد، مبین آن است که طول هر ضلع یک مثلث کوچکتر یا مساوی مجموع طولهای دو ضلع دیگر می‌باشد.

پرهان.. چنانچه نامساویهای $|x| \leq x \leq |x|$ و $|y| \leq y \leq |y|$ را بهم بیفزائیم خواهیم داشت

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

و در نتیجه، بنا بر قضیه ۳۸.۴ م. نتیجه می‌گیریم که $|x + y| \leq |x| + |y|$. هرگاه فرض کنیم $x = a - c$ و $y = c - b$ آنگاه $x + y = a - b$ و نامساوی مثلثی بصورت

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c|$$

در می‌آید. این شکل نامساوی مثلثی است که اغلب درعمل بکار می‌رود. می‌توانیم نامساوی مثلثی را با استفاده از استقرای ریاضی چنین تعمیم دهیم:

قضیه ۴۰.۴ م. بازای اعداد حقیقی و دلخواه $a_1, a_2, \dots, a_n$ داریم

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

پرهان. نامساوی بازای $n = 1$ بدیهی است و، وقتی $n = 2$ ، همان نامساوی مثلثی می‌باشد. پس فرض می‌کنیم برای n عدد حقیقی درست باشد. دراینصورت برای $n + 1$ عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ داریم

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

در نتیجه، قضیه برای $n + 1$ عدد، در صورت درست بودنش برای n عدد، درست است. پس، باستقرا، بازای هر عدد صحیح و مثبت n درست خواهد بود.

قضیه بعد نامساوی مهمی را وصف می‌کند که ما بعداً در بررسی جبر برداری از آن بهره خواهیم برد.

قضیه ۴۱۰م. نامساوی کشی - شوارتز^۱ چنانچه $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند داریم

$$(23.4) \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر عددی حقیقی چون x وجود داشته باشد بطوری که برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ $a_k x + b_k = 0$.

برهان. برای هر x حقیقی داریم $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$ زیرا هر مجموع مربعات هرگز نمی تواند منفی باشد. این مجموع را می شود بشکل

$$(24.4) \quad Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$$

نوشت که در آن

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

می خواهیم ثابت کنیم $B^2 \leq AC$. هرگاه $A = 0$ آنگاه هر $a_k = 0$ پس $B = 0$ و نتیجه بدیهی است. چنانچه $A \neq 0$ می توانیم مربع را کامل کرده و بنویسیم

$$Ax^2 + 2Bx + C = A \left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}.$$

طرف راست کمترین مقدار را وقتی دارد که $x = -B/A$. با قراردادن $x = -B/A$ در (۲۴.۴) خواهیم داشت $B^2 \leq AC$. این (۲۳.۴) را ثابت می کند. خواننده باید تحقیق کند که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر x چنان وجود داشته باشد که برای هر k $a_k x + b_k = 0$.

۹.۴ م تمرینات

۱. هر یک از خواص زیر از قدر مطلقها را ثابت کنید.

(الف) $|x| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

(ب) $|-x| = |x|$

(ج) $|xy| = |x||y|$

(ج) چنانچه $y \neq 0$ $|x/y| = |x|/|y|$

(پ) $|x - y| = |y - x|$

(ت) $|x|^2 = x^2$

(ث) $|x| = \sqrt{x^2}$

(د) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

۲. هر یک از نامساویهای (a_i) که در زیر آمده فقط با یکی از نامساویهای (b_j) معادل

است. مثلاً $|x| < 3$ اگر و فقط اگر $-3 < x < 3$ ، و در نتیجه (a_1) معادل (b_1) خواهد بود. کلیه جفتهای معادل را تعیین کنید.

$$(a_1) \quad |x| < 3 \quad (b_1) \quad 4 < x < 6$$

$$(a_2) \quad |x - 1| < 3 \quad (b_2) \quad -3 < x < 3$$

$$(a_3) \quad |3 - 2x| < 1 \quad (b_3) \quad x < -1 \text{ یا } x > 3$$

$$(a_4) \quad |1 + 2x| \leq 1 \quad (b_4) \quad x > 2$$

$$(a_5) \quad |x - 1| > 2 \quad (b_5) \quad -2 < x < 4$$

$$(a_6) \quad |x + 2| \geq 5 \quad (b_6) \quad -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \text{ یا } x \leq \sqrt{3}$$

$$(a_7) \quad |5 - x^{-1}| < 1 \quad (b_7) \quad 1 < x < 2$$

$$(a_8) \quad |x - 5| < |x + 1| \quad (b_8) \quad x \leq -7 \text{ یا } x \geq 3$$

$$(a_9) \quad |x^2 - 2| \leq 1 \quad (b_9) \quad \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{4}$$

$$(a_{10}) \quad x < x^2 - 12 < 4x \quad (b_{10}) \quad -1 \leq x \leq 0$$

۳. معین کنید که هر یک از مطالب زیر درست است یا غلط. در هر مورد دلیلی برای نظر خود بیاورید.

(الف) $x < 5$: x ایجاب می‌کند که $|x| < 5$

(ب) $|x - 5| < 2$: x ایجاب می‌کند که $3 < x < 7$

(پ) $|1 + 3x| \leq 1$: x ایجاب می‌کند که $x \geq -\frac{2}{3}$

(ت) عددی حقیقی چون x که بازای آن $|x - 2| = |x - 1|$ وجود ندارد.

(ث) بازای هر $x > 0$ عددی مثل $y > 0$ چنان وجود دارد که $|2x + y| = 5$.

۴. نشان دهید که در نامساوی‌کشی - شوارتز تساوی برقرار است اگر و فقط اگر عددی حقیقی مثل x وجود داشته باشد بطوری که بازای هر $1, 2, \dots, n$ ، k ، $a_k x + b_k = 0$ ، توجه کنید که

* ۱۰.۴ تمرینات متفرقه در باب استقرا

در این بخش ما چند مطلب متفرقه را گرد می‌آوریم که اثبات آنها تمرین خوبی در بکارگیری استقرای ریاضی است. برخی از این تمرینات را می‌توان بعنوان مبنائی جهت بحث تکمیلی در کلاس منظور داشت.

فاکتوریلها و ضرایب دوجمله‌ای. علامت $n!$ (بخوانید: «ن فاکتوریل») را می‌توان باستقرا چنین تعریف کرد: $0! = 1$ ؛ اگر $n \geq 1$ ، $n! = (n - 1)n$. توجه کنید که $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

اگر $0 \leq k \leq n$ ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ این طور تعریف می‌شود:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

توجه: گاهی بجای $\binom{n}{k}$ نوشته می شود $C_{n,k}$. این اعداد در قضیه دوجمله ای بصورت ضرایب ظاهر می شوند. (ر.ک. تمرین ۴ در زیر).
۱. ضرائب دوجمله ای زیر را حساب کنید:

$$(\text{الف}) \binom{5}{3}; (\text{ب}) \binom{7}{0}; (\text{پ}) \binom{7}{1}; (\text{ت}) \binom{7}{2}; (\text{ث}) \binom{17}{14}; (\text{ج}) \binom{0}{0}$$

۲. (الف) نشان دهید که $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (ب) k را چنان بیابید که $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$.

(ب) n را چنان بیابید که $\binom{n}{7} = \binom{n}{10}$. (ت) آیا k ای هست که $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$ ؟

۳. ثابت کنید $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. این را قانون مثلث پاسکال می خوانند

که راه سریع محاسبه ضرائب چندجمله ای را متوالیاً بدست می دهد. در اینجا مثلث پاسکال برای $n \leq 6$ نموده شده است.

				۱				
			۱		۱			
		۱		۲		۱		
	۱		۳		۳		۱	
	۱	۴		۶		۴	۱	
	۱	۵	۱۰		۱۰	۵	۱	
	۱	۶	۱۵	۲۰		۱۵	۶	۱

۴. از استقرا استفاده کرده قضیه دوجمله ای را ثابت کنید:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

بعد، با استفاده از این قضیه، دستورهای

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{و} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{را برای } n > 0 \text{ نتیجه بگیرید.}$$

نماد ضرب. حاصلضرب n عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ با علامت $\prod_{k=1}^n a_k$ نموده می شود که می توان آن را باستقرا تعریف کرد. علامت $a_1 a_2 \dots a_n$ نماد دیگری برای این حاصلضرب است. توجه کنید که

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

۵. برای حاصلضرب $\prod_{k=1}^n a_k$ تعریفی باستقرا بیاورید.
خواص زیر مربوط به حاصلضربها را باستقرا ثابت کنید.

$$۶. \prod_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right). \quad (\text{خاصیت ضرب پذیری}).$$

حالتی خاص و مهم رابطه $\prod_{k=1}^n (ca_k) = c^n \prod_{k=1}^n a_k$ است.

$$۷. \text{چنانچه هر } a_k \neq 0, \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \quad (\text{خاصیت توی هم روی}).$$

۸. اگر $x \neq 0$ نشان دهید که

$$\prod_{k=1}^n (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}.$$

مقدار حاصلضرب وقتی $x = 1$ چیست؟

۹. اگر بازای هر $n, 1, 2, \dots, n, a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n$ ، آسانی باستقرا ثابت می شود که $\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k$ در نامساوی متناظر برای حاصلضربها بحث کنید:

$$\prod_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n b_k.$$

چند نامساوی خاص

۱۰. چنانچه $x > 1$ باستقرا ثابت کنید که بازای هر عدد صحیح $n \geq 2, x^n > x$. اگر

$0 < x < 1$ ثابت کنید که بازای هر عدد صحیح $n \geq 2, x^n < x$.

۱۱. کلیه اعداد صحیح و مثبت n را که بازای آنها $n! < 2^n$ بیابید.

۱۲. (الف) با استفاده از قضیه دوجمله ای ثابت کنید که بازای هر عدد صحیح و مثبت داریم

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \right\}.$$

(ب) چنانچه $n > 1$ با استفاده از قسمت (الف) و تمرین ۱۱ نامساویهای

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 3$$

را نتیجه بگیرید.

۱۳. (الف) فرض کنید p عدد صحیح مثبتی باشد. ثابت کنید که

$$b^p - a^p = (b - a) \times (b^{p-1} + b^{p-2}a + b^{p-3}a^2 + \dots + ba^{p-2} + a^{p-1}).$$

[داهنمائی: از خاصیت نوی هم روی برای مجموعه‌ها استفاده کنید.]
(ب) فرض کنید p و n نشانگر اعداد صحیح مثبتی باشند. با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p.$$

(پ) از استقرا استفاده کرده ثابت کنید که

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^n k^p.$$

قسمت (ب) کمک خواهد کرد تا از مرحله استقرائی n به $n+1$ بروید.

۱۴. فرض کنید $a_1, \dots, a_n$ عدد حقیقی باشند همه دارای یک علامت و همه بزرگتر از ۱. با استفاده از استقرا ثابت کنید که

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\dots+a_n.$$

بخصوص، وقتی $a_1 = a_2 = \dots = a_n = x$ که $x > -1$ ، نامساوی فوق نتیجه می‌دهد که

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (\text{نامساوی برنولی}).$$

نشان دهید که وقتی $n > 1$ تساوی در (۲۵.۴) فقط برای $x=0$ میسر است.

۱۵. چنانچه $n \geq 2$ ثابت کنید $(1/2)^k \leq n!/n^k$ که در آن k بزرگترین عدد صحیح نایبتر از $n/2$ است.

۱۶. اعداد ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ...، که در آنها هر جمله بعد از دومین جمله مجموع دو جمله پیش از آن است، را اعداد فیبوناچی^۲ می‌خوانند. اینها را می‌توان باستقرا چنین تعریف کرد:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2, a_2 = 2, a_1 = 1$$

ثابت کنید برای هر $n \geq 1$

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

نامساویهایی که انواع مختلف میانگینها را بهم مربوط می‌سازند. فرض کنیم x_1

$x_2, \dots, x_n$ عدد حقیقی مثبت باشند. اگر p عدد صحیح ناصفری باشد میانگین توانی p این n عدد، یعنی M_p ، این طور تعریف می‌شود:

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}.$$

عدد M_1 را میانگین حسابی، M_2 را جذر میانگین مربعات، و M_{-1} را میانگین توافقی نیز می‌خوانند.

۱۷. چنانچه $p > 0$ ثابت کنید وقتی $x_1, x_2, \dots, x_n$ همه با هم مساوی نباشند $M_p < M_{2p}$. [داهمنائی: نامساوی کشی - شوارتز را با فرض $a_k = 1$ و $b_k = 1$ بکار برید.]

۱۸. با استفاده از تمرین ۱۷ ثابت کنید که اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ و $a > 0, b > 0, c > 0$ داریم

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{64}{3}.$$

۱۹. فرض کنید $a_1, \dots, a_n$ عدد حقیقی مثبت باشند که حاصلضرب آنها مساوی یک است. ثابت کنید $a_1 + \dots + a_n \geq n$ و تساوی فقط وقتی برقرار است که هر $a_k = 1$. [داهمنائی: دو حالت در نظر بگیرید: (الف) هر $a_k = 1$ ؛ (ب) همه a_k ها مساوی ۱ نیستند. از استقرا استفاده کنید. در حالت (ب) توجه کنید که هرگاه $a_1 a_2 \dots a_{n+1} = 1$ آنگاه دست کم یک سازه، مثلاً a_1 ، بیش از ۱ و لا اقل یک سازه، مثلاً a_{n+1} ، از ۱ کمتر است. فرض کنید $b_1 = a_1 a_{n+1}$ و فرض استقرا را در مورد حاصلضرب $a_1 a_2 \dots a_n$ بکار بندید. در حالی که از $(a_1 - 1)(a_{n+1} - 1) < 0$ استفاده می‌کنید، بکار بندید.]

۲۰. میانگین هندسی n عدد حقیقی مثبت $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، یعنی G با دستور $G = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$ تعریف می‌شود.

(الف) فرض کنید M_p نمایشگر میانگین توانی p ام باشد. ثابت کنید $G \leq M_1$ و $G = M_1$ فقط اگر که $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(ب) فرض کنید p و q اعداد صحیحی باشند و $0 < p < q$. از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که وقتی $x_1, x_2, \dots, x_n$ همه با هم مساوی نباشند $M_q < G < M_p$.

۲۱. از تمرین ۲۰ استفاده کرده حکم زیر را ثابت کنید: هرگاه a, b, c اعداد حقیقی مثبتی باشند بطوری که $abc = 8$ آنگاه $a + b + c \geq 6$ و $ab + ac + bc \geq 12$.

۲۲. اگر $x_1, \dots, x_n$ اعداد مثبتی بوده و $y_k = 1/x_k$ ثابت کنید که

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) \geq n^2.$$

۲۳. چنانچه a, b, c مثبت بوده و $a + b + c = 1$ ثابت کنید که

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc.$$

مفاهیم حساب انتگرال

در این فصل تعریف انتگرال و چند خاصیت اساسی آن را عرضه می‌کنیم. برای درک این تعریف شخص باید با مفهوم تابع کمی آشنا باشد؛ چند بخش آتی به توضیح این مفهوم و ایده‌های مربوط به آن اختصاص دارند.

۱.۱ ایده‌های اساسی هندسه دکارتی

همانطور که قبلاً ذکر شد یکی از کاربردهای انتگرال محاسبه مساحت است. معمولاً ما درباره خود مساحت بحث‌هایی صحبت نمی‌کنیم بلکه بجای آن از مساحت چیزی سخن می‌گوئیم. این بدان معنی است که اشیاء معینی (مثل ناحیه‌های چندضلعی، ناحیه‌های مستدیر، قطعه‌سهمیها، و مانند اینها) را داریم که می‌خواهیم مساحتشان را اندازه بگیریم. اگر به این دل بسته‌ایم که به بحثی از مساحت دست یابیم که به ما قدرت پرداختن به انواع متفاوت و متعددی از اشیاء را بدهد باید ابتدا روش مؤثری را برای وصف این اشیاء بیابیم.

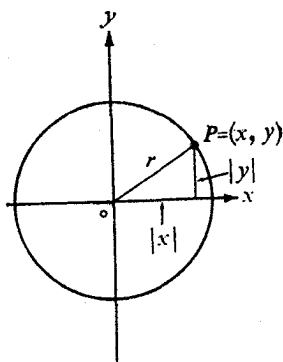
ابتدائی‌ترین راه انجام این کار رسم شکل است، همانطور که توسط یونانیان قدیم انجام می‌شد. راهی برتر به‌تر توسط رنه دکارت^۱ (۱۶۵۰-۱۵۹۶) پیشنهاد شد، که مبحث هندسه تحلیلی (که به هندسه دکارتی نیز مشهور است) را معرفی کرد. فکر دکارت نمایش نقاط هندسی توسط اعداد بود. نحوه کار برای نقاط در صفحه چنین است:

دوخط مرجع متعامد (بنام موجودهای مختصات) اختیار می‌شوند، یکی افقی (بنام «محور x ») دیگری قائم («محور y »). نقطه برخورد آنها را، که با o نموده می‌شود، مبدأ می‌خوانند. برمحور x نقطه مناسبی سمت راست o انتخاب و فاصله آن از o فاصله یک نامیده می‌شود. فواصل قائم در امتداد محور y معمولاً با همین فاصله یک اندازه‌گیری می‌شوند، گویا اینکه گاهی مناسب آن است که از مقیاس دیگری برمحور y استفاده شود. اکنون به هر

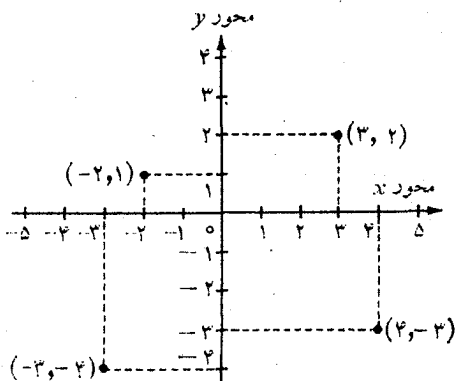
نقطه در صفحه (که گاهی صفحه xy خوانده می‌شود) جفتی از اعداد، بنام مختصات آن، تخصیص می‌یابد. این اعداد به ما می‌گویند که نقطه را چگونه تعیین محل کنیم. شکل ۱.۱ چند مثال را نشان می‌دهد. نقطه با مختصات $(2, 3)$ با اندازه سه یکه سمت راست محور x و دو یکه بالای محور y قرار دارد. عدد ۳ مختص x نقطه و ۲ مختص y آن نامیده می‌شود. نقاط سمت چپ محور x دارای مختص x منفی اند و آنهایی که زیر محور x واقع باشند از مختص y منفی برخوردار خواهند بود. گاهی اوقات مختص x یک نقطه طول و مختص y عرض آن نامیده می‌شود.

بهنگام نوشتن جفتی از اعداد نظیر (a, b) برای نمایش یک نقطه توافق می‌کنیم که طول یا مختص x ، یعنی a ، اول نوشته شود. بدین خاطر است که اغلب جفت (a, b) را یک جفت مرتب می‌خوانند. واضح است که دوجفت مرتب (a, b) و (c, d) یک نقطه را نمایش می‌دهند اگر و فقط اگر داشته باشیم $b = d$ و $a = c$. نقاطی چون (a, b) را که در آنها هم a و هم b مثبت باشند نقاط واقع در ربع اول می‌دانند؛ نقاطی که در آنها $a < 0$ و $b > 0$ در ربع دوم جای دارند؛ نقاطی که در آنها $a < 0$ و $b < 0$ در ربع سوم واقعند؛ و نقاطی که در آنها $a > 0$ و $b < 0$ در ربع چهارم قرار خواهند داشت. شکل ۱.۱ در هر ربع نقطه‌ای را نشان می‌دهد.

برای نقاط در فضا بهمین نحو عمل می‌شود. سه خط دوبعدی متعامد در فضا اختیار می‌کنیم که در یک نقطه (مبدأ) یکدیگر را قطع کرده باشند. این خطوط سه صفحه دوبعدی متعامد را معین می‌کنند، و هر نقطه در فضا را می‌توان با تعیین فاصله‌اش از این صفحات (با رعایت علامات مناسب) کاملاً وصف کرد. ما بعداً هندسه دکارتی سه بعدی را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم؛ در حال حاضر نظر خود را به هندسه تحلیلی در صفحه معطوف می‌کنیم.



شکل ۲.۱ دایره‌ای که با معادله دکارتی $x^2 + y^2 = r^2$ نمایش داده می‌شود.



شکل ۱.۱

هر شکل هندسی، نظیر یک منحنی در صفحه، دسته‌ای است از نقاط که در یک یا چند شرط ویژه صدق می‌کنند. با ترجمان این شرایط به عباراتی مشتمل بر مختصات x و y یک یا چند معادله بدست می‌آوریم که شکل مورد بحث را مشخص می‌کنند. بعنوان مثال، دایره‌ای بشعاع r و بمرکز مبدأ را، بصورتی که در شکل ۲.۱ نموده شده، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم P نقطه دلخواهی بر این دایره بوده و مختصاتش (x, y) باشد. در اینصورت پاره خط OP وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاعش بطولهای $|x|$ و $|y|$ اند و در نتیجه، بنا بر قضیه فیثاغورس^۱،

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

در این معادله، که معادله دایره نام دارد، کایه نقاط (x, y) واقع بر دایره صدق می‌کنند و لاغیر، پس این معادله کاملاً دایره را مشخص می‌نماید. این مثال نشان می‌دهد که چگونه از هندسه تحلیلی در تحویل احکام هندسی مربوط به نقاط به احکامی تحلیلی در باب اعداد حقیقی استفاده می‌شود.

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، در طول تکامل تاریخی خود، بسیار بهم آمیخته شده‌اند. کشفیات جدید در یک موضوع به اصلاحاتی در دیگری می‌انجامید. ارائه حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی در این کتاب شبیه تکامل تاریخی آنها است، بدین معنی که دو موضوع با هم مورد بحث قرار می‌گیرند. بهر حال هدف اصلی ما مطرح کردن حساب دیفرانسیل و انتگرال است. بدین منظور، هر جا که لازم آید، مفاهیمی از هندسه تحلیلی مورد بحث قرار خواهند گرفت. در واقع برای درک مبادی حساب دیفرانسیل و انتگرال فقط چند مفهوم بسیار مقدماتی از هندسه تحلیلی در صفحه مورد حاجت است. برای وسعت بخشیدن به حیطه و کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مطالعه عمیقتری در هندسه تحلیلی لازم است، و این مطالعه در فصول بعدی، با استفاده از روشهای برداری و نیز روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، صورت خواهد گرفت. تا آن موقع تنها چیزی که از هندسه تحلیلی لازم است آشنائی مختصری است با ترسیم نمودارهای توابع.

۲.۱ توابع. توصیف غیر صوری و چند مثال

حیطه‌های مختلف تلاش بشری مربوط به روابطی می‌شوند که میان یک دسته از اشیاء و دسته دیگر وجود دارند. نمودارها، نقشه‌ها، منحنیها، جداول، دستورها، و آمارگیریهایی مؤسسه گالوپ^۲ در نظر هر کس که روزنامه می‌خواند^۳ آشنا است. اینها صرفاً وسائل هستند که روابط ویژه‌ای را بطریقی کمی وصف می‌کنند. ریاضیدانان انواعی از این روابط را تابع می‌گویند. در این بخش توصیفی غیر صوری از مفهوم تابع را می‌آوریم. تعریف صوری در بخش ۳.۱ داده شده است.

1. Pythagoras

2. Gallup

۳. منظور خواننده آمریکائی است. م.

مثال ۱. نیروی F لازم برای آنکه طول طبیعی یک فنر فولادی با اندازه x کشیده شود متناسب با x است. یعنی $F = cx$ که در آن c عددی است مستقل از x بنام ثابت فنر. این دستور، که توسط روبرت هوک^۱ در اواسط قرن ۱۷ م کشف شد، قانون هوک نام دارد که نیرو را بعنوان تابعی از تغییر مکان بیان می‌کند.

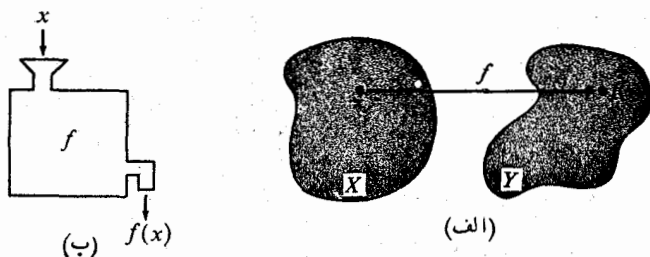
مثال ۲. حجم یک مکعب تابعی است از طول یال‌ش. چنانچه یال‌هایش بطول x باشند حجم V با دستور $V = x^3$ داده خواهد شد.

مثال ۳. یک عدد اول عدد صحیحی است مانند $n > 1$ که نتوان آن را بشکل $n = ab$ درآورد که در آن a و b اعدادی صحیح و مثبت و هردو کوچکتر از n باشند. چند عدد اول از اولین اعداد عبارتند از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹. چنانچه عدد حقیقی $x > 0$ را داده باشند می‌توان عدد اول کوچکتر یا مساوی x را شمرده. این عدد تابعی از x گفته می‌شود و لئواینکه، با معلوم بودن x ، هیچ دستور جبری ساده‌ای برای محاسبه آن (بدون شمارش) شناخته نشده باشد.

واژه «تابع» توسط لایبنیتز به ریاضیات راه یافت، که او این اصطلاح را اصلاً در مورد انواع مشخصی از دستورهای ریاضی بکار می‌برد. بعدها معلوم شد که فکر لایبنیتز از تابع خیلی محدود بوده است و، از آن زمان تا کنون، معنی این لغت از مراحل تعمیم بسیاری گذشته است. امروزه معنی تابع اساساً چنین است: اگر دو مجموعه، مثلاً X و Y ، مفروض باشند یک تابع تناظری است که به هر عنصر X یک و فقط یک عنصر از Y را مربوط می‌کند. مجموعه X قلمرو تابع نامیده می‌شود. آن عناصر Y که به عنصرهای واقع در X مربوط می‌شوند مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که برد تابع نام دارد. (این مجموعه ممکن است تمام Y باشد لیکن لازم نیست چنین باشد.)

برای نمایش توابع اغلب از حروف الفبای انگلیسی و یونانی استفاده می‌شود. حروف خاص f, g, h, F, G, H ، و φ کاراراً بدین منظور بکار می‌روند. اگر f تابعی مفروض و x شئی در قلمرو آن باشد نماد $f(x)$ بعنوان آن شئی در برد بکار می‌رود که توسط f به x مربوط شده است و آن را مقدار f در x یا نقش x تحت f می‌نامند. علامت $f(x)$ این طور خوانده می‌شود: «اف x ».

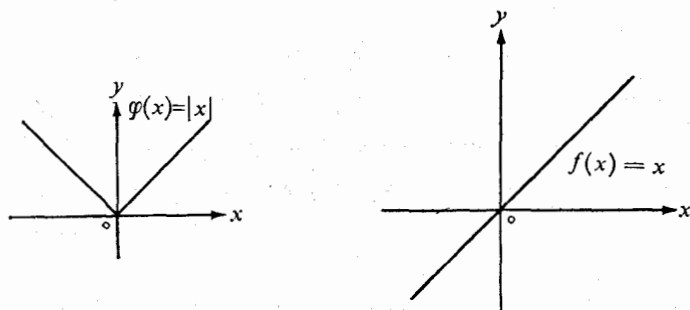
ایده تابع را می‌توان بطور شمائی بطرق بسیاری نشان داد. مثلاً، در شکل ۳.۱ (الف)، دسته‌های X و Y بعنوان مجموعه‌هایی از نقاط تصور شده‌اند و علامت سهم بمنظور «جفت‌کردن» یک نقطه نمونه x در X با نقش آن $f(x)$ در Y بکار رفته است. طرحی دیگر در شکل ۳.۱ (ب) نموده شده است. در اینجا تابع f بمنزله ماشینی انگاشته شده که به آن اشیاء دسته X داده می‌شود و اشیاء Y تولید می‌گردند. وقتی شئی x به ماشین داده شود بازده شئی $f(x)$ خواهد بود.



شکل ۳.۱ نمایشهای شمائی ایده تابع.

با آنکه ایده تابع هیچ قیدی بر طبیعت اشیاء قلمرو X و برد Y نمی‌گذارد، لکن در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی اصلاً به توابعی نظر داریم که قلمرو و بردشان مجموعه‌هائی از اعداد حقیقی باشند. چنین توابعی را توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی، یا، خلاصه‌تر، توابع حقیقی می‌خوانند، و می‌توان آنها را با نموداری در صفحه xy بطور هندسی نشان داد. ما قلمرو X را بر محور x کشیده و در بالای هر نقطه x در X نقطه (x, y) را، که $y = f(x)$ ، رسم می‌کنیم. مجموعه این (x, y) ها نمودار تابع نام دارد. حال به چند مثال دیگر از توابع حقیقی می‌پردازیم.

مثال ۴. تابع همانی. فرض کنیم بازای هر x حقیقی $f(x) = x$. این تابع اغلب تابع همانی خوانده می‌شود. قلمروش خط حقیقی است، یعنی مجموعه همه اعداد حقیقی. در اینجا بازای هر نقطه (x, y) واقع بر نمودار f ، $x = y$. نمودار خط راستی است که با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد (ر.ک. شکل ۴.۱). برد f مجموعه همه اعداد حقیقی خواهد بود.



شکل ۵.۱ تابع قدر مطلق

$$f(x) = |x|.$$

شکل ۴.۱ نمودار تابع

$$f(x) = x \text{ همانی}$$

مثال ۵. تابع قدرمطلق. تابعی را در نظری می‌گیریم که به هر عدد حقیقی x عدد نامنفی $|x|$ را نسبت می‌دهد. بخشی از نمودار آن در شکل ۵.۱ نموده شده است. چنانچه این تابع را به نشان دهیم بازای هر x حقیقی خواهیم داشت $\varphi(x) = |x|$. بعنوان مثال، $\varphi(0) = 0$ ، $\varphi(2) = 2$ ، $\varphi(-3) = 3$. در اینجا چند خاصیت قدرمطلقها را که با نماد تابع بیان شده‌اند ذکر می‌کنیم.

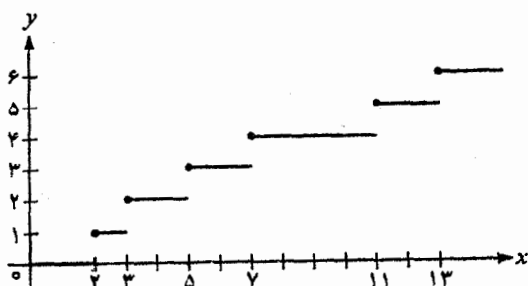
(الف) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ (ت) $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$

(ب) $\varphi(x^2) = x^2$ (ث) $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$

(پ) $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ (نامساوی مثلثی).

مثال ۶. تابع اعداد اول. $\pi(x)$ را بازای هر $x > 0$ مساوی عده اعداد اول کوچکتر یا مساوی x می‌گیریم. قلمرو π مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. برد آن مجموعه اعداد صحیح نامنفی $\{0, 1, 2, \dots\}$ می‌باشد. بخشی از نمودار π در شکل ۶.۱ نشان

n	$n!$	n	$n!$
۱	۱	۶	۷۲۰
۲	۲	۷	۵,۰۴۰
۳	۶	۸	۴۰,۳۲۰
۴	۲۴	۹	۳۶۲,۸۸۰
۵	۱۲۰	۱۰	۳,۶۲۸,۸۰۰



شکل ۷.۱ تابع فاکتوریل.

شکل ۶.۱ تابع اعداد اول.

داده شده است. (بر محورهای x و y از مقیاسهای متفاوتی استفاده شده است.) وقتی x افزایش می‌یابد مقدار تابعی $\pi(x)$ ثابت می‌ماند تا که x به عدد اولی برسد، که در آن نقطه مقدار تابع جهشی معادل ۱ خواهد داشت. بنابراین، نمودار π از پاره خطهایی افقی تشکیل یافته است. این نمونه‌ای است از رده‌ای از توابع بنام توابع پله‌ای؛ این توابع در نظریه انتگرالها نقشی اساسی بر عهده دارند.

مثال ۷. تابع فاکتوریل. $f(n)$ را بازای هر عدد صحیح و مثبت n مساوی $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ تعریف می‌کنیم. در این مثال قلمرو f عبارت است از مجموعه اعداد صحیح مثبت. مقادیر تابع آنقدر سریع افزایش می‌یابند که راحتتر آن است که این تابع را بشکل جدول نمایش دهیم تا بصورت نمودار. شکل ۷.۱ جدولی مرکب از جفتهای $(n, n!)$ را، بازای

$n = 1, 2, \dots, 10$ ، نشان می‌دهد.

خواننده باید به دو خصیصه‌ای که در همه مثالهای فوق مشترکند توجه کند:

(۱) برای هر x در قلمرو X یک و فقط یک نقش y وجود دارد که با این x خاص جفت می‌شود.

(۲) هر تابع مجموعه جفت‌هایی چون (x, y) را تولید می‌کند که x یک عنصر نمونه قلمرو X و y عنصر منحصر بفردی از Y است که با x جفت می‌گردد.

در اکثر مثالهای فوق جفتهای (x, y) را بطور هندسی بصورت نقاطی بر یک نمودار نشان دادیم. در مثال ۷ آنها را بعنوان درایه‌هایی در یک جدول عرضه کردیم. در هر حالت برای شناخت تابع باید کلیه جفتهای (x, y) را که تولید می‌کند بطریقی بدانیم. این مشاهده ساده انگیزه تعریف صوری مفهوم تابع است که در بخش بعدی داده می‌شود.

۳.۱۰* توابع. تعریف صوری بعنوان مجموعه‌ای از جفتهای مرتب

در بحث غیر صوری بخش پیش یک تابع بعنوان تناظری توصیف شد که به هر شئی در مجموعه X یک و فقط یک شئی از مجموعه Y را مربوط می‌کند. از آنجا که کلمات «تناظر» و «مربوط کردن» ممکن است برای همه دقیقاً یک معنی را ندهند، لذا ما کل ایده را بطریقی دیگر، که بر اساس مفهوم مجموعه استوار است، تنظیم مجدد می‌کنیم. ابتدا به مفهوم جفت مرتب از اشیاء نیاز داریم.

در تعریف تساوی مجموعه‌ها از تقریبی که عناصر تحت آن ظاهر می‌شوند ذکری بمیان نیامد. مثلاً مجموعه‌های $\{2, 5\}$ و $\{5, 2\}$ ، بدلیل اینکه عنصرهای آنها دقیقاً یکی است، مساوی خواهند بود. گاهی اوقات ترتیب مهم است. مثلاً، در هندسه تحلیلی در صفحه، مختصات (x, y) یک نقطه نمایشگر جفت مرتبی از اعداد می‌باشند. نقطه‌ای با مختصات $(5, 2)$ با نقطه‌ای با مختصات $(2, 5)$ یکی نیست حال آنکه مجموعه‌های $\{2, 5\}$ و $\{5, 2\}$ برابرند. به همین نحو، اگر جفتی از اشیاء a و b (که لزوماً متمایز نیستند) داشته باشیم و بخواهیم یکی از آنها، مثلاً a ، را بعنوان عضو اول و دیگری، یعنی b ، را بعنوان عضو دوم تشخیص دهیم اشیاء را بصورت (a, b) در پرانتز می‌گذاریم. ما این را یک جفت مرتب می‌نامیم. گوئیم دو جفت مرتب (a, b) و (c, d) مساوی‌اند اگر و فقط اگر عضوهای اول آنها مساوی و عضوهای دومشان برابر باشند؛ یعنی چنین داشته باشیم:

$$(a, b) = (c, d) \text{ اگر و فقط اگر } a = c \text{ و } b = d.$$

حال می‌توانیم تعریف صوری تابع را بیان کنیم.

تعریف تابع. تابع f مجموعه‌ای است از جفتهای مرتب (x, y) که هیچ دوئی آنها عضوهای اول مساوی نداشته باشند.

چنانچه f یک تابع باشد مجموعه همه عنصرهای x که بعنوان عضوهای اول جفتهای

(x, y) در f ظاهر می‌شوند قلمرو f نام دارد. مجموعه عضوهای دوم y را برد f ، یا مجموعه مقادیر f ، می‌خوانند.

یک تابع را می‌توان شهوداً بصورت جدولی مرکب از دو ستون انگاشت. هر درایه در جدول یک جفت مرتب (x, y) خواهد بود؛ ستون x ها قلمرو f است و ستون y ها برد آن. هرگاه دو درایه (x, y) و (x, z) با یک x در جدول ظاهر شوند آنگاه برای آنکه جدول یک تابع باشد لازم است که $y = z$. بعبارت دیگر، یک تابع نمی‌تواند در نقطه مفروض x دو مقدار متفاوت داشته باشد. لذا بازای هر x در قلمرو f فقط یک y وجود دارد که $(x, y) \in f$. چون این y بمحض دانسته شدن x بطور منحصر بفرد معین می‌شود می‌توانیم برای آن علامت خاصی وضع کنیم. برای نشان دادن اینکه جفت (x, y) در مجموعه f است رسم این شده که بجای $(x, y) \in f$ می‌نویسند

$$y = f(x).$$

راه دیگر توصیف تابع f با تعیین صریح جفتهائی که حاوی آنها است این است که معمولاً ترجیح می‌دهند قلمرو f را وصف کرده و سپس، بازای هر x در این قلمرو، توضیح دهند که مقدار تابعی $f(x)$ چگونه بدست آمده است. در این مورد قضیه زیر را داریم که اثباتش را بعنوان تمرین برای خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۱۰۱. دو تابع f و g مساوی‌اند اگر و فقط اگر

(الف) f و g دارای یک قلمرو باشند، و

(ب) بازای هر x در قلمرو f ، $f(x) = g(x)$.

درک این مطلب مهم است که اشیاء x و $f(x)$ که در جفتهای مرتب $(x, f(x))$ یک تابع ظاهر می‌شوند لزوماً عدد نبوده بلکه می‌توانند اشیائی دلخواه از هر نوع باشند. گاهی از این عمومیت استفاده خواهیم برد، لکن در اکثر قسمتها به توابع حقیقی، یعنی توابعی که قلمرو و برد آنها زیر مجموعه‌هائی از خط حقیقی می‌باشند، توجه خواهیم داشت. در چند مثال بعدی پاره‌ای از توابع که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می‌شوند وصف شده‌اند.

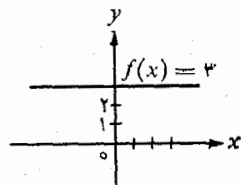
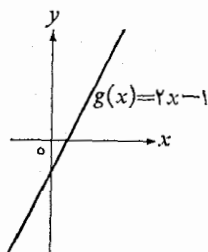
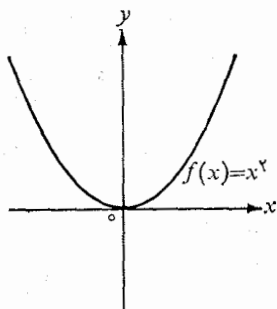
۴.۱ چند مثال دیگر از توابع حقیقی

۱. توابع ثابت. تابعی که بردش فقط از یک عدد تشکیل شود تابع ثابت نام دارد. مثالی در شکل ۸.۱ نموده شده که در آن بازای هر x حقیقی $f(x) = ۳$. نمودار این تابع خطی است افقی که در نقطه $(۰, ۳)$ محور y را قطع می‌کند.

۲. توابع خطی. تابع g که بازای هر x حقیقی با دستوری بشکل

$$g(x) = ax + b$$

تعریف شود یک تابع خطی نام دارد چونکه نمودار آن خطی است. عدد b را عرض از مبدأ خط می‌خوانند؛ این عدد مختص y نقطه $(0, b)$ است که در آن خط محور



شکل ۸.۱ تابع ثابت

$$f(x) = 3.$$

شکل ۹.۱ تابع خطی

$$g(x) = 2x - 1.$$

شکل ۱۰.۱ چندجمله‌ای درجه دوم

$$f(x) = x^2.$$

y را قطع می‌کند. عدد a را شیب خط می‌نامند. یک مثال، یعنی $g(x) = x$ در شکل ۴.۱ و مثالی دیگر، یعنی $g(x) = 2x - 1$ در شکل ۹.۱ نموده شده است.

۳. تابعهای توانی. فرض می‌کنیم f بازای عدد صحیح مثبت و ثابت n با معادله $f(x) = x^n$ بازای هر x حقیقی تعریف شود. این تابع وقتی $n = 1$ تابع همانی است که در شکل ۴.۱ نموده شده است. بازای $n = 2$ نمودار تابع یک سهمی است که بخشی از آن در شکل ۱۰.۱ نشان داده شده است. برای $n = 3$ نمودار منحنی درجه سوم است که در شکل ۱۱.۱ (صفحه ۷۵) ظاهر گشته است.

۴. توابع چندجمله‌ای. تابع چندجمله‌ای P تابعی است که بازای هر x حقیقی با معادله‌ای بشکل

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k$$

تعریف می‌شود. اعداد $c_0, c_1, \dots, c_n$ را ضرایب چندجمله‌ای و عدد صحیح و نامنفی n را (در صورتی که $c_n \neq 0$) درجه آن می‌خوانند. اینها توابع ثابت و توابع توانی را بعنوان حالتی خاص دربردارند. چندجمله‌ایهای درجه ۲، ۳، ۴ و بترتیب چندجمله‌ایهای درجه دوم، درجه سوم، و درجه چهارم خوانده می‌شوند. شکل ۱۲.۱ بخشی از نمودار چند-

جمله‌ای درجه چهارم P را که با $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ داده شده نشان می‌دهد.

۵. دایره. فرض کنید به معادله دکارتی دایره، یعنی $x^2 + y^2 = r^2$ بازگشته و این

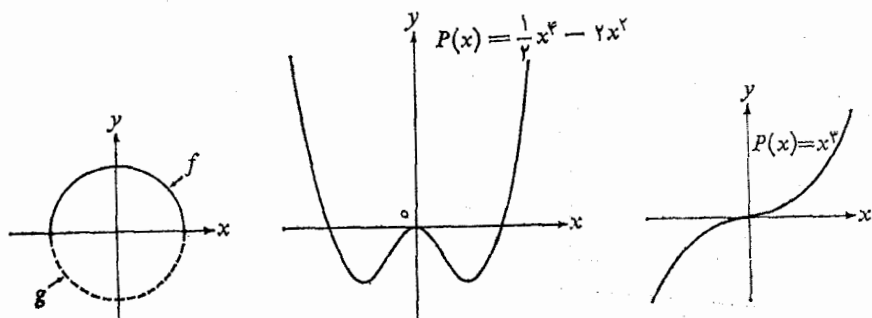
معادله را نسبت به y و بر حسب x حل کرده باشیم. دوجواب وجود دارند که با

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \text{ و } y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

داده می‌شوند. (به خواننده یادآور می‌شویم که اگر $a > 0$ علامت $\sqrt{a}$ ریشه دوم مثبت a را نشان می‌دهد. ریشه دوم منفی $-\sqrt{a}$ خواهد بود.) زمانی بود که ریاضیدانان y را يك تابع دو مقداری از x می‌خواندند که با $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ داده شده است. لکن دیدگاه جدیدتر «دومقداری بودن» را بعنوان خاصیتی از توابع نمی‌پذیرد. در تعریف تابع لازم است که هر x در قلمرو متناظر یک و فقط یک y در برد باشد. این از نظر هندسی بدان معنی است که خطوط قائمی که نمودار را قطع می‌کنند فقط در یک نقطه چنین کنند. لذا، برای تطبیق این مثال با نظریه، می‌گوئیم دو جواب y دو تابع، مثل f و g ، را تعریف می‌کنند که بازای هر x صادق در $-r \leq x \leq r$

$$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \text{ و } f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

قلمرو هر یک از این توابع بازه از $-r$ تا r است. چنانچه $|x| > r$ هیچ y حقیقی که $x^2 + y^2 = r^2$ وجود نخواهد داشت و می‌گوئیم که توابع f و g برای چنین x هائی تعریف نشده‌اند. چون $f(x)$ ریشه دوم نامنفی $x^2 - r^2$ است نمودار f نیم‌دایره بالائی نموده شده در شکل ۱۳.۱ خواهد بود. مقادیر تابع g نایشتتر از صفرند، و در نتیجه g نیم‌دایره پائینی است که در شکل ۱۳.۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۱.۱ یک چندجمله‌ای شکل ۱۲.۱ یک چندجمله‌ای شکل ۱۳.۱ نمودارهای دو

درجه سوم، $P(x) = x^3$ ، درجه چهارم، تابع، $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ،

$$f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad P(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2.$$

۶. مجموعه‌ها، حاصلضربها، و خارج قسمت‌های توابع. فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی با قلمرو مشترک D باشند. از f و g می‌توانیم، با جمع، ضرب، یا تقسیم مقادیر تابعها،

توابع جدیدی بسازیم. تابع u که با معادله

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in D)$$

تعریف شده مجموع f و g نام داشته و با $f + g$ نموده می‌شود. بهمین نحو، حاصلضرب $f \cdot g$ و $v = f/g$ قسمت $w = f/g$ توابعی هستند که بترتیب با دستورهای زیر تعریف می‌گردند:

$$w(x) = f(x)/g(x), \quad g(x) \neq 0 \quad \text{و} \quad x \in D \quad \text{اگر} \quad v(x) = f(x)g(x), \quad x \in D$$

مجموعه تمرینات زیر باین نیت آورده شده است که خواننده با نحوه استفاده از نماد تابع قدری آشنا گردد.

۵.۱ تمرینات

۱. فرض کنید بازای هر x حقیقی $f(x) = x + 1$. این مقادیر را حساب کنید: $f(2)$,

$$f(a)f(b), f(a) + f(b), f(a+b), 1/f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), -f(2), f(-2)$$

۲. فرض کنید بازای هر x حقیقی $f(x) = 1 + x$ و $g(x) = 1 - x$. این مقادیر را

$$\text{حساب کنید: } f(2)/g(2), f(2)g(2), f(2) - g(2), f(2) + g(2), f(t)g(-t), f(a) + g(-a), g[f(2)], f[g(2)]$$

۳. فرض کنید بازای هر x حقیقی $\varphi(x) = |x - 3| + |x - 1|$. این مقادیر را حساب

$$\text{کنید: } \varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(-1), \varphi(-2), \varphi(-t) \text{ کلیه } t \text{ هائی را بیابید که بازای آنها } \varphi(t+2) = \varphi(t)$$

۴. فرض کنید بازای هر x حقیقی $f(x) = x^2$. برقراری هر یک از دستورهای زیر را

$$\text{تحقیق کنید. در هر حالت مجموعه } x\text{ها، } y\text{ها، و } t\text{ها، و غیره را توصیف نمایید که دستور داده شده بازای آنها معتبر است.}$$

$$f(2y) = 4f(y) \quad (\text{ت}) \quad f(-x) = f(x) \quad (\text{الف})$$

$$f(t^2) = f(t)^2 \quad (\text{ث}) \quad f(y) - f(x) = (y-x)(y+x) \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{f(a)} = |a| \quad (\text{ج}) \quad f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 \quad (\text{پ})$$

۵. فرض کنید بازای $2 \leq |x| \leq \sqrt{4 - x^2}$ $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$. برقراری هر یک از دستورهای

$$\text{زیر را تحقیق کنید و بگوئید که دستور داده شده بازای چه مقادیری از } x, y, t, a, \text{ و } s \text{ معتبر است.}$$

$$g(a-2) = \sqrt{4a - a^2} \quad (\text{ت}) \quad g(-x) = g(x) \quad (\text{الف})$$

$$g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2} \quad (\text{ث}) \quad f(2y) = \sqrt{1 - y^2} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{2 + g(x)} = \frac{2 - g(x)}{x^2} \quad (\text{ج}) \quad g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|} \quad (\text{پ})$$

۶. فرض کنید f این طور تعریف شده باشد: بازای $۱ \leq x \leq ۲$ ، $f(x) = ۱$ ؛ بازای $۰ < x < ۱$ ، $f(x) = ۲$. این تابع بازای $x < ۰$ یا $x > ۲$ تعریف نشده است. (الف) نمودار f را رسم کنید.

(ب) فرض کنید $g(x) = f(2x)$. قلمرو g را وصف کرده و نمودار آن را بکشید.

(پ) فرض کنید $h(x) = f(x - 2)$. قلمرو h را وصف کرده و نمودار آن را بکشید.

(ت) فرض کنید $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$. قلمرو k را وصف کرده و نمودار آن را بکشید.

۷. نمودارهای دو چندجمله‌ای $g(x) = x$ و $f(x) = x^3$ یکدیگر را در سه نقطه قطع می‌کنند. آنقدر از نمودارهای آنها را بکشید که چگونگی تقاطع نمایان شود.

۸. نمودارهای دو چندجمله‌ای درجه دوم $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. قسمتهائی از دو نمودار را که بین نقاط تقاطع واقعند رسم کنید.

۹. این تمرین چند خاصیت اساسی چندجمله‌ایها را نشان می‌دهد. فرض کنید $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$. یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. هریک از مطالب زیر را ثابت کنید:

(الف) هرگاه $n \geq ۱$ و $f(0) = 0$ آنگاه $f(x) = xg(x)$ که در آن g یک چندجمله‌ای از درجه $n - 1$ است.

(ب) بازای هر a حقیقی تابع p که با $p(x) = f(x + a)$ داده شده یک چندجمله‌ای از درجه n است.

(پ) هرگاه $n \geq 1$ و بازای a حقیقی $f(a) = 0$ آنگاه $f(x) = (x - a)h(x)$ که در آن h یک چندجمله‌ای از درجه $n - 1$ است. [داهنمائی: $p(x) = f(x + a)$ را در نظر بگیرید.]

(ت) هرگاه بازای $1 + n$ مقدار حقیقی متمایز x ، $f(x) = 0$ ، آنگاه هر ضریب c_k صفر است و بازای هر x حقیقی $f(x) = 0$.

(ث) فرض کنید $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ یک چندجمله‌ای از درجه m ، که $m \geq n$ باشد. هرگاه بازای $1 + m$ مقدار حقیقی و متمایز x ، $g(x) = f(x)$ ، آنگاه $m = n$ ، بازای هر k ، $b_k = c_k$ ، و بازای هر x حقیقی $g(x) = f(x)$.

۱۰. در هر حالت کلیه چندجمله‌ایهای p از درجه نایبتر از ۲ را چنان بیابید که در شرائط داده شده صدق کنند.

(الف) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$ (پ) $p(0) = p(1) = 1$

(ب) $p(0) = p(1) = 1$ ، $p(2) = 2$ (ت) $p(0) = p(1) = 1$

۱۱. در هر حالت کلیه چندجمله‌ایهای p از درجه نایبتر از ۲ را چنان بیابید که در شرائط داده شده بازای هر x حقیقی صدق نمایند.

(الف) $p(x) = p(1 - x)$ (پ) $p(2x) = 2p(x)$

(ب) $p(x) = p(1 + x)$ (ت) $p(3x) = p(x + 3)$

۱۲. با تبدیل عبارات زیر بشکل $\sum_{k=0}^m a_k x^k$ (بازای m مناسب) چندجمله‌ای بودن آنها

را نشان دهید. n در هر حالت عدد صحیح مثبتی است.

$$(الف) (1+x)^{2n} \cdot (ب) \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 0, (پ) \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k})$$

۶.۱ مفهوم مساحت بعنوان یک تابع مجموعه‌ای

وقتی یک ریاضیدان قصد دارد نظریه‌ای کلی را که حاوی مفاهیم گوناگون بسیاری است عرضه کند تلاش می‌کند تا خواص متعارفی را که در هر کاربرد ویژه مورد نظر او اساسی جلوه می‌کنند از دیگران تفکیک نماید. او بعد این خواص را بعنوان مصالح ساختمانی اصلی نظریه‌اش بکار می‌گیرد. اقلیدس این فرایند را هنگامی که هندسه مقدماتی را بصورت یک دستگاه استنتاجی مبتنی بر مجموعه‌ای از اصول موضوع عرضه می‌کرد بکار برد. ما همین عمل را در بحث اصل موضوعی خود از دستگاه اعداد حقیقی بکار بردیم و یکبار دیگر از آن در بحثمان از مساحت استفاده خواهیم کرد.

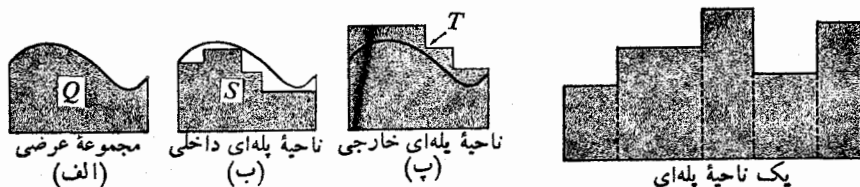
وقتی به یک ناحیه مسطح مساحتی نسبت می‌دهیم عددی را به مجموعه S در صفحه مربوط می‌کنیم. این، از دیدگاهی کاملاً ریاضی، بدان معنی است که ما تابعی مانند a (تابع مساحت) داریم که به هر مجموعه S در دسته مفروضی از مجموعه‌ها عدد حقیقی $a(S)$ (مساحت S) را نسبت می‌دهد. هر تابع از این نوع، که قلمروش دسته‌ای از مجموعه‌ها و مقادیر تابعی آن اعدادی حقیقی هستند، یک تابع مجموعه‌ای نام دارد. مسئله اساسی چنین است: اگر مجموعه مسطح S داده شده باشد به S چه مساحت $a(S)$ را نسبت خواهیم داد؟ روش ما در پرداختن به این مسئله بدین صورت است که ما با چند خاصیت که احساس می‌کنیم مساحت باید داشته باشد شروع کرده و اینها را بعنوان اصول موضوع برای مساحت در نظر می‌گیریم. هر تابع مجموعه‌ای که در این اصول موضوع صدق کند یک تابع مساحت نام دارد. برای اطمینان از اینکه به یک نظریه تهی نپرداخته‌ایم لازم است نشان دهیم که واقعاً یک تابع مساحت وجود دارد. ما این کار را در اینجا نخواهیم کرد. در عوض وجود یک تابع مساحت را فرض کرده و خواص دیگر را از اصول موضوع نتیجه می‌گیریم. نحوه ساختن مقدماتی یک تابع مساحت را می‌توان در فصلهای ۱۴ و ۲۲ کتاب مويس یافت. قبل از بیان اصول موضوع برای مساحت چند تذکر در باب آن دسته از مجموعه‌ها در صفحه که می‌توان به آنها مساحت نسبت داد می‌دهیم. این مجموعه‌ها مجموعه‌های اندازه پذیر نامیده می‌شوند؛ دسته همه مجموعه‌های اندازه پذیر با M نموده خواهد شد. اصول موضوع حاوی آنقدر اطلاعات در باب مجموعه‌های در M هستند که ما را قادر سازند تا ثابت کنیم که کلیه اشکال هندسی که در کاربردهای معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می‌شوند در M اند و می‌توان مساحت آنها را با انتگرالگیری حساب کرد.

یکی از اصول موضوع (اصل موضوع ۵) چنین می‌گوید که هر مستطیل اندازه پذیر

بوده و مساحتش برابر حاصلضرب طول اضلاعش می باشد. واژه «مستطیل» در اینجا بمعنی هر مجموعه ای است که با مجموعه ای بشکل

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq k\},$$

که در آن $h \geq 0$ و $k \geq 0$ ، همبسته^۱ باشد. اعداد h و k را طولهای اضلاع مستطیل می خوانند. ما یک پاره خط یا یک نقطه را، با صفر گرفتن h یا k (یا هر دو)، بعنوان حالت خاصی از یک مستطیل می دانیم.



شکل ۱۴.۱

شکل ۱۵.۱ یک مجموعه عرضی محصور بین دو ناحیه پله ای.

با استفاده از مستطیلهای می توانیم مجموعه های پیچیده تری بسازیم. مجموعه نموده شده در شکل ۱۴.۱ اجتماع دسته ای متناهی از مستطیلهای مجاور است که قاعده هایشان بر محور x قرار دارند و یک ناحیه پله ای خوانده می شود. اصول موضوع اینجا می کنند که هر ناحیه پله ای اندازه پذیر بوده و مساحتش مجموع مساحت های قطعات مستطیلی شکل باشد.

ناحیه Q نموده شده در شکل ۱۵.۱ (الف) مثالی است از یک مجموعه عرضی. کرانه بالائی آن نمودار تابعی نامنفی است. اصل موضوع e ما را قادر می سازد تا ثابت کنیم که بسیاری از مجموعه های عرضی اندازه پذیرند و می توان، با نزدیک کردن این مجموعه ها به ناحیه های پله ای داخلی و خارجی بصورتی که در شکل ۱۵.۱ (ب) و (پ) نموده شده، مساحت های آنها را حساب کرد.

حال به خود اصول موضوع باز می گردیم.

تعریف اصل موضوعی مساحت. فرض کنیم M از مجموعه های اندازه پذیر در صفحه و تابع مجموعه ای a که قلمروش M است وجود دادند با این خواص:

۱. خاصیت نامنفی بودن. بازای هر مجموعه S در M داریم $a(S) \geq 0$.

۲. خاصیت جمع پذیری. هرگاه $S \subset T$ در M باشند آنگاه $S \cup T$ و $S \cap T$ نیز

۱. همبسته در اینجا با همان معنایی که در هندسه اقلیدسی مقدماتی دارد بکار رفته است. دو مجموعه را همبسته خوانند اگر که بتوان بین نقاط آنها تناظری یک به یک چنان برقرار کرد که فاصله ها حفظ شوند. یعنی اگر دو نقطه p و q در یک مجموعه متناظر p' و q' در دیگری باشند باید فاصله p تا q مساوی فاصله p' تا q' باشد؛ این مطلب باید برای کلیه انتخابهای p و q درست باشد.

در M بوده و داریم

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

۳. خاصیت تفاضلی. هرگاه S و T در M باشند با این خاصیت که $S \subseteq T$ آنگاه $T - S$ نیز در M است و داریم $a(T - S) = a(T) - a(S)$.

۴. پایائی تحت همنهشتی. هرگاه مجموعه S در M بوده و T با S همنهشت فرض شود آنگاه T نیز در M است و داریم $a(S) = a(T)$.

۵. انتخاب مقیاس. هر مستطیل R در M است. هرگاه طول اضلاع R برابر h و k فرض شوند آنگاه $a(R) = hk$.

۶. خاصیت اشباع. فرض کنیم Q چنان مجموعه‌ای باشد که بتوان آن را میان دو ناحیه پله‌ای S و T جا داد، یعنی

$$(1.1) \quad S \subseteq Q \subseteq T.$$

هرگاه یک و فقط یک عدد مثل c باشد که در نامساویهای

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

بازای کلیه ناحیه‌های پله‌ای S و T صادق در (۱.۱) صدق کند، آنگاه Q اندازه‌پذیر است و $c = a(Q)$.

اصل موضوع ۱ صرفاً مبین آن است که مساحت یک مجموعه اندازه‌پذیر مسطح یا عدد مثبتی است یا صفر. اصل موضوع ۲ به ما می‌گوید که، وقتی یک مجموعه از دو قطعه (احتمالاً با نقاط مشترک) تشکیل شده باشد، مساحت اجتماع برابر است با مجموع مساحتات دو قسمت منهای مساحت قسمت مشترک. بخصوص، اگر فصل مشترک دارای مساحت صفر باشد، سطح کل مساوی مجموع مساحت‌های دو قسمت خواهد بود.

اگر مجموعه اندازه‌پذیر S را از مجموعه اندازه‌پذیر بزرگتر T برداریم اصل موضوع ۳ می‌گوید که قسمت باقیمانده، یعنی $T - S$ ، اندازه‌پذیر است و مساحتش با تفریق بدست می‌آید، یعنی $a(T - S) = a(T) - a(S)$. خصوصاً این اصل ایجاب می‌کند که مجموعه تهی $\emptyset$ اندازه‌پذیر و دارای مساحت صفر باشد. چون $a(T - S) \geq 0$ اصل موضوع ۳ خاصیت یکنوایی را نیز نتیجه خواهد داد:

برای مجموعه‌های S و T در M با خاصیت $S \subseteq T$ داریم $a(S) \leq a(T)$.

بعبارت دیگر، هر مجموعه که بخشی از مجموعه دیگر است نمی‌تواند مساحت بیشتری داشته باشد.

اصل موضوع ۴ به مجموعه‌هائی که دارای یک اندازه و یک شکل باشند مساحتات

مساوی نسبت می‌دهد. چنانچه به هر مجموعه در M عدد o را بعنوان مساحت نسبت دهیم چهار اصل اول خود بخود برقرار می‌شوند. اصل موضوع ۵ به برخی از مستطیلهای مساحت ناصفر می‌بخشد و، در نتیجه، این حالت بدیهی را مستثنی خواهد ساخت. بالاخره اصل موضوع ۶ روش یونانی اشباع را با این وضع می‌آمیزد؛ این اصل به ما این توان را می‌بخشد تا ردهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر را از ناحیه‌های پله‌ای به ناحیه‌های کلیتر وسعت دهیم.

اصل موضوع ۵ به هر پاره خط مساحت o نسبت می‌دهد. با چند بار استفاده از خاصیت جمع‌پذیری معلوم می‌شود که هر ناحیهٔ پله‌ای اندازه‌پذیر بوده و مساحتش مجموع مساحت‌های قطعات مستطیلی شکل است. نتایج مقدماتی دیگر اصول موضوع در مجموعهٔ تمرینات بعدی مطرح خواهند شد.

۷.۱ تمرینات

خواص مساحت در این مجموعهٔ تمرینات را از اصول موضوعی که در بخش پیش برای مساحت بیان شده‌اند نتیجه بگیرید.

۱. ثابت کنید که هر یک از مجموعه‌های زیر اندازه‌پذیر بوده و دارای مساحت صفر است:

(الف) مجموعهٔ مرکب از یک نقطه. (ب) مجموعهٔ مرکب از تعدادی متناهی نقطه در صفحه. (پ) اجتماع دسته‌ای متناهی پاره خط در یک صفحه.

۲. هر ناحیه به شکل مثلث قائم الزاویه اندازه‌پذیر است چونکه می‌توان آن را بصورت اشتراک دو مستطیل درآورد. ثابت کنید که هر ناحیهٔ مثلثی شکل اندازه‌پذیر بوده و مساحت آن نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاعش می‌باشد.

۳. ثابت کنید هر دو زونقه و هر متوازی الاضلاع اندازه‌پذیر است و دستورهای متداول برای مساحت آنها را بدست آورید.

۴. نقطهٔ (x, y) در صفحه را یک نقطهٔ شبکه‌ای خوانند اگر که هر دو مختص x و y صحیح باشند. فرض کنید P یک چندضلعی باشد که رئوسش نقاطی شبکه‌ای هستند. مساحت

P برابر است با $\frac{1}{2}B - I + 1$ که در آن I عدد نقاط شبکه‌ای داخل چندضلعی و B تعداد نقاط شبکه‌ای واقع بر کرانهٔ آن می‌باشند.

(الف) ثابت کنید این دستور برای مستطیلهائی که اضلاعشان موازی محورهای مختصات باشند معتبر است.

(ب) ثابت کنید این دستور برای مثلث‌های قائم الزاویه و متوازی الاضلاعها اعتبار دارد.

(پ) با استفاده از استقرا روی تعداد اضلاع برهانی برای چندضلعیهای کلی بیاورید.

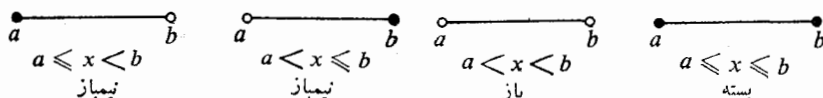
۵. ثابت کنید هر مثلثی که رئوسش نقاط شبکه‌ای باشند نمی‌تواند مساوی الاضلاع باشد.

[دانهمایی: فرض کنید چنین مثلی وجود دارد و مساحتش را به دو طریق، با استفاده از تمرینهای ۲ و ۴، محاسبه نمایید.]

۶. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و M رده همه زیرمجموعه‌های A باشد. (جمعاً، با احتساب خود A و مجموعه تهی $\emptyset$ ، ۳۲ زیرمجموعه وجود دارد.) بازای هر مجموعه S در M فرض کنید $n(S)$ نمایشگر عده عنصرهای متمایز S باشد. چنانچه $S = \{1, 2, 3, 4\}$ و $T = \{3, 4, 5\}$ اعداد $n(S \cap T)$ ، $n(S \cup T)$ ، $n(S - T)$ و $n(T - S)$ را محاسبه نمایید. ثابت کنید که تابع مجموعه‌ای n در سه اصل موضوع اول مساحت صدق می‌کند.

۸.۱ بازه‌ها و مجموعه‌های عرضی

اصولاً در نظریه انتگرالگیری ما به توابع حقیقی توجه داریم که قلمروهایشان بازه‌هایی بر محور x دارند. گاهی مهم است که بین بازه‌هایی که شامل نقاط انتهایی خود هستند و آنهایی که چنین نیستند فرق بگذاریم. این تمایز با معرفی تعاریف زیر صورت می‌گیرد.



شکل ۱۶.۱ چند مثال از بازه‌ها.

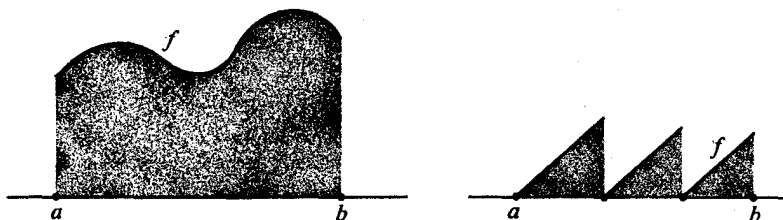
چنانچه $a < b$ مجموعه همه x هایی را که در نامساویهای $a \leq x \leq b$ صدق کنند با $[a, b]$ نشان داده و این مجموعه را بازه بسته از a تا b می‌نامیم. بازه باز متناظر، که بصورت (a, b) نوشته می‌شود، عبارت است از مجموعه کلیه x های صادق در $a < x < b$. بازه بسته $[a, b]$ شامل نقاط انتهایی a و b است حال آنکه بازه باز چنین نخواهد بود. (ر.ک. شکل ۱۶.۱). بازه باز (a, b) را $[a, b]$ نیز می‌خوانند. بازه‌های نیمباز $(a, b]$ و $[a, b)$ ، که فقط یک نقطه انتهایی را دارند، بترتیب با نامساویهای $a < x \leq b$ و $a \leq x < b$ تعریف می‌شوند.

فرض کنیم f تابعی نامنفی باشد که قلمروش بازه بسته $[a, b]$ است. بخشی از صفحه که بین نمودار f و محور x واقع است مجموعه عرضی f نام دارد. عبارت دقیقتر، مجموعه عرضی f عبارت است از دسته همه نقاطی چون (x, y) که در نامساویهای

$$a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$$

صدق می‌کنند. در هریک از مثالهای شکل ۱۷.۱ قسمت سایه‌دار نمایشگر مجموعه عرضی تابع متناظر خواهد بود.

مجموعه‌های عرضی اشیائی هستند هندسی که ما می‌خواهیم مساحت آنها را با استفاده از حساب انتگرال محاسبه کنیم. ابتدا مفهوم انتگرال را برای توابع پله‌ای تعریف می‌کنیم و بعد، با استفاده از انتگرال تابع پله‌ای، تعریف انتگرال را برای توابع کلیتر تنظیم



شکل ۱۷.۱ چند نمونه از مجموعه‌های عرضی.

می‌نمائیم. نظریه انتگرال‌گیری در مورد توابع پله‌ای فوق‌العاده ساده است و بطریقی طبیعی به نظریه متناظرش برای توابع کلیتر منجر می‌شود. برای شروع این برنامه لازم است که تعریف تحلیلی یک تابع پله‌ای در اختیار ما باشد. این را می‌شود بساده‌ترین وجه برحسب مفهوم افراز، که ما اینک بدان می‌پردازیم، عرضه کرد.

۹.۱ افرازا و توابع پله‌ای

فرض می‌کنیم بازه بسته داده شده $[a, b]$ را با درج $n-1$ نقطه تقسیم، مثلاً $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ، که فقط تابع شرط

$$(20.1) \quad a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

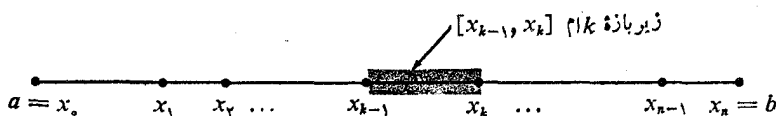
هستند، به n زیربازه تجزیه کرده باشیم. شایسته است که خود نقطه a را با x_0 و نقطه b را با x_n نشان‌دهیم. دسته‌ای از نقاط که در (۲۰۱) صدق کنند یک افراز P از $[a, b]$ نام دارد، و ما علامت

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

را برای نمایش این افراز بکار می‌بریم. افراز P مشخص کننده n زیربازه بسته

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

خواهد بود. $[x_{k-1}, x_k]$ زیربازه بسته نمونه است و به آن زیربازه بسته k ام می‌گویند؛ مثالی از آن در شکل ۱۸.۱ نموده شده است. بازه باز متناظرش (x_{k-1}, x_k) را زیربازه



شکل ۱۸.۱ نمونه‌ای از یک افراز $[a, b]$.

باز k ام P می خوانند.

حال برای تنظیم تعریف تحلیلی یک تابع پله‌ای حاضر و آماده‌ایم.

تعریف تابع پله‌ای. تابع s ، که قلمروش بازه بسته $[a, b]$ است، یک تابع پله‌ای خوانده می‌شود اگرکه افزای مثل $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ چنان وجود داشته باشد که s بر هر زیربازه باز P ثابت باشد. یعنی، برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، عددی حقیقی چون s_k وجود داشته باشد بطوری که

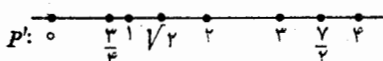
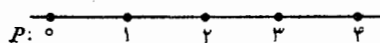
$$s(x) = s_k, \quad x_{k-1} < x < x_k$$

گاهی توابع پله‌ای را توابع قطعه قطعه ثابت می‌خوانند.

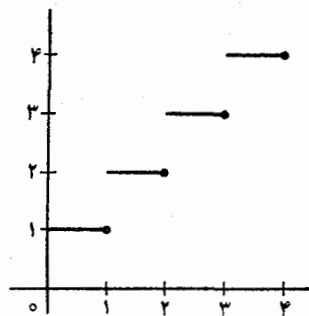
توجه: تابع باید در هر نقطه انتهائی x_{k-1} و x_k مقدار تعریف شده‌ای داشته باشد اما لازم نیست همان s_k باشد.

مثال. نمونه آشنائی از توابع پله‌ای «تابع پستی» است که نمودارش در شکل ۱۹.۱ نشان داده شده است. فرض می‌کنیم نرخ پست سفارشی برای بسته‌های بوزن حداکثر ۲۰ پوند برای هر اونس^۱ یا کسری از آن ۵ سنت^۲ باشد. نمودار تعداد تمبرهای ۵ سنتی را که برای ارسال بسته‌های بوزن حداکثر ۴ اونس لازم است نشان می‌دهد. در این حالت پاره خطهای روی نمودار بازه‌های نیمبازی هستند که حاوی نقاط انتهائی راست خود می‌باشند. قلمرو تابع بازه $[0, 320]$ است.

از افراز داده شده P از $[a, b]$ همیشه می‌توانیم افراز جدید P' را با الحاق نقاط تقسیم دیگر به نقاط واقع در P تشکیل دهیم. یک چنین افراز P' را یک نظریف P خوانده می‌گویند که P' از P ظریفتر است. بعنوان مثال، $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$



شکل ۲۰.۱ افراز P از $[0, 4]$ و نظریف P' .



شکل ۱۹.۱ تابع پستی.

۲. یک سنت = یکصدم دلار

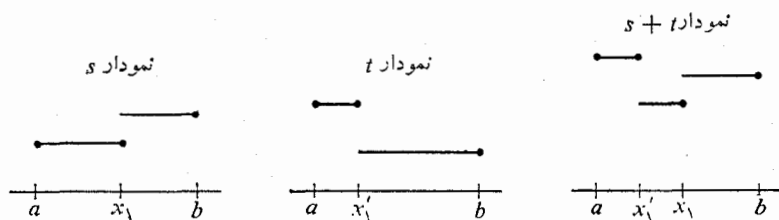
۱. یک اونس = یک شانزدهم پوند

یک افراز بازه $[0, 4]$ است. چنانچه نقاط $3/4$ ، $\sqrt{2}$ و $7/2$ را به آن بیفزائیم افراز جدید P' از $[0, 4]$ ، یعنی $\{0, 3/4, 1, \sqrt{2}, 2, 3, 7/2, 4\}$ را بدست می آوریم که یک تعریف P می باشد. (ر.ک. شکل ۲۰.۱). هرگاه یک تابع پله ای بر زیر بازه های باز P ثابت باشد آنسگاه بر زیر بازه های باز هر تعریف آن P' نیز چنین خواهد بود.

۱۰.۱ مجموع و حاصلضرب توابع پله ای

از توابع پله ای مفروض می توان، با افزودن مقادیر تابعی آنها بهم، توابع پله ای جدیدی ساخت. مثلاً فرض می کنیم s و t توابعی پله ای باشند که هر دو بر بازه $[a, b]$ تعریف شده اند. فرض می کنیم P_s و P_t چنان افرازهایی از $[a, b]$ باشند که s بر زیر بازه های باز P_s و t بر زیر بازه های باز P_t ثابتند. $u = s + t$ را تابعی می انگاریم که با این معادله تعریف می شود:

$$u(x) = s(x) + t(x), a \leq x \leq b \text{ اگر}$$



شکل ۲۱.۱ مجموع دو تابع پله ای.

برای اینکه نشان دهیم u واقعاً یک تابع پله ای است بایستی افرازی مثل P را چنان ارائه دهیم که u بر زیر بازه های باز آن ثابت باشد. این افراز جدید P را برابر کلیه نقاط P_s و P_t می گیریم. این افراز، یعنی اجتماع P_s و P_t ، تعریف مشترک P_s و P_t نام دارد. چون هر دو s و t بر زیر بازه های باز تعریف مشترک ثابتند u نیز چنین خواهد بود. مثالی در شکل ۲۱.۱ نموده شده است. افراز P_t مساوی $\{a, x_1, b\}$ ، افراز P_s برابر $\{a, x'_1, b\}$ و تعریف مشترک مساوی $\{a, x'_1, x_1, b\}$ می باشد.

بهمین نحو، حاصلضرب $v = s \cdot t$ دو تابع پله ای تابع پله ای دیگری است. یک حالت خاص مهم موقعی است که یکی از سازه ها، مثلاً t ، در سراسر $[a, b]$ ثابت باشد. هرگاه بازای هر x در $[a, b]$ ، $t(x) = c$ ، آنگاه هر مقدار تابعی $v(x)$ این طور بدست می آید که $s(x)$ را در ثابت c ضرب کنیم.

۱۱.۱ تمرینات

در این مجموعه از تمرینات $[x]$ نمایشگر بزرگترین عدد صحیح نایشتتر از x است.

۱. فرض کنید بازای هر x حقیقی $f(x) = [x]$ و $g(x) = [2x]$. در هر حالت نمودار تابع h را که روی بازه $[2, 1]$ با دستور داده شده تعریف گشته رسم کنید.

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{الف}) \quad h(x) = f(x)g(x) \quad (\text{ب})$$

$$h(x) = f(x) + g(x/2) \quad (\text{ب}) \quad h(x) = \frac{1}{4} f(2x)g(x/2) \quad (\text{ت})$$

۲. در هر حالت f تابعی است که روی بازه $[2, -2]$ با دستور داده تعریف گشته است. نمودار f را بکشید. اگر f تابعی پله‌ای باشد افراز P از $[2, -2]$ را چنان بیابید که f بر زیر بازه‌های باز P ثابت باشد.

$$f(x) = x + [x] \quad (\text{الف}) \quad f(x) = 2[x] \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = x - [x] \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \left[x + \frac{1}{2} \right] \quad (\text{ث})$$

$$f(x) = [-x] \quad (\text{پ}) \quad f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] \quad (\text{ج})$$

۳. در هر حالت نمودار تابع f را که با دستور داده شده تعریف گشته رسم کنید.

$$f(x) = [\sqrt{x}] \quad \text{بازای } 0 \leq x \leq 10 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = [x^2] \quad \text{بازای } 0 \leq x \leq 3 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \sqrt{[x]} \quad \text{بازای } 0 \leq x \leq 10 \quad (\text{پ})$$

$$f(x) = [x]^2 \quad \text{بازای } 0 \leq x \leq 3 \quad (\text{ت})$$

۴. ثابت کنید که تابع بزرگترین عدد صحیح از خواص زیر برخوردار است:

$$[x + n] = [x] + n, n \text{ عدد صحیح} \quad (\text{الف})$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{اگر } x \text{ عدد صحیحی باشد} \\ -[x] - 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$[x + y] = [x] + [y] \text{ یا } [x] + [y] + 1 \text{ است.} \quad (\text{پ})$$

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] \quad (\text{ت})$$

$$[3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] \quad (\text{ث})$$

تمرینات اختیاری

۵. دستورهای تمرینات ۴ (ت) و ۴ (ث) تعمیمی را برای $[nx]$ پیشنهاد می‌کنند. این تعمیم را بیان و ثابت کنید.

۶. یادآور می‌شویم که نقطه شبکه‌ای (x, y) در صفحه نقطه‌ای است که مختصاتش اعدادی صحیح باشند. فرض کنید f تابعی نامنفی باشد که قلمروش بازه $[a, b]$ است که a و b اعدادی صحیح بوده و $0 < y \leq f(x)$ و $a \leq x \leq b$ صدق می‌کنند. ثابت کنید که تعداد نقاط شبکه‌ای موجود در S برابر است با مجموع

$$\sum_{n=a}^b [f(n)].$$

۷. اگر a و b اعداد صحیح مثبتی بدون سازه مشترک باشند دستور

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b} \right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

را خواهیم داشت. مجموع سمت چپ برای وقتی $b = 1$ مساوی ۰ تعریف می‌شود. (الف) نتیجه بالا را با استدلالی هندسی بدست آورید باین صورت که نقاط شبکه‌ای موجود در یک مثلث قائم الزاویه را بشمارید.

(ب) مطلب را بطور تحلیلی این‌طور نتیجه بگیرید: با تغییر زیرنویس جمع‌بندی توجه کنید که $\sum_{n=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b-n)/b]$. حال تمرینات ۴ (الف) و ۴ (ب) را در مورد گروه سمت راست بکار گیرید.

۸. فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط واقع بر خط حقیقی باشد. بنا بر تعریف، تابع مشخص S تابع χ_S است که بازای هر x در S ، $\chi_S(x) = 1$ و، بازای x هائی که در S نیستند، $\chi_S(x) = 0$. فرض کنید f تابعی پله‌ای باشد که بر زیر بازه باز I_k افرای از بازه $[a, b]$ مقدار ثابت c_k را بخود می‌گیرد. ثابت کنید که بازای هر x در اجتماع $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ داریم

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}(x).$$

این خاصیت این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند هر تابع پله‌ای ترکیبی است خطی از توابع مشخص بازه‌ها.

۱۲.۱ تعریف انتگرال برای توابع پله‌ای

در این بخش به معرفی انتگرال برای توابع پله‌ای می‌پردازیم. تعریف بنحوی است که انتگرال یک تابع پله‌ای نامنفی مساوی است با مساحت مجموعه عرضی آن.

فرض کنیم S تابعی پله‌ای باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده است، و $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ را چنان افرای از $[a, b]$ می‌انگاریم که S بر زیر بازه‌های باز آن ثابت است. مقدار ثابتی را که S در زیر بازه باز I_k می‌گیرد به c_k نشان

می‌دهیم، پس

اگر $x_{k-1} < x < x_k$ ، $(k = 1, 2, \dots, n)$ ، $s(x) = s_k$.

تعریف انتگرال توابع پله‌ای. انتگرال s از a تا b ، که به‌علاوه $\int_a^b s(x) dx$ نموده می‌شود، با دستور زیر تعریف می‌گردد:

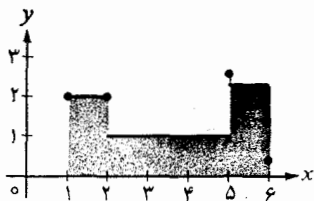
$$(۳.۱) \quad \int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

یعنی که، برای محاسبه انتگرال، هر مقدار ثابت s_k را در طول زیربازه k ام ضرب می‌کنیم و سپس کلیه این حاصلضربها را بهم می‌افزاییم.

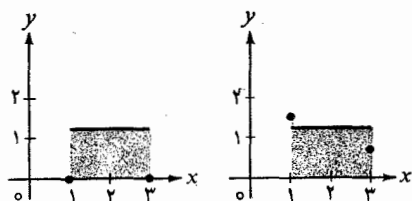
توجه‌کنید که مقادیر s در نقاط تقسیم، چونکه در طرف راست (۳.۱) ظاهر نمی‌شوند، اهمیتی ندارند. بخصوص، هرگاه s بر بازه (a, b) ثابت باشد، مثلاً اگر $s(x) = c$ ، $a < x < b$ ، آنگاه، بدون توجه به مقادیر $s(a)$ و $s(b)$ ، خواهیم داشت

$$\int_a^b s(x) dx = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$$

چنانچه $c > 0$ و بازای هر x در بازه بسته $[a, b]$ ، $s(x) = c$ ، مجموعه عرضی s مستطیلی بقاعده $a - b$ و ارتفاع c است؛ انتگرال s برابر $c(b-a)$ ، یعنی مساحت این مستطیل، خواهد بود. تغییر مقدار s در یک یا هر دو نقطه انتهائی a و b مجموعه عرضی را تغییر می‌دهد اما بر انتگرال s یا مساحت مجموعه عرضی آن اثری ندارد. بعنوان مثال، دو مجموعه عرضی نموده شده در شکل ۲۲.۱ از مساحت مساوی برخوردارند.



شکل ۲۳.۱ مجموعه عرضی s تابع پله‌ای.



شکل ۲۲.۱ تغییر مقادیر تابع در دو نقطه مساحت مجموعه عرضی را تغییر نمی‌دهد.

مجموعه عرضی هر تابع پله‌ای نامنفی s از تعدادی متناهی مستطیل (برای هر بازه ثابت یکی) تشکیل شده است؛ مجموعه عرضی ممکن است، بسته به نحوه تعریف s در نقاط تقسیم، حاوی یا فاقد برخی از پاره‌خطهای قائم نیز باشد. انتگرال s ، بدون توجه به مقادیر آن در نقاط تقسیم، مساوی مجموع مساحت‌های مستطیلها است. این مطلب با این واقعیت که پاره‌خطهای قائم مساحت صفر داشته و در مساحت مجموعه عرضی سهمی ندارند سازگار است.

در شکل ۲۳.۱ تابع پله‌ای s مقادیر ثابت ۱، ۲ و $\frac{9}{4}$ را بترتیب در بازه‌های باز $(1, 2)$ ،

(۲، ۵) و (۶، ۵) می‌گیرد. انتگرالش مساوی است با

$$\int_1^6 s(x) dx = 2 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (5 - 2) + \frac{9}{4} \cdot (6 - 5) = \frac{29}{4}.$$

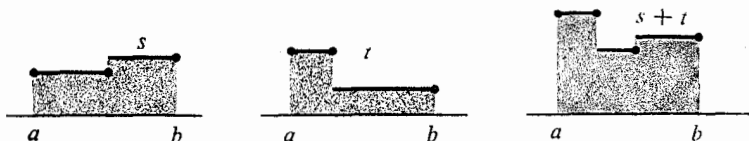
باید یادآور شویم که دستور انتگرال (۳.۱) از انتخاب افراز P مادامی که s بر زیر-بازه‌های باز P ثابت باشد مستقل است. بعنوان مثال، فرض می‌کنیم با قراردادن فقط یک نقطه تقسیم جدید t در P ، که $x_0 < t < x_1$ ، را به افراز ظریفتر P' بدل کرده باشیم. در اینصورت اولین جمله سمت راست (۳.۱) با دو جمله $s_1 \cdot (t - x_0)$ و $s_1 \cdot (x_1 - t)$ عوض می‌شود و بقیه جملات دست نخورده می‌مانند. چون

$$s_1 \cdot (t - x_0) + s_1 \cdot (x_1 - t) = s_1 \cdot (x_1 - x_0),$$

پس مقدار کل مجموع تغییر نخواهد کرد. می‌توان، با افزودن یکی یکی نقاط تقسیم جدید، از P به هر افراز ظریفتر P' دست یافت. چون مجموع (۳.۱) در هر مرحله ثابت می‌ماند پس انتگرال برای کلیه تقزیفهای P یکی خواهد بود.

۱۳.۱ خواص انتگرال یک تابع پله‌ای

در این بخش به توصیف چند خاصیت اساسی صادق برای انتگرال یک تابع پله‌ای می‌پردازیم. اغلب این خواص وقتی تعبیر هندسی می‌شوند واضح بنظر می‌رسند، و حتی برخی از آنها ممکن است ناچیز به‌شمار آیند. همه این خواص در مورد انتگرالهای توابع کلیتر صادقند، و یکبار که آنها را برای توابع پله‌ای ثابت کردیم اثباتشان در حالت کلی ساده خواهد بود. این خواص در زیر بعنوان قضیه ذکر شده‌اند و، در هر مورد، برای توابع پله‌ای نامنفی تعبیری هندسی بر حسب مساحات داده شده است. برهانهای تحلیلی قضایا در بخش ۱۵.۱ مختصراً آورده شده‌اند.



شکل ۲۴.۱ نمایش خاصیت جمعپذیری انتگرال.

اولین خاصیت می‌گوید که انتگرال مجموع دو تابع پله‌ای مساوی مجموع انتگرالها است. این مطلب با نام خاصیت جمعپذیری شهرت دارد و در شکل ۲۴.۱ مصورشده است.

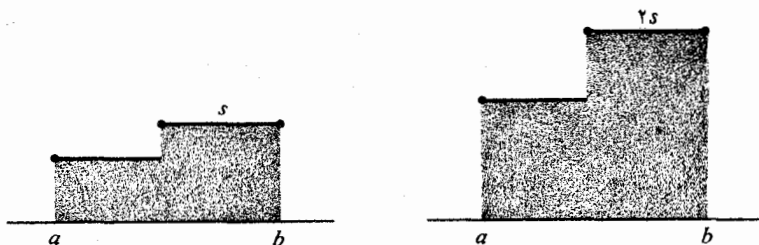
قضیه ۲۰.۱. خاصیت جمعپذیری.

$$\int_a^b [s(x) + t(x)] dx = \int_a^b s(x) dx + \int_a^b t(x) dx.$$

خاصیت بعدی، که در شکل ۲۵.۱ منعکس شده، خاصیت همگنی نام دارد. این خاصیت چنین می‌گوید که هرگاه کلیه مقادیر تابع در عدد ثابت c ضرب شوند آنگاه انتگرال نیز در c ضرب خواهد شد.

قضیه ۳.۱. خاصیت همگنی. بازای هر عدد حقیقی c داریم

$$\int_a^b c \cdot s(x) dx = c \int_a^b s(x) dx.$$



شکل ۲۵.۱ نمایش خاصیت همگنی انتگرال (برای $c=2$).

این دو قضیه را می‌توان در هم آمیخت و یک دستور بدست آورد که به خاصیت خطی اشتها دارد.

قضیه ۴.۱. خاصیت خطی. بازای هر c_1 و c_2 حقیقی داریم

$$\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)] dx = c_1 \int_a^b s(x) dx + c_2 \int_a^b t(x) dx.$$

قضیه دیگری که داریم قضیه مقایسه‌ای است که می‌گوید اگر یک تابع پله‌ای در سرتاسر $[a, b]$ دارای مقادیری بزرگتر از دیگری باشند انتگرال آن نیز روی این بازه بزرگتر خواهد بود.

قضیه ۵.۱. قضیه مقایسه‌ای. هرگاه بازای هر x در $[a, b]$ ، $s(x) < t(x)$ ، آنگاه

$$\int_a^b s(x) dx < \int_a^b t(x) dx.$$

این قضیه اگر تعبیر هندسی بشود خاصیت یکنوایی مساحت را منعکس می‌کند. چنانچه مجموعه عرضی یک تابع پله‌ای نامنفی در داخل دیگری واقع شده باشد مساحت ناحیه کوچکتر کمتر از مساحت ناحیه بزرگتر است.

خواص پیشگفته همه در مورد توابع پله‌ایی هستند که بر بازه مشترکی تعریف شده‌اند. انتگرال از خواص مهم دیگری برخوردار است که انتگرالهای روی بازه‌های مختلف را بهم مربوط می‌سازند. از جمله اینها قضیه زیر را داریم.

قضیه ۶.۱. جمعپذیری نسبت به بازه انتگرالگیری.

$$\int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx = \int_a^b s(x)dx, a < c < b \text{ اگر}$$

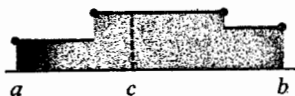
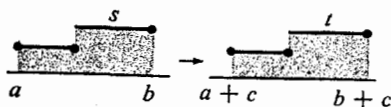
این قضیه خاصیت جمعپذیری مساحت را، که در شکل ۲۶.۱ نموده شده، منعکس می‌کند. اگر یک مجموعه عرضی به دو مجموعه عرضی تجزیه شده باشد مجموع مساحت دو قسمت مساوی مساحت کل خواهد بود.

قضیه بعدی را شاید بتوان بعنوان پایائی تحت انتقال توصیف کرد. اگر مجموعه عرضی تابع پله‌ای s با اندازه c «تغییر مکان» یا بد مجموعه عرضی حاصل مربوط به تابع پله‌ای دیگری چون t است که با معادله $t(x) = s(x - c)$ به s مربوط می‌شود. هرگاه s بر $[a, b]$ تعریف شده باشد آنگاه t بر $[a + c, b + c]$ تعریف شده است و مجموعه‌های عرضی آنها، بدلیل هم‌نهشت بودن، از مساحت مساوی برخوردارند. این خاصیت بطور تحلیلی این‌طور بیان شده است:

قضیه ۷.۱. پایائی تحت انتقال.

$$\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x - c)dx \text{ با } c \text{ هر } c \text{ حقیقی}$$

معنی هندسی آن در شکل ۲۷.۱ برای $c > 0$ نشان داده شده است. وقتی $c < 0$ مجموعه عرضی به چپ نقل مکان می‌یابد.



شکل ۲۷.۱ نمایش پایائی انتگرال تحت

$$\text{انتقال، } t(x) = s(x - c)$$

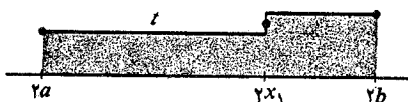
شکل ۲۶.۱ جمعپذیری نسبت به بازه

انتگرالگیری.

خاصیت همگنی (قضیه ۳.۱) توضیح می‌دهد که با تغییر مقیاس محور y بر سر انتگرال چه می‌آید. قضیه زیر به تغییر مقیاس بر محور x می‌پردازد. هرگاه s یک تابع پله‌ای تعریف شده بر بازه $[a, b]$ بوده و مقیاس در امتداد افقی را با ضرب همه مختصات x در سازه $k > 0$ تغییر دهیم آنگاه نمودار جدید نمودار تابع پله‌ای دیگر t است که بر بازه $[ka, kb]$ تعریف شده و با این معادله به s مربوط می‌شود:

$$t(x) = s\left(\frac{x}{k}\right), ka \leq x \leq kb \text{ اگر}$$

مثالی با فرض $k = 2$ در شکل ۲۸.۱ نموده شده است، و این فکر را پیش می‌آورد که شکل تغییر یافته از مساحتی دو برابر شکل اصلی برخوردار می‌باشد.



شکل ۲۸.۱ تغییر مقیاس بر محور x : $t(x) = s(x/2)$

بطور کلی، تغییر شکل بوسیلهٔ سازهٔ مثبت k سبب می‌شود که انتگرال در k ضرب گردد. این خاصیت، بطور تحلیلی، شکل زیر را بخود خواهد گرفت:

قضیهٔ ۸.۱. انبساط یا انقباض بازهٔ انتگرالگیری.

$$\int_a^b s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x) dx, k > 0$$

باذای هر

تا بحال هر موقع از علامت $\int_a^b$ استفاده کرده‌ایم فرض بر این بوده که حد پائینی a از حد بالائی b کوچکتر است. شایسته است که افکار خود را تا حدودی وسعت بخشیده و انتگرالهایی را در نظر بگیریم که در آنها حد پائینی از حد بالائی بزرگتر باشد. این کار با تعریف زیر صورت می‌گیرد:

$$(۴.۱) \quad \int_b^a s(x) dx = - \int_a^b s(x) dx, a < b$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$\int_a^a s(x) dx = 0,$$

و این تعریفی است که گذاردن $a = b$ در (۴.۱) پیشنهاد می‌کند. این قراردادها به ما این امکان را می‌دهند تا نتیجه بگیریم که قضیهٔ ۶.۱ نه فقط وقتی که c بین a و b قرار دارد معتبر است بلکه در مورد هر آرایش نقاط a و b و c نیز چنین خواهد بود. قضیهٔ ۶.۱ گاهی بشکل

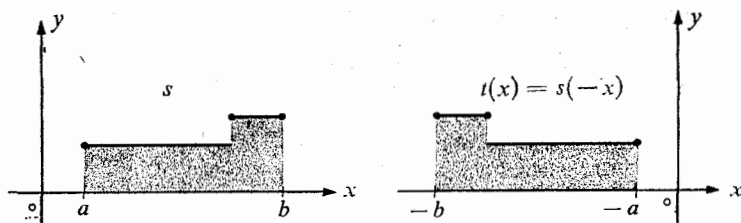
$$\int_a^c s(x) dx + \int_c^b s(x) dx + \int_b^a s(x) dx = 0$$

نوشته می‌شود. بهمین نحو می‌توانیم حیطهٔ اعتبار قضیهٔ ۸.۱ را وسعت بخشیده و اجازه دهیم که ثابت k منفی هم باشد. بخصوص، وقتی $k = -1$ ، قضیهٔ ۸.۱ و معادلهٔ (۴.۱) این رابطه را به ما می‌دهند:

$$\int_a^b s(x) dx = \int_{-b}^{-a} s(-x) dx.$$

این خاصیت را خاصیت انعکاسی انتگرال می‌خوانیم زیرا نمودار تابع t که با $t(x) = s(-x)$ داده می‌شود از نمودار s با انعکاس نسبت به محور y بدست می‌آید.

در این مورد مثالی در شکل ۲۹.۱ نموده شده است.



شکل ۲۹.۱ نمایش خاصیت انعکاسی انتگرال.

۱۴.۱ نمادهای دیگری برای انتگرالها

حرف x که در علامت $\int_a^b s(x) dx$ ظاهر می‌شود در تعریف انتگرال نقشی اساسی ندارد. هر حرف دیگر می‌تواند بهمین خوبی مورد استفاده قرار گیرد. حروف z, v, u, t مکرر برای این منظور بکار گرفته می‌شوند، و قرار بر این شده که بجای $\int_a^b s(x) dx$ بتوانیم بنویسیم $\int_a^b s(u) du, \int_a^b s(t) dt$ ، و مانند اینها؛ همه اینها بعنوان نمادهایی دیگر برای یک چیز در نظر گرفته می‌شوند. علامات x, t, u ، و غیره، که در این راه بکار می‌روند، «متغیرهای ظاهری» نام دارند. اینها شبیه زیرنویسهای ظاهری هستند که در نماد جمع‌بندی مورد استفاده قرار گرفتند.

بعضی از مؤلفان کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال به حذف هم متغیر ظاهری راغبند و هم علامت d و فقط برای انتگرال می‌نویسند $\int_a^b s$. یک دلیل موجه برای استفاده از این علامت اختصاری این است که با تأکید بیشتری دلالت بر آن دارد که انتگرال فقط به تابع s و بازه $[a, b]$ وابسته است. همچنین برخی از دستورها با این نماد ساده‌تر جلوه می‌کنند. بعنوان مثال، خاصیت جمع‌پذیری بصورت $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$ در می‌آید. از طرف دیگر، نوشتن دستورهائی شبیه دستورهای قضایای ۷.۱ و ۸.۱ با این نماد اختصاری لطفی ندارد. از این مهمتر، بعداً در می‌یابیم که نماد اصلی لایب نیتز از چند مزیت عملی برخوردار است. معلوم خواهد شد که علامت dx ، که در این مرحله تا حدودی زائد می‌نمایاند، در ارتباط با بسیاری از محاسبات جاری با انتگرالها وسیله محاسبه‌ای فوق‌العاده مفیدی می‌باشد.

۱۵.۱ تمرینات

۱. مقدار هریک از انتگرالهای زیر را حساب کنید. هر جا که مناسب بود می‌توانید از قضایای بخش ۱۳.۱ استفاده نمایید. $[x]$ مبین بزرگترین عدد صحیح نایشت از x است.

$$\cdot \int_{-1}^2 [x] dx \quad (\text{الف}) \quad \cdot \int_{-1}^2 2[x] dx \quad (\text{ت})$$

$$\cdot \int_{-1}^2 \left[x + \frac{1}{2} \right] dx \quad (\text{ب}) \quad \cdot \int_{-1}^2 [2x] dx \quad (\text{ث})$$

$$\cdot \int_{-1}^2 [-x] dx \quad (\text{ج}) \quad \cdot \int_{-1}^2 \left([x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] \right) dx \quad (\text{پ})$$

۲. مثالی از یک تابع پله‌ای s بیاورید که بر بازه بسته $[0, 5]$ تعریف شده و دارای

$$\int_0^5 s(x) dx = 2, \quad \int_0^2 s(x) dx = 5$$

این خواص باشد:

$$\cdot \int_a^b [x] dx + \int_a^b [-x] dx = a - b$$

۳. نشان دهید که

$$\cdot \int_0^n [t] dt = n(n-1)/2$$

۴. (الف) اگر n عدد صحیح مثبتی باشد ثابت کنید که

$$f(x) = \int_0^x [t] dt, \quad x \geq 0$$

(ب) اگر بازای $x \geq 0$ نمودار f را روی بازه $[0, 4]$ رسم کنید.

$$\cdot \int_0^5 [t^2] dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

۵. (الف) ثابت کنید که

$$\int_{-3}^2 [t^2] dt$$

(ب) را حساب کنید.

۶. (الف) اگر n عدد صحیح مثبتی باشد ثابت کنید که

$$\int_0^n [t]^2 dt = n(n-1)(2n-1)/6.$$

$$f(x) = \int_0^x [t]^2 dt, \quad x \geq 0$$

(ب) اگر بازای $x \geq 0$ نمودار f را روی بازه $[0, 3]$ رسم نمایید.

$$\cdot \int_0^x [t]^2 dt = 2(x-1)$$

(پ) کلیه $x > 0$ هائی را بیابید که برای آنها

$$\int_0^9 [\sqrt{t}] dt$$

(الف) را محاسبه نمایید.

(ب) اگر n عدد صحیح مثبتی باشد ثابت کنید که

$$\int_0^{n^2} [\sqrt{t}] dt = n(n-1)(2n+1)/6.$$

۸. نشان دهید که خاصیت انتقالی (قضیه ۷.۱) را می‌توان بشکل معادل

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(x+c) dx$$

درآورد.

۹. نشان دهید که خاصیت زیر با قضیه ۸.۱ معادل است:

$$\int_{ka}^{kb} f(x) dx = k \int_a^b f(kx) dx.$$

۱۰. عدد صحیح و مثبت p داده شده است. تابع پله‌ای s بر بازه $[0, p]$ بشرح زیر تعریف می‌شود: اگر x در بازه $n < x \leq n+1$ ، که $n = 0, 1, 2, \dots, p-1$ ، واقع باشد $s(x) = (-1)^n$ ؛ و $s(p) = 0$. قرار دهید $f(p) = \int_0^p s(x) dx$. (الف) $f(3)$ ، $f(4)$ ، و $f(f(3))$ را حساب کنید.

(ب) برای چه مقدار (یا مقادیری) از p ، $|f(p)| = 7$ ؟

۱۱. اگر بجای استفاده از دستور (۳.۱) برای تعریف انتگرال توابع پله‌ای تعریف

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k^* \cdot (x_k - x_{k-1})$$

را بکار می‌بردیم نظریه انتگرالگیری جدید و متفاوتی بدست می‌آمد. از خواص زیر کدامها در این نظریه جدید معتبر می‌مانند؟

$$\int_a^b c \cdot s = c \int_a^b s \quad (\text{پ}) \quad \int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s \quad (\text{الف})$$

$$\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t \quad (\text{ب})$$

$$\int_{a+c}^{b+c} s(x) dx = \int_a^b s(x+c) dx \quad (\text{ت})$$

$$\int_a^b s < \int_a^b t \quad \text{آنگاه } s(x) < t(x), [a, b] \text{ در } x \text{ هرگاه بازای هر } x \text{ در } [a, b], s(x) < t(x), \text{ آنگاه } \int_a^b s < \int_a^b t \quad (\text{ث})$$

۱۲. تمرین ۱۱ را در صورتی که از تعریف

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k^* \cdot (x_k^* - x_{k-1}^*)$$

استفاده کرده باشیم حل کنید.

برهانهای تحلیلی خواص انتگرال داده شده در بخش ۱۳.۱ در تمرینات زیر خواسته شده‌اند. در اینجا برهانهای قضایای ۳.۱ و ۸.۱ بعنوان نمونه آورده می‌شوند. برای سایر قضایا راهنمایی‌هایی شده است.

برهان قضیه ۳.۱: بازای هر c حقیقی $\int_a^b c \cdot s(x) dx = c \int_a^b s(x) dx$ حقیقی فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ چنان‌افرازی از $[a, b]$ باشد که s بر زیر بازه‌های

باز آن ثابت است. همچنین، اگر $x_{k-1} < x < x_k$ ، $s(x) = s_k$ ، $(k = 1, 2, \dots, n)$ ، در این صورت، اگر $x_{k-1} < x < x_k$ ، $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ ، و در نتیجه، بنا بر تعریف انتگرال، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b c \cdot s(x) dx &= \sum_{k=1}^n c \cdot s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= c \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \int_a^b s(x) dx. \end{aligned}$$

برهان قضیه ۸.۱:

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x) dx, k > 0$$

فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ چنان افزایی از بازه $[a, b]$ باشد که s بر زیر-بازه‌های باز آن ثابت است. همچنین، اگر $x_{i-1} < x < x_i$ ، $s(x) = s_i$. چنانچه $ka \leq x \leq kb$ قرار می‌دهیم $t(x) = s(x/k)$. در این صورت، اگر x در بازه باز (kx_{i-1}, kx_i) واقع باشد، $t(x) = s_i$ ؛ در نتیجه $P' = \{kx_0, kx_1, \dots, kx_n\}$ افزایی از $[ka, kb]$ است و t بر زیر-بازه‌های باز P' ثابت می‌باشد. بنا بر این، t تابعی است پله‌ای با این انتگرال:

$$\begin{aligned} \int_{ka}^{kb} t(x) dx &= \sum_{i=1}^n s_i \cdot (kx_i - kx_{i-1}) \\ &= k \sum_{i=1}^n s_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = k \int_a^b s(x) dx. \end{aligned}$$

۱۳. قضیه ۲.۱ (خاصیت جمع‌پذیری) را ثابت کنید.

[داهنمائی: از خاصیت جمع‌پذیری برای مجموعه‌ها استفاده کنید:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k]$$

۱۴. قضیه ۴.۱ (خاصیت خطی) را ثابت کنید.

[داهنمائی: از خاصیت جمع‌پذیری و خاصیت همگنی استفاده نمایید.]

۱۵. قضیه ۵.۱ (قضیه مقایسه‌ای) را ثابت کنید.

[داهنمائی: خاصیت متناظر برای مجموعه‌ها را بکار ببرید: اگر بازای $n, 2, 1, k$ ،

$$[\cdot \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k \text{ داشت } a_k < b_k$$

۱۶. قضیه ۶.۱ (جمعپذیری نسبت به بازه) را ثابت کنید.

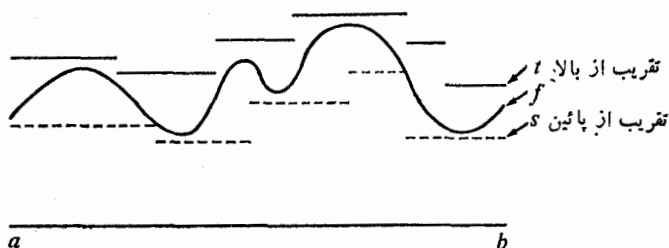
[داهنمائی: هرگاه P افزای از $[a, c]$ و P افزای برای $[c, b]$ باشد آنگاه نقاط P با نقاط P افزای از $[a, b]$ را تشکیل می‌دهند.]

۱۷. قضیه ۷.۱ (پایائی تحت انتقال) را ثابت کنید.

[داهنمائی: هرگاه $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ افزای از $[a, b]$ باشد آنگاه $P' = \{x_0 + c, x_1 + c, \dots, x_n + c\}$ افزای از $[a + c, b + c]$ خواهد بود.]

۱۶.۱ انتگرال توابع کلیتر

انتگرال $\int_a^b s(x)dx$ موقعی که s تابعی پله‌ای می‌باشد تعریف شده است. در این بخش تعریف $\int_a^b f(x)dx$ را طوری تنظیم می‌کنیم که برای توابع کلیتر f بکار خواهد رفت. تعریف بگونه‌ای ساخته می‌شود که انتگرال حاصل کلیه خواص مندرج در بخش ۱۳.۱ را دارد.



شکل ۳۰.۱ تقریب تابع f از بالا و پائین بوسیله توابع پله‌ای.

طرز عمل تا حدودی ادامه روش ارشمیدس است که در بالا در بخش ۳.۱ تشریح شد. نحوه کار بطور ساده چنین است: با تقریب تابع f از پائین و از بالا بوسیله توابع پله‌ای، بصورتی که شکل ۳۰.۱ پیشنهاد می‌کند، آغاز بکار می‌کنیم. یعنی تابع پله‌ای دلخواهی، مثلاً s ، را طوری اختیار می‌کنیم که نمودار آن پائین نمودار f باشد، و نیز تابع پله‌ای دلخواهی، همچون t ، را قسمی انتخاب می‌کنیم که نمودار آن بالای f قرار گیرد. بعد دسته همه اعداد $\int_a^b s(x)dx$ و $\int_a^b t(x)dx$ را که بازای کلیه انتخابهای ممکن s و t بدست آمده‌اند در نظر می‌گیریم. در حالت کلی، بنا بر قضیه مقایسه‌ای، داریم

$$\int_a^b s(x)dx < \int_a^b t(x)dx.$$

هرگاه انتگرال f بخواهد از قضیه مقایسه‌ای پیروی کند آنگاه باید چنان عددی باشد که

بازای هر جفت تابع تقریب‌کننده s و t میان $\int_a^b s(x)dx$ و $\int_a^b t(x)dx$ قرارگیرد. چنانچه فقط یک عدد با این خاصیت وجود داشته باشد انتگرال f را مساوی این عدد تعریف خواهیم کرد.

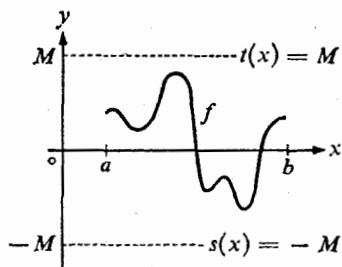
فقط یک موضوع هست که می‌تواند در این کار اشکال تولید کند و در همان قدم اول ظاهر می‌شود. متأسفانه امکان اینکه هر تابع را بشود از بالا و از پایین بوسیله توابع پله‌ای تخمین زد میسر نیست. مثلاً تابع f که با این معادلات داده شده:

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0; f(0) = 0$$

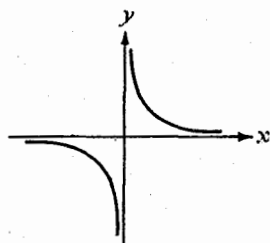
بازای کلیه x ‌های حقیقی تعریف شده است لکن f را نمی‌توان بر هر بازه $[a, b]$ شامل مبدأ در محاصره توابع پله‌ای درآورد. این بدان خاطر است که f در مجاورت مبدأ مقادیر بزرگ دلخواه دارد یا، بقرول ما، f در هر همسایگی مبدأ بی‌کران می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۱.۱). از اینروست که ما ابتدا نظر خود را معطوف توابعی می‌کنیم که بر $[a, b]$ کراندار هستند، یعنی به آن توابعی مثل f که برای آن عددی چون $M > 0$ هست بطوری که بازای هر x در $[a, b]$

$$-M \leq f(x) \leq M. \quad (5.1)$$

از نظر هندسی نمودار چنین تابعی بین نمودارهای دو تابع پله‌ای ثابت s و t که بترتیب دارای مقادیر $-M$ و $+M$ اند قرار می‌گیرد. (ر.ک. شکل ۳۲.۱) در وضعیتی مثل این



شکل ۳۲.۱ یک تابع کراندار.



شکل ۳۱.۱ یک تابع بی‌کران.

می‌گوئیم f بوسیله M کراندار است. دو نامساوی (۵.۱) را می‌توان بصورت

$$|f(x)| \leq M$$

نیز نوشت.

با توجه به این نکته می‌توانیم برنامه‌ای را که در بالا تشریح شد بانجام رسانیده و تعریف انتگرال را تنظیم کنیم.

تعریف انتگرال یک تابع کراندار. فرض کنیم f تابعی باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده

و کراندار است. همچنین s و t توابع پله‌ای دلخواهی را نشان دهنده که بر $[a, b]$ تعریف شده‌اند بطوری که بازای هر x در $[a, b]$ ،

$$(۶.۱) \quad s(x) \leq f(x) \leq t(x).$$

هرگاه يك و فقط يك عدد I وجود داشته باشد که بازای هر جفت از توابع پله‌ای s و t صادق در (۶.۱) داشته باشیم

$$(۷.۱) \quad \int_a^b s(x) dx \leq I \leq \int_a^b t(x) dx,$$

آنگاه این عدد I را انتگرال f از a تا b می‌نامند و آن را بعلامت $\int_a^b f(x) dx$ یا f نشان می‌دهند. وقتی چنین I وجود داشته باشد گویند تابع f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است.

چنانچه $a < b$ تعریف می‌کنیم $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ مشروط بر آنکه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد. همچنین تعریف می‌کنیم $\int_a^a f(x) dx = 0$. اگر f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد می‌گوئیم انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد. تابع f را انتگرالده، اعداد a و b را حدود انتگرالگیری، و بازه $[a, b]$ را بازه انتگرالگیری می‌نامند.

۱۷.۱ انتگرالهای بالایی و پایینی

فرض کنیم f بر $[a, b]$ کراندار باشد. چنانچه s و t توابعی پله‌ای باشند که در (۶.۱) صدق کنند گوئیم s پایین f و t بالای f قرار دارد و می‌نویسیم $s \leq f \leq t$.

فرض کنیم S نمایشگر مجموعه کلیه اعداد $\int_a^b s(x) dx$ باشد که بازای همه توابع پله‌ای s که پائین f اند حاصل می‌شوند، و T مجموعه همه اعداد $\int_a^b t(x) dx$ باشد که بازای کلیه توابع پله‌ای t که بالای f اند بدست می‌آیند. یعنی فرض می‌کنیم

$$S = \left\{ \int_a^b s(x) dx \mid s \leq f \right\}, T = \left\{ \int_a^b t(x) dx \mid f \leq t \right\}.$$

هر دو مجموعه S و T ، بدلیل کراندار بودن f ، ناتهی‌اند. همچنین، اگر $s \leq f \leq t$ ، $\int_a^b s(x) dx \leq \int_a^b t(x) dx$ پس هر عدد در S از هر عدد در T کوچکتر است. لذا، طبق قضیه ۳۴.۳، S دارای سوپرمم و T صاحب اینفیم خواهد بود و اینها را نامساویهای

$$\int_a^b s(x) dx \leq \sup S \leq \inf T \leq \int_a^b t(x) dx,$$

بازای هر s و t صادق در $s \leq f \leq t$ ، صدق می‌کنند. این نشان می‌دهد که هر دو عدد $\sup S$ و $\inf T$ در (۷.۱) صادقند. بنابراین، f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $\sup S = \inf T$ ، که در این حالت داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \sup S = \inf T.$$

عدد $\sup S$ انتگرال پائینی f خوانده شده و با $I(f)$ نموده می شود. عدد $\inf T$ را انتگرال بالائی f می نامند و با $\bar{I}(f)$ نشان می دهند. لذا داریم

$$I(f) = \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx \mid s \leq f \right\}, \quad \bar{I}(f) = \inf \left\{ \int_a^b t(x) dx \mid f \leq t \right\}.$$

استدلال پیشگفته قضیه زیر را ثابت خواهد کرد.

قضیه ۹.۱. هر تابع f که بر $[a, b]$ کراندار باشد دارای انتگرال پائینی $I(f)$ و انتگرال بالائی $\bar{I}(f)$ است که در نامساویهای

$$\int_a^b s(x) dx \leq I(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x) dx,$$

بازای کلیه توابع پله ای s و t که $f \leq t$ و $s \leq f$ صدق می کنند. تابع f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر انتگرالهای بالائی و پائینی آن مساوی باشند، که دراین حالت خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x) dx = I(f) = \bar{I}(f).$$

۱۸.۱ مساحت مجموعه عرضی بیان شده بوسیله انتگرال

مفهوم مساحت در بخش ۶.۱ بطور اصل موضوعی بعنوان تابعی مجموعه ای که دارای خواصی است معرفی شد. از این خواص ثابت کردیم که مساحت مجموعه عرضی یک تابع پله ای نامنفی برابر انتگرال تابع است. حال نشان می دهیم که همین مطلب برای هر تابع نامنفی انتگرالپذیر درست است. یادآور می شویم که مجموعه عرضی هر تابع نامنفی f روی بازه $[a, b]$ عبارت است از مجموعه کلیه نقاط (x, y) که در نامساویهای $0 \leq y \leq f(x)$ و $a \leq x \leq b$ صدق می کنند.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنیم f تابعی نامنفی و انتگرالپذیر بر بازه $[a, b]$ بوده و Q مجموعه عرضی f را و $[a, b]$ نشان دهد. در اینصورت Q اندازه پذیر است و مساحتش مساوی انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ خواهد بود.

برهان. S و T را دو ناحیه پله ای می انگاریم که در $S \subseteq Q \subseteq T$ صدق کنند. پس دو تابع پله ای s و t صادق در $s \leq f \leq t$ بر $[a, b]$ وجود دارند بطوری که

$$a(S) = \int_a^b s(x) dx \quad \text{و} \quad a(T) = \int_a^b t(x) dx$$

چون f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است پس عدد $I = \int_a^b f(x) dx$ تنها عددی است که در نامساویهای

$$\int_a^b s(x) dx \leq I \leq \int_a^b t(x) dx,$$

بازای کلیه توابع پله‌ای s و t که $t \leq f \leq s$ ، صدق می‌کند. بنابراین، این نیز تنها عددی است که در نامساویهای $a(S) \leq I \leq a(T)$ ، بازای کلیه ناحیه‌های پله‌ای S و T که $S \subseteq Q \subseteq T$ ، صادق می‌باشد. این، بنابر خاصیت اشباع، ثابت می‌کند که Q اندازه‌پذیر است و $a(Q) = I$.

فرض کنیم Q مجموعه عرضی قضیه ۱۰.۱ بوده و Q' مجموعه بقیه نقاطی باشد که از برداشتن نقاط نمودار f از Q بجا می‌ماند، یعنی فرض می‌کنیم

$$Q' = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y < f(x)\}.$$

استدلالی که در اثبات قضیه ۱۰.۱ بکار رفت همچنین نشان می‌دهد که Q' اندازه‌پذیر است و $a(Q') = a(Q)$. بنابراین، طبق خاصیت تفاضلی مساحت، مجموعه Q' اندازه‌پذیر می‌باشد و

$$a(Q - Q') = a(Q) - a(Q') = 0.$$

بعبارت دیگر، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱۱.۱. فرض کنیم f تابعی نامنفی و انتگرالپذیر بر بازه $[a, b]$ باشد. در اینصورت نمودار f ، یعنی مجموعه $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y = f(x)\}$ ، اندازه‌پذیر بوده و مساحتی برابر ۰ دارد.

۱۹.۱ تذکرات غیرصوری در باب نظریه و فن انتگرالگیری

در این مرحله دو سؤال اساسی مطرح می‌شوند: (۱) از توابع کراندار کدامها انتگرالپذیرند؟ (۲) بفرض اینکه تابع f انتگرالپذیر باشد چگونه انتگرالش را حساب کنیم؟

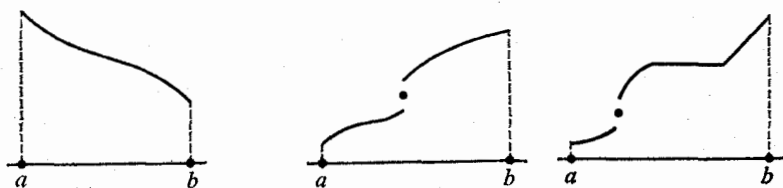
سؤال اول تحت نام «نظریه انتگرالگیری» و سؤال دوم با اسم «فن انتگرالگیری» مطرح می‌شود. پاسخ کامل به سؤال (۱) از حوصله یک درس مقدماتی خارج است و در این کتاب داده نخواهد شد. بجای آن جوابهای ناقصی را که فقط مستلزم ایده‌های مقدماتی هستند خواهیم داد.

ابتدا رده مهمی از توابع موسوم به توابع یکنوا را معرفی می‌کنیم. در بخش بعد این توابع را تعریف کرده و تعدادی مثال می‌آوریم. سپس ثابت می‌کنیم که کلیه توابع یکنوای کراندار انتگرالپذیرند. خوشبختانه اغلب توابعی که در عمل ظاهر می‌شوند یکنوا یا مجموعه‌هایی از توابع یکنوا هستند، بدین لحاظ است که نتایج این نظریه انتگرالگیری ظریف کاملاً جامع خواهند بود.

بحث درباره «فن انتگرالگیری» از بخش ۲۳.۱ آغاز می‌شود، یعنی جایی که انتگرال $\int_a^b x^p dx$ را، وقتی p عدد صحیح مثبتی است، محاسبه می‌کنیم. سپس خواص عمومی انتگرال، نظیر خطی بودن و جمعپذیری، را عرضه می‌نمائیم، و نشان می‌دهیم که چگونه این خواص ما را کمک می‌کنند تا دانشمان را در باب انتگرالهای توابعی خاص توسعه دهیم.

۲۰.۱ توابع یکنوا و قطعه قطعه یکنوا. تعاریف و مثالها

تابع f را بر مجموعه S صعودی خوانند اگر که برای هر جفت نقطه x و y در S که $x < y$ داشته باشیم $f(x) \leq f(y)$. اگر بازای هر x و y در S که $x < y$ نامساوی اکید $f(x) < f(y)$ برقرار باشد تابع بر S اکیداً صعودی نام دارد. بهمین نحو f را بر S نزولی نامند اگر که بازای هر x و y در S که $x < y$ داشته باشیم $f(x) \geq f(y)$. هرگاه



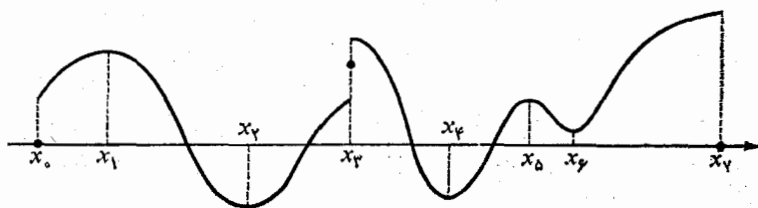
اکیداً نزولی

اکیداً صعودی

صعودی

شکل ۳۳.۱ توابع یکنوا

بازای هر x و y در S که $x < y$ داشته باشیم $f(x) > f(y)$ آنگاه f بر S اکیداً نزولی نام دارد. یک تابع بر S یکنوا خوانده می شود اگر که بر S صعودی یا بر S نزولی باشد. اصطلاح اکیداً یکنوا بدین معنی است که f بر S اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. معمولاً مجموعه S مورد نظر یا بازه ای باز است یا بازه ای بسته. مثالهایی در شکل ۳۳.۱ نموده شده اند.



شکل ۳۴.۱ يك تابع قطعه قطعه یکنوا.

تابع f را بر یک بازه قطعه قطعه یکنوا خوانند اگر که نمودار آن از تعدادی متناهی قطعات یکنوا تشکیل شده باشد. یعنی f بر $[a, b]$ قطعه قطعه یکنوا است اگر که افرای چون P از $[a, b]$ وجود داشته باشد بطوری که f بر هر زیر بازه P یکنوا باشد. بخصوص، توابع پله ای قطعه قطعه یکنوا هستند، همینطور کلیه مثالهای ناموده شده در شکلهای ۳۳.۱ و ۳۴.۱.

مثال ۱. تابعهای توانی. در صورتی که p عدد صحیح مثبتی باشد نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\text{اگر } 0 \leq x < y, \text{ آنگاه } x^p < y^p$$

که باسانی باستقرای ریاضی ثابت می شود. این نشان می دهد که تابع توانی f ، که بازای

هر x حقیقی با معادله $x^p = f(x)$ تعریف می‌شود، بر قسمت نامنفی محور حقیقی اکیداً صعودی است. مضافاً این تابع بر قسمت منفی محور حقیقی اکیداً یکنوا می‌باشد (نزولی است اگر p زوج باشد و صعودی است در صورتی که p فرد باشد). بنابراین، f بر هر بازهٔ متناهی قطعه قطعه یکنوا خواهد بود.

مثال ۲. تابع دیشهٔ دوم. فرض می‌کنیم بازای $x \geq 0$ ، $f(x) = \sqrt{x}$. این تابع بر قسمت نامنفی محور حقیقی اکیداً صعودی است. درواقع اگر $0 \leq x < y$ خواهیم داشت

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}};$$

پس $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$.

مثال ۳. نمودار تابع g که با معادلهٔ زیر تعریف شده است:

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r$$

یک نیم‌دایره بشعاع r است. این تابع بر بازهٔ $0 \leq x \leq r$ اکیداً صعودی و بر بازهٔ $-r \leq x \leq 0$ اکیداً نزولی می‌باشد. پس g بر $[-r, r]$ قطعه قطعه یکنوا خواهد بود.

۲۱.۱ انتگرالپذیری توابع یکنوای کراندار

اهمیت توابع یکنوا در نظریهٔ انتگرالگیری بخاطر قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱۳.۱. هرگاه f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ یکنوا باشد آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است.

برهان. قضیه را در مورد توابع صعودی ثابت می‌کنیم. اثبات برای توابع نزولی به‌همین نحو است. فرض کنیم f صعودی بوده و $I(f)$ و $\bar{I}(f)$ بترتیب نمایشگر انتگرالهای پائینی و بالائی باشند. ثابت می‌کنیم که $I(f) = \bar{I}(f)$.

فرض کنیم n عدد صحیح مثبتی بوده و دو تابع پله‌ای تقریب‌کنندهٔ خاص s_n و t_n را با این صورت می‌سازیم: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ را افزایی از $[a, b]$ به n زیر-بازهٔ مساوی می‌انگاریم، یعنی زیربازه‌های $[x_{k-1}, x_k]$ که بازای هر k ، $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$ حال s_n و t_n را با دستورهای زیر تعریف می‌کنیم:

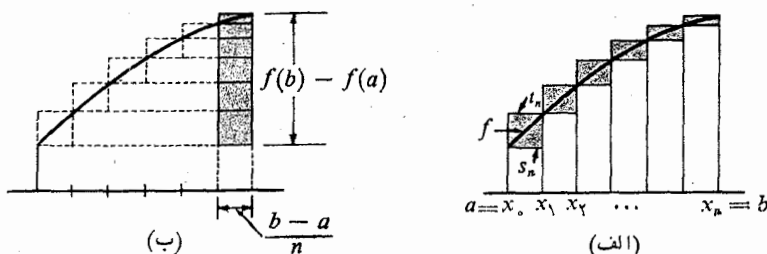
$$t_n(x) = f(x_k), \quad s_n(x) = f(x_{k-1}), \quad x_{k-1} < x < x_k$$

در نقاط تقسیم s_n و t_n را چنان تعریف می‌کنیم که روابط $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ در سراسر $[a, b]$ حفظ شوند. مثالی در شکل ۳۵.۱ (الف) نشان داده شده است. برای این توابع پله‌ای داریم

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \\
 &= \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{n},
 \end{aligned}$$

که آخرین معادله نتیجه‌ای است از خاصیت توی هم روی مجموعه‌های متناهی. این رابطه آخری تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. تفاضل $\int_a^b t_n - \int_a^b s_n$ مساوی مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۳۵.۱ (الف) است. با لغزش مستطیل‌ها به راست طوری که بر قاعده مشترکی قرار گیرند [مثل شکل ۳۵.۱ (ب)]، ملاحظه می‌کنیم که اینها مستطیلی بقاعده $(b-a)/n$ و ارتفاع $f(b) - f(a)$ را پر می‌کنند؛ بنابراین، مجموع مساحت آنها C/n است که $C = (b-a)[f(b) - f(a)]$.



شکل ۳۵.۱ برهان انتگرالپذیری يك تابع صعودی.

حال رابطه پیشگفته را بشکل

$$(۸.۱) \quad \int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n}$$

می‌نویسیم. انتگرال‌های پائینی و بالائی f در نامساویهای

$$\int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad \text{و} \quad \int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n$$

صدق می‌کنند. چنانچه اولین دسته از نامساویها را در ۱ - ضرب و حاصل را به دسته دوم بیفزائیم خواهیم داشت

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n.$$

با استفاده از (۸.۱) و رابطه $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$ بدست می‌آوریم که بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$,

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \frac{C}{n}.$$

بنابراین، طبق قضیه ۳۱، باید داشته باشیم $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. این ثابت می‌کند که f بر $[a, b]$

انتگرالپذیر است.

۲۲.۱ محاسبه انتگرال یک تابع یکنوای کراندار

برهان قضیه ۱۲.۱ نه فقط نشان می‌دهد که انتگرال یک تابع صعودی کراندار وجود دارد بلکه پیشنهاد کننده روشی برای محاسبه مقدار انتگرال نیز خواهد بود. این روش در قضیه زیر تشریح شده است.

قضیه ۱۳.۱. فرض کنیم f بر بازه بسته $[a, b]$ صعودی باشد. برای $n = 0, 1, \dots, n$ بازای k قرارداد می‌دهیم $x_k = a + k(b-a)/n$. هرگاه I عددی باشد که در نامساویهای

$$(9.1) \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ صدق کند آنگاه $I = \int_a^b f(x) dx$ برهان. فرض کنیم s_n و t_n توابع پله‌ای تقریب کننده خاصی باشند که از تقسیم بازه $[a, b]$ به n قسمت مساوی، بصورتی که در برهان قضیه ۱۲.۱ وصف شده، حاصل شده‌اند. در اینصورت نامساویهای (۹.۱) مین‌آیند که بازای هر $n \geq 1$

$$\int_a^b s_n \leq I \leq \int_a^b t_n.$$

اما انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ در همان نامساویهایی که برای I برقرارند صدق می‌کند. با استفاده از معادله (۸.۱) ملاحظه می‌کنیم که بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{C}{n}.$$

بنابراین، طبق قضیه م. ۳.۱، همانطور که حکم شده خواهیم داشت $I = \int_a^b f(x) dx$ استدلالی مشابه، برهانی را برای قضیه متناظر اما در مورد توابع نزولی بدست می‌دهد.

قضیه ۱۴.۱. فرض کنیم f بر $[a, b]$ نزولی باشد. بازای $n = 0, 1, \dots, n$ قرارداد می‌دهیم $x_k = a + k(b-a)/n$. هرگاه I عددی باشد که در نامساویهای

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ صدق کند آنگاه $I = \int_a^b f(x) dx$

۲۳.۱ محاسبه انتگرال $\int_a^b x^p dx$ وقتی p عدد صحیح مثبتی باشد

برای آنکه فایده قضیه ۱۳.۱ را نشان دهیم انتگرال $\int_a^b x^p dx$ را زمانی که $b > 0$ و p

عدد صحیح مثبتی می باشد حساب می کنیم. این انتگرال وجود دارد چونکه انتگرالده بر $[0, b]$ کراندار و صعودی است.

قضیه ۱۵.۱. اگر p عدد صحیح مثبتی بوده و $b > 0$ خواهیم داشت

$$\int_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

برهان. با نامساویهای

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^n k^p,$$

که برای هر دو عدد صحیح $n \geq 1$ و $p \geq 1$ معتبرند، شروع می کنیم. این نامساویها را می توان با سانی باستقرای ریاضی ثابت کرد. (برهانی در تمرین ۱۳ از بخش م ۱۵.۴ مختصراً شرح داده شده است.) ضرب این نامساویها در b^{p+1}/n^{p+1} این نتیجه را به ما می دهد که

$$\frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{kb}{n}\right)^p.$$

اگر $f(x) = x^p$ و برای $n, 1, 2, \dots, k = 0$ قرار دهیم $x_k = kb/n$ نامساویهای بالا باین صورت در می آیند:

$$\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

بنابراین، $f(x) = x^p$ ، و $a = 0$ ، و $I = b^{p+1}/(p+1)$ در نامساویهای (۹.۱) قضیه ۱۳.۱ صدق می کنند. پس نتیجه می شود که $\int_0^b x^p dx = b^{p+1}/(p+1)$.

۲۴.۱ خواص اساسی انتگرال

از تعریف انتگرال می توان خواص زیر را نتیجه گرفت. برهانها در بخش ۲۷.۱ داده می شوند.

قضیه ۱۶.۱. خطی بودن نسبت به انتگرالده. اگر f و g هر دو بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشند $c_1 f + c_2 g$ نیز برای هر جفت ثابت c_1 و c_2 چنین است. بعلاوه داریم

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

توجه: خاصیت خطی را می توان با استفاده از استقرای ریاضی این طور تعمیم داد: هر گاه $f_1, \dots, f_n$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشند آنگاه $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ نیز برای هر $c_1, \dots, c_n$ حقیقی چنین است و

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x) dx.$$

قضیه ۱۷.۱. جمعپذیری نسبت به بازه انتگرالتگیری. اگر از سه انتگرال زیر دوتا وجود داشته باشند سومی نیز وجود دارد و خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

توجه: بویژه، هرگاه f بر $[a, b]$ و بر $[b, c]$ یکنوا باشد، آنگاه هر دو انتگرال $\int_a^b f$ و $\int_b^c f$ وجود دارند، پس $\int_a^c f$ نیز وجود داشته و مساوی مجموع دو انتگرال دیگر خواهد بود.

قضیه ۱۸.۱. پایایی تحت انتقال. هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد آنگاه بازای هر عدد حقیقی c داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx.$$

قضیه ۱۹.۱. انبساط یا انقباض بازه انتگرالتگیری. هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد آنگاه بازای هر $k \neq 0$ حقیقی داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

توجه: در هر دو قضیه ۱۸.۱ و ۱۹.۱ وجود یکی از انتگرالها موجودیت دیگری را ایجاب می‌کند. وقتی $k = -1$ قضیه ۱۹.۱ مبین خاصیتی است بنام خاصیت انعکاسی.

قضیه ۲۰.۱. قضیه مقایسه‌ای. هرگاه f و g هر دو بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و بازای هر x در $[a, b]$ ، $g(x) \leq f(x)$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

حالت خاص مهمی از قضیه ۲۰.۱ زمانی رخ می‌دهد که بازای هر x ، $g(x) = 0$. در این حالت قضیه می‌گوید که هرگاه همه جا بر $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، آنگاه $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. عبارت دیگر، هر تابع نامنفی از انتگرال نامنفی برخوردار است. همچنین می‌توان نشان داد که هرگاه نامساوی اکید $g(x) < f(x)$ را بازای هر x در $[a, b]$ داشته باشیم آنگاه همین نامساوی اکید برای انتگرالها برقرار است، لکن آوردن اثبات آن در این مرحله آسان نخواهد بود.

در فصل ۵ روشهای گوناگون محاسبه مقدار یک انتگرال را بدون نیاز به استفاده از تعریف در هر حالت مورد بحث قرار خواهیم داد. لکن این روشها فقط برای عددها نسبتاً قلیلی از توابع قابل اجرا بوده و در مورد اکثر توابع انتگرالپذیر مقدار عددی واقعی انتگرال را فقط می شود تخمین زد. این کار معمولاً این طور صورت می گیرد که انتگرالده را از بالا و پائین به توابعی پله ای یا توابع ساده دیگری که انتگرالهای آنها دقیقاً قابل ارزیابی باشند نزدیک می کنند. بعد قضیه مقایسه ای مورد استفاده قرار می گیرد تا تقریبهای متناظری برای انتگرال تابع مورد نظر بدست آیند. این فکر در فصل ۷ بطور کاملتری پی گیری خواهد شد.

۲۵.۱ انتگرالگیری از چند جمله ایها

در بخش ۲۳.۱ دستور انتگرالگیری

$$(۱۰.۱) \quad \int_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

را برای $b > 0$ و هر عدد صحیح و مثبت p ثابت کردیم. این دستور برای $b = 0$ نیز معتبر است زیرا که هر دو طرف آن مساوی صفر می باشند. می توان قضیه ۱۹.۱ را بکار برده نشان داد که (۱۰.۱) برای b های منفی هم برقرار است. کافی است در قضیه ۱۹.۱ k را مساوی ۱ - بگیریم تا چنین بدست آید:

$$\int_0^{-b} x^p dx = - \int_0^b (-x)^p dx = (-1)^{p+1} \int_0^b x^p dx = \frac{(-b)^{p+1}}{p+1},$$

که نشانگر آن است که (۱۰.۱) برای b های منفی برقرار می باشد. حال خاصیت جمع پذیری $\int_a^b x^p dx = \int_a^b x^p dx - \int_a^a x^p dx$ به دستور کتیر

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

منجر می شود، که برای کلیه a و b های حقیقی و هر عدد صحیح $p \geq 0$ معتبر خواهد بود. گاهی علامت مخصوص

$$P(x) \Big|_a^b$$

برای نمایش تفاضل $P(b) - P(a)$ بکار برده می شود. لذا دستور پیشگفته را می توان باین صورت هم نوشت:

$$\int_a^b x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

این دستور، همراه با خاصیت خطی، ما را قادر می سازد تا از هر چند جمله ای انتگرال

بگیریم. مثلاً، برای محاسبه انتگرال $\int_1^3 (x^2 - 3x + 5) dx$ ، انتگرال هر جمله را یافته و بعد نتایج را بهم می‌افزایم. لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_1^3 (x^2 - 3x + 5) dx &= \int_1^3 x^2 dx - 3 \int_1^3 x dx + 5 \int_1^3 dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 - 3 \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^3 + 5x \Big|_1^3 = \frac{3^3 - 1^3}{3} - 3 \frac{3^2 - 1^2}{2} + 5 \frac{3^1 - 1^1}{1} \\ &= \frac{26}{3} - 12 + 10 = \frac{20}{3}.\end{aligned}$$

بطور کلی، برای محاسبه انتگرال هر چند جمله‌ای، جمله به جمله انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n c_k x^k dx = \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^n c_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

می‌توانیم از توابع پیچیده‌تری که از ترکیب چند جمله‌ایهای مختلف درست شده‌اند نیز انتگرال بگیریم. برای مثال، انتگرال $\int_0^1 x(2x-1) dx$ را در نظر می‌گیریم. انتگرالده، بعلت وجود علامت قدر مطلق، چند جمله‌ای نیست. لکن، با توجه به علامت $x(2x-1)$ ، می‌توانیم بازه $[0, 1]$ را به دو زیر بازه طوری تقسیم کنیم که انتگرالده در هر یک از آنها چند جمله‌ای بشود. وقتی x از ۰ تا ۱ تغییر کند حاصلضرب $x(2x-1)$ در $x = \frac{1}{2}$ تغییر علامت می‌دهد؛ این حاصلضرب اگر $0 < x < \frac{1}{2}$ منفی است و چنانچه

$\frac{1}{2} < x < 1$ مثبت می‌باشد. بنابراین می‌توانیم از خاصیت جمع‌پذیری استفاده کرده بنویسیم

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x(2x-1)| dx &= - \int_0^{1/2} x(2x-1) dx + \int_{1/2}^1 x(2x-1) dx \\ &= \int_0^{1/2} (x - 2x^2) dx + \int_{1/2}^1 (2x^2 - x) dx \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

۲۶.۱ تمرینات

هر یک از انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll}\int_{-3}^3 x^2 dx \cdot 2 & \int_0^3 x^2 dx \cdot 1 \\ \int_{-2}^2 2x^2 dx \cdot 6 & \int_0^2 2x^2 dx \cdot 3\end{array}$$

$$\cdot \int_0^1 \Delta t^4 dt \cdot ۵$$

$$\cdot \int_{-1}^1 \Delta t^4 dt \cdot ۶$$

$$\cdot \int_0^1 (\Delta x^4 - 4x^3) dx \cdot ۷$$

$$\cdot \int_{-1}^1 (\Delta x^4 - 4x^3) dx \cdot ۸$$

$$\cdot \int_{-1}^2 (t^2 + 1) dt \cdot ۹$$

$$\cdot \int_2^3 (3x^2 - 4x + 2) dx \cdot ۱۰$$

$$\cdot \int_0^{1/2} (8t^3 + 6t^2 - 2t + 5) dt \cdot ۱۱$$

$$\cdot \int_{-2}^4 (u-1)(u-2) du \cdot ۱۲$$

$$\cdot \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx \cdot ۱۳$$

$$\cdot \int_0^{-1} (x+1)^2 dx \cdot ۱۴$$

$$\cdot \int_0^2 (x-1)(3x-1) dx \cdot ۱۵$$

$$\cdot \int_0^2 |(x-1)(3x-1)| dx \cdot ۱۶$$

$$\cdot \int_0^3 (2x-5)^3 dx \cdot ۱۷$$

$$\cdot \int_{-3}^3 (x^2-3)^3 dx \cdot ۱۸$$

$$\cdot \int_0^5 x^2(x-5)^4 dx \cdot ۱۹$$

$$\cdot \int_{-2}^{-4} (x+4)^{10} dx \cdot ۲۰$$

[داهنمائی: قضیه ۱۸.۱]

۲۱. کلیه مقادیر c را بیابید که برای آنها

$$\int_0^c x(1-x) dx = 0 \quad (\text{الف}) \quad , \quad \int_0^c |x(1-x)| dx = 0 \quad (\text{ب})$$

۲۲. هریک از انتگرالهای زیر را حساب کنید. نمودار f را در هر حالت بکشید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x \leq 1 \text{ اگر} \\ 2-x & , 1 \leq x \leq 2 \text{ اگر} \end{cases} \quad \int_0^2 f(x) dx \quad \text{که در آن} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq c \text{ اگر} \\ c \frac{1-x}{1-c} & , c \leq x \leq 1 \text{ اگر} \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx \quad \text{که در آن} \quad (\text{ب})$$

و c عدد حقیقی ثابتی بین ۰ و ۱ است.

۲۳. چندجمله‌ای درجه دوم P را چنان بیابید که $P(0) = P(1) = 0$ و $\int_0^1 P(x) dx = 1$.

۲۴. چندجمله‌ای درجه سوم P را چنان بیابید که $P(0) = P(-2) = 0$ ، $P(1) = 15$ و $\int_{-2}^3 P(x) dx = 4$.

تمرینات اختیاری

۲۵. فرض می‌کنیم f تابعی باشد که وقتی قلمرو آن حاوی x است $-x$ را نیز دربردارد.

می‌گوئیم f یک تابع زوج است اگر که بازای هر x در قلمرو آن $f(-x) = f(x)$.

و یک تابع فرد است اگر که بازای هر x در قلمرو آن $f(-x) = -f(x)$.

اگر f بر $[0, b]$ انتگرالپذیر باشد ثابت کنید که

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & \int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx, \quad f, \text{ زوج بودن} \\ \text{(ب)} \quad & \int_{-b}^b f(x) dx = 0, \quad f, \text{ فرد بودن} \end{aligned}$$

۲۶. دستور زیر را با استفاده از قضایای ۱۸.۱ و ۱۹.۱ نتیجه بگیرید:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx.$$

۲۷. قضایای ۱۸.۱ و ۱۹.۱ تعمیم مشترکی برای انتگرال $\int_a^b f(Ax+B) dx$ پیشنهاد می‌کنند. این دستور پیشنهادی را حدس زده و آن را یاری قضایای ۱۸.۱ و ۱۹.۱ ثابت کنید. حالت $A=0$ را نیز مورد بحث قرار دهید.

۲۸. با استفاده از قضایای ۱۸.۱ و ۱۹.۱ دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_a^b f(c-x) dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x) dx.$$

۲۷.۱ برهانهای خواص اساسی انتگرال

این بخش حاوی برهانهای آن دسته از خواص اساسی انتگرال است که در قضایای ۱۶.۱ تا ۲۵.۱ بخش ۲۴.۱ مطرح شدند. از این مطالب بارها استفاده می‌کنیم که هر تابع f که بر بازه‌ای چون $[a, b]$ کراندار باشد دارای انتگرال پائینی $I_-(f)$ و انتگرال بالایی $I_+(f)$ است که با روابط زیر داده می‌شوند:

$$I_-(f) = \sup \left\{ \int_a^b s \mid s \leq f \right\}, \quad I_+(f) = \inf \left\{ \int_a^b t \mid t \leq f \right\},$$

که در آنها s و t بترتیب نشانگر توابع پله‌ای دلخواهی پائین و بالای f می‌باشند. از قضیه ۹.۱ می‌دانیم که f انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $I_-(f) = I_+(f)$ ، که در این حالت مقدار انتگرال f مقدار مشترک انتگرالهای بالایی و پائینی خواهد بود.

برهان خاصیت خطی (قضیه ۱۶.۱). خاصیت خطی را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$\text{(الف)} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

$$\text{(ب)} \quad \int_a^b c f = c \int_a^b f.$$

برای اثبات (الف) قرار می‌دهیم $I(f) = \int_a^b f$ و $I(g) = \int_a^b g$. ثابت خواهیم کرد $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

فرض کنیم s_1 و s_2 بترتیب توابع پله‌ای دلخواهی پائین f و g باشند. چون f و g انتگرالپذیرند داریم

$$I(f) = \sup \left\{ \int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f \right\}, \quad I(g) = \sup \left\{ \int_a^b s_2 \mid s_2 \leq g \right\}.$$

همچنین بنا بر خاصیت جمعپذیری سوپریم (قضیه ۳۳.۴) خواهیم داشت

$$(11.1) \quad I(f) + I(g) = \sup \left\{ \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 \mid s_1 \leq f, s_2 \leq g \right\}.$$

اما، هرگاه $f \leq g$ و $s_1 \leq g$ و $s_2 \leq g$ آنگاه مجموع $s = s_1 + s_2$ تابعی پله‌ای پائین $f + g$ است و داریم

$$\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 = \int_a^b s \leq I(f + g).$$

بنا بر این عدد $I(f + g)$ یک کران بالائی برای مجموعه‌ای است که سمت راست (۱۱.۱) ظاهر شده است. این کران بالائی نمی‌تواند از کوچکترین کران بالائی مجموعه کمتر باشد پس داریم

$$(12.1) \quad I(f) + I(g) \leq I(f + g).$$

بهین نحو اگر از روابط

$$I(g) = \inf \left\{ \int_a^b t_2 \mid g \leq t_2 \right\} \quad \text{و} \quad I(f) = \inf \left\{ \int_a^b t_1 \mid f \leq t_1 \right\}$$

که در آنها t_1 و t_2 بترتیب توابع پله‌ای دلخواهی بالای f و g هستند استفاده کنیم نامساوی

$$(13.1) \quad I(f + g) \leq I(f) + I(g)$$

را بدست می‌آوریم. نامساویهای (۱۲.۱) و (۱۳.۱) با هم نشان می‌دهند که $I(f + g) = \bar{I}(f + g) = I(f) + I(g)$. بنا بر این $f + g$ انتگرالپذیر است و رابطه (الف) برقرار خواهد بود.

رابطه (ب) در حالتی که $c = 0$ بدیهی است. چنانچه $c > 0$ توجه می‌کنیم که هر تابع پله‌ای s_1 پائین cf بشکل $s_1 = cs$ است که در آن s تابعی پله‌ای پائین f می‌باشد. بهین نحو هر تابع پله‌ای t_1 بالای cf بشکل $t_1 = ct$ است که در آن t تابعی پله‌ای بالای f می‌باشد. بنا بر این خواهیم داشت

$$I(cf) = \sup \left\{ \int_a^b s_1 \mid s_1 \leq cf \right\} = \sup \left\{ c \int_a^b s \mid s \leq f \right\} = cI(f)$$

و

$$I(cf) = \inf \left\{ \int_a^b t_1 \mid cf \leq t_1 \right\} = \inf \left\{ c \int_a^b t \mid f \leq t \right\} = cI(f).$$

پس $I(cf) = \bar{I}(cf) = cI(f)$. در اینجا از این خواص سوپریم و اینفیم استفاده کرده‌ایم:

(۱۴.۱)

$$\sup\{cx \mid x \in A\} = c \sup\{x \mid x \in A\}, \inf\{cx \mid x \in A\} = c \inf\{x \mid x \in A\}$$

که برای $c > 0$ برقرار هستند. این بحث (ب) را در صورتی که $c > 0$ ثابت می‌کند. چنانچه $c < 0$ برهان (ب) اساساً مثل قبل است جز آنکه هر تابع پله‌ای s_1 پائین cf بشکل $s_1 = ct$ می‌باشد که در آن t یک تابع پله‌ای بالای f است، و هر تابع پله‌ای t_1 بالای cf بشکل $t_1 = cs$ خواهد بود که در آن s یک تابع پله‌ای پائین f می‌باشد. همچنین، بجای (۱۴.۱)، از روابط

$$\inf\{cx \mid x \in A\} = c \sup\{x \mid x \in A\} \text{ و } \sup\{cx \mid x \in A\} = c \inf\{x \mid x \in A\}$$

که برای $c < 0$ برقرارند، استفاده می‌کنیم. حال داریم

$$\begin{aligned} I(cf) &= \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \leq cf\right\} = \sup\left\{c \int_a^b t \mid f \leq t\right\} \\ &= c \inf\left\{\int_a^b t \mid f \leq t\right\} = cI(f). \end{aligned}$$

بهین نحو در می‌یابیم که $I(cf) = cI(f)$. بنابراین، (ب) برای هر c حقیقی برقرار خواهد بود.

برهان جمعپذیری نسبت به بازه انتگرالگیری (قضیه ۱۷.۱). فرض کنیم $a < b < c$ و دو انتگرال $\int_a^b f$ و $\int_b^c f$ وجود داشته باشند. همچنین $I(f)$ و $\bar{I}(f)$ مین انتگرالهای پائینی و بالائی f روی بازه $[a, c]$ باشند. ثابت می‌کنیم که

$$(15.1) \quad I(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

چنانچه s تابع پله‌ای دلخواهی بر $[a, c]$ و پائین f باشد داریم

$$\int_a^c s = \int_a^b s + \int_b^c s.$$

بعکس، هرگاه s_1 و s_2 بترتیب توابعی پله‌ای بر $[a, b]$ و $[b, c]$ پائین f باشند، آنگاه تابع s که بر $[a, b]$ مساوی s_1 و بر $[b, c]$ مساوی s_2 است یک تابع پله‌ای بر $[a, c]$ پائین f خواهد بود که برای آن داریم

$$\int_a^c s = \int_a^b s_1 + \int_b^c s_2.$$

بنابراین، طبق خاصیت جمعپذیری سوپریم (قضیه ۳۳.۱)، خواهیم داشت

$$I(f) = \sup \left\{ \int_a^c s \mid s \leq f \right\} = \sup \left\{ \int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f \right\} \\ + \sup \left\{ \int_b^c s_2 \mid s_2 \leq f \right\} = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

بهین نحو در می یابیم که

$$I(f) = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

که (۱۵.۱) را وقتی $a < b < c$ ثابت می کند. برهان در مورد هر آرایش دیگری از نقاط a و b و c بهین شکل است.

برهان خاصیت انتقالی (قضیه ۱۸.۱). فرض کنیم g تابعی باشد که بر بازه $[a+c, b+c]$ با معادله $g(x) = f(x-c)$ تعریف شده است. $I(g)$ و $\bar{I}(g)$ را نمایشگر انتگرالهای پائینی و بالائی g بر بازه $[a+c, b+c]$ می انگاریم. ثابت می کنیم که

$$(۱۶.۱) \quad I(g) = \bar{I}(g) = \int_a^b f(x) dx.$$

فرض کنیم s تابع پله ای دلخواهی بر بازه $[a+c, b+c]$ و پائین g باشد. در این صورت تابع s_1 که بر $[a, b]$ با معادله $s_1(x) = s(x+c)$ تعریف می شود تابعی پله ای بر $[a, b]$ پائین f خواهد بود. بعلاوه، هر تابع پله ای s_1 بر $[a, b]$ که پائین f باشد، بازای s پائین g ، از این شکل برخوردار است. همچنین، بنا بر خاصیت انتقالی در مورد انتگرالهای توابع پله ای، خواهیم داشت

$$\int_{a+c}^{b+c} s(x) dx = \int_a^b s(x+c) dx = \int_a^b s_1(x) dx.$$

بنا بر این داریم

$$I(g) = \sup \left\{ \int_{a+c}^{b+c} s \mid s \leq g \right\} = \sup \left\{ \int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f \right\} = \int_a^b f(x) dx.$$

بهین نحو $\bar{I}(g) = \int_a^b f(x) dx$ را بدست می آوریم که (۱۶.۱) را ثابت می کند.

برهان خاصیت انبساط (قضیه ۱۹.۱). فرض کنیم $k > 0$ و g را بر بازه $[ka, kb]$ با معادله $g(x) = f(x/k)$ تعریف می کنیم. فرض کنیم $I(g)$ و $\bar{I}(g)$ نشان دهنده انتگرالهای پائینی و بالائی g بر $[ka, kb]$ باشند. ثابت می کنیم که

$$(۱۷.۱) \quad I(g) = \bar{I}(g) = k \int_a^b f(x) dx.$$

فرض کنیم s تابع پله‌ای دلخواهی بر $[ka, kb]$ پائین g باشد. در این صورت تابع s_1 که بر $[a, b]$ با معادله $s_1(x) = s(kx)$ تعریف می‌شود یک تابع پله‌ای بر $[a, b]$ پائین f خواهد بود. بعلاوه، هر تابع پله‌ای s_1 که بر $[a, b]$ پائین f باشد از این شکل برخوردار است. همچنین، بنا بر خاصیت انبساط برای انتگرالهای توابع پله‌ای، داریم

$$\int_{ka}^{kb} s(x) dx = k \int_a^b s(kx) dx = k \int_a^b s_1(x) dx.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$I(g) = \sup \left\{ \int_{ka}^{kb} s \mid s \leq g \right\} = \sup \left\{ k \int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f \right\} = k \int_a^b f(x) dx.$$

بهین نحو $\bar{I}(g) = k \int_a^b f(x) dx$ را بدست می‌آوریم که (۱۷.۱) را در حالت $k > 0$ ثابت می‌کند. همین نوع اثبات را می‌توان برای وقتی $k < 0$ بکار برد.

برهان قضیه مقایسه‌ای (قضیه ۲.۱). فرض کنیم $f \leq g$ بر بازه $[a, b]$ باشد. s را تابع پله‌ای دلخواهی پائین g و t را تابع پله‌ای دلخواهی بالای f می‌انگاریم. در این صورت داریم $\int_a^b s \leq \int_a^b t$ ، و لذا قضیه ۳.۴ م. به ما این نتیجه را می‌دهد که

$$\int_a^b g = \sup \left\{ \int_a^b s \mid s \leq g \right\} \leq \inf \left\{ \int_a^b t \mid f \leq t \right\} = \int_a^b f.$$

این ثابت می‌کند که، چنانچه مطلوب است، $\int_a^b g \leq \int_a^b f$.

۲

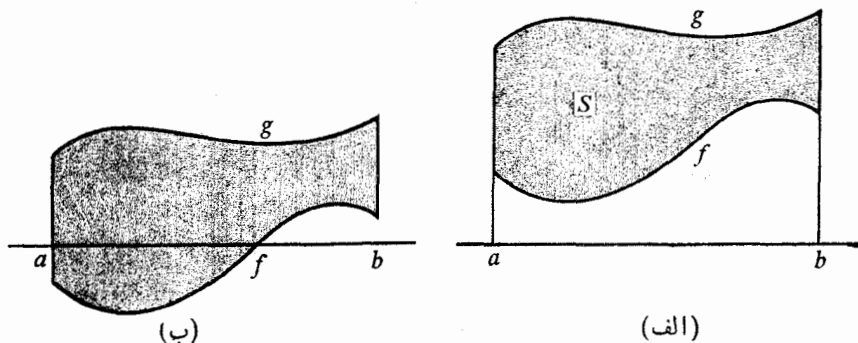
برخی از کاربردهای انتگرالگیری

۱.۲ مقدمه

در بخش ۱۸.۱ مساحت مجموعه عرضی یک تابع نامنفی را بصورت انتگرال بیان کردیم. در این فصل نشان خواهیم داد که مساحت‌های نواحی کلیتر را نیز می‌توان به شکل انتگرال بیان نمود. همچنین کاربرد‌های دیگر انتگرال را در رابطه با مفاهیمی چون حجم، کار، و میانگینها مورد بحث قرار می‌دهیم. بعد، در پایان فصل، به بررسی خواص تابع‌هایی خواهیم پرداخت که با انتگرالها تعریف می‌شوند.

۲.۲ مساحت ناحیه بین دو نمودار که بصورت انتگرال بیان شده است

اگر دو تابع f و g با نامساوی $f(x) \leq g(x)$ ، بازای هر x در بازه $[a, b]$ ، بهم مربوط



شکل ۱.۲ مساحت ناحیه بین دو نمودار که بصورت انتگرال بیان شده است:

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

شده باشند می نویسیم $f \leq g$ بر $[a, b]$ است. شکل ۱۰۲ دو مثال را نشان می دهد. چنانچه $f \leq g$ بر $[a, b]$ باشد مجموعه S مرکب از کلیه نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

$$f(x) \leq y \leq g(x), \quad a \leq x \leq b$$

را ناحیه بین نمودارهای f و g می خوانند. قضیه زیر به ما می گوید که چگونه مساحت S را بصورت انتگرال بیان کنیم.

قضیه ۱۰۲. فرض کنیم f و g بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $f \leq g$ بر $[a, b]$ باشد. دراینصورت ناحیه S بین نمودارهای آنها اندازه پذیر است و مساحتش $a(S)$ با انتگرال

$$(۱۰۲) \quad a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

داده می شود.

پرهان. ابتدا فرض می کنیم f و g ، مثل شکل ۱۰۲ (الف)، نامنفی باشند. G و F را مجموعه های زیر می انگاریم:

$$F = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y < f(x)\},$$

$$G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

یعنی G مجموعه عرضی g و F مجموعه عرضی f منهای نمودار f می باشد. ناحیه S بین نمودارهای f و g تفاضل $S = G - F$ خواهد بود. بنابر قضایای ۱۰۰۱ و ۱۱۰۱ هر دوی F و G اندازه پذیرند. چون $F \subseteq G$ تفاضل $S = G - F$ نیز اندازه پذیر است و داریم

$$\begin{aligned} a(S) &= a(G) - a(F) = \int_a^b g(x) dx \\ &\quad - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx. \end{aligned}$$

این (۱۰۲) را وقتی f و g نامنفی باشند ثابت می کند.

اکنون حالت کلی را که $f \leq g$ بر $[a, b]$ است ولی f و g لزوماً نامنفی نیستند در نظر می گیریم. مثالی در شکل ۱۰۲ (ب) نموده شده است. این حالت را می توانیم به وضعیت قبلی تحویل کنیم باین صورت که ناحیه را آنقدر بطرف بالا می لغزانیم تا در بالای محور x قرارگیرد. یعنی عدد مثبتی مثل c را آنقدر بزرگ اختیار می کنیم تا مطمئن شویم که برای هر x در $[a, b]$ ، $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$. بنابر آنچه پیشتر ثابت کرده ایم ناحیه جدید T بین نمودارهای $f + c$ و $g + c$ اندازه پذیر است و مساحتش با انتگرال زیر داده می شود:

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

اما T با S هم‌نهشت است؛ پس S نیز اندازه پذیر بوده و خواهیم داشت

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

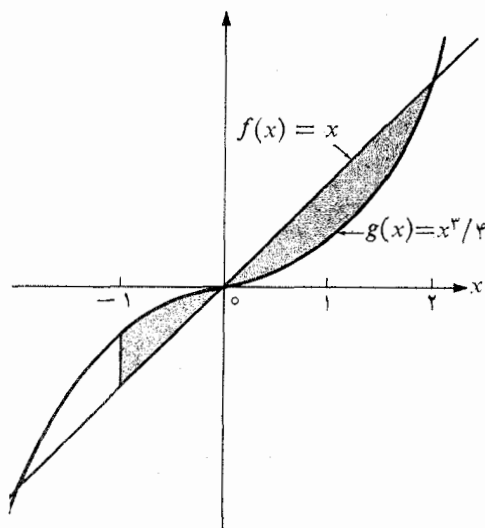
این برهان را کامل خواهد کرد.

۳.۲ مثالهای حل شده

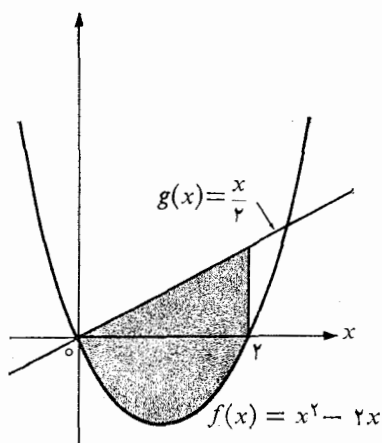
مثال ۱. مساحت ناحیه S بین نمودارهای f و g روی بازه $[0, 2]$ را در صورتی حساب کنید که $g(x) = x/2$ و $f(x) = x(x - 2)$.

حل. دو نمودار در شکل ۲.۲ نشان داده شده‌اند. قسمت سایه‌دار نمایشگر S است. چون $f \leq g$ روی بازه $[0, 2]$ است پس از قضیه ۱.۲ استفاده کرده می‌نویسیم

$$a(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2 \right) dx = \frac{5}{2} \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{7}{3}.$$



شکل ۳.۲ مثال ۲.



شکل ۲.۲ مثال ۱.

مثال ۲. مساحت ناحیه S بین نمودارهای f و g روی بازه $[-1, 2]$ را در صورتی حساب کنید که $g(x) = x^3/4$ و $f(x) = x$.

حل. ناحیه S در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. در اینجا $f \leq g$ را در سراسر بازه $[- ۱, ۲]$ نداریم. لکن روی زیربازه $[۰, ۱]$ داریم $f \leq g$ و روی زیربازه $[۱, ۲]$ داریم $f \geq g$. با بکارگیری قضیه ۱۰.۲ در مورد هر زیربازه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a(S) &= \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)] dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx + \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2^2}{2} - \frac{12^4}{44} = \frac{23}{16}. \end{aligned}$$

در مثالهایی از این قبیل، که می‌توان بازه $[a, b]$ را بتعدادی متاهی زیربازه طوری تقسیم کرد که در هر زیربازه $g \leq f$ یا $f \leq g$ ، دستور (۱۰.۲) قضیه ۱۰.۲ صورت زیر را خواهد یافت:

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

مثال ۳. مساحت یک قرص مستدیر. یک قرص مستدیر بشعاع r عبارت است از مجموعه کلیه نقاط داخل یا روی کرانه دایره‌ای بشعاع r . یک چنین قرصی با ناحیه بین نمودارهای دو تابع f و g که بر بازه $[-r, r]$ با دستورهای

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{و} \quad f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

تعریف می‌شوند هم‌نهشت است. هر یک از این توابع بر $[-r, r]$ کراندار و قطعه قطعه یکنوا بوده و، در نتیجه، بر $[-r, r]$ انتگرالپذیر خواهد بود. قضیه ۱۰.۲ به ما می‌گوید که ناحیه بین نمودارهایشان اندازه پذیر است و مساحت آن مساوی $\int_{-r}^r [g(x) - f(x)] dx$ می‌باشد. فرض کنیم $A(r)$ نشانگر مساحت قرص باشد. ثابت می‌کنیم که

$$A(r) = r^2 A(1).$$

یعنی مساحت قرصی بشعاع r مساوی است با r^2 برابر مساحت قرص یکه (قرصی بشعاع ۱). از آنجا که $g(x) - f(x) = 2g(x)$ قضیه ۱۰.۲ نتیجه می‌دهد که

$$A(r) = \int_{-r}^r 2g(x) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

بخصوص، وقتی $r = 1$ ، دستور

$$A(1) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

را خواهیم داشت. حال مقیاس محور x را تغییر می‌دهیم، با استفاده از قضیه ۱۹.۱ بافرض

$k = 1/r$ بدست می آوریم که

$$\begin{aligned} A(r) &= 2 \int_{-r}^r g(x) dx = 2r \int_{-1}^1 g(rx) dx = 2r \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - (rx)^2} dx \\ &= 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = r^2 A(1). \end{aligned}$$

این ثابت می کند که $A(r) = r^2 A(1)$ ، یعنی همان چیزی که ادعا شده بود.

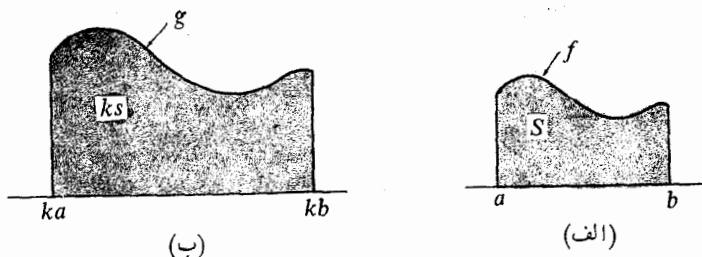
تعریف. عدد π را مساحت یک قرص یکه تعریف می کنیم.

دستوری که هم اکنون ثابت شد مبنی آن است که $A(r) = \pi r^2$.

مثال پیشگفته رفتار مساحت را تحت انبساط یا انقباض ناحیه های مسطح نشان می دهد. فرض کنیم S مجموعه معینی از نقاط در صفحه باشد، و مجموعه جدیدی از نقاط را در نظر می گیریم که از ضرب مختصات هر نقطه S در سازه ثابتی چون $k > 0$ بدست می آیند. این مجموعه را با kS نموده و می گوئیم با S متشابه است. فرایندی که با آن kS از S حاصل می شود یک تبدیل تشابه نام دارد. هر نقطه در امتداد خطی راست که از مبدأ گذشته با اندازه k برابر فاصله اش تا مبدأ تغییر مکان می یابد. اگر $k > 1$ تبدیل را یک کشش یا یک انبساط (از مبدأ) و، چنانچه $0 < k < 1$ ، آن را یک کاهش یا یک انقباض (بطرف مبدأ) می خوانند.

بعنوان مثال، هرگاه S ناحیه محدود به دایره یکه بمرکز مبدأ باشد، آنگاه kS یک ناحیه مستدیر با همان مرکز و شعاع k خواهد بود. در مثال ۳ نشان دادیم که، برای نواحی مستدیر، مساحت kS ، k^2 برابر مساحت S می باشد. حال ثابت می کنیم این خاصیت مساحت در مورد هر مجموعه عرضی برقرار است.

مثال ۴. (دقتاً مساحت یک مجموعه عرضی تحت تبدیل تشابه. فرض می کنیم f بر $[a, b]$ نامفنی و انتگرالپذیر بوده و S مجموعه عرضی آن باشد. مثالی در شکل ۴.۲ (الف) نموده شده است. هرگاه یک تبدیل تشابه را با سازه مثبت k بکار ببریم آنگاه kS مجموعه عرضی تابع جدیدی، مثلاً g ، روی بازه $[ka, kb]$ خواهد بود. [ر.ک.



شکل ۴.۲ مساحت kS ، k^2 برابر مساحت S است.

شکل ۴.۲. (ب). نقطه (x, y) روی نمودار g است اگر و فقط اگر نقطه $(x/k, y/k)$ روی نمودار f باشد. از اینرو $y/k = f(x/k)$ ، در نتیجه $y = kf(x/k)$. بعبارت دیگر، تابع جدید g با دستور

$$g(x) = kf(x/k),$$

بازای هر x در $[ka, kb]$ ، به f مربوط می‌شود. بنابراین، مساحت kS بدین صورت داده می‌شود:

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x) dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k) dx = k^2 \int_a^b f(x) dx,$$

که در آخرین مرحله از خاصیت انبساط برای انتگرالها (قضیه ۱۹.۱) استفاده کردیم. چون $\int_a^b f(x) dx = a(S)$ این ثابت می‌کند که $a(kS) = k^2 a(S)$. بعبارت دیگر، مساحت kS برابر مساحت S است.

مثال ۵. محاسبه انتگرال $\int_0^a x^{1/2} dx$. انتگرال در مورد مساحت تیغی دو دم است. اگرچه ما معمولاً برای محاسبه مساحت از انتگرال بهره می‌گیریم اما گاهی هم می‌توانیم برای محاسبه انتگرالها از اطلاعات خود در باب مساحت استفاده کنیم. این موضوع را با محاسبه مقدار انتگرال $\int_0^a x^{1/2} dx$ ، که در آن $a > 0$ ، روشن می‌کنیم. (این انتگرال وجود دارد زیرا انتگرالده بر $[0, a]$ صعودی و کراندار است.)

شکل ۵.۲ نمودار تابع f را که با $f(x) = x^{1/2}$ روی بازه $[0, a]$ داده شده نشان می‌دهد. مجموعه عرضی آن S مساحتی دارد که با

$$a(S) = \int_0^a x^{1/2} dx$$

داده می‌شود. حال این مساحت را بطریقی دیگر حساب می‌کنیم. کافی است ملاحظه کنیم که ناحیه S و ناحیه سایه‌دار T در شکل ۵.۲ باهم مستطیلی بقاعده a و ارتفاع $a^{1/2}$ را پر می‌کنند. بنابراین $a(S) + a(T) = a^{3/2}$ ، پس داریم

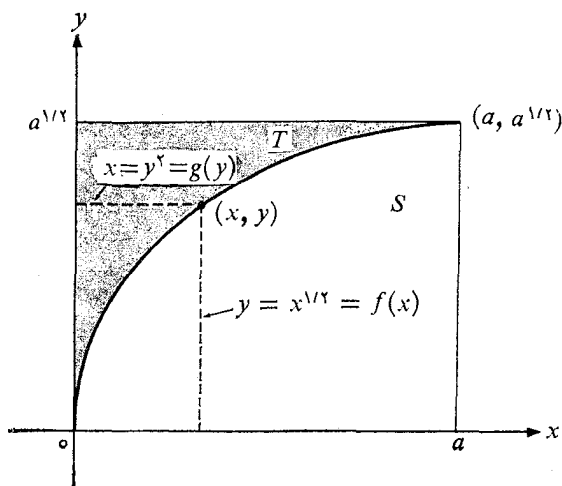
$$a(S) = a^{3/2} - a(T).$$

اما T مجموعه عرضی تابعی چون g است که روی بازه $[0, a^{1/2}]$ بر محور y با معادله $g(y) = y^2$ تعریف می‌شود. لذا خواهیم داشت

$$a(T) = \int_0^{a^{1/2}} g(y) dy = \int_0^{a^{1/2}} y^2 dy = y \frac{1}{3} a^{3/2},$$

پس $a(S) = a^{3/2} - \frac{1}{3} a^{3/2} = \frac{2}{3} a^{3/2}$. این ثابت می‌کند که

$$\int_0^a x^{1/2} dx = \frac{2}{3} a^{3/2}.$$



شکل ۵.۲ محاسبه انتگرال $\int_a^b x^{1/2} dx$

در حالت کلیتر، اگر $a > 0$ و $b > 0$ ، می‌توانیم از خاصیت جمعپذیری انتگرال استفاده کرده و دستور

$$\int_a^b x^{1/2} dx = \frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2})$$

را بدست آوریم.

استدلال پیشگفته را می‌توان برای محاسبه انتگرال $\int_a^b x^{1/n} dx$ ، وقتی n عدد صحیح مثبتی است، نیز بکار گرفت. ما این نتیجه را بعنوان یک قضیه ذکر می‌کنیم.

قضیه ۲.۲. بازای $a > 0$ ، $b > 0$ ، و عدد صحیح و مثبت n داریم

$$(2.2) \quad \int_a^b x^{1/n} dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + 1/n}.$$

برهان این قضیه آنقدر شبیه برهان مثال ۵ است که ما آوردن جزئیاتش را به خواننده وامی‌گذاریم.

۴.۲ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۴، در هر حالت، مساحت ناحیه S را که بین نمودارهای f و g روی بازه $[a, b]$ قرار دارد حساب کنید. دو نمودار را بکشید و S را با سایه مشخص نمایید.

$$1. \quad f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 0, \quad a = -2, \quad b = 2$$

$$2. \quad f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = 8 - 2x^2, \quad a = -2, \quad b = 2$$

۳. $b = 1$, $a = -1$, $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 + x^2$.
 ۴. $b = 2$, $a = 0$, $g(x) = -x$, $f(x) = x - x^2$.
 ۵. $b = 1$, $a = 0$, $g(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$.
 ۶. $b = 2$, $a = 1$, $g(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$.
 ۷. $b = 2$, $a = 0$, $g(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$.
 ۸. $b = 2$, $a = 0$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x^{1/2}$.
 ۹. $b = (1 + \sqrt{5})/2$, $a = -1$, $g(x) = x + 1$, $f(x) = x^2$.
 ۱۰. $b = \sqrt{2}$, $a = -1$, $g(x) = x$, $f(x) = x(x^2 - 1)$.
 ۱۱. $b = 1$, $a = -1$, $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = |x|$.
 ۱۲. $b = 2$, $a = 0$, $g(x) = x^2 - 2x$, $f(x) = |x - 1|$.
 ۱۳. $b = \frac{1}{3}$, $a = -\sqrt{3}/3$, $g(x) = 1 - 3x^3$, $f(x) = 2|x|$.
 ۱۴. $b = 2$, $a = -1$, $g(x) = 0$, $f(x) = |x| + |x - 1|$.

۱۵. نمودارهای $f(x) = x^2$ و $g(x) = cx^3$ که در آن $c > 0$ ، در نقاط $(0, 0)$ و $(1/c, 1/c^2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. c را طوری بیابید که مساحت ناحیه‌ای که بین این نمودارها و روی بازه $[0, 1/c]$ قرار دارد $2/3$ باشد.

۱۶. فرض کنید $f(x) = x - x^2$ و $g(x) = ax$ را چنان تعیین کنید که ناحیه بالای نمودار g و پائین نمودار f دارای مساحتی برابر $9/2$ شود.

۱۷. π را مساوی مساحت قرص مستدیریکه تعریف کرده‌ایم. در مثال ۳ از بخش ۳.۲ ثابت کردیم که $\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$. از خواص انتگرال استفاده کرده انتگرالهای زیر را بر حسب π محاسبه نمایید:

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx \quad ; \quad \text{(ب)} \quad \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} dx \\ & \text{(پ)} \quad \int_{-2}^2 (x - 3) \sqrt{4 - x^2} dx \end{aligned}$$

۱۸. مساحت‌های دوازده ضلعیهای منتظم را که محاط در و محیط بریک قرص مستدیریکه‌اند محاسبه کنید و بدینوسیله نامساویهای $(2 - \sqrt{3}) < \pi < 3$ را نتیجه بگیرید.

۱۹. فرض کنید C نشانگر دایره‌ایکه باشد که معادله دکارتی‌اش $x^2 + y^2 = 1$ است. E را مجموعه نقاطی بگیرید که با ضرب مختص x هر نقطه (x, y) واقع بر C در سازه E ثابت $a > 0$ و مختص y آن در سازه ثابت $b > 0$ بدست می‌آیند. مجموعه E یک بیضی نام دارد. (وقتی $a = b$ بیضی دایره دیگری خواهد بود.)

(الف) نشان دهید که هر نقطه (x, y) واقع بر E در معادله دکارتی $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ صدق می‌کند.

(ب) از خواص انتگرال استفاده کرده ثابت کنید ناحیه‌ای که این بیضی در برمی‌گیرد اندازه‌پذیر است و مساحتش πab می‌باشد.

۲۰. تمرین ۱۹ تعمیمی از مثال ۳ در بخش ۳۰۲ است. تعمیم متناظر مثال ۴ از بخش ۳۰۲ را بیان و ثابت کنید.

۲۱. با استفاده از استدلالی شبیه آنکه در مثال ۵ از بخش ۳۰۲ شد قضیه ۲۰۲ را ثابت نمایید.

۵.۲ توابع مثلثاتی

پیش از آنکه کاربردهای دیگر انتگرالگیری را معرفی کنیم کمی از موضوع منحرف می‌شویم تا توابع مثلثاتی را مورد بحث قرار دهیم. فرض می‌کنیم خواننده از خواص شش تابع مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت، و کسکانت؛ و معکوسهای آنها، آرک سینوس، آرک کسینوس، آرک تانژانت، و غیره، اطلاعاتی دارد. این توابع در درسهای مقدماتی مثلثات در رابطه با مسائل مختلفی که دربارهٔ اضلاع و زوایای مثلثها مطرح می‌شوند مورد بحث قرار می‌گیرند.

توابع مثلثاتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت دارند؛ این چندان بسبب ارتباط آنها با اضلاع و زوایای مثلث نبوده بلکه تا حدودی بخاطر خواصی است که بعنوان تابع دارا می‌باشند. توابع ششگانهٔ مثلثاتی خاصیت مشترک مهمی دارند که به خاصیت تناوبی معروف است.

تابع f را متناوب با دورهٔ تناوب $p \neq 0$ خوانند اگر که هر وقت قلمرو آن حاوی x باشد شامل $x + p$ نیز باشد و، بازای هر x در قلمرو f ، $f(x+p) = f(x)$. توابع سینوس و کسینوس متناوب با دورهٔ تناوب 2π هستند که π مساحت قرص مستدیر یک‌ه می‌باشد. بسیاری از مسائل در فیزیک و مهندسی با پدیده‌های متناوب (نظیر ارتعاشات، حرکت سیارات، و حرکت موجی) سروکار دارند، و توابع سینوس و کسینوس پایه‌ای برای تحلیل ریاضی اینگونه مسائل را تشکیل می‌دهند.

توابع سینوس و کسینوس را می‌توان بر اهرهای متفاوت بسیاری معرفی کرد. بعنوان مثال، تعاریفی هندسی وجود دارند که تابعهای سینوس و کسینوس را به زوایا مربوط می‌سازند، و تعاریفی تحلیلی هستند که این توابع را بدون هیچگونه ارتباط با هندسه معرفی می‌کنند. تمام این روشها معادلند باین معنی که توابع حاصل از همهٔ آنها یکی است.

ما معمولاً وقتی با سینوس و کسینوس کار می‌کنیم آنقدر که به خواص حاصل از تعاریف آنها توجه داریم به خود تعریفها وقتی نمی‌گذاریم. بعضی از این خواص، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ارجی دارند، در زیر ذکر شده‌اند. طبق معمول، مقادیر توابع سینوس و کسینوس در x را بترتیب با $\sin x$ و $\cos x$ نشان می‌دهیم

خواص اساسی سینوس و کسینوس

۱. قلمرو تعریف. توابع سینوس و کسینوس همه‌جا خط حقیقی تعریف شده‌اند.

۲. مقادیر خاص. داریم $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$.

۳. کسینوس تفاضل. بازای هر x و y داریم

$$(۳.۲) \quad \cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x.$$

۴. نامساویهای اساسی. بازای $0 < x < \pi/2$ داریم

$$(۴.۲) \quad 0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

از این چهار خاصیت می توانیم همه خواص سینوس و کسینوس را که در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت دارند نتیجه بگیریم. چنین وضع این فکر را پیش می آورد که شاید می شد توابع مثلثاتی را بطور اصل موضوعی معرفی کرد. یعنی می توانستیم خواص ۱ تا ۴ را بعنوان اصول موضوع برای سینوس و کسینوس اختیار کرده و کلیه خواص دیگر را بعنوان قضایا نتیجه بگیریم. برای اطمینان از اینکه یک نظریه تهی را مطرح نکرده ایم لازم است نشان دهیم توابعی هستند که از خاصیتهای بالا بهره مندند. ما فعلاً از این مسئله در می گذریم. ابتدا فرض می کنیم توابعی هستند که این خواص اساسی را دارند و سپس نشان می دهیم که چگونه می توان خواص دیگر را نتیجه گرفت. بعد، در بخش ۷.۲، برای تعریف سینوس و کسینوس، یک روش هندسی تعیین می کنیم بطوری که توابعی با خواص مطلوب بدست آیند. در فصل ۱۱ نیز، برای معرفی سینوس و کسینوس، یک روش تحلیلی را بااختصار توصیف خواهیم نمود.

قضیه ۳.۲. هرگاه دو تابع سینوس و کسینوس خواص ۱ تا ۴ را داشته باشند آنگاه از این خاصیتها نیز برخوردار خواهند بود:

(الف) اتحاد فیثاغورس. بازای هر x , $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

(ب) مقادیر خاص. $\sin 0 = \cos(\pi/2) = \sin \pi = 0$.

(پ) خواص زوج و فرد بودن. کسینوس تابعی زوج و سینوس تابعی فرد است. یعنی بازای هر x داریم

$$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x.$$

(ت) روابط متقابل. بازای هر x داریم

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\sin x.$$

(ث) خاصیت تناوبی. بازای هر x داریم

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

(ج) دستورهای جمع. بازای هر x و y داریم

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

(ج) دستوره‌های تفريق. بازاى هر a و b داريم

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}.$$

(ح) خاصيت يکنوائى. سينوس در بازه $[0, \pi/2]$ اکيدا صعودى و کسينوس اکيدا نزولى است.

برهان. اگر در (۳.۲) فرض کنيم $y = x$ و از رابطه $\cos 0 = 1$ استفاده نمائيم قسمت (الف) فوراً نتيجه خواهد شد. خاصيت (ب) از (الف) با اختيار $x = \pi/2$, $x = \pi$ و بکار بردن رابطه $\sin(\pi/2) = 1$ خاصيت زوج بودن کسينوس نيز از (۳.۲) با فرض $y = 0$ نتيجه مى‌شود. بعد دستور

$$(5.2) \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \sin x$$

را با اختيار $y = \pi/2$ در (۳.۲) نتيجه مى‌گيريم. از اين و (۳.۲) در مى‌يابيم که سينوس فرد است چونکه

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin \pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \end{aligned}$$

اين (پ) را ثابت مى‌کند. براى اثبات (ت) دوباره از (۵.۲) استفاده کرده، ابتدا x را با $x + \pi/2$ عوض مى‌کنيم، و بعد $-x$ را بجای x مى‌گذاريم. سپس چندبار استفاده از (ت) روابط تناوبى (ث) را به ما خواهد داد.

براى اثبات دستور جمع در مورد کسينوس فقط x را در (۳.۲) با $-x$ عوض کرده و از خواص زوج و فرد بودن استفاده مى‌کنيم. بعد، با بکارگيرى قسمت (ت) و دستور جمع براى کسينوس، بدست مى‌آوريم که

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= -\cos\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \sin x \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \sin y + \sin x \cos y. \end{aligned}$$

اين (ج) را ثابت مى‌کند. براى رسيدن به دستوره‌هاى تفريق (ج) ابتدا در دستور جمع براى $\sin(x+y)$ ، y را با $-y$ عوض مى‌کنيم تا بدست آيد که

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

چنانچه این را از دستور برای $\sin(x+y)$ کم کرده و همین کار را برای تابع کسینوس انجام دهیم بدست خواهیم آورد که

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin y \sin x.$$

با اختیار $x = (a+b)/2$ و $y = (a-b)/2$ متوجه می شویم که اینها بشکل دستورهای تفریق (چ) درمی آیند.

خواص (الف) تا (چ) فقط از خواص ۱ تا ۳ نتیجه شدند. خاصیت ۴ برای اثبات (ح) بکار می رود. نامساویهای (۴.۲) نشان می دهند که $\sin x$ و $\cos x$ ، در صورتی که $0 < x < \pi/2$ ، مثبت اند. حال اگر $a < \pi/2$ و $0 < b < a$ اعداد $(a+b)/2$ و $(a-b)/2$ در بازه $(0, \pi/2)$ قرار دارند، و دستورهای تفریق (چ) نشان می دهند که $\cos a < \cos b$ و $\sin a > \sin b$. این برهان قضیه ۳.۲ را کامل می کند.

خواص دیگر توابع سینوس و کسینوس در مجموعه تمرینات بعدی (صفحه ۱۳۱) مطرح می شوند. بویژه، از دو دستور نام می بریم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال بارها مورد استفاده قرار می گیرند. اینها را دستورهای زاویه مضاعف یا دستورهای دو برابر می نامند. داریم

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

البته اینها صرفاً حالات خاصی از دستورهای جمع هستند که با فرض $x=y$ بدست می آیند. دستور دوم برای $\cos 2x$ از دستور اول با استفاده از اتحاد فیثاغورس نتیجه می شود. همچنین اتحاد فیثاغورس نشان می دهد که برای هر x ، $|\sin x| \leq 1$ و $|\cos x| \leq 1$.

۶.۲ دستورهای انتگرالگیری برای سینوس و کسینوس

خواص یکنوائی قسمت (ح) قضیه ۳.۲ همراه با روابط متقابل و خاصیتهای تناوبی نشان می دهند که توابع سینوس و کسینوس بر هر بازه قطعه قطعه یکنواختند. بنابراین، با چندبار استفاده از قضیه ۱۲.۱، می بینیم که سینوس و کسینوس بر هر بازه متناهی انتگرالپذیر است. حال، با بکار بردن قضیه ۱۴.۱، انتگرالهای آنها را محاسبه خواهیم کرد. در این محاسبه از یک جفت نامساوی استفاده می شود که ما آن را بصورت قضیه جداگانه ای بیان می داریم.

قضیه ۴.۲. اگر $0 < a \leq \pi/2$ و $n \geq 1$ داریم

$$(۶.۲) \quad \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n} < \sin a < \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{ka}{n}.$$

برهان. نامساویهای (۶.۲) از اتحاد مثلثاتی

$$(۷.۲) \quad ۲ \sin \frac{1}{۲} x \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \left(n + \frac{1}{۲} \right) x - \sin \frac{1}{۲} x,$$

که بازای $n \geq ۱$ و هر x حقیقی معتبر است، نتیجه می‌شوند. برای اثبات (۷.۲) از یکی از دستورهای تفریق (ج) در قضیه ۳.۲ استفاده کرده می‌نویسیم

$$۲ \sin \frac{1}{۲} x \cos kx = \sin \left(k + \frac{1}{۲} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{۲} \right) x.$$

با اختیار $n, ۲, \dots, ۱$ و افزودن این معادلات بهم درمی‌یابیم که مجموع طرف راست. توی هم می‌رود و ما (۷.۲) را بدست می‌آوریم.

اگر $x/۲$ مضرب صحیحی از π نباشد می‌توانیم دوطرف (۷.۲) را بر $۲ \sin(x/۲)$ تقسیم کنیم تا بدست آید که

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{۲} \right) x - \sin \frac{1}{۲} x}{۲ \sin \frac{1}{۲} x}.$$

چنانچه n را با $n-۱$ عوض کرده و ۱ را به طرفین رابطه حاصل یفزائیم نیزخواهیم داشت

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\sin \left(n - \frac{1}{۲} \right) x + \sin \frac{1}{۲} x}{۲ \sin \frac{1}{۲} x}.$$

هردوی این دستورها وقتی معتبرند که بازای هر عدد صحیح $m, x \neq ۲m\pi$. با فرض $x = a/n$ ، که در آن $0 < a \leq \pi/۲$ ، متوجه می‌شویم که دو نامساوی (۶.۲) معادل دو نامساوی

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{۲} \right) \frac{a}{n} - \sin \left(\frac{a}{۲n} \right)}{۲ \sin \left(\frac{a}{۲n} \right)} &< \sin a \\ &< \frac{a}{n} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{۲} \right) \frac{a}{n} + \sin \left(\frac{a}{۲n} \right)}{۲ \sin \left(\frac{a}{۲n} \right)} \end{aligned}$$

می‌باشد. این جفت نامساوی بنوبه خود با دو نامساوی

$$(۸.۲) \quad \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \sin\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\sin\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)} \sin a$$

$$< \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{a}{2} + \sin\left(\frac{a}{2n}\right)$$

معادل است. بنابراین، اثبات (۶.۲) معادل اثبات (۸.۲) خواهد بود. ثابت می‌کنیم که برای $0 < 2n\theta \leq \pi/2$ داریم

$$(۹.۲) \quad \sin(2n+1)\theta - \sin\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} \sin 2n\theta$$

$$< \sin(2n-1)\theta + \sin\theta.$$

این نامساویها وقتی $\theta = a/(2n)$ به نامساویهای (۸.۲) تحویل می‌شوند. برای اثبات نامساوی سمت چپ (۹.۲) از دستور جمع برای سینوس استفاده کرده می‌نویسیم

$$(۱۰.۲) \quad \sin(2n+1)\theta = \sin 2n\theta \cos \theta + \cos 2n\theta \sin \theta$$

$$< \sin 2n\theta \frac{\sin \theta}{\theta} + \sin \theta,$$

که در آن از نامساویهای

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad 0 < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \sin \theta > 0,$$

که همه بخاطر اینکه $0 < 2n\theta \leq \pi/2$ معتبرند، نیز بهره برده‌ایم. نامساوی (۱۰.۲) با نامساوی طرف چپ (۹.۲) معادل است.

برای اثبات نامساوی سمت راست (۹.۲) مجدداً از دستور جمع برای سینوس استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\sin(2n-1)\theta = \sin 2n\theta \cos \theta - \cos 2n\theta \sin \theta.$$

چنانچه $\sin \theta$ را به طرفین آن بیفزائیم خواهیم داشت

$$(۱۱.۲) \quad \sin(2n-1)\theta + \sin \theta = \sin 2n\theta$$

$$\left(\cos \theta + \sin \theta \frac{1 - \cos 2n\theta}{\sin 2n\theta} \right).$$

اما، چون داریم

$$\frac{1 - \cos 2n\theta}{\sin 2n\theta} = \frac{2 \sin^2 n\theta}{2 \sin n\theta \cos n\theta} = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta},$$

پس طرف راست (۱۱.۲) مساوی

$$\begin{aligned}\sin 2n\theta \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \right) &= \sin 2n\theta \frac{\cos \theta \cos n\theta + \sin \theta \sin n\theta}{\cos n\theta} \\ &= \sin 2n\theta \frac{\cos (n-\theta)}{\cos n\theta}\end{aligned}$$

خواهد بود. بنابراین، برای اتمام برهان (۹.۲)، فقط کافی است نشان دهیم که

$$(12.2) \quad \frac{\cos (n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

اما داریم

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos (n-1)\theta \cos \theta - \sin (n-1)\theta \sin \theta \\ &< \cos (n-1)\theta \cos \theta < \cos (n-1)\theta \frac{\theta}{\sin \theta},\end{aligned}$$

که در آن مجدداً از نامساوی اساسی $\cos \theta < \theta / (\sin \theta)$ استفاده کرده ایم. این رابطه آخر (۱۲.۲) را ایجاب می کند؛ پس برهان قضیه ۴.۲ تمام است.

قضیه ۵.۲. هرگاه دو تابع سینوس و کسینوس از خواص اساسی ۱ تا ۴ بهره مند باشند آنگاه بازای هر a حقیقی خواهیم داشت

$$(13.2) \quad \int_0^a \cos x \, dx = \sin a,$$

$$(14.2) \quad \int_0^a \sin x \, dx = 1 - \cos a.$$

برهان. ابتدا (۱۳.۲) را ثابت می کنیم و بعد، با استفاده از (۱۳.۲)، (۱۴.۲) را نتیجه می گیریم. فرض کنیم $0 < a \leq \pi/2$. چون کسینوس بر $[0, a]$ نزولی است می توانیم قضیه ۱۴.۱ را همراه با نامساویهای قضیه ۴.۲ بکار برده (۱۳.۲) را بدست آوریم. این دستور همچنین برای $a = 0$ ، باین دلیل که هر دو طرف آن صفرند، خود بخود برقرار است. حال می توان از خواص عمومی انتگرال استفاده کرده حیطه اعتبار آن را تا همه a های حقیقی وسعت داد.

بعنوان مثال، هرگاه $-\pi/2 \leq a \leq 0$ ، آنگاه $-a \leq \pi/2$ ، و خاصیت انعکاسی به ما چنین می دهد که

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos x \, dx &= - \int_0^{-a} \cos (-x) \, dx = - \int_0^{-a} \cos x \, dx \\ &= - \sin (-a) = \sin a.\end{aligned}$$

لذا (۱۳.۲) درباره‌ی $[-\pi/2, \pi/2]$ معتبر است. حال فرض می‌کنیم $\pi/2 \leq a \leq 3\pi/2$. در این صورت $-\pi/2 \leq a - \pi \leq \pi/2$ ، پس داریم

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^a \cos x dx \\ &= \sin \frac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x + \pi) dx = 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x dx \\ &= 1 - \sin(a - \pi) + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \sin a.\end{aligned}$$

از اینرو (۱۳.۲) بازای هر a درباره‌ی $[-\pi/2, 3\pi/2]$ برقرار است. اما این بازه طولش 2π است، پس دستور (۱۳.۲) برای هر a برقرار است چونکه هر دو طرف آن نسبت به a متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشند.

حال از (۱۳.۲) استفاده کرده (۱۴.۲) را نتیجه می‌گیریم. ابتدا ثابت می‌کنیم که (۱۴.۲)

وقتی $a = \pi/2$ برقرار است. چنانچه خاصیت انتقالی، رابطه‌ی متقابل $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ و خاصیت انعکاسی را بترتیب بکار ببریم درخواهیم یافت که

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x dx &= \int_{-\pi/2}^0 \sin(x + \pi/2) dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(-x) dx.\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه $\cos(-x) = \cos x$ و معادله (۱۳.۲) خواهیم داشت

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

حال بازای هر a حقیقی می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\int_0^a \sin x dx &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx + \int_{\pi/2}^a \sin x dx \\ &= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \sin(x + \pi/2) dx \\ &= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x dx = 1 + \sin(a - \pi/2) = 1 - \cos a.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که معادله (۱۳.۲) معادله (۱۴.۲) را ایجاب می‌کند.

مثال ۱. با استفاده از (۱۳.۲) و (۱۴.۲) همراه با خاصیت جمع‌پذیری

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

دستورهای انتگرالگیری کلیتری را بدست می آوریم:

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$$

و

$$\int_a^b \sin x dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a).$$

چنانچه بار دیگر از علامت خاص $f(x)|_a^b$ برای نمودن تفاضل $f(b) - f(a)$ استفاده کنیم می توانیم این دستورهای انتگرالگیری را بشکل

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b \text{ و } \int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b$$

بنویسیم.

مثال ۲. با استفاده از نتایج مثال ۱ و خاصیت انبساط

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x/c) dx$$

دستورهای زیر را که بازای $c \neq 0$ معتبرند بدست می آوریم:

$$\int_a^b \cos cx dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \cos x dx = \frac{1}{c} (\sin cb - \sin ca)$$

و

$$\int_a^b \sin cx dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} \sin x dx = -\frac{1}{c} (\cos cb - \cos ca).$$

مثال ۳. اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ایجاب می کند که

$\sin^2 x = (1 - \cos^2 x)/2$ ، پس از مثال ۲ خواهیم داشت

$$\int_0^a \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^a (1 - \cos^2 x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 a.$$

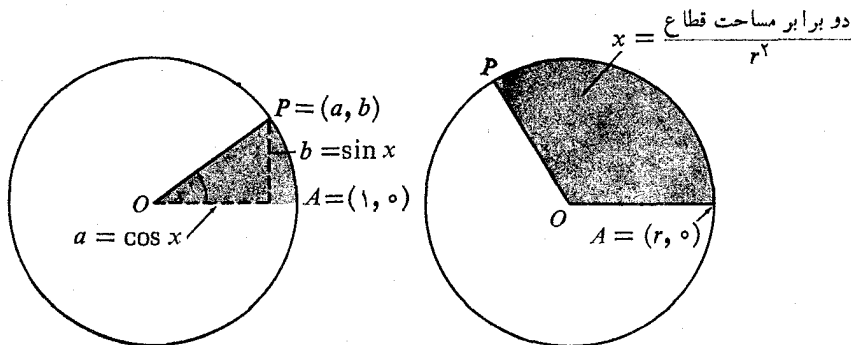
چون $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نیز در می یابیم که

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos^2 x dx &= \int_0^a (1 - \sin^2 x) dx = a - \int_0^a \sin^2 x dx \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 a. \end{aligned}$$

۷.۲ توصیف هندسی توابع سینوس و کسینوس

در این بخش برای تعریف توابع سینوس و کسینوس روشی هندسی معین کرده و تعبیر هندسی

آن خواص اساسی را که در بخش ۵.۲ ذکر شدند بدست می‌دهیم. دایره‌ای بشعاع r و بمرکز مبدأ را در نظر می‌گیریم. نقطه (r, θ) را با A نشان داده و فرض می‌کنیم P نقطه دلخواه دیگری بر دایره باشد. دوطاره خط OA و OP شکلی هندسی بنام زاویه را معین می‌کنند که آن را با علامت $\angle AOP$ نشان می‌دهیم. مثالی در شکل ۶.۲ نموده شده است. می‌خواهیم به این زاویه عدد حقیقی و نامنفی x را طوری نسبت دهیم که بتوان آن را بعنوان میزان اندازه‌اش بکار برد. متداولترین راه انجام این کار باین ترتیب است که دایره‌ای بشعاع ۱ اختیار کرده و فرض کنیم x طول قوس مستدیر AP باشد که در جهت عکس حرکت عقربه ساعت از A به P پیموده می‌شود، و بگوئیم که اندازه $\angle AOP$



شکل ۶.۲ زاویه $\angle AOP$ مشتمل است بر x رادیان. شکل ۷.۲ توصیف هندسی $\cos x$ و $\sin x$. برابر x رادیان است. در وضع موجود این بحث از دیدگاه منطقی قانع کننده نیست زیرا ما هنوز از مفهوم طول قوس سخنی بمیان نیاورده‌ایم. طول قوس بعداً در فصل ۱۴ مطرح خواهد شد. چون از مفهوم مساحت قبلاً سخن رفته است بعنوان اندازه $\angle AOP$ ترجیح می‌دهیم بجای طول قوس AP از مساحت قطاع مستدیر AOP استفاده کنیم. فرض شده که قطاع AOP وقتی P بالای محور حقیقی است بخش کوچکتر قرص مستدیر و زمانی که P پائین محور حقیقی است بخش بزرگتر آن باشد.

بعداً، وقتی طول قوس مطرح شد، در خواهیم یافت که طول قوس AP درست دو برابر مساحت قطاع AOP است. بنابراین، برای آنکه هر دو روش یک مقیاس سنجش زوایا را بدست دهند، ما از دو برابر مساحت قطاع AOP بعنوان اندازه زاویه $\angle AOP$ استفاده خواهیم کرد. اما، برای دستیابی به یک اندازه «فارغ از بعد» زوایا، یعنی اندازه‌ای مستقل از فاصله‌یکه در دستگاه مختصات، اندازه $\angle AOP$ را دو برابر مساحت قطاع AOP بخش بر مجذور شعاع تعریف خواهیم کرد. این نسبت با انبساط یا انقباض دایره تغییر نمی‌کند، و در نتیجه، اگر نظر خود را معطوف دایره یکه کنیم، به کلیت خللی وارد نخواهد شد. واحد اندازه‌گیری که باین صورت بدست می‌آید «رادیان» نام دارد. لذا می‌گوئیم اندازه زاویه $\angle AOP$ ، x رادیان است هرگاه $x/2$ مساحتی باشد که قطاع AOP از قرص مستدیر یکه جدا می‌کند.

ما قبلاً علامت π را برای نشان دادن مساحت یک قرص مستدیریکه معرفی کرده ایم. وقتی $P = (-1, 0)$ قطاع AOP یک قرص نیمه‌مستدیر بمساحت $\pi/2$ است، پس زاویه‌ای مساوی π رادیان را در برمی‌گیرد. تمامی قرص قطاعی است مشتمل بر 2π رادیان. اگر P از اول در $(1, 0)$ بوده و یکبار دور دایره در جهت خلاف حرکت عقربه‌ ساعت بگردد مساحت قطاع AOP ، در حالی که هر مقدار در بازه $[0, \pi]$ را فقط یکبار گرفته. از 0 به π صعود می‌کند. این خاصیت را، که از نظر هندسی قابل توجیه است، می‌توان با بیان مساحت بصورت انتگرال ثابت کرد، اما این برهان مورد بحث ما واقع نخواهد شد. قدم بعدی تعریف سینوس و کسینوس یک زاویه است. در واقع ما ترجیح می‌دهیم از سینوس و کسینوس یک عدد صحبت کنیم تا یک زاویه، در نتیجه سینوس و کسینوس توابعی خواهند بود که بر خط حقیقی تعریف شده‌اند. این طور عمل می‌کنیم: عدد x را که در $2\pi < x < 0$ صادق است انتخاب کرده و فرض می‌کنیم P چنان نقطه‌ای بر دایره یک‌ است که مساحت قطاع AOP مساوی $x/2$ می‌باشد. فرض کنیم (a, b) مختصات P را نشان دهد. مثالی در شکل ۷.۲ نموده شده است. اعداد a و b کاملاً توسط x معین می‌شوند. کسینوس و سینوس x را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\cos x = a, \sin x = b.$$

بعبارت دیگر، $\cos x$ طول P و $\sin x$ عرض آن خواهد بود.

بعنوان مثال، وقتی $x = \pi$ داریم $P = (-1, 0)$ ، پس $\cos \pi = -1$ و $\sin \pi = 0$. بهمین نحو، وقتی $x = \pi/2$ ، خواهیم داشت $P = (0, 1)$ ، و در نتیجه $\cos(\pi/2) = 0$ و $\sin(\pi/2) = 1$. این عمل سینوس و کسینوس را بصورت توابعی که در بازه باز $(0, 2\pi)$ تعریف شده‌اند توصیف می‌کند. ما این تعریفها را بوسیله معادلات زیر به تمام محور حقیقی تعمیم می‌دهیم:

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

حال چهار تابع مثلاًتی دیگر بر حسب سینوس و کسینوس بادستورهای متداول زیر تعریف می‌شوند:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

این توابع برای کلیه x های حقیقی مگر برخی از نقاط تنها که مخرجها صفر می‌شوند تعریف شده‌اند. همه آنها در خاصیت تناوبی $f(x + 2\pi) = f(x)$ صدق می‌کنند. تناوانت و کتناوانت از دوره تناوب کوچکتر π برخوردارند.

اینک برای تعیین اینکه چگونه این تعریفها به خواص اساسی مذکور در بخش ۵.۲ منجر می‌شوند دلائل هندسی می‌آوریم. خواص ۱ و ۲ پیشتر بوسیله نحوه تعریف ما از سینوس و کسینوس تأمین شده‌اند. اتحاد فیثاغورس با مراجعه به شکل ۷.۲ واضح می‌شود. پاره‌خط OP و تر مثلث قائم الزاویه‌ای است که اضلاعش طولهای $|\cos x|$ و $|\sin x|$ را دارند. از اینرو قضیه فیثاغورس برای مثلثهای قائم الزاویه اتحاد $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ را نتیجه خواهد داد.

حال قضیه فیثاغورس برای مثلثهای قائم الزاویه را مجدداً بکار می‌گیریم تا برهان هندسی دستور (۳.۲) برای $\cos(y - x)$ را بدست دهیم. به دو مثلث قائم الزاویه PAQ و PBQ در شکل ۸.۲ رجوع می‌کنیم. در مثلث PAQ طول ضلع AQ برابر $|\sin y - \sin x|$ است، یعنی مسای قدرمطلق تفاضل عرضهای P و Q می‌باشد. بهمین نحو، AP از طول $|\cos x - \cos y|$ برخوردار می‌باشد. چنانچه d طول وتر PQ را نشان دهد بنا بر قضیه فیثاغورس داریم

$$d^2 = (\sin y - \sin x)^2 + (\cos x - \cos y)^2.$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم الزاویه PBQ ضلع BP دارای طول $|1 - \cos(y - x)|$ و ضلع BQ دارای طول $|\sin(y - x)|$ می‌باشد. بنا بر این، قضیه فیثاغورس به ما چنین می‌دهد که

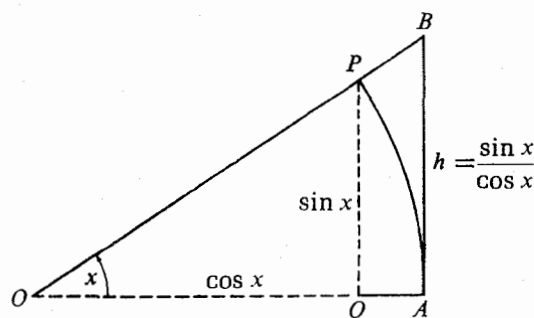
$$d^2 = [1 - \cos(y - x)]^2 + \sin^2(y - x).$$

از متحد قراردادن دو عبارت حاصل برای d^2 و حل آن نسبت به $\cos(y - x)$ به دستور مطلوب (۳.۲) برای $\cos(y - x)$ خواهیم رسید.

بالاخره، برهانهای هندسی نامساویهای اساسی خاصیت ۴ را می‌توان با مراجعه به شکل ۹.۲ ارائه داد. کافی است مساحت قطاع OAP را با مساحتهای مثلثهای OAB و OQP مقایسه کنیم. بخاطر نحوه تعریف ما از اندازه زاویه، مساحت قطاع OAP برابر $x/2$ است. مثلث OAB دارای قاعده ۱ و ارتفاع، مثلاً، h می‌باشد. بنا بر تشابه مثلثها درخواهیم یافت که $h/1 = (\sin x)/(\cos x)$ پس مساحت مثلث OAB برابر $h/2 = (\sin x)/(2\cos x)$ می‌باشد. بنا بر این، مقایسه مساحت نامساویهای

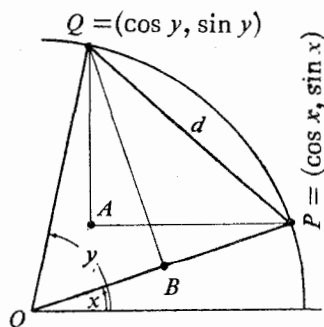
$$\frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$$

را به ما خواهد داد. با تقسیم بر $(\sin x)/2$ و تقابل‌گیری، نامساویهای اساسی (۴.۲) را بدست می‌آوریم.



شکل ۹.۲ برهان هندسی نامساویهای

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$



شکل ۸.۲ برهان هندسی دستور

برای $\cos(y - x)$.

بار دیگر به خواننده یادآور می‌شویم که بحث این بخش بدین منظور است که از سینوس و کسینوس و خواص اساسی آنها تعبیری هندسی فراهم شود. یک برخورد تحلیلی با این توابع، بدون استفاده از هندسه، در بخش ۱۱.۱۱ توصیف خواهد شد. جداول مفصل مقادیر سینوس، کسینوس، تانژانت، و کتانژانت در اکثر کتب راهنمای ریاضی آمده‌اند. نمودارهای شش تابع مثلثاتی در شکل ۱۰.۲ (صفحه ۱۳۵) روی یک بازه تناوب کامل نشان داده شده‌اند. بقیه نمودار در هر حالت با توسل به خاصیت تناوبی بدست خواهد آمد.

۸.۲ تمرینات

در این مجموعه از تمرینات می‌توانید از خواص سینوس و کسینوس که در بخشهای ۵.۲ تا ۷.۲ گفته شده استفاده نمایید.

۱. (الف) ثابت کنید بازای هر عدد صحیح n ، $\sin n\pi = 0$ ، و اینها تنها مقادیری از x هستند که بازای آنها $\sin x = 0$.

(ب) کلیه x های حقیقی را بیابید که $\cos x = 0$.

۲. کلیه x های حقیقی را بیابید که (الف) $\sin x = 1$ ؛ (ب) $\cos x = 1$ ؛ (پ) $\sin x = -1$ ؛ (ت) $\cos x = -1$.

۳. ثابت کنید بازای هر x ، $\sin(x + \pi) = -\sin x$ و $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

۴. ثابت کنید بازای هر x حقیقی

$$\cos 3x = \cos x - 4\sin^2 x \cos x \text{ و } \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

همچنین ثابت کنید که $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

۵. (الف) ثابت کنید $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ و $\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. [دانهائی: از تمرین ۴ استفاده نمایید.]

(ب) ثابت کنید $\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$.

(پ) ثابت کنید $\sin \frac{1}{4}\pi = \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

۶. ثابت کنید بازای هر x و y که $\tan x \tan y \neq -1$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

دستورهای متناظر را برای $\tan(x + y)$ و $\cot(x + y)$ بدست آورید.

۷. اعداد A و B را چنان بیابید که بازای هر x

$$3\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = A\sin x + B\cos x.$$

۸. ثابت کنید اگر C و α اعداد حقیقی مفروضی باشند اعداد حقیقی A و B وجود دارند بطوری که بازای هر x ، $C \sin(x + \alpha) = A \sin x + B \cos x$.
۹. ثابت کنید اگر A و B اعداد حقیقی مفروضی باشند اعداد C و α ، که $C \geq 0$ ، وجود دارند بطوری که دستور تمرین ۸ بازای آنها برقرار است.
۱۰. C و α را طوری تعیین کنید که $C > 0$ و بازای هر x ،

$$C \sin(x + \alpha) = -2 \sin x - 2 \cos x.$$

۱۱. ثابت کنید اگر A و B اعداد حقیقی مفروضی باشند اعداد C و α ، که $C \geq 0$ ، چنان وجود دارند که $C \cos(x + \alpha) = A \sin x + B \cos x$. اعداد C و α را برای وقتی که $A = B = 1$ مشخص کنید.

۱۲. کلیه x های حقیقی را بیابید که $\sin x = \cos x$.

۱۳. کلیه x های حقیقی را بیابید که $\sin x - \cos x = 1$.

۱۴. ثابت کنید که اتحادهای زیر بازای هر x و y برقرارند.

(الف) $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$

(ب) $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$

(پ) $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

۱۵. چنانچه $h \neq 0$ ثابت کنید که اتحادهای زیر بازای هر x برقرارند:

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos(x + h/2),$$

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(x + h/2).$$

این دستورها در حساب دیفرانسیل مورد استفاده قرار می گیرند.

۱۶. هریک از احکام زیر را اثبات یا رد کنید.

(الف) بازای هر $x \neq 0$ داریم $\sin 2x \neq 2 \sin x$.

(ب) بازای هر x ، y هست بطوری که $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$.

(پ) $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ ، y بازای هر x هست.

(ت) $\int_0^y \sin x \, dx = \sin y$ مخالف صفر وجود دارد قسمی که y .

۱۷. انتگرال $\int_a^b \sin x \, dx$ را بازای هریک از مقادیر زیر از a و b حساب کنید. در هر مورد نتیجه خود را بطور هندسی بر حسب مساحات تعبیر نمایید.

(الف) $b = \pi/6$ ، $a = 0$

(ب) $b = \pi/4$ ، $a = 0$

(پ) $b = \pi/3$ ، $a = 0$

(ت) $b = \pi/2$ ، $a = 0$

(ث) $b = \pi$ ، $a = 0$

(ج) $b = 2\pi$ ، $a = 0$

(چ) $b = 1$ ، $a = -1$

(ح) $b = \pi/4$ ، $a = -\pi/6$

هریک از انتگرالهای تمرینات ۱۸ تا ۲۷ را حساب کنید.

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \cos t \right| dt \quad ۲۳ \quad \int_0^{\pi} (x + \sin x) dx \quad ۱۸$$

$$\int_{-\pi}^x \left| \frac{1}{2} + \cos t \right| dt \quad ۲۴ \quad \int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos x) dx \quad ۱۹$$

در صورتی که $0 \leq x \leq \pi$

$$\int_x^{\pi/2} (t^2 + \sin t) dt \quad ۲۵ \quad \int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \quad ۲۰$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \quad ۲۶ \quad \int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x| dx \quad ۲۱$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} dx \quad ۲۷ \quad \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t \right) dt \quad ۲۲$$

۲۸. دستورهای انتگرالگیری زیر را، که بازای $b \neq 0$ معتبرند، ثابت کنید:

$$\int_0^x \cos(a + bt) dt = \frac{1}{b} [\sin(a + bx) - \sin a],$$

$$\int_0^x \sin(a + bt) dt = -\frac{1}{b} [\cos(a + bx) - \cos a].$$

۲۹. (الف) با استفاده از اتحاد $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ دستور انتگرالگیری

$$\int_0^x \sin^3 t dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} (2 + \sin^2 x) \cos x$$

را نتیجه بگیرید.

(ب) اتحاد $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ را نتیجه گرفته و آن را در اثبات

$$\int_0^x \cos^3 t dt = \frac{1}{3} (2 + \cos^2 x) \sin x$$

بکار برید.

۳۰. اگر تابع f متناوب با دوره تناوب $p > 0$ بوده و بر $[0, p]$ انتگرالپذیر باشد

ثابت کنید که بازای هر a

$$\int_0^p f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx.$$

۳۱. (الف) ثابت کنید بازای هر عدد صحیح $n \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0.$$

(ب) قسمت (الف) و دستورهای جمع برای سینوس و کسینوس را بکار برده دستورهای زیر را، که برای اعداد صحیح n و m که $m \neq n$ معتبرند، ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0; \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \quad n \neq 0$$

این دستورها به روابط تعامدی برای سینوس و کسینوس معروفند.

۳۲. از اتحاد

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin (2k+1) \frac{x}{2} - \sin (2k-1) \frac{x}{2}$$

و خاصیت نوی هم روی مجموعه‌های متناهی استفاده کرده ثابت کنید اگر $x \neq 2m\pi$ (m عددی صحیح است) خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{1}{2} nx \cos \frac{1}{2} (n+1)x}{\sin \frac{1}{2} x}.$$

۳۳. اگر $x \neq 2m\pi$ (m عددی صحیح است) ثابت کنید که

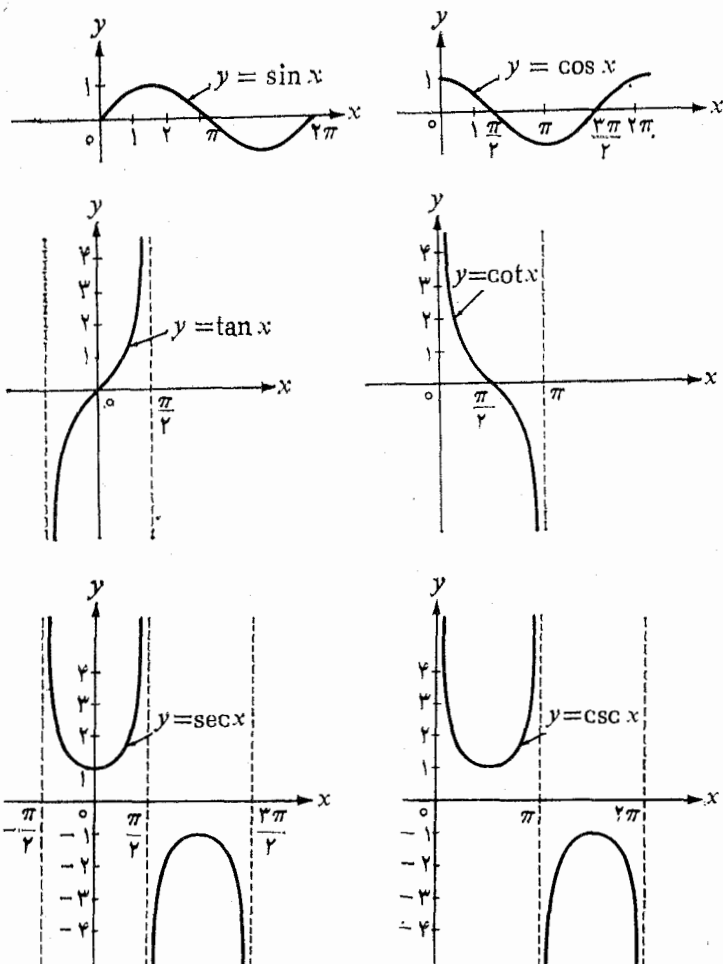
$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{1}{2} nx \sin \frac{1}{2} (n+1)x}{\sin \frac{1}{2} x}.$$

۳۴. به شکل ۷.۲ مراجعه کنید. با مقایسه مساحت مثلث OAP با مساحت قطاع مستدیر OAP

ثابت کنید اگر $0 < x < \pi/2$ ، $\sin x < x$. بعد، از این مطلب که

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$|\sin x| < |x|, \quad 0 < |x| < \pi/2$$



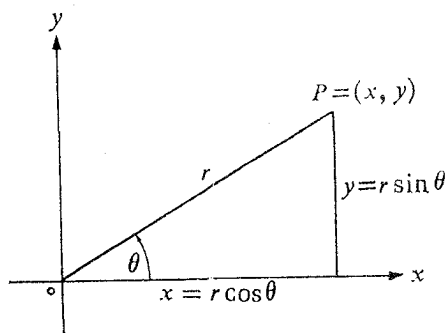
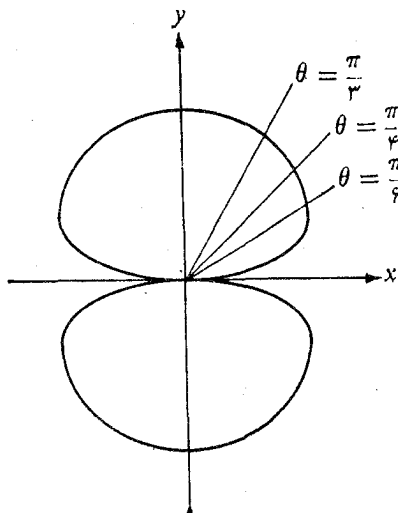
شکل ۱۵.۲ نمودارهای توابع مثلثاتی بصورتی که روی یک بازه تناوب ظاهر می‌شوند.

۹.۲ مختصات قطبی

تا بحال نقاط در صفحه را با مختصات قائم مشخص کرده‌ایم. می‌توانیم محل آنها را با مختصات قطبی هم تعیین کنیم. این کار بصورت زیر انجام می‌گیرد: فرض کنیم P نقطه‌ای باشد متمایز از مبدأ. همچنین پاره‌خطی که P را به مبدأ وصل می‌کند طولش $r > 0$ بوده و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ای برابر θ رادیان بسازد. مثالی در شکل ۱۱.۲ نموده شده است. دو عدد r و θ را مختصات قطبی P می‌نامند. اینها با معادلات

$$(15.2) \quad x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

به مختصات قائم (x, y) مربوط می‌شوند. عدد مثبت r را فاصله شعاعی P خوانده و θ را



شکل ۱۱.۲ مختصات قطبی.

شکل ۱۲.۲ منحنی شکل هشت با معادله قطبی

$$r = \sqrt{|\sin \theta|}.$$

یک زاویه قطبی می‌نامند. بجای آنکه بگوئیم زاویه قطبی می‌گوئیم یک زاویه قطبی، باین دلیل که اگر θ در (15.2) صدق کند $\theta + 2n\pi$ نیز بازای هر عدد صحیح n چنین می‌کند. می‌پذیریم که کلیه جفت‌هایی از اعداد حقیقی مثل (r, θ) را مختصات قطبی P بنامیم در صورتی که در (15.2) صدق کرده و $r > 0$. لذا یک نقطه مفروض بیش از یک جفت مختصات قطبی دارد. فاصله شعاعی r بطور منحصربه‌فرد تعیین می‌شود، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، اما زاویه قطبی θ فقط با تقریب مضرب صحیحی از 2π مشخص خواهد شد.

وقتی P مبدأ باشد معادلات (15.2) بازای $r = 0$ و هر θ صادق خواهند بود. بدین خاطر است که ما به مبدأ فاصله شعاعی $r = 0$ را نسبت داده و قبول می‌کنیم که هر θ حقیقی می‌تواند بعنوان یک زاویه قطبی آن بکار رود.

فرض کنیم f تابعی باشد نامنفی که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است. مجموعه همه نقاط با مختصات قطبی (r, θ) را که در $r = f(\theta)$ صدق می‌کنند نمودار f در مختصات قطبی می‌خوانند. معادله $r = f(\theta)$ معادله قطبی این نمودار نام دارد. ممکن است در مورد بعضی منحنیها بکار بردن معادلات قطبی از معادلات دکارتی ساده‌تر و راحت‌تر باشد. مثلاً دایره با معادله دکارتی $x^2 + y^2 = 4$ از معادله قطبی ساده‌تر $r = 2$ برخوردار است. معادلات (15.2) نشان می‌دهند که چگونه می‌توان مختصات قائم را به مختصات قطبی بدل کرد.

مثال. شکل ۱۲.۲ یک منحنی شبیه شکل هشت را نشان می‌دهد که معادله دکارتی اش $(x^2 + y^2)^3 = r^2$ است. با استفاده از (15.2) درمی‌یابیم که $x^2 + y^2 = r^2$ پس

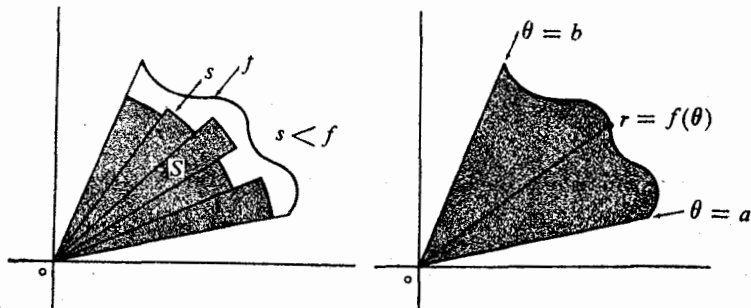
مختصات قطبی نقاط واقع بر این منحنی در معادله $r^2 = r^2 \sin^2 \theta$ یا $r^2 = |\sin \theta|$ یا $r = \sqrt{|\sin \theta|}$ صدق می‌کنند. رسم این منحنی با استفاده از معادله قطبی مشکل نیست. بعنوان مثال، در بازه $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، $\sin \theta$ از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، پس r نیز از ۰ تا ۱ زیاد خواهد شد. با رسم چند مقدار که آسان حساب می‌شوند، مثلاً "مقادیر متناظر $\theta = \pi/6, \theta = \pi/4, \theta = \pi/3$ ، می‌توانیم سرعت آن قسمت از منحنی را که در ربع اول قرار دارد بکشیم. بقیه منحنی با توسل به تقارن موجود در معادله دکارتی یا تقارن و خاصیت تناوبی $|\sin \theta|$ بدست می‌آید. رسم این منحنی فقط بکمک معادله دکارتی آن مشکلتر خواهد بود.

۱۰.۲ انتگرال مساحت در مختصات قطبی

فرض کنیم f تابعی باشد نامنفی که بر بازه $[a, b]$ که در آن $0 \leq b - a \leq 2\pi$ تعریف شده است. مجموعه همه نقاط با مختصات قطبی (r, θ) را که در نامساویهای

$$0 \leq r \leq f(\theta), a \leq \theta \leq b$$

صدق می‌کنند مجموعه شعاعی f روی $[a, b]$ می‌خوانند. ناحیه سایه‌دار نشان داده شده



شکل ۱۳.۲ مجموعه شعاعی f

شکل ۱۴.۲ مجموعه شعاعی تابع پله‌ای S اجتماعی از

قطعه‌های مستدیر است. مساحتش برابر $\frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta$ خواهد بود.

روی بازه $[a, b]$.

در شکل ۱۳.۲ یک نمونه است. چنانچه f بر $[a, b]$ ثابت باشد مجموعه شعاعی آن قطاع مستدیری است که زاویه‌ای برابر $b - a$ رادیان را در برمی‌گیرد. شکل ۱۴.۲ مجموعه شعاعی S یک تابع پله‌ای S را نشان می‌دهد. روی هریک از زیر بازه‌های باز (θ_{k-1}, θ_k) از $[a, b]$ که در آن S ثابت است، مثلاً $S_k = S(\theta)$ ، نموداری در مختصات قطبی قوس مستدیری بشعاع S_k خواهد بود، و مجموعه شعاعی آن قطاعی مستدیر است که زاویه‌ای برابر $\theta_k - \theta_{k-1}$ رادیان را در بر می‌گیرد. بنا بر نحوه تعریف اندازه زاویه، مساحت

این قطاع مساوی $s_k^2/2$ است. چون $a \leq b - 2\pi$ هیچ دو از این قطاعها همدیگر را قطع نمی کنند. پس، بر طبق جمع پذیری، مساحت مجموعه شعاعی S روی تمام بازه $[a, b]$ توسط

$$a(S) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2 (\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2} \int_a^b s^2(\theta) d\theta$$

داده می شود که در آن $s^2(\theta)$ بمعنی مربع $s(\theta)$ می باشد. لذا، برای توابع پله ای، مساحت مجموعه شعاعی بصورت انتگرال بیان شده است. حال ثابت می کنیم که این دستور انتگرالی بشکل عمومی تری برقرار است.

قضیه ۶۰۲. فرض کنیم R مبین مجموعه شعاعی تابع نامنفی f روی بازه $[a, b]$ باشد، که در آن $a \leq b - 2\pi$ و $0 \leq b - a$ ، و گیریم که R اندازه پذیر است. اگر f^2 بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد مساحت R توسط انتگرال

$$a(R) = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta$$

داده خواهد شد.

برهان. دو تابع پله ای s و t را طوری اختیار می کنیم که بازای هر θ در $[a, b]$ در نامساویهای

$$0 \leq s(\theta) \leq f(\theta) \leq t(\theta)$$

صدق کنند، و S و T را بترتیب مجموعه های شعاعی آنها می انگاریم. چون $s \leq f \leq t$ بر $[a, b]$ است پس مجموعه های شعاعی توسط روابط شمول $S \subseteq R \subseteq T$ بهم مربوط می شوند. لذا، طبق خاصیت یکنوایی مساحت، داریم $a(S) \leq a(R) \leq a(T)$. اما S و T مجموعه های شعاعی توابع پله ای هستند، پس $a(S) = [\int_a^b s^2(\theta) d\theta]/2$ و $a(T) = [\int_a^b t^2(\theta) d\theta]/2$. بنا براین، نامساویهای

$$\int_a^b s^2(\theta) d\theta \leq 2a(R) \leq \int_a^b t^2(\theta) d\theta$$

را برای کلیه توابع پله ای s و t که بر $[a, b]$ $s \leq f \leq t$ صدق می کنند خواهیم داشت. اما $s^2 \leq f^2 \leq t^2$ در $[a, b]$ دلخواهی هستند که بر $[a, b]$ $s^2 \leq f^2 \leq t^2$ صدق می کنند، پس، از آنجا که f^2 انتگرال پذیر است، باید داشته باشیم $2a(R) = \int_a^b f^2(\theta) d\theta$. این قضیه را ثابت می کند.

توجه: می توان ثابت کرد که اندازه پذیری R از فرض انتگرال پذیر بودن f^2 نتیجه می شود، ولی ما اثبات این مطلب را مطرح نخواهیم کرد.

مثال. برای آنکه مساحت مجموعه شعاعی R را که منحنی شکل هشت مشهود در شکل

۱۲.۲ آن را در برگرفته محاسبه کنیم مساحت قسمتی را که در ربع اول قرار دارد حساب کرده و آن را در چهار ضرب می‌نمائیم. برای این منحنی داریم $f^2(\theta) = |\sin \theta|$ و چون بازای $0 \leq \theta \leq \pi/2$ داریم $\sin \theta \geq 0$ درمی‌یابیم که

$$a(R) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ = 2 [\cos 0 - \cos(\pi/2)] = 2.$$

۱۱.۲ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۴ نشان دهید که مجموعه نقاطی که مختصات قائم (x, y) آنها در معادله دکارتی داده شده صدق می‌کنند برابر است با مجموعه کلیه نقاطی که مختصات قطبی (r, θ) ی آنها در معادله قطبی متناظر صدق می‌نمایند.

$$\cos \theta > 0, r = 2 \cos \theta; (x-1)^2 + y^2 = 1. \quad 1.$$

$$r = 1 + \cos \theta; x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad 2.$$

$$\cos 2\theta \geq 0, r = \sqrt{\cos 2\theta}; y^2 \leq x^2, (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \quad 3.$$

$$r = \sqrt{|\cos 2\theta|}; (x^2 + y^2)^2 = |x^2 - y^2|. \quad 4.$$

در هر یک از تمرینات ۵ تا ۱۵ نمودار f را در مختصات قطبی بکشید و مساحت مجموعه شعاعی r را روی بازه تعیین شده محاسبه نمایید. می‌توانید هر مجموعه را اندازه‌پذیر بدانید.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = \theta: \text{مارپیچ ارشمیدس}. \quad 5.$$

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, f(\theta) = 2 \cos \theta: \text{دایره مماس بر محور } y. \quad 6.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = 2 |\cos \theta|: \text{دو دایره مماس بر محور } y. \quad 7.$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, f(\theta) = 4 \sin \theta: \text{دایره مماس بر محور } x. \quad 8.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = 4 |\sin \theta|: \text{دو دایره مماس بر محور } x. \quad 9.$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, f(\theta) = \sin 2\theta: \text{پر دژ}. \quad 10.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = |\sin 2\theta|: \text{دز چهار برگ}. \quad 11.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = \sqrt{|\cos \theta|}: \text{هشت تنبل}. \quad 12.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = \sqrt{|\cos 2\theta|}: \text{شبدر چهار برگ}. \quad 13.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = 1 + \cos \theta: \text{دلگون}. \quad 14.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, f(\theta) = 2 + \cos \theta: \text{لیماسون}. \quad 15.$$

۱۲.۲ کاربرد انتگرالگیری در محاسبه حجم

در بخش ۶.۱ مفهوم مساحت را بصورت یک تابع مجموعه‌ای معرفی کردیم که از چند خاصیت، که آنها را اصول موضوع برای مساحت گرفتیم، برخوردار بود. بعد، در بخشهای

۱۸۰۱ و ۲۰۲، نشان دادیم که می توان مساحت بسیاری از نواحی را توسط انتگرال گیری حساب کرد. همین روش را می شود در بحث مفهوم حجم بکار گرفت.

فرض کنیم مجموعه های مشخصی از نقاط چون S در فضای سه بعدی وجود دارند که ما آنها را مجموعه های اندازه پذیر می نامیم، و نیز تابع مجموعه ای v ، بنام تابع حجم، هست که به هر مجموعه اندازه پذیر S عدد $v(S)$ ، بنام حجم S ، را نسبت می دهد. ما علامت A را برای نمایش رده کلیه مجموعه های اندازه پذیر در فضای سه بعدی بکار می بریم، و هر مجموعه S در A را یک جسم می خوانیم.

مثل حالت مساحت، تعدادی از خواص را که می خواهیم حجم داشته باشد ذکر کرده و آنها را بعنوان اصول موضوع برای حجم اختیار می کنیم. انتخاب اصول موضوع به ما این توان را می دهد تا ثابت کنیم که حجم بسیاری از اجسام را می شود بوسیله انتگرال گیری محاسبه نمود.

سه اصل موضوع اول، نظیر حالت مساحت، خواص نامنفی بودن، جمع پذیری، و تقاضایی را وصف می کنند. بجای اصل موضوع پایائی تحت همنهشتی نوع دیگری اصل موضوع، بنام اصل کاوالیری، را بکار می گیریم. این اصل به اجسام همنهشت و نیز برخی از اجسام که، درعین ناهمنهشت بودن، مساحت های مقاطع عرضی آنها بوسیله صفحات عمود برخطی مفروض یکی است احجام مساوی نسبت می دهد. بعبارت دقیقتر، فرض کنیم S یک جسم و L خطی مفروض باشد. اگر صفحه F بر L عمود باشد اشتراک $F \cap S$ را مقطع عرضی عمود بر L می خوانند. چنانچه هر مقطع عرضی عمود بر L در صفحه خود اندازه پذیر باشد S را یک جسم کاوالیری می نامیم. اصل کاوالیری به دو جسم کاوالیری S و T در صورتی احجام مساوی نسبت می دهد که بازای هر صفحه F عمود برخط مفروض L داشته باشیم $a(S \cap F) = a(T \cap F)$.

اصل کاوالیری را می توان شهوداً این طور تجسم کرد: یک جسم کاوالیری را بصورت توده ای از ورقه های نازک از یک جنس، مثلاً یک دسته ورق، در نظر آورید که هر ورقه برخط مفروض L عمود است. چنانچه هر ورقه را در صفحه خودش بلغزانیم می توانیم شکل جسم را تغییر دهیم ولی نه حجمش را.

اصل موضوع بعدی این را می گوید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب طول یالهای آن. یک مکعب مستطیل مجموعه ای است که با مجموعه

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\} \quad (۱۶.۲)$$

همنهشت باشد. ما بجای «مکعب مستطیل» از اصطلاح کوتاهتر «جعبه» استفاده خواهیم کرد. اعداد نامنفی a, b, c در (۱۶.۲) را طول یالهای جعبه می نامند.

بالاخره، اصل موضوعی را می گنجانیم مبین آنکه هر مجموعه محدب اندازه پذیر است. مجموعه ای را محدب خوانند هرگاه بازای هر جفت از نقاط P و Q در آن پاره خط واصل بین P و Q نیز در مجموعه باشد. این اصل موضوع، همراه با خواص جمع پذیری و تقاضایی، این اطمینان را می دهد که کلیه اجسام مقدماتی که در کاربرد های معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می شوند اندازه پذیر می باشند.

حال می‌توان اصول موضوع حجم را بصورت زیر بیان کرد.

تعریف اصل موضوعی حجم. فرض کنیم دده A از اجسام و تابع مجموعه‌ای v ، که قلمروش A است، وجود دارند با این خواص:

۱. خاصیت نامنفی بودن. بازای هر مجموعه S در A داریم $v(S) \geq 0$.

۲. خاصیت جمعپذیری. هرگاه S و T در A باشند آنگاه $S \cup T$ و $S \cap T$ نیز در A هستند و داریم

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T).$$

۳. خاصیت تفاضلی. هرگاه S و T در A باشند و $S \subseteq T$ آنگاه $T - S$ نیز در A است و داریم $v(T - S) = v(T) - v(S)$.

۴. اصل کاوالیری. هرگاه S و T دو جسم کاوالیری در A بوده و بازای هر صفحه F عمود برخطی مفروض داشته باشیم $a(S \cap F) \leq a(T \cap F)$ آنگاه $v(S) \leq v(T)$.

۵. انتخاب مقیاس. هرجعبه B در A است. هرگاه یالهای B طولهای a ، b ، و c داشته باشند آنگاه $v(B) = abc$.

۶. هر مجموعه محدب در A است.

اصل موضوع ۳ نشان می‌دهد که مجموعه تهی $\emptyset$ در A بوده و از حجم صفر برخوردار است. چون $v(T - S) \geq 0$ این اصل خاصیت یکنوایی زیر را نیز ایجاب می‌کند:

بازای مجموعه‌های S و T در A که $S \subseteq T$ ، $v(S) \leq v(T)$.

خاصیت یکنوایی بنوبه خود نشان می‌دهد که هر مجموعه مسطح کراندار S در A حجمی برابر صفر دارد. یک مجموعه مسطح را کراندار نامند اگر که زیرمجموعه یک مربع در صفحه باشد. هرگاه جعبه B را با ارتفاع c و بقاعده این مربع در نظر بگیریم آنگاه $S \subseteq B$ ، پس داریم $v(S) \leq v(B) = a^2 c$ که در آن a طول هر یال مربع قاعده است. اگر می‌داشتیم $v(S) > 0$ می‌توانستیم c را طوری اختیار کنیم که $v(S)/a^2 < c$ ، که با نامساوی $v(S) \leq a^2 c$ متناقض است. این نشان می‌دهد که $v(S)$ نمی‌تواند مثبت باشد. پس، همانطور که حکم شده، $v(S) = 0$.

توجه کنید که اصل کاوالیری بشکل نامساویها بیان شده است. چنانچه بازای هر صفحه F عمود برخطی مفروض داشته باشیم $a(S \cap F) = a(T \cap F)$ می‌توانیم اصل موضوع ۴ را دوبار بکار برده نتیجه بگیریم که $v(S) \leq v(T)$ و $v(T) \leq v(S)$ ، و در نتیجه خواهیم داشت $v(T) = v(S)$.

اینک نشان می‌دهیم که حجم یک جسم استوانه‌ای قائم مساوی مساحت قاعده در ارتفاع آن است. منظور ما از یک جسم استوانه‌ای قائم یعنی مجموعه‌ای که با مجموعه S بشکل

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in B, a \leq z \leq b\},$$

که در آن B یک مجموعه اندازه‌پذیر مسطح‌کراندار است، همنهشت باشد. مساحت‌های مقاطع عرضی S که عمود بر محور z هستند تابع مساحت مقطع عرضی a_S را مشخص می‌کنند که بر بازه $a \leq z \leq b$ مقدار ثابت $a(B)$ و در خارج $[a, b]$ مقدار ۰ را می‌گیرد.

حال فرض کنیم T جعبه‌ای با تابع مساحت مقطع عرضی a_T مساوی a_S باشد. اصل موضوع ۵ به ما می‌گوید که $v(T) = a(B)(b - a)$ که در آن $a(B)$ مساحت قاعده T و $b - a$ ارتفاع آن است. اصل کاوالیری می‌گوید که $v(S) = v(T)$ پس حجم S مساوی مساحت قاعده آن، یعنی $a(B)$ ، ضربدر ارتفاعش، یعنی $b - a$ ، می‌باشد. توجه کنید که حاصلضرب $a(B)(b - a)$ انتگرال تابع a_S روی بازه $[a, b]$ می‌باشد. عبارت دیگر، حجم یک جسم استوانه‌ای قائم مساوی انتگرال تابع مساحت مقطع عرضی است، یعنی

$$v(S) = \int_a^b a_S(z) dz.$$

این دستور را می‌توان به اجسام کاوالیری کلیتری تعمیم داد. فرض کنیم R یک جسم کاوالیری با مقاطع عرضی اندازه‌پذیر عمود بر خط مفروض L باشد. محور مختصات را در امتداد L (آن را محور u بنامید) گرفته و فرض می‌کنیم $a_R(u)$ مساحت مقطع عرضی باشد که توسط صفحه عمود بر L در نقطه u جدا می‌شود. حجم R را می‌توان از قضیه زیر حساب کرد.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم R یک جسم کاوالیری در A با تابع مساحت مقطع عرضی a_R که بر بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر و در خارج $[a, b]$ صفر است باشد. در اینصورت حجم R مساوی است با انتگرال مساحت مقطع عرضی:

$$v(R) = \int_a^b a_R(u) du.$$

برهان. توابع پله‌ای s و t را طوری اختیار می‌کنیم که بر $[a, b]$ داشته باشیم $a_R \leq s \leq t$ و s و t را در خارج $[a, b]$ صفر تعریف می‌کنیم. برای هر زیربازه $[a, b]$ که بر آن s ثابت باشد می‌توانیم جسمی استوانه‌ای را در نظر آوریم (مثلاً یک استوانه مستدیر قائم) که این طور ساخته شده باشد که مساحت مقطع عرضی آن برابر با همان مقدار ثابت s را داشته باشد. اجتماع این استوانه‌ها روی همه بازه‌های ثابت s جسمی است چون S که حجمش $v(S)$ بنا بر جمع‌پذیری، مساوی انتگرال $\int_a^b s(u) du$ می‌باشد. به همین نحو، جسمی مثل T ، مساوی اجتماع‌های از استوانه‌ها، وجود دارد که حجم آن $v(T) = \int_a^b t(u) du$ خواهد بود. اما، بازای هر u در $[a, b]$ ،

$a_s(u) = s(u) \leq a_R(u) \leq t(u) = a_T(u)$ پس اصل کاوالیرسی ایجاب می کند که
 $v(S) \leq v(R) \leq v(T)$ بعبارت دیگر، در نامساویهای

$$\int_a^b s(u) du \leq v(R) \leq \int_a^b t(u) du,$$

بازای کلیه توابع پله ای s و t صادق در $t \leq a_s \leq s \leq [a, b]$ ، صدق می نماید. چون
 a_s بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است نتیجه می شود که $v(R) = \int_a^b a_s(u) du$.

مثال. حجم یک جسم دوار. فرض کنیم f تابعی باشد که بر بازه $[a, b]$ نامنفی و
 انتگرالپذیر است. چنانچه مجموعه عرضی این تابع حول محور x بچرخد جسمی دوار را
 می پیماید. هر مقطع عرضی بریده شده توسط یک صفحه عمود بر محور x قرصی مستدیر
 است. مساحت قرص مستدیر بریده شده در نقطه x برابر $\pi f^2(x)$ است که در آن $f^2(x)$
 بمعنی مربع $f(x)$ می باشد. بنابراین، طبق قضیه ۷.۲، حجم جسم (چنانچه جسم در A باشد)
 مساوی انتگرال $\int_a^b \pi f^2(x) dx$ (در صورت وجود) خواهد بود. بخصوص، اگر بازای
 $r \leq x \leq r$ داشته باشیم $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ، مجموعه عرضی f قرصی نیمه مستدیر
 بشاع r بوده و جسم پیموده شده کره ای بشاع r می باشد. کره محذب است. حجم آن مساوی است با

$$\int_{-r}^r \pi f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

کلیتر بگوئیم، فرض کنیم دو تابع نامنفی f و g داریم که بر بازه $[a, b]$ انتگرالپذیر
 بوده و در $g \leq f$ بر $[a, b]$ صدق نمایند. وقتی ناحیه بین نمودارهای آنها حول محور
 x می چرخد جسمی دوار را می پیماید بطوری که هر مقطع عرضی که توسط صفحه عمود
 بر محور x در نقطه x از آن جدا می شود یک حلقه دایره (ناحیه ای محدود به دو دایره
 متحدالمرکز) است با مساحت $\pi g^2(x) - \pi f^2(x)$. بنابراین، اگر $f^2 - g^2$ انتگرالپذیر
 باشد، حجم این چنین جسم (در صورت واقع بودن در A) با انتگرال

$$\int_a^b \pi [g^2(x) - f^2(x)] dx$$

داده می شود.

۱۳.۲ تمرینات

- از انتگرالگیری استفاده کرده حجم مخروط مستدیر قائمی را که از دوران مجموعه
 عرضی تابع خطی $f(x) = cx$ روی بازه $0 \leq x \leq b$ تولید می شود محاسبه کنید.
 نشان دهید که حجم حاصل یکسوم مساحت قاعده ضربدر ارتفاع مخروط است.
 در هر یک از تمرینات ۲ تا ۷ حجم جسمی را که از دوران مجموعه عرضی
 تابع f روی بازه تعیین شده تولید می شود محاسبه کنید. هر یک از مجموعه های عرضی
 را کشید.

۵. $0 \leq x \leq \pi$ ، $f(x) = \sin x$. ۵. $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = \sqrt{x}$. ۲
 ۶. $0 \leq x \leq \pi/2$ ، $f(x) = \cos x$. ۶. $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = x^{1/4}$. ۳
 ۷. $-1 \leq x \leq 2$ ، $f(x) = x^2$. ۴
 ۸. $0 \leq x \leq \pi$ ، $f(x) = \sin x + \cos x$. ۷

در هر یک از تمرینات ۸ تا ۱۱ ناحیه بین نمودارهای f و g را رسم کنید و حجم جسمی را که از دوران این ناحیه حول محور x پدید می آید محاسبه نمایید.

۸. $0 \leq x \leq 1$ ، $g(x) = 1$ ، $f(x) = \sqrt{x}$. ۸
 ۹. $0 \leq x \leq 1$ ، $g(x) = x^2$ ، $f(x) = \sqrt{x}$. ۹
 ۱۰. $0 \leq x \leq \pi/4$ ، $g(x) = \cos x$ ، $f(x) = \sin x$. ۱۰
 ۱۱. $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ ، $g(x) = 1$ ، $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. ۱۱

۱۲. نمودارهای $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x/2$ را روی بازه $[0, 2]$ بکشید. عدد t را،

که $0 < t < 2$ ، چنان بیابید که وقتی ناحیه بین نمودارهای f و g روی بازه $[0, t]$ حول محور x بچرخد جسم دواری را بیابید که حجمش مساوی $\pi t^3/3$ باشد.

۱۳. چنانچه در یک کره نوپر بشعاع ۲۲ سوراخی بشعاع ۳ در امتداد مرکز ایجاد کنیم چه حجمی از آن کاسته خواهد شد؟

۱۴. یک حلقه دسّمال سفره این طور تشکیل می شود که در امتداد مرکز یک کره توپر سوراخی استوانه ای بطور متقارن ایجاد کنیم. چنانچه طول سوراخ $2h$ باشد ثابت کنید حجم حلقه دسّمال سفره برابر πah^3 است که در آن a عدد گویائی می باشد.

۱۵. جسمی دارای قاعده مستدیری بشعاع ۲ است. هر مقطع عرضی بریده شده توسط صفحه ای عمود بر یک قطر ثابت آن یک مثلث متساوی الاضلاع می باشد. حجم جسم را حساب کنید.

۱۶. مقاطع عرضی یک جسم مربعهائی هستند عمود بر محور x که مراکزشان بر این محور واقعند. چنانچه مربع قطع شده در x بضلع $2x^2$ باشد حجم جسم را بین $x = 0$ و $x = a$ بیابید. شکل را رسم کنید.

۱۷. حجم جسمی را بیابید که مقطع عرضی ایجاد شده بوسیله صفحه ای عمود بر محور x ، بازای هر x در بازه $0 \leq x \leq h$ ، دارای مساحت $ax^2 + bx + c$ باشد. حجم را بر حسب مساحت B_1 ، M ، و B_2 مقاطع عرضی که بترتیب متناظر $x = 0$ ، $x = h/2$ ، و $x = h$ می باشند بیان دارید. دستور حاصل به دستود منشودگون معروف است.

۱۸. ناحیه واقع در صفحه xy مرکب از کلیه نقاط (x, y) را که در نامساویهای همزمان $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 1$ و $x^2/4 \leq y$ صدق می کنند رسم نمایید. حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول این خطوط را خطوط را حساب کنید: (الف) محور x ؛ (ب) محور y ؛ (پ) خط قائم مار بر $(0, 2)$ ؛ (ت) خط افقی مار بر $(0, 1)$.

۱۴.۲ کاربرد انتگرالگیری در مفهوم کار

تاکنون کاربردهای ما از انتگرالگیری در مورد مساحت و حجم، یعنی مفاهیمی از هندسه، بوده‌اند. حال کاربردی را در مورد کار، که مفهومی از فیزیک است، مورد بحث قرار می‌دهیم. کار آن انرژی را اندازه می‌گیرد که توسط یک نیرو در حرکت یک جسم از نقطه‌ای به نقطه دیگر صرف می‌شود. در این بخش ما فقط ساده‌ترین حالت، یعنی حرکت خطی، را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم حرکت در امتداد یک خط (که ما آن را محور x می‌گیریم) از نقطه‌ای، مثلاً $x = a$ ، به نقطه دیگر، مثلاً $x = b$ ، صورت می‌گیرد، و نیز فرض می‌کنیم نیرو در امتداد این خط اثر می‌کند. می‌پذیریم که یا $a < b$ یا $b < a$. همچنین فرض می‌کنیم نیروی وارد بر جسم تابعی از مکان باشد. چنانچه جسم در x باشد $f(x)$ را نیروی وارد بر آن می‌انگاریم که، در صورتی که نیرو در جهت مثبت محور x اثر کند، $f(x) > 0$ و، اگر در خلاف این جهت عمل نماید، $f(x) < 0$. وقتی نیرو ثابت باشد، مثلاً بازای هر x بین a و b داشته باشیم $f(x) = c$ ، کار انجام شده بوسیله f را با عدد $(b-a) \cdot c$ ، یعنی نیرو ضربدر تغییر مکان، تعریف می‌کنیم. کار ممکن است مثبت یا منفی باشد.

اگر نیرو با پوند و فاصله با فوت اندازه‌گیری شود کار را با پوند-فوت اندازه می‌گیریم. چنانچه نیرو به دین و فاصله به سانتیمتر (دستگاه cgs) باشد کار بر حسب دین-سانتیمتر سنجیده می‌شود. هر دین-سانتیمتر کار یک ادگ نام دارد. چنانچه نیرو به نیوتن و فاصله به متر (دستگاه mks) باشد کار به نیوتن-متر خواهد بود. هر نیوتن-متر کار یک ژول گفته می‌شود. یک نیوتن ۱۰۵ دین و یک ژول ۱۰۷ ارگ است.

مثال. سنگی بوزن ۳ پوند که در امتداد خطی مستقیم بطرف بالا پرتاب شده به ارتفاع ۱۵ فوتی رسیده و به زمین بازمی‌گردد. محور x را بسوی بالا در امتداد خط حرکت می‌گیریم. نیروی ثابت ثقل بطرف پایین اثر می‌کند، پس بازای هر x که $0 \leq x \leq 15$ ، $f(x) = -3$. کار نیروی ثقل در حرکت سنگ از، مثلاً، ۶ فوت $x = 6$ تا ۱۵ فوت $x = 15$ برابر است با ۲۷ - پوند-فوت $= -3 \cdot (15 - 6)$. وقتی همین سنگ از ۱۵ فوت $x = 15$ تا ۶ فوت $x = 6$ سقوط می‌کند کار نیروی ثقل مساوی ۲۷ پوند-فوت $= -3 \cdot (6 - 15)$ خواهد بود.

حال فرض کنیم نیرو لزوماً ثابت نبوده بلکه تابع مفروضی از مکان باشد که بر بازه‌ای که a و b را بهم وصل می‌کند تعریف شده است. می‌پرسیم کار f در حرکت جسمی از a تا b را چگونه تعریف کنیم؟ گوئیم نحوه عمل تقریباً بهمان صورتی است که در مورد مساحت و حجم کردیم. چند خاصیت کار را که نیازهای فیزیکی به ما تلقین می‌کنند بیان می‌داریم. بعد ثابت می‌کنیم که، در مورد هر تعریفی از کار که این خواص را داشته باشد، کار تابع نیروی انتگرالپذیر f مساوی انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ خواهد بود.

خواص اساسی کار. فرض کنیم $W_a^b(f)$ کار تابع نیروی f را در حرکت جسمی از a به b

نشان دهد. در اینصورت کار از خواص زیر برخوردار است:

۱. خاصیت جمعپذیری. هرگاه $a < c < b$ آنگاه $W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f)$.

۲. خاصیت یکنوایی. هرگاه $f \leq g$ بر $[a, b]$ باشد آنگاه $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$.
یعنی نیروی بزرگتر کار بیشتر انجام می‌دهد.

۳. دستور مقدماتی. هرگاه f ثابت باشد، مثلاً بازای هر x در بازه (a, b) داشته باشیم $f(x) = c$ ، آنگاه $W_a^b(f) = c \cdot (b - a)$.

خاصیت جمعپذیری را می‌توان باستقرا به هر تعداد متناهی بازه تعمیم داد. یعنی، اگر $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ داریم

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^n W_{x_{k-1}}^{x_k}(f)$$

که در آن W_k کار f از x_{k-1} تا x_k می‌باشد. بویژه، اگر نیرو تابع پله‌ای s باشد که بر بازه (x_{k-1}, x_k) مقدار ثابت s_k را بگیرد، خاصیت ۳ چنین می‌گوید که $W_k = s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ پس خواهیم داشت

$$W_a^b(s) = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x) dx.$$

لذا کار در مورد توابع پله‌ای بصورت انتگرال بیان شده است. حال اثبات اینکه این مطلب بطور کلیتری برقرار است آسان می‌باشد.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم کار برای ددهای از توابع نیروی f طوری تعریف شده باشد که خواص ۱، ۲ و ۳ را دارا باشد. در اینصورت کار تابع نیروی انتگرالپذیر f در حرکت جسمی از a تا b برابر است با انتگرال f ، یعنی

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

برهان. فرض کنیم s و t دو تابع پله‌ای باشند که در نامساویهای $s \leq f \leq t$ بر $[a, b]$ صدق می‌کند. خاصیت یکنوایی کار چنین می‌گوید که $W_a^b(s) \leq W_a^b(f) \leq W_a^b(t)$.
لکن $W_a^b(s) = \int_a^b s(x) dx$ و $W_a^b(t) = \int_a^b t(x) dx$ ، پس عدد $W_a^b(f)$ در نامساویهای

$$\int_a^b s(x) dx \leq W_a^b(f) \leq \int_a^b t(x) dx,$$

بازای کلیه توابع پله‌ای s و t صادق در $s \leq f \leq t$ بر $[a, b]$ ، صدق خواهد کرد. از آنجا که f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است نتیجه می‌شود که $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx$.

توجه: بسیاری از مؤلفان کار را فقط بصورت انتگرال تابع نیرو تعریف می‌کنند. بحث پیشگفته انگیزه این تعریف می‌باشد.

مثال. کار لازم برای کشیدن يك فنر. فرض می‌کنیم نیروی لازم $f(x)$ برای آنکه طول طبیعی فنری فولادی باندازه x افزایش یابد متناسب با x باشد (قانون هوك). محور x را در امتداد محور فنر قرار می‌دهیم. چنانچه نیروی کشنده درجهت مثبت محور اثر کند خواهیم داشت $f(x) = cx$ که در آن ثابت فنر c مثبت است. (اگر نیروی $f(x)$ را بازای مقدار خاصی از $x \neq 0$ بدانیم c را می‌شود معین کرد). کار لازم برای کشیدن فنر باندازه a عبارتست از $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a cx dx = ca^2/2$ ، که عددی است متناسب با مجذور تغییر مکان.

در جلد ۲، بکمک انتگرالهای خط، کار مربوط به حرکاتی که در امتداد منحنیهائی غیر از خطوط مستقیم صورت می‌گیرند بحث خواهد شد.

۱۵.۲ تمرینات

- در تمرینات ۱ و ۲ فرض کنید نیروی وارد بر فنر از قانون هوك تبعیت می‌کند.
 ۱. اگر یک نیروی ده پوندی فنر قابل ارتجاعی را باندازه یک اینچ بکشد کار انجام شده برای کشیدن آن باندازه یک فوت چقدر است؟
 ۲. فنری طول طبیعی‌اش یک متر است. نیروی ۱۰۰ نیوتنی آن را به ۰٫۹ متر جمع می‌کند. چند ژول کار لازم است تا آن را به نصف طول طبیعی‌اش برسانند؟ وقتی ۲۰ ژول کار صرف شود طول فنر چه خواهد بود؟
 ۳. جسمی در امتداد محور x با نیروی محرک $f(x) = 3x^2 + 4x$ نیوتن حرکت می‌کند. حساب کنید چند ژول کار با این نیرو انجام می‌گیرد تا جسم (الف) از $x = 0$ به $x = 7$ متر برسد؛ (ب) از $x = 2$ متر به $x = 7$ متر برسد.
 ۴. جسمی در امتداد محور x با نیروی محرک درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx$ حرکت می‌کند. a و b را در صورتی حساب کنید که ۹۰۰ ارگ کار لازم باشد تا جسم را ده سانتیمتر از مبدأ دور سازد و، وقتی ۵ سانتیمتر x ، نیرو ۶٫۵ دین باشد.
 ۵. کابلی بطول ۵۰ فوت و وزن ۴ پوند در فوت از یک چرخ چاه آویزان است. کار انجام شده را در صورتی که ۲۵ فوت کابل دور چرخ بپیچد محاسبه نمایید. از تمام نیروها غیر از نیروی ثقل صرف نظر کنید.
 ۶. تمرین ۵ را در حالتی حل کنید که به انتهای کابل وزنه‌ای ۵۰ پوندی وصل شده باشد.
 ۷. وزنه‌ای ۱۵۰ پوندی به یک سرزنجر قابل انعطاف بلندی بوزن ۲ پوند در فوت وصل شده است. ابتدا وزنه درحالی که ۱۰ فوت از زنجربر روی لبه ساختمانی بارتفاع ۱۰۰ فوت

قرار گرفته آویزان است. از تمام نیروها بجز نیروی ثقل صرفنظر کرده و کار نیروی ثقل را تا وقتی که وزنه به ۱۰ فوتی زمین می‌رسد محاسبه نمائید.

۸. در تمرین ۷ فرض کنید زنجیر فقط ۵ فوت بوده و بگذاریم وزنه و زنجیر از همان موضع اولیه قبلی به زمین بیفتد. مقدار کار نیروی ثقل را وقتی وزنه به زمین می‌رسد حساب کنید.

۹. فرض کنید $V(q)$ ولتاژ لازم برای شارژ یک خازن با اندازه q باشد. کار لازم برای شارژ خازنی از $q = a$ تا $q = b$ با انتگرال $\int_a^b V(q) dq$ تعریف می‌شود. چنانچه ولتاژ با بار الکتریکی متناسب باشد ثابت کنید کار مورد نیاز برای گذاشتن بار Q بر یک خازن خالی برابر $QV(Q)/2$ است.

۱۶.۲ مقدار متوسط یک تابع

اغلب در کارهای علمی لازم است چند اندازه‌گیری تحت شرایطی مشابه انجام شود و بعد، برای تلخیص اطلاعات، متوسط یا میانگین آنها محاسبه گردد. متوسطهای مفید متعددی وجود دارند که معمولی‌ترین آنها میانگین حسابی است. اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ عدد حقیقی باشند میانگین حسابی آنها $\bar{a}$ با معادله

$$(17.2) \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

تعریف می‌شود. هرگاه اعداد a_k مقادیر تابع f در n نقطه متمایز باشند، مثلاً $a_k = f(x_k)$ ، آنگاه عدد

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

میانگین حسابی مقادیر تابعی $f(x_1), \dots, f(x_n)$ خواهد بود. می‌توانیم این مفهوم را تعمیم داده و مقدار متوسط را نه فقط برای تعدادی متناهی از مقادیر $f(x)$ بلکه برای کلیه مقادیر $f(x)$ ، وقتی x در یک بازه تغییر می‌کند، حساب کنیم. تعریف زیر این مقصود را برمی‌آورد.

تعریف مقدار متوسط یک تابع بر یک بازه. اگر f بر بازه $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد $A(f)$ یعنی مقدار متوسط f بر $[a, b]$ را بدستود

$$(18.2) \quad A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

تعریف می‌کنیم.

این دستور زمانی که f نامنفی باشد از تعبیر هندسی ساده‌ای برخوردار است. چنانچه بشکل $(b-a)A(f) = \int_a^b f(x) dx$ نوشته شود بیانگر آن است که مستطیلی با ارتفاع $A(f)$ و قاعده $[a, b]$ مساحتی مساوی مساحت مجموعه عرضی f روی $[a, b]$ دارد.

حال می‌توانیم نشان دهیم که دستور (۱۸.۲) عملاً تعمیمی از مفهوم میانگین حسابی است. فرض کنیم f یک تابع پله‌ای باشد که بر n زیر بازه مساوی از $[a, b]$ ثابت است. بطور دقیق فرض می‌کنیم بازای n ، $0, 1, 2, \dots, n$ ، $x_k = a + k(b-a)/n$ و اگر $x_{k-1} < x < x_k$ ، $f(x) = f(x_k)$ ، در این صورت $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ پس خواهیم داشت

$$A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

لذا، در مورد توابع پله‌ای، متوسط $A(f)$ همان میانگین حسابی مقادیر $f(x_1), \dots, f(x_n)$ است که بر بازه‌های ثابت گرفته شده‌اند.

اغلب در (۱۷.۲) از میانگینهای حسابی وزندار بجای میانگین حسابی معمولی استفاده می‌شود. چنانچه $w_1, w_2, \dots, w_n$ عدد نامنفی (بنام وزنها) باشند که همه صفر نیستند، میانگین حسابی وزندار $\bar{a}$ از $a_1, a_2, \dots, a_n$ با دستور

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=1}^n w_k a_k}{\sum_{k=1}^n w_k}$$

تعریف می‌گردد. وقتی تمام وزنها مساوی باشند این تعریف به تعریف میانگین حسابی معمولی تحویل می‌شود. تعمیم این مفهوم به توابع انتگرالپذیر با دستور

$$(۱۹.۲) \quad A(f) = \frac{\int_a^b w(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}$$

داده می‌شود که در آن w یک تابع وزن نامنفی است با این فرض که $\int_a^b w(x) dx \neq 0$. متوسطهای وزندار، علاوه بر ریاضیات، در فیزیک و مهندسی بسیار بکار می‌آیند. مثلاً میله راستی بطول a را در نظر بگیرید که از ماده‌ای با چگالی متغیر ساخته شده است. میله را در امتداد مثبت محور x قرار می‌دهیم بطوری که یک سرش در مبدأ 0 باشد، و فرض می‌کنیم $m(x)$ جرم قسمتی از میله باشد که طولش (از 0 اندازه‌گیری می‌شود) x است. هرگاه بازای تابع انتگرالپذیری چون ρ (حرف یونانی دو است) داشته باشیم $m(x) = \int_0^x \rho(t) dt$ آنگاه ρ را جرم مخصوص میله می‌نامند. یک میله یکشکل میله‌ای است که جرم مخصوص آن ثابت است. انتگرال $\int_a^b x \rho(x) dx$ را گشتاور اول میله حول 0 می‌نامند، و مرکز جرم نقطه‌ای است که مختص x آن

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x \rho(x) dx}{\int_0^a \rho(x) dx}$$

می باشد. این مثالی است از یک متوسط وزندار. در اینجا ما تابع فاصله $x = f(x)$ را متوسط گیری می کنیم بطوری که جرم مخصوص ρ بعنوان تابع وزن بکار رفته است. انتگرال $\int_a^b x^2 \rho(x) dx$ را گشتاود دوم، یا گشتاود مانند، میله حول o می خوانند، و عدد مثبت r که از دستور

$$r^2 = \frac{\int_a^b x^2 \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$$

بدست می آید شعاع چرخش میله نام دارد. در این حالت تابعی که متوسط گیری می شود مربع تابع فاصله، یعنی $x^2 = f(x)$ ، است و جرم مخصوص ρ بعنوان تابع وزن بکار رفته است.

متوسطهای وزندار از این قبیل در نظریه ریاضی احتمال نیز ظاهر می شوند که در آنجا مفاهیم امید ریاضی و پراش همان نقشهای مرکز جرم و گشتاور ماند را دارند.

۱۷.۲ تمرینات

در تمرینهای ۱ تا ۱۰ متوسط $A(f)$ را برای تابع داده شده f روی بازه تعیین شده حساب کنید.

۱. $f(x) = x^2$ ، $a \leq x \leq b$ ، $f(x) = \cos x$ ، $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

۸. $f(x) = x^2 + x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = \sin^2 x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

۳. $f(x) = x^{1/2}$ ، $0 \leq x \leq 4$ ، $f(x) = \sin x \cos x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

۴. $f(x) = x^{1/3}$ ، $1 \leq x \leq 8$ ، $f(x) = \sin^2 x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

۵. $f(x) = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، $f(x) = \cos^2 x$ ، $0 \leq x \leq \pi$

۱۱. (الف) اگر بازای $0 \leq x \leq a$ داشته باشیم $f(x) = x^2$ ، عدد c را بین 0 و a چنان بیابید که $f(c)$ مساوی متوسط f در $[0, a]$ باشد.

(ب) قسمت (الف) را در صورتی حل کنید که $f(x) = x^n$ که در آن n عدد صحیح مثبت دلخواهی می باشد.

۱۲. فرض کنید بازای $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = x^2$. مقدار متوسط f بر $[0, 1]$ مساوی $1/3$ است. تابع وزن نامنفی w را چنان بیابید که متوسط وزندار f بر $[0, 1]$ بصورتی

که با معادله (۱۹.۲) تعریف شده این مقادیر باشد:

(الف) $1/2$ ؛ (ب) $3/5$ ؛ (پ) $2/3$

۱۳. فرض کنید $A(f)$ متوسط f روی بازه $[a, b]$ را نشان دهد. ثابت کنید متوسط دارای خواص زیر است:

(الف) خاصیت جمعپذیری: $A(f + g) = A(f) + A(g)$.

(ب) خاصیت همگنی: اگر c عدد حقیقی دلخواهی باشد $A(cf) = cA(f)$.

(پ) خاصیت یکنوایی: اگر $f \leq g$ بر $[a, b]$ باشد $A(f) \leq A(g)$.

۱۴. از خواص تمرین ۱۳ کدامها در مورد متوسطهای وزندار که بصورت معادله (۱۹.۲) تعریف می شوند معتبرند؟

۱۵. فرض کنید $A_a^b(f)$ نشانگر متوسط f بر بازه $[a, b]$ باشد.

(الف) اگر $a < c < b$ ثابت کنید عددی مثل t صادق در $0 < t < 1$ هست بطوری که $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (1 - t)A_c^b(f)$ پس $A_a^b(f)$ میانگین حسابی وزندار $A_a^c(f)$ و $A_c^b(f)$ می باشد.

(ب) ثابت کنید قسمت (الف) برای متوسطهای وزندار که بصورت معادله (۱۹.۲) تعریف می شوند نیز برقرار است.

هر یک از تمرینات ۱۶ تا ۲۱ درباره میله ای است بطول L واقع بر محور x که یک سرش در مبدأ است. برای جرم مخصوص ρ که در هر حالت توصیف شده اینهارا حساب کنید: (الف) مرکز جرم میله، (ب) گشتاور ماند حول مبدأ، و (پ) شعاع چرخش.

$$۱۰۱۶. \rho(x) = ۱ \text{ بازاى } 0 \leq x \leq L$$

$$۱۰۱۷. \rho(x) = ۱ \text{ بازاى } 0 \leq x \leq L/2, \rho(x) = ۲ \text{ بازاى } L/2 \leq x \leq L$$

$$۱۰۱۸. \rho(x) = x \text{ بازاى } 0 \leq x \leq L$$

$$۱۰۱۹. \rho(x) = x \text{ بازاى } 0 \leq x \leq L/2, \rho(x) = L/2 \text{ بازاى } L/2 \leq x \leq L$$

$$۱۰۲۰. \rho(x) = x^2 \text{ بازاى } 0 \leq x \leq L$$

$$۱۰۲۱. \rho(x) = x^2 \text{ بازاى } 0 \leq x \leq L/2, \rho(x) = L^2/4 \text{ بازاى } L/2 \leq x \leq L$$

۲۲. جرم مخصوص ρ را چنان معین کنید که مرکز جرم میله ای بطول L در فاصله $L/4$ از یک سر میله باشد.

۲۳. در یک مدار الکتریکی ولتاژ $e(t)$ در لحظه t با دستور $e(t) = 3 \sin 2t$ داده شده است. این مقادیر را حساب کنید:

(الف) ولتاژ متوسط در فاصله زمانی $[0, \pi/2]$ ؛

(ب) جذر میانگین مربعات ولتاژ؛ یعنی ریشه دوم متوسط تابع e^2 در بازه $[0, \pi/2]$.

۲۴. در یک مدار الکتریکی ولتاژ $e(t)$ و شدت جریان $i(t)$ در لحظه t با دستورهای $e(t) = 160 \sin t$ و $i(t) = 2 \sin(t - \pi/6)$ داده شده اند. توان متوسط مساوی

$$\frac{1}{T} \int_0^T e(t)i(t)dt$$

تعریف می شود که در آن T دوره تناوب هم ولتاژ و هم شدت جریان است. T را تعیین کرده و توان متوسط را محاسبه نمایید.

۱۸.۲ انتگرال بعنوان تابعی از حد بالایی. انتگرالهای نامعین

در این بخش فرض می‌کنیم f چنان تابعی باشد که انتگرال $\int_a^x f(t)dt$ بازای هر x در بازه $[a, b]$ وجود دارد. a و f را ثابت گرفته و به بررسی این انتگرال بعنوان تابعی از x می‌پردازیم. مقدار این انتگرال را با $A(x)$ نشان می‌دهیم، پس چنین داریم:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad \text{اگر } (۲۰.۲)$$

معادله‌ای باین شکل به ما توان ساختن تابع جدید A از تابع مفروض f را می‌بخشد بطوری که مقدار A در هر نقطه $[a, b]$ با معادله (۲۰.۲) معین شده است. گاهی از تابع A بعنوان یک انتگرال نامعین f یاد می‌شود، و می‌گویند A از f بوسیله انتگرالگیری حاصل شده است. بجای انتگرال نامعین می‌گوئیم یک انتگرال نامعین زیرا A به حد پائینی a نیز وابسته است. مقادیر مختلف a توابع متفاوت A را بدست خواهند داد. هرگاه از حد پائینی متفاوتی، مثلاً c ، استفاده کرده و انتگرال نامعین دیگر F را با معادله

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

تعریف نمائیم آنگاه خاصیت جمعپذیری به ما می‌گوید که

$$A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt,$$

و در نتیجه تفاضل $A(x) - F(x)$ مستقل از x خواهد بود. بنابراین هر دو انتگرال نامعین یک تابع فقط در مقداری ثابت با هم فرق دارند (این ثابت به انتخاب a و c وابسته است).

وقتی انتگرال نامعینی از f معلوم است می‌توان مقدار انتگرالی چون $\int_a^b f(t)dt$ را با تفریقی ساده حساب کرد. بعنوان مثال، اگر n عدد صحیح نامنفیی باشد، دستور قضیه ۱۵.۱ را داریم که

$$\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

و خاصیت جمعپذیری ایجاب می‌کند که

$$\int_a^b t^n dt = \int_0^b t^n dt - \int_0^a t^n dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

در حالت کلی، هر گاه $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$(۲۱.۲) \quad \int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = F(b) - F(a).$$

انتخاب دیگری از c فقط $F(x)$ را با اندازه یک ثابت تغییر می‌دهد؛ این تفاضل $F(b) - F(a)$ را تغییر نمی‌دهد زیرا مقدار ثابت در تفریق حذف خواهد شد. چنانچه از علامت خاص

$$F(x) \Big|_a^b$$

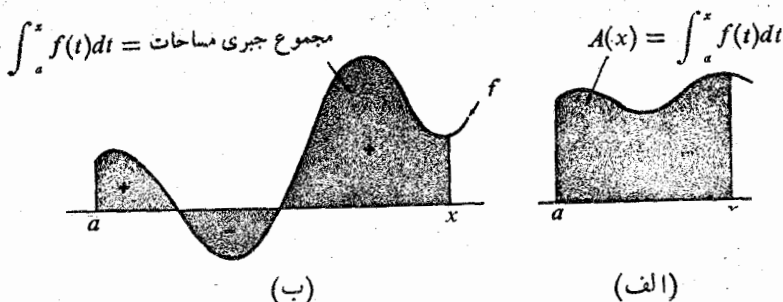
برای نمایش تفاضل $F(b) - F(a)$ استفاده کنیم می‌توانیم معادله (۲۱.۲) را باین صورت بنویسیم:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

البته رابطه هندسی بسیار ساده‌ای میان تابع f و انتگرالهای نامعین آن وجود دارد. مثالی در شکل ۱۵.۲ (الف) نموده شده که در آن f تابعی است نامنفی و عدد $A(x)$ مساوی مساحت ناحیه سایه‌دار پائین نمودار f از a تا x می‌باشد. چنانچه f ، مانند شکل ۱۵.۲ (ب)، هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را بپذیرد انتگرال $A(x)$ مجموع مساحت نواحی بالای محور x منهای مجموع مساحت‌های پائین این محور را بدست خواهد داد.

بسیاری از توابعی که در رشته‌های مختلف علوم ظاهر می‌شوند دقیقاً باین شکلند؛ بصورت انتگرالهای نامعینی از توابع دیگر. این یکی از دلالتی است که چرا بخش وسیعی از حساب دیفرانسیل و انتگرال به بررسی انتگرالهای نامعین اختصاص دارد. گاهی دانستن خاصیت ویژه‌ای از f خاصیت ویژه‌ی متناظری برای انتگرال نامعین ایجاد می‌کند. بعنوان مثال، هر گاه f بر $[a, b]$ نامنفی باشد، آنگاه انتگرال نامعین A صعودی است زیرا هر موقع $a \leq x \leq y \leq b$ خواهیم داشت

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt \geq 0.$$



شکل ۱۵.۲ انتگرال نامعین بر حسب مساحت تعبیر هندسی شده است.

این با تعبیر هندسی این معنی را می‌دهد که مساحت زیر نمودار یک تابع نامنفی از a تا x نمی‌تواند با افزایش x نزول کند.

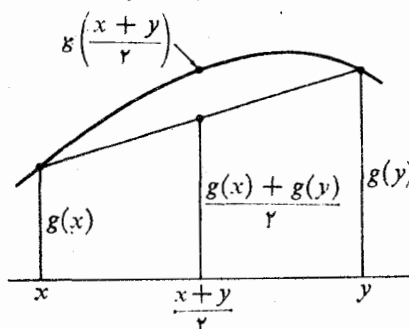
حال خاصیت دیگری را مطرح می‌کنیم که بطور هندسی بلافاصله مشهود نیست. فرض کنیم f بر $[a, b]$ صعودی باشد. می‌توانیم ثابت کنیم که انتگرال نامعین A از خاصیتی بنام محدب بر خوردار است. همانطور که در شکل ۱۶.۲ (الف) منعکس شده نمودار آن بطرف بالا خم می‌شود؛ یعنی وتری که هر دو نقطه نمودار را بهم وصل کند همیشه بالای نمودار جا می‌گیرد. تعریف تحلیلی محدب را می‌توان بصورت زیر داد:

تعریف تابع محدب. تابع g را بر بازه $[a, b]$ محدب نامند هرگاه بازای هر x و y در $[a, b]$ و هر α صادق $0 < \alpha < 1$ داشته باشیم

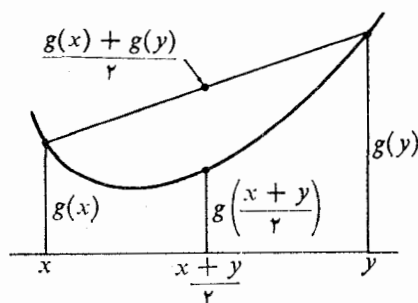
$$(22.2) \cdot z = \alpha y + (1 - \alpha)x \text{ که } g(z) \leq \alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x)$$

می‌گوئیم g بر $[a, b]$ مقعر است اگر که نامساوی عکس برقرار باشد، یعنی

$$z = \alpha y + (1 - \alpha)x \text{ که } g(z) \geq \alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x)$$



(ب) یک تابع مقعر



(الف) یک تابع محدب

شکل ۱۶.۲ تعیین هندسی محدب و مقعر.

این نامساویها تعبیر هندسی ساده‌ای دارند. نقطه $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$ در $z - x = \alpha(y - x)$ صدق می‌کند. چنانچه $x < y$ این نقطه بازه $[x, y]$ را به دو زیر-بازه $[x, z]$ و $[z, y]$ تقسیم می‌کند، طول $[x, z]$ ، α برابر طول $[x, y]$ است. وقتی α از ۰ تا ۱ تغییر کند نقطه $\alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x)$ پاره خط واصل بین نقاط $(x, g(x))$ و $(y, g(y))$ واقع بر نمودار g را می‌پیماید. نامساوی (۲۲.۲) چنین می‌گوید که نمودار g هرگز بالای این پاره خط نخواهد رفت. شکل ۱۶.۲ (الف) مثالی را با $\alpha = 1/2$ نشان می‌دهد. در مورد یک تابع مقعر، همانطور که مثال شکل ۱۶.۲ (ب) نشان داده، نمودار هرگز پائین پاره خط نخواهد رفت.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ در اینصورت A بر هر بازه‌ای که f در آن صعودی باشد محدب و بر هر بازه‌ای که f در آن نزولی باشد مقعر است.

پرهان. فرض کنیم f بر $[a, b]$ صعودی باشد، انتخاب می‌کنیم $y < x$ ، و قرار می‌دهیم $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$. باید ثابت کنیم $A(z) \leq \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$.
گوئیم از آنجا که $A(z) = \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$ حکم مورد نظر معادل

$$\alpha A(z) + (1 - \alpha)A(z) \leq \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$$

یا

$$(1 - \alpha)[A(z) - A(x)] \leq \alpha[A(y) - A(z)]$$

خواهد بود. چون داریم $A(z) - A(x) = \int_x^z f(t) dt$ و $A(y) - A(z) = \int_z^y f(t) dt$ پس باید ثابت کنیم که

$$(1 - \alpha) \int_x^z f(t) dt \leq \alpha \int_z^y f(t) dt. \quad (23.2)$$

اما f صعودی است، پس نامساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$f(z) \leq f(t), z \leq t \leq y, \text{ اگر } f(t) \leq f(z), x \leq t \leq z$$

با انتگرالگیری از این نامساویها درمی‌یابیم که

$$f(z)(y - z) \leq \int_z^y f(t) dt \text{ و } \int_x^z f(t) dt \leq f(z)(z - x)$$

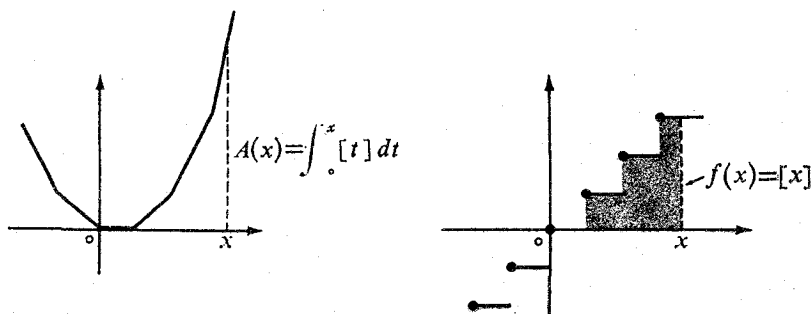
اما $(1 - \alpha)(z - x) = \alpha(y - z)$ ، پس این نامساویها چنین به ما می‌دهند:

$$(1 - \alpha) \int_x^z f(t) dt \leq (1 - \alpha)f(z)(z - x) = \alpha f(z)(y - z) \leq \alpha \int_z^y f(t) dt,$$

که (23.2) را باثبات می‌رساند. این ثابت می‌کند که A وقتی f صعودی باشد محدب است. وقتی f نزولی است می‌توانیم نتیجه‌ای را که هم اکنون ثابت شد درمورد f - بکار ببریم.

مثال. تابع کسینوس در بازه $[0, \pi]$ نزولی است. چون $\sin x = \int_x^0 \cos t dt$ پس نمودار تابع سینوس در بازه $[0, \pi]$ مقعر می‌باشد. در بازه $[\pi, 2\pi]$ کسینوس صعود کرده و تابع سینوس محدب خواهد بود.

شکل ۱۷.۲ خواص دیگر انتگرالهای نامعین را نشان می‌دهد. نمودار سمت چپ نمودار تابع بزرگترین عدد صحیح $f(x) = [x]$ است؛ نمودار طرف راست از آن انتگرال نامعین $A(x) = \int_x^0 [t] dt$ می‌باشد. تابع A بر بازه‌هایی که f ثابت باشد خطی است. ما این را با گفتن اینکه انتگرال یک تابع پله‌ای قطعه قطعه خطی است وصف می‌کنیم. همچنین ملاحظه می‌کنیم که نمودار f از پاره خطهای ناهمبندی تشکیل شده است. نقاطی بر نمودار f هستند که در آنها با تغییر مختصری در x جهشی ناگهانی در مقدار تابع ایجاد می‌شود. اما توجه کنید که انتگرال نامعین مناظر این رفتار را نشان نمی‌دهد. یک تغییر



شکل ۱۷.۲ انتگرال نامعین یک تابع پله‌ای قطعه قطعه خطی است.

مختصر در x فقط تغییر کوچکی در $A(x)$ را سبب می‌شود. باین علت است که نمودار A ناهمبند نیست. این بین خاصیتی است کلی از انتگرالهای نامعین بنام پیوستگی. ما در فصل بعد مفهوم پیوستگی را بتفصیل بحث کرده و ثابت می‌کنیم انتگرال نامعین همواره تابعی پیوسته است.

۱۹.۲ تمرینات

انتگرالهای تمرینات ۱ تا ۱۶ را حساب کنید.

۱. $\int_0^x (1 + t + t^2) dt$. ۱
۲. $\int_0^{2y} (1 + t + t^2) dt$. ۲
۳. $\int_{-1}^{2x} (1 + t + t^2) dt$. ۳
۴. $\int_1^{1-x} (1 - 2t + 3t^2) dt$. ۴
۵. $\int_{-2}^x t^2 (t^2 + 1) dt$. ۵
۶. $\int_x^{2x} (t^2 + 1)^2 dt$. ۶
۷. $x > 0, \int_1^x (t^{1/2} + 1) dt$. ۷
۸. $x > 0, \int_x^{2x} (t^{1/2} + t^{1/4}) dt$. ۸
۹. $\int_{-\pi}^x \cos t \, dt$. ۹
۱۰. $\int_0^{2y} (\frac{1}{t} + \cos t) dt$. ۱۰
۱۱. $\int_x^{2x} (\frac{1}{t} - \sin t) dt$. ۱۱
۱۲. $\int_0^x (u^2 + \sin 3u) du$. ۱۲
۱۳. $\int_x^{2y} (v^2 + \sin 3v) dv$. ۱۳
۱۴. $\int_0^y (\sin^2 x + x) dx$. ۱۴
۱۵. $\int_0^x (\sin 2w + \cos \frac{w}{2}) dw$. ۱۵
۱۶. $\int_{-\pi}^x (\frac{1}{t} + \cos t)^2 dt$. ۱۶

۱۷. کلیه مقادیر حقیقی x را بیابید که

$$\int_0^x (t^3 - t) dt = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^x (t - t^3) dt.$$

شکل مناسبی بکشید و معادله را تعبیر هندسی کنید.

۱۸. فرض کنید اگر x عدد صحیحی نباشد $1/2 - [x] = f(x)$ ، و اگر x عدد صحیحی باشد $f(x) = 0$. (طبق معمول، $[x]$ نشانگر بزرگترین عدد صحیح نایشت از x است.) تابع جدید P را بصورت زیر تعریف کنید:

$$P(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی}$$

(الف) نمودار f را روی بازه $[3, -3]$ رسم کرده و ثابت نمائید که f متناوب با

دوره تناوب ۱ است: بازای هر x ، $f(x+1) = f(x)$.

(ب) ثابت کنید که اگر $0 \leq x \leq 1$ ، $P(x) = (x^2 - x)/2$ ، و P متناوب با دوره تناوب ۱ می باشد.

(پ) $P(x)$ را بر حسب $[x]$ بیان نمائید.

(ت) ثابت c را چنان تعیین کنید که $\int_0^1 [P(t) + c] dt = 0$.

(ث) بازای ثابت c قسمت (ت) قرار دهید $Q(x) = \int_0^x [P(t) + c] dt$ ثابت کنید Q متناوب با دوره تناوب ۱ است و،

$$Q(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{اگر}$$

۱۹. تابع فرد f ، که همه جا تعریف شده، متناوب با دوره تناوب ۲ بوده، و بر هر بازه

انتگرالپذیر می باشد داده شده است. قرار دهید $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

(الف) ثابت کنید بازای هر عدد صحیح n ، $g(2n) = 0$.

(ب) ثابت کنید g زوج بوده و متناوب با دوره تناوب ۲ است.

۲۰. تابع زوج f ، که همه جا تعریف شده، متناوب با دوره تناوب ۲ بوده، و بر هر بازه

انتگرالپذیر می باشد داده شده است. قرار دهید $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ و $A = g(1)$.

(الف) ثابت کنید g فرد است و $g(2) = g(x) + 2$.

(ب) $g(2)$ و $g(5)$ را بر حسب A حساب کنید.

(پ) بازای چه مقداری از A متناوب با دوره تناوب ۲ است؟

۲۱. دو تابع مفروض f و g بر هر بازه انتگرالپذیر بوده و خواص زیر را دارند: f فرد

است، g زوج است، $f(5) = 7$ ، $f(0) = 0$ ، بازای هر x ، $f(x) = f(x+5)$ و

$f(x) = \int_0^x g(t) dt$. ثابت کنید که (الف) بازای هر x ، $f(x-5) = -g(x)$ ؛

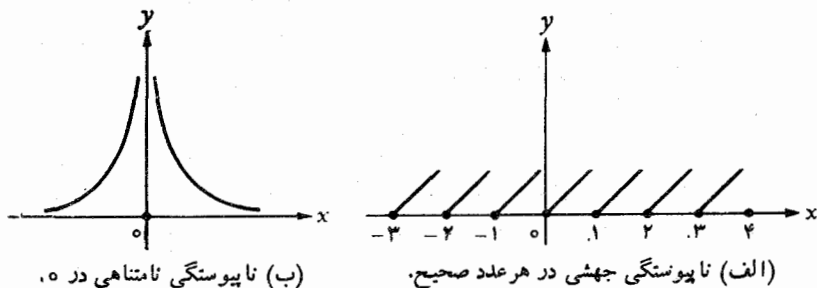
(ب) $\int_0^5 f(t) dt = 7$ ؛ (پ) $\int_0^5 f(t) dt = g(0) - g(x)$.

توابع پیوسته

۱.۳ توصیف غیرصوری پیوستگی

این فصل به مفهوم پیوستگی که یکی از مهمترین و نیز یکی از جالبترین مفاهیم در سراسر ریاضیات است رسیدگی می‌کند. پیش از آنکه تعریف دقیق فنی پیوستگی را بیاوریم این مفهوم را بطور غیرصوری و شهودی باجمال مورد بحث قرار می‌دهیم تا خواننده معنی آن را درک کند.

وضعیت موردنظر تقریباً چنین است: فرض کنید تابع f در نقطه معلوم p دارای مقدار $f(p)$ باشد. در اینصورت f را در p پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه نزدیک به آن مانند x ، مقدار تابعی $f(x)$ به $f(p)$ نزدیک باشد. راه دیگر بیان این مطلب بدین شرح است: اگر x بسمت p حرکت کند، بدون توجه به نحوه نزدیک شدن x به p ، می‌خواهیم مقادیر تابعی متناظر $f(x)$ بدلخواه به $f(p)$ نزدیک گردند. ما جهشهای ناگهانی، نظیر جهشهای مشهود در امثله شکل ۱.۳ را در مقادیر یک تابع پیوسته نمی‌پذیریم.



شکل ۱.۳ نمایش دو نوع ناپیوستگی.

شکل ۱.۳ الف) نمودار تابع f را که با معادله $f(x) = x - [x]$ تعریف

می شود نشان می دهد که در این معادله $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x است. در هر عدد صحیح پدیده ای رخ می دهد که به ناپیوستگی جهشی معروف است. بعنوان مثال، $f(2) = 0$ اما، وقتی x از چپ به ۲ نزدیک می شود، $f(x)$ به مقدار ۱ نزدیک خواهد شد که مساوی $f(2)$ نیست. بنابراین در ۲ ناپیوستگی خواهیم داشت. توجه کنید که اگر x از راست به ۲ نزدیک شود $f(x)$ به $f(2)$ نزدیک خواهد شد، اما این تنها برای پیوسته بودن در ۲ کافی نیست. در حالتی شبیه به این، تابع را از راست در ۲ پیوسته و از چپ در ۲ ناپیوسته می خوانند. پیوستگی در یک نقطه هم پیوستگی از چپ را لازم دارد و هم پیوستگی از راست را.

در اوائل ظهور حساب دیفرانسیل و انتگرال تقریباً همه توابع مورد بحث پیوسته بودند و در آن زمان نیازی واقعی به توجه عمیق در معنای دقیق پیوستگی احساس نمی شد. وضع بهمین منوال بود تا اینکه در اواخر قرن ۱۸ توابع ناپیوسته در ارتباط با انواع مختلفی از مسائل فیزیکی ظاهر شدند. بویژه کارهای فوریه^۱ (۱۸۳۰ - ۱۷۵۸) درباره نظریه حرارت، ریاضیدانان اوائل قرن ۱۹ را واداشت تا معنی دقیق مفاهیمی چون تابع و پیوستگی را با غور بیشتری مورد معاینه قرار دهند. گرچه معنی کلمه «پیوسته» برای اکثر مردم شهوداً واضح است اما اینکه تعریف مناسبی از این ایده چگونه باید تنظیم شود روشن نیست. یکی از فرهنگهای لغت مشهور پیوستگی را این طور توضیح می دهد:

پیوستگی: کیفیت یا حالت پیوسته بودن.

پیوسته: داشتن پیوستگی اجزاء.

تلاش برای درک معنی پیوستگی فقط از این دو عبارت مثل آن است که سعی کنیم زبان چینی را فقط بکمک فرهنگ لغت چینی یاد بگیریم. تعریف ریاضی مقننی از پیوستگی، که کاملاً بر حسب خواص دستگاه اعداد حقیقی بیان شده، برای اولین بار در سال ۱۸۲۱ توسط ریاضیدان فرانسوی آگوستن - لویی کشی (۱۸۵۷ - ۱۷۸۹) تنظیم شد. تعریف او، که امروزه نیز بکار می رود، بساده ترین وجه بر حسب مفهوم حد، که ما اینک بدان می پردازیم، عرضه شده است.

۲.۳ تعریف حد یک تابع

فرض کنیم f تابعی باشد که در بازه بازی حاوی نقطه p تعریف شده است، هر چند در اینکه f باید در خود نقطه p تعریف شده باشد اصراری نداریم. A را عددی حقیقی می انگاریم. معادله

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$$

چنین خواننده می شود: «حد $f(x)$ ، وقتی x به p نزدیک شود، مساوی A است»، یا «وقتی x به p نزدیک شود $f(x)$ به A نزدیک خواهد شد.» این را بدون علامت حد نیز

می نویسند، باین صورت:

$$\text{وقتی } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow p$$

این علامتگذاری برای آن است که این معنی را برساند که می توانیم $f(x)$ را هر قدر که بخواهیم به A نزدیک کنیم مشروط بر آنکه x را بقدر کافی نزدیک p گرفته باشیم. اولین وظیفه ما توضیح کامل معنی این علامات بر حسب اعداد حقیقی است. ما این کار را در دومرحله انجام می دهیم. ابتدا مفهوم همسایگی یک نقطه را تعریف می کنیم، بعد حدود را بر حسب همسایگیها تعریف خواهیم کرد.

تعریف همسایگی يك نقطه. هر بازه باز حاوی نقطه p که p نقطه وسطش باشد یک همسایگی p نام دارد.

نمادگذاری. ما همسایگیها را با $N(p)$ ، $N_1(p)$ ، $N_r(p)$ ، و مانند اینها نشان می دهیم. چون همسایگی $N(p)$ بازه بازی متقارن حول p است پس از کلیه x های حقیقی تشکیل شده که بازای عددی چون $0 < r$ در $p - r < x < p + r$ صدق می کنند. عدد مثبت r را شعاع همسایگی می خوانند. چنانچه بخواهیم شعاع $N(p)$ را تصریح کنیم آن را با $N(p; r)$ نشان می دهیم. نامساویهای $p - r < x < p + r$ با $-r < x - p < r$ و با $|x - p| < r$ معادلند. از اینرو $N(p; r)$ از تمام نقاطی چون x تشکیل شده که فاصله آنها تا p از r کمتر است.

در تعریف بعدی فرض می کنیم A عددی حقیقی بوده و f تابعی باشد که بر یکی از همسایگیهای نقطه p (بجز احتمالاً در p) تعریف شده است. تابع f ممکن است در p نیز تعریف شده باشد لکن این در تعریف زیر دخالتی ندارد.

تعریف حد يك تابع. علامتگذاری

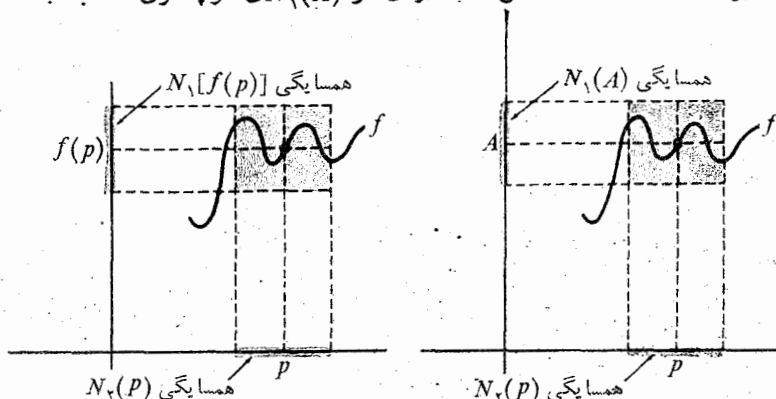
$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \quad \text{یا، وقتی } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow p$$

یعنی بازای هر همسایگی $N_1(A)$ همسایگییی چون $N_r(p)$ هست بطوری که

$$(۱.۳) \quad \text{هرگاه } x \in N_r(p) \text{ و } x \neq p \text{ آنگاه } f(x) \in N_1(A)$$

اولین چیزی که باید به آن توجه شود این است که تعریف مستلزم دو همسایگی است، یکی $N_1(A)$ و دیگری $N_r(p)$. همسایگی $N_1(A)$ اول قید شده است؛ این همسایگی به ما می گوید که تا چه حد ما یلیم $f(x)$ نزدیک حد A باشد. همسایگی دوم، یعنی $N_r(p)$ ، به ما می گوید که x چقدر باید نزدیک p باشد تا $f(x)$ در همسایگی اول $N_1(A)$ قرار گیرد. قسمت اصلی تعریف این است که بازای هر $N_1(A)$ ، هر قدر هم کوچک باشد، یک همسایگی $N_r(p)$ هست که در (۱.۳) صدق می کند. همسایگی $N_r(p)$ در حالت کلی به انتخاب $N_1(A)$ بستگی دارد. چنانچه همسایگی $N_r(p)$ بکار $N_1(A)$ خاصی بیاید البته که برای هر $N_1(A)$

وسیعتری نیز کارساز است اما ممکن است برای هر $N_1(A)$ کوچکتری مناسب نباشد.



شکل ۳.۳ در اینجا f در p تعریف شده است و $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ پس f در p پیوسته خواهد بود.

شکل ۲.۳ در اینجا $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ اما هیچ حکمی درباره f در p نشده است.

تعریف حد ممکن است بطور هندسی بشکل ۲.۳ مصور شود. همسایگی $N_1(A)$ بر محور y نموده شده است. همسایگی $N_p(p)$ متناظر $N_1(A)$ بر محور x نشان داده شده است. مستطیل سایه‌دار از کلیه نقاط (x, y) تشکیل می‌یابد که $x \in N_p(p)$ و $y \in N_1(A)$. تعریف حد حکم می‌کند که تمام نمودار f بالای بازه $N_p(p)$ در این مستطیل قرار گیرد مگر احتمالاً نقطه‌ای از آن که در بالای خود p است.

تعریف حد را می‌توان بر حسب شعاعهای همسایگیهای $N_1(A)$ و $N_p(p)$ نیز تنظیم کرد. رسم این شده که شعاع $N_1(A)$ را با ε (حرف یونانی اپسیلون) و شعاع $N_p(p)$ را با δ (حرف یونانی دلتا) نشان می‌دهند. گزاره $f(x) \in N_1(A)$ با نامساوی $|f(x) - A| < \varepsilon$ و گزاره $x \in N_p(p)$ و $x \neq p$ با نامساویهای $0 < |x - p| < \delta$ معادل است. بنابراین، تعریف حد را می‌شود این طور هم گفت:

علامت $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ این معنی را می‌دهد که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ هست بطوری که

$$(۲.۳) \quad 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - A| < \varepsilon$$

توجه می‌کنیم که سه گزاره

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - A) = 0, \lim_{x \rightarrow p} |f(x) - A| = 0$$

همه باهم معادلند. این معادل بودن بمحض نوشتن هریک از این گزاره‌ها بر حسب اصطلاحات ε, δ (۲.۳) روشن خواهد شد.

در بررسی حدود، وقتی $x \rightarrow p$ ، گاهی مناسب می‌بینیم که تفاضل $x - p$ را با

علامتی جدید، مثلاً h ، نشان داده و بگذاریم $h \rightarrow 0$. این فقط با تغییری در نمادگذاری صورت می‌گیرد زیرا، همان‌طور که بآسانی قابل تحقیق است، دو گزاره زیر معادل خواهند بود:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(p+h) = A.$$

مثال ۱. حد تابع ثابت. فرض می‌کنیم بازای هر x ، $f(x) = c$. بآسانی ثابت می‌شود که بازای هر p داریم $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = c$. درواقع، اگر همسایگی دلخواه $N_1(c)$ داده شده باشد، رابطه (۱.۳) با هر انتخاب $N_1(p)$ خودبخود برقرار می‌شود زیرا بازای هر x ، $f(x) = c$ و برای کلیه همسایگیهای $N_1(c)$ ، $c \in N_1(c)$. با نماد حد می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow p} c = c.$$

مثال ۲. حد تابع همانی. در اینجا بازای هر x ، $f(x) = x$ می‌توانیم بآسانی ثابت کنیم که $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = p$. همسایگی دلخواه $N_1(p)$ را اختیار کرده و فرض می‌کنیم $N_1(p) = N_1(p)$. در این صورت رابطه (۱.۳) خودبخود برقرار است. با نماد حد می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow p} x = p.$$

حدود «یکطرفه» را می‌توان بطریقی مشابه تعریف کرد. بعنوان مثال، وقتی x بامقادیر بزرگتر از p به p نزدیک شود $f(x) \rightarrow A$ ، می‌گوئیم A حد سمت راست f در p است و این را با نوشتن

$$\lim_{x \rightarrow p+} f(x) = A$$

نشان می‌دهیم. این با اصطلاح همسایگی بدان معنی است که بازای هر همسایگی $N_1(A)$ همسایگیی مثل $N_1(p)$ هست بطوری که

$$(۳.۳) \quad x > p \text{ آنگاه } x \in N_1(p) \text{ و } f(x) \in N_1(A).$$

حدود سمت چپ، که با نوشتن $x \rightarrow p -$ نموده می‌شوند، مشابهاً با تحدید x به مقادیر کمتر از p تعریف می‌گردند.

هرگاه f حد A را در p داشته باشد آنگاه از حدود سمت راست و سمت چپ در p نیز برخوردار است، هر دوی اینها مساوی A می‌باشند. اما، همان‌طور که در مثال بعدی نموده شده، یک تابع می‌تواند در p حد سمت راستی غیر از حد سمت چپ داشته باشد.

مثال ۳. فرض می‌کنیم بازای هر x ، $f(x) = [x]$ ، و p را عدد صحیح دلخواهی می‌انگاریم. بازای x نزدیک p که $x < p$ داریم $f(x) = p - 1$ ، و برای x مجاور p که $x > p$ خواهیم داشت $f(x) = p$. بنابراین می‌بینیم که

$$\lim_{x \rightarrow p+} f(x) = p \text{ و } \lim_{x \rightarrow p-} f(x) = p - 1$$

در مثالی شبیه به این، که حدود سمت راست و سمت چپ نامساوی اند، حد f در p وجود نخواهد داشت.

مثال ۴. فرض می‌کنیم اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = 1/x^2$ و $f(0) = 0$. نمودار f در نزدیکی ۰ در شکل ۱.۳ (ب) نموده شده است. در این مثال، چون f در مجاورت ۰ مقادیر بزرگ دلخواه می‌گیرد، پس در ۰ نه حد سمت راست دارد نه حد سمت چپ. می‌توانیم برای اثبات دقیق اینکه عددی حقیقی چون A نیست که $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = A$ این‌طور استدلال کنیم: فرض کنیم A وجود می‌داشت و، مثلاً، $A \geq 0$. همسایگی $N_1(A)$ را بطول ۱ اختیار می‌کنیم. درباره $1/(A+2) < x < 1/(A+2)$ داریم

$$f(x) = 1/x^2 > (A+2)^2 > A+2,$$

پس $f(x)$ نمی‌تواند در همسایگی $N_1(A)$ قرار گیرد. از اینرو هر همسایگی $N(0)$ حاوی نقاطی چون $x > 0$ است که بازای آنها $f(x)$ خارج $N_1(A)$ واقع می‌شود، پس (۳.۳) با این انتخاب $N_1(A)$ از اعتبار می‌افتد. لذا f در ۰ حد سمت راست نخواهد داشت.

مثال ۵. فرض می‌کنیم اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = 1$ و $f(0) = 0$. این تابع در همه جا مقدار ثابت ۱ بخود می‌گیرد مگر در ۰ که مقدارش ۰ است. هر دو حد سمت راست و سمت چپ در هر نقطه p یکند، پس حد $f(x)$ وقتی x به p نزدیک شود، وجود داشته و مساوی ۱ خواهد بود. توجه کنید که حد f در نقطه ۰، با اینکه $f(0) = 0$ مساوی ۱ می‌باشد.

۳.۳ تعریف پیوستگی يك تابع

ما در تعریف حد در باب رفتار f در خود نقطه p هیچ حکمی نکردیم. عبارت (۱.۳) درباره آن نقاط $x \neq p$ است که در $N_p(p)$ جای دارند، پس لازم نیست که f در p تعریف شده باشد. بعلاوه، حتی اگر f در p هم تعریف شده باشد، الزامی نیست که مقدار آن مساوی حد A باشد. لکن، هرگاه f در p تعریف شده و همچنین $f(p) = A$ ، آنگاه می‌گوییم تابع f در p پیوسته است. بعبارت دیگر، تعریف زیر را داریم.

تعریف پیوستگی يك تابع در يك نقطه. تابع f در نقطه p پیوسته نامند هرگاه

(الف) f در p تعریف شده باشد، و

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) \quad (\text{ب})$$

این تعریف را می‌توان بر حسب همسایگیها نیز تنظیم کرد. تابع f در p پیوسته است اگر که بازای هر همسایگی $N_1[f(p)]$ همسایگیی چون $N_p(p)$ باشد بطوری که

هرگاه $x \in N_p(p)$ آنگاه $f(x) \in N_1[f(p)]$. (۴.۳)

چون $f(p)$ همواره متعلق به $N[f(p)]$ است پس در (۴.۳) شرط $x \neq p$ لازم نیست. نمی‌شود. تعریف پیوستگی را می‌توان با اصطلاحات ε ، δ ، که شعاع همسایگیها را تصریح می‌کنیم، باین صورت مجدداً بیان کرد:

تابع f در صورتی در p پیوسته است که بازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ای بزرگتر از ۰ باشد بطوری که

$$\text{هرگاه } |x - p| < \delta \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \quad \text{آنگاه}$$

در شکل ۳.۳ تعریف پیوستگی بطور هندسی مصور شده است. این شکل شبیه شکل ۲.۳ است با این تفاوت که مقدار حدی، یعنی A ، مساوی مقدار تابعی $f(p)$ می‌باشد، در نتیجه تمام نمودار f واقع در بالای $N_\varepsilon(p)$ در مستطیل سایه‌دار قرار می‌گیرد.

مثال ۱. توابع ثابت همه جا پیوسته‌اند. هرگاه بازای هر x ، $f(x) = c$ ، آنگاه بازای هر p ،

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} c = c = f(p),$$

پس f همه جا پیوسته است.

مثال ۲. تابع همانی همه جا پیوسته است. چنانچه بازای هر x ، $f(x) = x$ ، بازای هر p ،

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} x = p = f(p),$$

پس تابع همانی همه جا پیوسته می‌باشد.

مثال ۳. فرض می‌کنیم بازای هر x ، $f(x) = [x]$. این تابع در هر نقطه p که عددی صحیح نباشد پیوسته است. در اعداد صحیح ناپیوسته می‌باشد زیرا حد f در این نقاط وجود ندارد؛ حدود سمت راست و سمت چپ با هم مساوی نیستند. هر ناپیوستگی از این نوع، که در آن حدود سمت راست و سمت چپ وجود دارند ولی با هم مساوی نیستند، یک ناپیوستگی جهشی نام دارد. اما، چون حد سمت راست در هر عدد صحیح p برابر $f(p)$ است، می‌گوئیم f از راست در p پیوسته می‌باشد.

مثال ۴. تابع f ، که بازای $x \neq 0$ ، $f(x) = 1/x^2$ ، و $f(0) = 0$ ، در ۰ ناپیوسته است. [ر.ک. شکل ۱.۳ (ب)]. می‌گوئیم در ۰ یک ناپیوستگی نامتناهی وجود دارد زیرا تابع در حوالی ۰ مقادیر بزرگ دلخواه بخود می‌گیرد.

مثال ۵. فرض می‌کنیم بازای $x \neq 0$ ، $f(x) = 1$ ، و $f(0) = 0$. این تابع همه جا پیوسته است جز در ۰. در ۰ ناپیوسته است زیرا $f(0)$ مساوی حد $f(x)$ وقتی

$x \rightarrow 0$ نمی باشد. در این مثال می شد با تعریف مجدد تابع در ۰ با مقدار ۱ بجای ۰ ناپیوستگی را برطرف کرد. باین دلیل است که ناپیوستگی از این نوع را ناپیوستگی رفع شدنی می نامند. توجه کنید که ناپیوستگیهای جهشی، نظیر ناپیوستگیهای تابع بزرگترین عدد صحیح، را نمی توان فقط با تغییر مقدار f در یک نقطه رفع کرد.

۴.۳ قضایای اساسی حد. مثالهایی دیگر از توابع پیوسته

محاسبات با حدود را اغلب می توان با استفاده از قضایای زیر، که قواعد اساسی برای اعمال با حدود را فراهم می کنند، ساده کرد.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم f و g توابعی باشند بطوری که

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow p} g(x) = B.$$

در اینصورت داریم

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = A + B \quad (\text{یکم})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - g(x)] = A - B \quad (\text{دوم})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B \quad (\text{سوم})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)/g(x) = A/B, B \neq 0 \quad \text{اگر} \quad (\text{چهارم})$$

توجه: مورد خاص مهمی از (سوم) زمانی رخ می دهد که f ثابت باشد، مثلاً، بازای هر x ، $f(x) = A$. در این حالت مطلب (سوم) بصورت

$$\lim_{x \rightarrow p} A \cdot g(x) = A \cdot B$$

نوشته می شود.

اثبات قضیه ۱.۳ مشکل نیست ولی چون قدری طولانی است آن را در بخش جدا گانه ای (بخش ۵.۳) قرار داده ایم. در اینجا چند نتیجه ساده این قضیه را بحث می کنیم.

نخست توجه می کنیم که عبارات قضیه را می شود بشکلی کمی متفاوت نوشت. مثلاً عبارت (یکم) را می توان چنین نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x).$$

این به ما می گوید که حد مجموع مساوی مجموع حدود است.

رسم این شده که توابعی را که مقادیرشان در هر x مورد نظر

$$f(x)/g(x), f(x) \cdot g(x), f(x) - g(x), f(x) + g(x)$$

هستند بترتیب با $f+g, f-g, f \cdot g, f/g$ نشان می‌دهند. این تابعها را مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت f و g می‌نامند. البته خارج قسمت f/g فقط در نقاطی تعریف می‌شود که در آنها $g(x) \neq 0$. نتیجهٔ زیر از قضیهٔ ۱.۳ با این اصطلاحات و نمادها بیان شده و دربارهٔ توابع پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ ۲.۳. فرض کنیم f و g در نقطهٔ p پیوسته باشند. در اینصورت مجموع $f+g$ ، تفاضل $f-g$ ، و حاصلضرب $f \cdot g$ نیز در p پیوسته‌اند. این مطلب برای خارج قسمت f/g درصورتی درست است که $g(p) \neq 0$.

پرهان. چون f و g در p پیوسته‌اند داریم

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = g(p) \text{ و } \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$$

بنابراین می‌توانیم دستورهای حدی قضیهٔ ۱.۳ را با فرض $A = f(p)$ و $B = g(p)$ بکار برده قضیهٔ ۲.۳ را نتیجه بگیریم.

قبلاً دیده‌ایم که تابع همانی و توابع ثابت همه‌جا پیوسته‌اند. با استفاده از این امثله و قضیهٔ ۲.۳ می‌توانیم نمونه‌های زیاد دیگری از توابع پیوسته را بسازیم.

مثال ۱. پیوستگی چندجمله‌ایها. اگر فرض کنیم $f(x) = g(x) = x$ پیوستگی حاصلضربها پیوستگی تابعی که در هر x مقدارش x^2 است را در هر نقطه ثابت می‌کند. باستقرای ریاضی نتیجه می‌شود که بازای هر c حقیقی و هر عدد صحیح و مثبت n ، تابع $f(x) = cx^n$ که بازای هر x پیوسته است. از آنجا که مجموع دو تابع پیوسته خود پیوسته است باستقرا نتیجه می‌شود که این مطلب برای مجموع هر تعداد متناهی تابع پیوسته درست خواهد بود. بنا براین هر چند جمله‌ای $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ در تمام نقاط پیوسته می‌باشد.

مثال ۲. پیوستگی توابع گویا. خارج قسمت دو چندجمله‌ای را یک تابع گویا می‌نامند. هرگاه r تابعی گویا باشد آنگاه خواهیم داشت

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

که در آن p و q چندجمله‌ایهایی می‌باشند. تابع r بازای کلیهٔ x های حقیقیی تعریف شده که $q(x) \neq 0$. چون خارج قسمتهای توابع پیوسته پیوسته‌اند می‌بینیم که هر تابع گویا هرکجا که تعریف شده باشد پیوسته خواهد بود. یک نمونهٔ ساده $r(x) = 1/x$ بازای $x \neq 0$ است. این تابع همه‌جا جز در $x = 0$ ، که تعریف نشده، پیوسته می‌باشد.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که هرگاه تابع g را بین دو تابع دیگر که حدود مساوی وقتی $x \rightarrow p$ دارند بشماریم آنگاه g نیز، وقتی $x \rightarrow p$ ، همان حد را خواهد داشت.

قضیه ۳.۳. اصل فشار. فرض کنیم بازای هر $x \neq p$ در همسایگی $N(p)$ ،
همچنین $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = a.$$

در اینصورت $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = a$ را نیز خواهیم داشت.

برهان. قرار می‌دهیم $G(x) = g(x) - f(x)$ و $H(x) = h(x) - f(x)$ نامساویهای $f \leq g \leq h$ را ایجاد می‌کنند که $0 \leq g - f \leq h - f$ ، یا، بازای هر $x \neq p$ در $N(p)$

$$0 \leq G(x) \leq H(x).$$

برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که از این فرض که وقتی $x \rightarrow p$ ، $H(x) \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود که وقتی $x \rightarrow p$ ، $G(x) \rightarrow 0$.

فرض می‌کنیم $N_1(0)$ همسایگی دلخواهی از ۰ باشد. چون وقتی $x \rightarrow p$ ، $H(x) \rightarrow 0$ ، پس همسایگی مثل $N_2(p)$ هست بطوری که

$$\text{هرگاه } x \neq p \text{ و } x \in N_2(p) \text{ آنگاه } H(x) \in N_1(0).$$

می‌توانیم فرض کنیم $N_2(p) \subseteq N(p)$. در اینصورت نامساویهای $0 \leq G \leq H$ آنند که اگر x در $N_2(p)$ بوده و $x \neq p$ ، $G(x)$ دورتر از $H(x)$ نسبت به ۰ نیست. بنابراین، بازای هر x این چنینی، $G(x) \in N_1(0)$ ، و در نتیجه، وقتی $x \rightarrow p$ ، $G(x) \rightarrow 0$. این قضیه را ثابت می‌کند. همین برهان در صورتی که کلیه حدود یکطرفه باشند معتبر خواهد بود.

اصل فشار در عمل مفید است زیرا در اغلب موارد می‌توان توابع فشار دهنده f و h را طوری یافت که کار با آنها از g سهلتر باشد. حال این نتیجه را برای اثبات اینکه هر انتگرال نامعین تابعی پیوسته است بکار می‌بریم.

قضیه ۴.۳. پیوستگی انتگرالهای نامعین. فرض کنیم f بر $[a, x]$ ، بازای هر x در $[a, b]$ ، انتگرالپذیر باشد و قرار می‌دهیم

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

در اینصورت انتگرال نامعین A در هر نقطه $[a, b]$ پیوسته است. (در هر نقطه انتهائی پیوستگی یکطرفه خواهیم داشت.)

پرهان. p را در $[a, b]$ اختیار می‌کنیم. باید ثابت کنیم که وقتی $x \rightarrow p$ ، $A(x) \rightarrow A(p)$ داریم.

$$(۵.۳) \quad A(x) - A(p) = \int_p^x f(t) dt.$$

حال اندازه این انتگرال را تخمین می‌زنیم. چون f بر $[a, b]$ کراندار است پس عدد ثابتی مثل $0 < M$ وجود دارد بطوری‌که برای هر t در $[a, b]$ ، $-M \leq f(t) \leq M$. اگر $x > p$ از این نامساویها روی بازه $[p, x]$ انتگرال می‌گیریم تا بدست آید که

$$-M(x-p) \leq A(x) - A(p) \leq M(x-p).$$

چنانچه $x < p$ همین نامساویها بدستمان می‌رسند که در آنها $x - p$ با $p - x$ عوض شده است. پس، در هر صورت، می‌توانیم با فرض $x \rightarrow p$ و بکاربردن اصل فشار دریایم که $A(x) \rightarrow A(p)$. این قضیه را ثابت می‌کند. چنانچه p یک نقطه انتهائی $[a, b]$ باشد باید x را از داخل بازه به p میل دهیم، پس حدود یکطرفه خواهند بود.

مثال ۳. پیوستگی سینوس و کسینوس. چون تابع سینوس یک انتگرال نامعین است، یعنی $\sin x = \int_0^x \cos t dt$ ، پس قضیه پیشگفته به ما می‌گوید که سینوس همه جا پیوسته می‌باشد. بهمین نحو، کسینوس همه جا پیوسته است چونکه $\cos x = 1 - \int_0^x \sin t dt$. می‌توان پیوستگی این توابع را بدون استفاده از انتگرال نامعین بودن آنها نیز نتیجه گرفت. پرهان دیگری از این مطلب در تمرین ۴۶ از بخش ۶.۳ مختصراً شرح داده شده است.

مثال ۴. در این مثال دستور حدی مهم

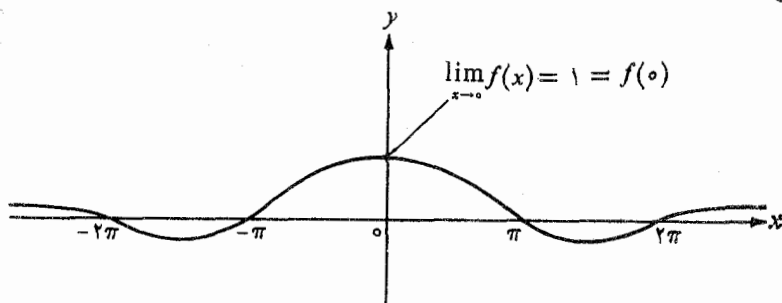
$$(۶.۳) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

را ثابت می‌کنیم که بعداً در بحث ما از حساب دیفرانسیل مورد حاجت است. چون مخرج کسر $(\sin x)/x$ ، وقتی $x \rightarrow 0$ ، به ۰ نزدیک می‌شود نمی‌توانیم قضیه خارج‌قسمت درمورد حدود را بکار برده (۶.۳) را نتیجه بگیریم. بجای این کار از اصل فشار استفاده می‌کنیم. از بخش ۵.۲ نامساویهای اساسی

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

را داریم که برای $0 < x < \pi/2$ اعتبار دارند. اینها برای $-\pi/2 < x < 0$ نیز معتبرند زیرا $\sin(-x) = -\sin x$ و $\cos(-x) = \cos x$ و در نتیجه برای هر $x \neq 0$ در همسایگی $(0; \pi/2)$ برقرار خواهند بود. وقتی $x \rightarrow 0$ درمی‌یابیم که $\cos x \rightarrow 1$ زیرا کسینوس در ۰ پیوسته است، و در نتیجه $1/(\cos x) \rightarrow 1$. بنابراین، طبق اصل فشار، (۶.۳) را نتیجه می‌گیریم. هرگاه برای $x \neq 0$ تعریف کنیم

در شکل ۴.۳ نشان داده شده است. $f(x) = (\sin x)/x$ ، $f(0) = 1$ ، آنگاه f همه جا پیوسته خواهد بود. نمودار آن



شکل ۴.۳ اگر $f(x) = (\sin x)/x$ ، $x \neq 0$ و $f(0) = 1$. این تابع همه جا پیوسته است.

مثال ۵. پیوستگی f وقتی برای $x > 0$ ، $f(x) = x^r$ که در آن r عدد گویای مثبتی است. از قضیه ۲.۲ دستور انتگرالگیری

$$\int_0^x t^{1/n} dt = \frac{x^{1+1/n}}{1+1/n}$$

را داریم که برای هر $x > 0$ و هر عدد صحیح $n \geq 1$ معتبر است. با استفاده از قضایای ۴.۳ و ۱.۳ درمی یابیم که تابع A داده شده با $A(x) = x^{1+1/n}$ در کلیه نقاط $p > 0$ پیوسته است. حال برای $x > 0$ قرار می دهیم $g(x) = x^{1/n} = A(x)/x$. چون g خارج قسمت دو تابع پیوسته است این تابع نیز در تمام نقاط $p > 0$ پیوسته خواهد بود. کلتر بگوئیم، هرگاه $f(x) = x^{m/n}$ ، که در آن m عدد صحیح مثبتی است، آنگاه f حاصلضربی از توابع پیوسته است و در نتیجه در همه نقاط $p > 0$ پیوسته می باشد. این پیوستگی تابع توانی $f(x) = x^r$ ، وقتی r عدد گویای مثبت دلخواهی است، را در همه نقاط $p > 0$ ثابت می کند. در $p = 0$ پیوستگی سمت راست خواهد داشت. پیوستگی تابع توانی r گویا را می توان بدون بهره گیری از انتگرالها نیز نتیجه گرفت. برهان دیگری از این مطلب در بخش ۱۳.۳ داده شده است.

۵.۳ برهانهای قضایای اساسی حد

در این بخش قضیه ۱.۳ را ثابت می کنیم که قواعد اساسی برای پرداختن به حدود مجموعهها، حاصلضربها، و خارج قسمتها را وصف می کند. ابزارهای جبری عمده بکار رفته در برهان آن دو خاصیت از قدر مطلقها هستند که پیشتر در بخشهای ۸.۴ و ۹.۴ ذکر شدند. آنها عبارتند از: (۱) نامساوی مثلثی که چنین می گوید که برای هر a و b حقیقی $|a + b| \leq |a| + |b|$

و (۲) معادله $|ab| = |a||b|$ که مبین آن است که قدر مطلق حاصلضرب مساوی حاصلضرب قدرمطلقها است.

برهانهای (یکم) و (دوم). چون دو گزاره

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - A] = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$$

معادلند و داریم

$$f(x) + g(x) - (A + B) = [f(x) - A] + [g(x) - B],$$

کافی است قسمت (یکم) قضیه را برای وقتی که حدود A و B هر دو صفر هستند ثابت کنیم. پس فرض می‌کنیم وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x) \rightarrow 0$ و $g(x) \rightarrow 0$. ثابت می‌کنیم وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x) + g(x) \rightarrow 0$. این یعنی که باید نشان دهیم بازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مثل $\delta > 0$ هست بطوری که

$$(۷.۳) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta \text{ آنگاه } |f(x) + g(x)| < \varepsilon$$

فرض کنیم ε داده شده باشد. چون وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، پس δ_1 بزرگتر از ε هست بقسمی که

$$(۸.۳) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta_1 \text{ آنگاه } |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بهمین نحو، از آنجا که وقتی $x \rightarrow p$ ، $g(x) \rightarrow 0$ ، δ_2 ای وجود دارد بطوری که

$$(۹.۳) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta_2 \text{ آنگاه } |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

هرگاه δ را مینیمم دو عدد δ_1 و δ_2 بگیریم آنگاه هر دو نامساوی (۸.۳) و (۹.۳) بازای $0 < |x - p| < \delta$ معتبرند و در نتیجه، بنابر نامساوی مثلثی، درمی یابیم که

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

این (۷.۳) را ثابت می‌کنیم، بنوبه خود، (یکم) را ثابت خواهد کرد. برهان (دوم) کاملاً بهمین نحو است جز آنکه در آخرین مرحله از نامساوی $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ استفاده می‌کنیم.

برهان (سوم). فرض کنیم قسمت (سوم) را برای حالت خاصی که در آن یکی از حدود ۰ است ثابت کرده باشیم. در این صورت حالت کلی از این حالت خاص با سانی نتیجه می‌شود. در واقع آنچه ما باید بکنیم این است که بنویسیم

$$f(x)g(x) - AB = f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A].$$

حالت خاص ایجاب می‌کند که، وقتی $x \rightarrow p$ ، هر جمله سمت راست به ۰ نزدیک می‌شود

و، بنا بر خاصیت (یکم)، مجموع دو جمله نیز به صفر نزدیک خواهد شد. بنابراین آنچه می‌ماند این است که مطلب (سوم) در حالت خاص که یکی از حدود، مثلاً B ، 0 است ثابت شود.

پس فرض می‌کنیم وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x) \rightarrow A$ و $g(x) \rightarrow 0$ می‌خواهیم ثابت کنیم که وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x)g(x) \rightarrow 0$. برای این کار باید نشان دهیم که اگر ε مثبت مفروض باشد δ ی مثبتی هست بطوری که

$$(10.3) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta \text{ آنگاه } 0 < |f(x)g(x)| < \varepsilon$$

چون وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x) \rightarrow A$ ، پس δ_1 ی هست بطوری که

$$(11.3) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta_1 \text{ آنگاه } |f(x) - A| < 1$$

بازای چنین x داریم

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|,$$

و در نتیجه

$$(12.3) \quad |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < (1 + |A|)|g(x)|.$$

چون وقتی $x \rightarrow p$ ، $g(x) \rightarrow 0$ ، پس بازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ_2 ی هست بطوری که

$$(13.3) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta_2 \text{ آنگاه } |g(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + |A|}$$

بنابراین، هرگاه δ را مینیمم دو عدد δ_1 و δ_2 بگیریم، آنگاه هر دو نامساوی (۱۲.۳) و (۱۳.۳) بازای $0 < |x - p| < \delta$ معتبرند، و برای چنین x ها (۱۰.۳) را نتیجه می‌گیریم. این برهان (سوم) را کامل خواهد کرد.

برهان (چهارم). چون خارج قسمت $f(x)/g(x)$ مساوی حاصلضرب $f(x)/B$ در $B/g(x)$ است، کافی است ثابت کنیم وقتی $x \rightarrow p$ ، $B/g(x) \rightarrow 1$ و بعد به قسمت (سوم) متوسل شویم. قرار می‌دهیم $h(x) = g(x)/B$. در اینصورت وقتی $x \rightarrow p$ ، $h(x) \rightarrow 1$ و می‌خواهیم ثابت کنیم که وقتی $x \rightarrow p$ ، $1/h(x) \rightarrow 1$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. باید نشان دهیم که δ ی مثبتی هست بطوری که

$$(14.3) \quad \text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta \text{ آنگاه } \left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

تفاضل مورد تخمین را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(15.3) \quad \left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| = \frac{|h(x) - 1|}{|h(x)|}.$$

چون وقتی $x \rightarrow p$ ، $h(x) \rightarrow 1$ ، پس می‌توانیم عدد $\delta > 0$ را طوری اختیار کنیم که هر دو نامساوی

$$(۱۶.۳) \quad |h(x) - ۱| < \frac{1}{2} \text{ و } |h(x) - ۱| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بازی δ برای $|x - p| < \delta$ برقرار باشند. نامساوی دوم ایجاب می‌کند که بازی هر x این چنینی $1/2 < h(x)$ ، پس $1/h(x) < 2$ با بکار بردن این در (۱۵.۳) و استفاده از اولین نامساوی (۱۶.۳) مطلب (۱۴.۳) بدستمان می‌رسد. این برهان (چهارم) را کامل خواهد کرد.

۶.۳ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۰ حدود را محاسبه کرده و قضایای حد را که در هر حالت بکار می‌گیرید بیان دارید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^3 + 2}{75x^2 - 2} \cdot 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \cdot 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot 3$$

$$a \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} \cdot 6 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} \cdot 5$$

$$a \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} \cdot 8 \quad x \neq 0, \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} \cdot 7$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\sin^2 t + t^2 \cos \delta t) \cdot 10 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \tan t \cdot 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} \cdot 12 \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} \cdot 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \cdot 14 \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \cdot 13$$

از رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$ استفاده کرده دستورهای حدی تمرینات ۱۵ تا ۲۰ را ثابت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} = 2 \cdot 16 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = 2 \cdot 18 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} = 5 \cdot 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 20 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a \quad ۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{۲۱. نشان دهید که}$$

$$[(1 - \sqrt{u})(1 + \sqrt{u}) = 1 - u] \quad \text{[داهنمایی:]}$$

۲۲. تابع f این طور تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \leq c \\ ax + b & , x > c \end{cases} \quad \text{اگر}$$

که در آن a و b و c ثوابتی هستند. چنانچه b و c داده شده باشند کلیه مقادیر a را (در صورت وجود) که برای آنها f در نقطه $x = c$ پیوسته است بیابید.

۲۳. تمرین ۲۲ را در صورتی حل کنید که f این طور تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x & , x \leq c \\ ax^2 + b & , x > c \end{cases} \quad \text{اگر}$$

۲۴. توابع تانژانت و کتانژانت در چه نقاطی پیوسته اند؟

۲۵. فرض کنید اگر $f(x) = (\tan x)/x$ ، $x \neq 0$ ، نمودار f را روی بازه‌های نیم باز $(-\pi/4, 0)$ و $(0, \pi/4)$ رسم کنید. وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x)$ چه می‌شود؟ آیا می‌توانید $f(0)$ را طوری تعریف کنید که f در 0 پیوسته شود؟

۲۶. این تمرین اثبات دیگری از پیوستگی توابع سینوس و کسینوس را مختصراً شرح می‌دهد. (الف) نامساوی $|\sin x| < |x|$ ، که برای $0 < |x| < \pi/2$ معتبر است، در تمرین ۳۴ از بخش ۸.۲ ثابت شد. با استفاده از این نامساوی ثابت کنید که تابع سینوس در 0 پیوسته است.

(ب) با استفاده از (الف) و اتحاد $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ ثابت کنید که کسینوس در 0 پیوسته است.

(پ) دستورهای جمع برای $\sin(x+h)$ و $\cos(x+h)$ را بکار برده ثابت کنید که سینوس و کسینوس در هر عدد حقیقی x پیوسته‌اند.

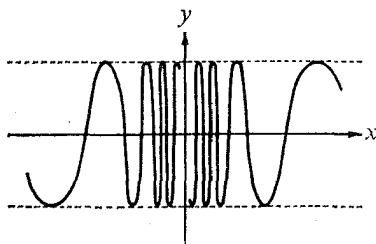
۲۷. شکل ۵.۳ قسمتی از نمودار تابع f را که بصورت زیر تعریف شده نشان می‌دهد:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{اگر}$$

بازی $x = 1/(n\pi)$ ، که در آن n عددی صحیح است، داریم

$$\sin(1/x) = \sin(n\pi) = 0.$$

مقادیر تابع بین هر دو از این نقاط یا به $1+$ صعود کرده و بعد به 0 نزول می‌کنند یا اینکه به $1-$ افت کرده و بعد به 0 باز خواهد گشت. بنابراین، منحنی بین هر یک از



شکل ۵.۳ اگر $f(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$ این تابع هر طور هم که $f(0)$ تعریف شده باشد در ۰ ناپیوسته است.

این نقاط و مبدأ دارای تعدادی نامتناهی نوسان است. این اشاره بر آن دارد که، وقتی $x \rightarrow 0$ ، مقادیر تابع به مقدار ثابتی نزدیک نمی‌شوند. ثابت کنید که عددی حقیقی مانند A وجود ندارد که، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow A$ این نشان می‌دهد که ممکن نیست بتوان $f(0)$ را طوری تعریف کرد که f در ۰ پیوسته گردد. [داهنمائی: فرض کنید چنین A ای وجود دارد و تناقضی بدست آورید.]

۲۸. برای $x \neq 0$ فرض کنید $f(x) = [1/x]$ که در آن $[t]$ مین بزرگترین عدد صحیح نایبتر از t است. نمودار f را روی بازه‌های $[-2, -1/5]$ و $[1/5, 2]$ بکشید. چنانچه x با مقادیر مثبت به ۰ نزدیک شود برسر $f(x)$ چه خواهد آمد؟ اگر این کار با مقادیر منفی صورت گیرد چه خواهد شد؟ آیا می‌توانید $f(0)$ را طوری تعریف کنید که f در ۰ پیوسته شود؟

۲۹. تمرین ۲۸ را در حالی حل کنید که برای $x \neq 0$ ، $f(x) = (-1)^{1/x}$.

۳۰. تمرین ۲۸ را در حالی حل کنید که برای $x \neq 0$ ، $f(x) = x(-1)^{1/x}$.

۳۱. تابعی مثال بزنید که در نقطه‌ای از یک بازه پیوسته و در سایر نقاط بازه ناپیوسته باشد، یا ثابت کنید که چنین تابعی وجود ندارد.

۳۲. فرض کنید اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = x \sin(1/x)$. $f(0)$ را طوری تعریف کنید که f در ۰ پیوسته شود.

۳۳. فرض کنید f چنان تابعی باشد که برای هر u و هر v در بازه $[a, b]$ ،

$$|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$$

(الف) ثابت کنید f در هر نقطه $[a, b]$ پیوسته است.

(ب) فرض کنید f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد. ثابت کنید که

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

(پ) بطور کلیتر، ثابت کنید برای هر c در $[a, b]$ داریم

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(c) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

۷.۳ توابع مرکب و پیوستگی

از توابعی مفروض می‌توانیم با جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم، توابع جدیدی بسازیم. در این بخش برای تابع سازی روش جدیدی فرا می‌گیریم که با عملی موسوم به ترکیب صورت می‌گیرد. این روش را با یک مثال روشن می‌کنیم.

فرض کنیم $f(x) = \sin(x^2)$. برای محاسبه $f(x)$ ابتدا x را مربع کرده و بعد از آن سینوس می‌گیریم. لذا $f(x)$ از ترکیب دو تابع دیگر بدست می‌آید، یکی تابع مربع و دیگری تابع سینوس. چنانچه قرار دهیم $v(x) = x^2$ و $u(x) = \sin x$ می‌توانیم با نوشتن

$$f(x) = u[v(x)]$$

$f(x)$ را بر حسب u و v بیان کنیم. می‌گوئیم f ترکیب u و v (با همین ترتیب) است. اگر u و v را با ترتیب مخالف باهم ترکیب کنیم نتیجه‌ای دیگر، یعنی $v[u(x)] = (\sin x)^2$ بدستمان می‌آید. یعنی، برای محاسبه $v[u(x)]$ ، اول سینوس x را گرفته و سپس آن را مربع می‌کنیم.

حال می‌توانیم این عمل را بنحو کلیتری انجام دهیم. فرض کنیم u و v دو تابع مفروض دلخواهی باشند. مرکب یا ترکیب u و v (با همین ترتیب) مساوی تابعی چون f تعریف می‌شود که

$$f(x) = u[v(x)] \quad (\text{بخوانید: «} u \text{ صی } v \text{»}).$$

یعنی، برای تعیین مقدار f در x ، ابتدا $v(x)$ را محاسبه کرده و بعد u را در نقطه $v(x)$ حساب می‌کنیم. البته از پیش فرض شده است که محاسبه u در $v(x)$ معنی دارد، و در نتیجه f فقط در نقاطی چون x تعریف می‌شود که $v(x)$ در قلمرو u است.

به عنوان مثال، هرگاه $u(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $v(x) = 1-x^2$ ، آنگاه مرکب f با $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ داده می‌شود. توجه کنید که v بازای هر x حقیقی تعریف شده است حال آنکه u فقط برای $0 \leq x$ تعریف می‌شود. بنابراین، مرکب f تنها برای آن x هایی تعریف شده است که در $0 \leq 1-x^2$ صدق می‌کند.

$f(x)$ بطور صوری باین شکل بدست می‌آید که در عبارت $u(x)$ بجای x مقدار $v(x)$ را قرار دهیم. باین دلیل است که گاهی تابع f با علامت $u(v) = f$ (بخوانید: « u صی v ») نشان داده می‌شود. نماد دیگری که برای ترکیب بکار خواهیم برد $u \circ v = f$ است (بخوانید: « u دایره v »). این با نماد حاصلضرب $u \cdot v$ بی‌شابهت نیست. در واقع لحظه‌ای بعد خواهیم دید که عمل ترکیب بعضی از خواص ضرب را دارد.

مرکب سه تابع یا بیشتر را می‌توان با ترکیب دو تا دو تا در هر لحظه بدست آورد. لذا تابع f داده شده با

$$f(x) = \cos[\sin(x^2)]$$

ترکیبی است بصورت $f = u \circ (v \circ w)$ که در آن

$$w(x) = x^2, v(x) = \sin x, u(x) = \cos x$$

توجه داشته باشید که همین f را می توان ابتدا با ترکیب u و v و سپس ترکیب $u \circ v$ با w نیز بدست آورد، لذا $f = (u \circ v) \circ w$. این قانون شرکتپذیری برای ترکیب را نشان می دهد مبین آنکه بازای هر سه تابع u, v, w ,

$$(17.3) \quad u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w,$$

مشروط بر آنکه تشکیل کلیه مرکبهای مورد بحث ممکن باشد. خواننده اثبات (17.3) را تمرین سرراستی خواهد یافت.

لازم به تذکر است که قانون تعویضپذیری، یعنی $u \circ v = v \circ u$ ، همیشه در مورد ترکیب برقرار نیست. بعنوان مثال، اگر $u(x) = \sin x$ و $v(x) = x^2$ ، مرکب $f = u \circ v$ با $f(x) = \sin x^2$ [یعنی $\sin(x^2)$] داده می شود حال آنکه ترکیب $g = v \circ u$ با $g(x) = \sin^2 x$ [(یعنی $(\sin x)^2$)] داده خواهد شد. حال قضیه ای را ثابت می کنیم که به ما می گوید که خاصیت پیوستگی تحت عمل ترکیب حفظ می شود. بعبارت دقیقتر، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۵.۳. فرض کنیم v در p و u در q پیوسته باشد بطوری که $q = v(p)$. داینصورت تابع مرکب $f = u \circ v$ در p پیوسته است.

برهان. چون u در q پیوسته است بازای هر همسایگی $N_1[u(q)]$ همسایگی مثل $N_2(q)$ وجود دارد بطوری که

$$(18.3) \quad \text{هرگاه } y \in N_2(q) \text{ آنگاه } u(y) \in N_1[u(q)].$$

اما $q = v(p)$ و v در p پیوسته است، پس بازای همسایگی $N_2(q)$ همسایگی دیگری مثل $N_3(p)$ هست بقسمی که

$$(19.3) \quad \text{هرگاه } x \in N_3(p) \text{ آنگاه } v(x) \in N_2(q).$$

اگر قرار دهیم $y = v(x)$ و (18.3) را با (19.3) تلفیق کنیم درمی یابیم که بازای هر همسایگی $N_1[u(v(p))]$ یک همسایگی مثل $N_3(p)$ هست بطوری که

$$\text{هرگاه } x \in N_3(p) \text{ آنگاه } u[v(x)] \in N_1[u(v(p))].$$

یا، بعبارت دیگر، چون $f(x) = u[v(x)]$ ، پس

$$\text{هرگاه } x \in N_3(p) \text{ آنگاه } f(x) \in N_1[f(p)].$$

این یعنی که f ، همانطور که حکم شده، در p پیوسته است.

مثال ۱. فرض می کنیم $f(x) = \sin x^2$. این ترکیبی از دو تابع همه جا پیوسته است،

پس f همه جا پیوسته خواهد بود.

مثال ۲. فرض می‌کنیم $f(x) = \sqrt{1-x^2} = u[v(x)]$ که در آن $u(x) = \sqrt{x}$ و $v(x) = 1-x^2$. تابع v همه جا پیوسته است ولی u فقط در نقاط $x \geq 0$ چنین می‌باشد. از اینرو f در آن x هائی پیوسته خواهد بود که $v(x) \geq 0$ ، یعنی در همه نقاطی که در $1-x^2 \leq 1$ صدق می‌کند.

۸.۳ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۰ توابع f و g با دستورهای داده شده تعریف شده‌اند. قلمروهای f و g از همه اعداد حقیقی تشکیل شده است مگر آنکه خلاف آن تصریح شود. فرض کنید هر وقت $g(x)$ در قلمرو f قرار داشته باشد $h(x) = f[g(x)]$. قلمرو h را در هر حالت توصیف کرده و برای تعیین $h(x)$ یک یا چند دستور ارائه دهید.

$$1. g(x) = x + 1, f(x) = x^2 - 2x.$$

$$2. g(x) = x^2 - 2x, f(x) = x + 1.$$

$$3. f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \text{ در صورتی که } g(x) = x^2.$$

$$4. f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \text{ در صورتی که } g(x) = -x^2.$$

$$5. g(x) = \sqrt{x}, f(x) = x^2, x \geq 0 \text{ در صورتی که } g(x) = \sqrt{x}.$$

$$6. g(x) = \sqrt{x}, f(x) = -x^2, x \geq 0 \text{ در صورتی که } g(x) = \sqrt{x}.$$

$$7. g(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sin x, x \geq 0 \text{ در صورتی که } g(x) = \sqrt{x}.$$

$$8. f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \text{ در صورتی که } g(x) = \sin x.$$

$$9. f(x) = \sqrt{x}, x > 0 \text{ در صورتی که } g(x) = x + \sqrt{x}, x > 0 \text{ در صورتی که } g(x) = x + \sqrt{x}.$$

$$10. f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, x > 0 \text{ در صورتی که } g(x) = x + \sqrt{x}, x > 0 \text{ در صورتی که } g(x) = x + \sqrt{x}.$$

حدود تمرینات ۱۱ تا ۲۰ را حساب کرده و توضیح دهید که در هر حالت کدام قضایای حد را بکار می‌برید.

$$12. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}.$$

$$13. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan t)}{\sin t}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}.$$

$$15. \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin(t - \pi)}{t - \pi}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \cdot ۱۸ \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \cdot ۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x^2} \cdot ۲۰ \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot ۱۹$$

۲۱. فرض کنید f و g دو تابعی باشند که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ بازای } x \text{ هر} \quad f(x) = \frac{x + |x|}{2} \text{ بازای } x$$

برای محاسبه تابع مرکب $h(x) = f[g(x)]$ دستور (یادستورهای) یابید. h بازای چه مقادیری از x پیوسته است؟

۲۲. تمرین ۲۱ را درحالی حل کنید که f و g این طور تعریف شده باشند:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2 \\ 2, & |x| > 2 \end{cases}$$

۲۳. تمرین ۲۱ را برای وقتی حل کنید که $h(x) = g[f(x)]$

۹.۳ قضیه بولتزانو^۱ برای توابع پیوسته

تا پایان این فصل چند خاصیت ویژه توابع پیوسته را که بارها بکار می آیند مطالعه خواهیم کرد. اکثر این خواص وقتی تعبیرهندسی شوند واضح بچشم می آیند؛ از این روست که بسیاری افراد مایلند آنها را بعنوان بدیهیات بپذیرند. اما درک این مطلب مهم است که بدیهی بودن این مطالب از خود تعریف پیوستگی بیشتر نیست، و در نتیجه اگر بخواهند با هر درجه از تعمیم بکار روند محتاج اثبات خواهند بود. در برهانهای اغلب این خواص از اصل موضوع کوچکتزین کران بالائی درمورد دستگاه اعداد حقیقی استفاده می شود.

برنارد بولتزانو (۱۸۴۸ - ۱۷۸۱)، کشیش کاتولیک مذهبی که در پیشرفت ریاضیات در نیمه اول قرن ۱۹ سهم بسزائی داشته، یکی از اولین کسانی بود که دریافت بسیاری از مطالب «واضح» درباره توابع پیوسته احتیاج به اثبات دارند. ملاحظات او در باب پیوستگی در سال ۱۸۵۰ (یعنی پس از مرگش) در کتاب^۲ مهمی بچاپ رسید. یکی از نتایجش، که اکنون به قضیه بولتزانو معروف است، در شکل ۳.۶ منعکس گشته که در آن نمودار یک تابع پیوسته f نموده شده است. این نمودار در $x = a$ پائین محور x و در $x = b$ بالای این محور قرار دارد. قضیه بولتزانو حکم می کند که منحنی باید جائی بین a و b از محور بگذرد. این خاصیت را، که اول بار در ۱۸۱۷ توسط بولتزانو باطالع عموم رسید، می توان بطور صوری چنین بیان کرد:

قضیه ۳.۶. قضیه بولتزانو. فرض کنیم f در هر نقطه از بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و

$f(a)$ و $f(b)$ مختلف علامه باشند. در اینصورت دست کم یک c در بازه (a, b) هست که $f(c) = 0$.

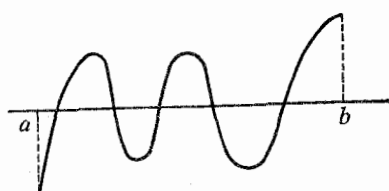
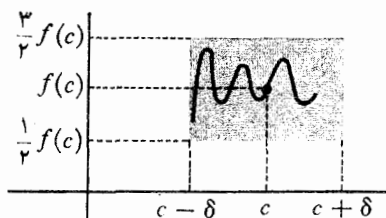
برهان خود از قضیه بولتزانو را بر خاصیت زیر از توابع پیوسته، که آن را در اینجا بصورت قضیه ای جداگانه ذکر می کنیم، بنا می نهیم.

قضیه ۷.۲. خاصیت محفوظ ماندن علامت توابع پیوسته. فرض کنیم f در c پیوسته بوده و $f(c) \neq 0$. در اینصورت بازه ای چون $(c - \delta, c + \delta)$ حول c هست که در آن f همان علامت $f(c)$ را دارد.

برهان قضیه ۷.۲. فرض کنیم $f(c) > 0$. بنا بر پیوستگی، بازای هر $\varepsilon > 0$ δ مثبتی هست بطوری که

هرگاه $c - \delta < x < c + \delta$ آنگاه $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ (۲۰.۳).
چنانچه δ متناظر $\varepsilon = f(c)/2$ (این ε مثبت است) را اختیار کنیم (۲۰.۳) چنین می شود:

هرگاه $c - \delta < x < c + \delta$ آنگاه $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)$.



شکل ۶.۳. نمایش قضیه بولتزانو. شکل ۷.۳. در اینجا، بدلیل مثبت بودن $f(c)$ ، بازای x های نزدیک c ، $f(x) > 0$.

(ر.ک. شکل ۷.۳). بنابراین، در این بازه $f(x) > 0$ ، و در نتیجه $f(x)$ و $f(c)$ همعلامت خواهند بود. چنانچه $f(c) < 0$ ، δ متناظر $\varepsilon = -f(c)/2$ را اختیار می کنیم و به همان نتیجه خواهیم رسید.

توجه: هرگاه در c پیوستگی یکطرفه باشد آنگاه بازه یکطرفه متناظری چون $[c, c + \delta]$ یا $[c - \delta, c]$ موجود است که در آن f همان علامت $f(c)$ را دارد.

برهان قضیه بولتزانو. برای معین بودن وضع فرض می کنیم، مثل شکل ۶.۳، $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. ممکن است x های زیادی بین a و b باشند که بازای آنها $f(x) = 0$.

مشکل ما جستن یکی از آنها است. این کار را با یافتن بزرگترین x ی که $f(x) = 0$ انجام می‌دهیم. برای این مقصود فرض می‌کنیم S مجموعه همه x هایی در بازه $[a, b]$ باشد که بازای آنها $f(x) \leq 0$ در S دست‌کم یک نقطه وجود دارد زیرا $f(a) < 0$. بنابراین، S مجموعه‌ای ناتهی می‌باشد. همچنین S از بالا کراندار است زیرا تمام S در $[a, b]$ جای دارد، پس S سوپرمم خواهد داشت. فرض کنیم $c = \sup S$. ثابت می‌کنیم $f(c) = 0$. فقط سه حالت ممکن است: $f(c) > 0$ ، $f(c) < 0$ ، و $f(c) = 0$. اگر $f(c) > 0$ بازه‌ای چون $(c - \delta, c + \delta)$ ، یا $(c - \delta, c]$ (اگر $c = b$) وجود دارد که در آن f مثبت می‌باشد. لذا هیچ نقطه‌ای از S نمی‌تواند سمت راست $c - \delta$ قرارگیرد، و در نتیجه $c - \delta$ یک کران بالایی برای مجموعه S می‌باشد. اما $c - \delta < c$ و c کوچکترین کران بالایی S است. پس نامساوی $f(c) > 0$ ناممکن خواهد بود. چنانچه $f(c) < 0$ بازه‌ای مثل $(c - \delta, c + \delta)$ ، یا $[c, c + \delta)$ (اگر $c = a$) وجود دارد که در آن f منفی است. لذا، بازای x ی بزرگتر از c ، $f(x) < 0$ ، که با کران بالایی بودن c برای S متناقض است. بنابراین $f(c) < 0$ نیز غیرممکن است، و تنها حالتی که می‌ماند $f(c) = 0$ است. همچنین $a < c < b$ زیرا $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. این قضیه بولتزانو را ثابت خواهد کرد.

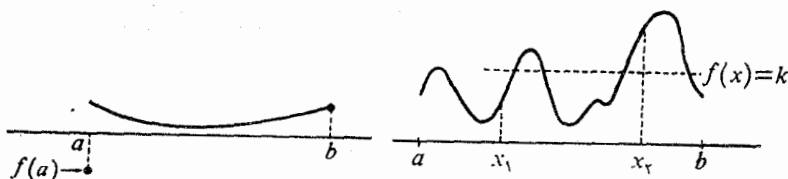
۱۰.۳ قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته

نتیجه‌ای فوری از قضیه بولتزانو قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته است که در شکل ۸.۳ مصور شده است.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم f در هر نقطه از بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. دو نقطه دلخواه $x_1 < x_2$ در $[a, b]$ را طوری اختیار می‌کنیم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. در اینصورت f هر مقدار بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ را جایی در بازه (x_1, x_2) می‌گیرد.

بوهان. فرض کنیم $f(x_1) < f(x_2)$ و k مقداری بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ باشد. g را تابعی می‌انگاریم که بر $[x_1, x_2]$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$g(x) = f(x) - k.$$



شکل ۹.۳ مثالی که قضیه بولتزانو را نمی‌توان برای آن بکار برد.

شکل ۸.۳ نمایش قضیه مقدار میانی.

در این صورت g در هر نقطه $[x_1, x_2]$ پیوسته است و چنین داریم:

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0, g(x_2) = f(x_2) - k > 0.$$

اگر قضیه بولتزانو را در مورد g بکار ببریم بازای c ای بین x_1 و x_2 خواهیم داشت $g(c) = 0$. اما این یعنی $f(c) = k$ و برهان تمام می شود.

توجه: هم در قضیه بولتزانو و هم در قضیه مقدار میانی فرض شده که f در هر نقطه از $[a, b]$ ، بانضمام نقاط انتهائی a و b ، پیوسته است. برای درک اینکه چرا پیوستگی در هر دو نقطه انتهائی لازم است به منحنی شکل ۹.۳ مراجعه می کنیم. در اینجا f همه جا در $[a, b]$ جز در a پیوسته است. با اینکه $f(a)$ منفی و $f(b)$ مثبت است اما x ی در $[a, b]$ نیست که $f(x) = 0$.

این بخش را با کاربردی از قضیه مقدار میانی بپایان می بریم که در آن ثابت می کنیم هر عدد حقیقی مثبت دارای ریشه n مثبت است، مطلبی که قبلاً در بخش م ۱۴.۳ ذکر شد. این را بصورت قضیه ای صوری بیان می داریم.

قضیه ۹.۳. هرگاه n عدد صحیح مثبتی بوده و $a > 0$ آنگاه دقیقاً یک b ی مثبت هست که $b^n = a$.

برهان. $1 < c$ را طوری اختیار می کنیم که $0 < a < c$ ، و تابع f را که بر بازه $[0, c]$ با معادله $f(x) = x^n$ تعریف شده در نظر می گیریم. این تابع بر $[0, c]$ پیوسته است و در نقاط انتهائی داریم $f(0) = 0$ و $f(c) = c^n$. چون $0 < a < c < c^n$ عدد مفروض a بین مقادیر تابعی $f(0)$ و $f(c)$ قرار می گیرد. لذا، بنا بر قضیه مقدار میانی، بازای x ی در $(0, c)$ ، مثلاً $x = b$ ، خواهیم داشت $f(x) = a$. این ثابت می کند که دست کم یک b ی مثبت هست که $b^n = a$. بخاطر اکیداً صعودی بودن f بر $[0, c]$ از این b ها بیش از یکی نمی تواند وجود داشته باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۱.۳ تمرینات

۱. فرض کنید f یک چند جمله ای از درجه n باشد، مثلاً $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ ، بطوری که اولین و آخرین ضریب آن c_0 و c_n مختلف علامه اند. ثابت کنید بازای لا اقل یک x مثبت $f(x) = 0$.

۲. عدد حقیقی x_1 را که $f(x_1) = 0$ یک ریشه حقیقی معادله $f(x) = 0$ می نامند. می گوئیم ریشه حقیقی معادله ای منزوی شده اگر بتوانیم بازه ای چون $[a, b]$ نشان دهیم که حاوی این ریشه بوده و شامل ریشه دیگری نباشد. بکمک قضیه بولتزانو ریشه های حقیقی هر یک از معادلات زیر را منزوی کنید (هر کدام چهار ریشه حقیقی دارد).

$$(الف) \quad 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$$

$$(ب) \quad 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

$$(پ) \quad x^4 + 4x^2 + x^2 - 6x + 2 = 0$$

۳. اگر n عدد صحیح مثبت فردی بوده و $a < 0$ ثابت کنید درست یک b منفی هست که $b^n = a$.

۴. فرض کنید $f(x) = \tan x$. گرچه $f(\pi/4) = 1$ و $f(3\pi/4) = -1$ ولی x در بازه $[\pi/4, 3\pi/4]$ وجود ندارد که $f(x) = 0$. توضیح دهید که چرا این موضوع با قضیه بولتزانو در تضاد نیست.

۵. تابع حقیقی f داده شده که بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته است. فرض کنید بازای هر x در $[0, 1]$ $0 \leq f(x) \leq 1$. ثابت کنید دست کم یک نقطه مانند c در $[0, 1]$ هست که $f(c) = c$. چنین نقطه‌ای را یک نقطه ثابت f می‌نامند. این تمرین حالت خاصی است از قضیه نقطه ثابت براورد. [داهنمائی: قضیه بولتزانو را در مورد $g(x) = f(x) - x$ بکار ببرید.]

۶. تابع حقیقی f داده شده که بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است. فرض کنید $f(a) \leq a$ و $f(b) \geq b$. ثابت کنید f در $[a, b]$ نقطه ثابت دارد. (ر.ک. تمرین ۵.)

۱۲.۳ فرایند معکوس سازی

این بخش روش مهم دیگری را که اغلب در ساختن توابع جدید از توابع معلوم بکار می‌رود توصیف می‌کند. پیش از آنکه این روش را مفصلاً توضیح دهیم آن را با مثالی ساده نشان می‌دهیم.

تابع f را در نظر می‌گیریم که بر بازه $[0, 2]$ با معادله $f(x) = 2x + 1$ تعریف شده است. برد f بازه $[1, 5]$ است. هر نقطه x در $[0, 2]$ توسط f درست به یک نقطه y در $[1, 5]$ ، یعنی

$$(21.3) \quad y = 2x + 1,$$

برده می‌شود. بعکس، بازای هر y در $[1, 5]$ دقیقاً یک x در $[0, 2]$ هست که $y = f(x)$. برای یافتن این x معادله (۲۱.۳) را حل می‌کنیم تا بدست آید که

$$x = \frac{1}{2}(y - 1).$$

این معادله x را بصورت تابعی از y تعریف می‌کند. اگر این تابع را با g نشان دهیم بازای هر y در $[1, 5]$ خواهیم داشت

$$g(y) = \frac{1}{2}(y - 1).$$

تابع g را معکوس f می‌خوانند. توجه کنید که بازای هر x در $[0, 2]$ ، $g[f(x)] = x$ و بازای هر y در $[1, 5]$ ، $f[g(y)] = y$.

حال تابع کلیتر f را با قلمرو A و برد B در نظرمی‌گیریم. بازای هر x در A درست یک y در B هست که $y = f(x)$. برای هر y در B لااقل یک x در A هست که $y = f(x)$. فرض کنیم از این‌ها دقیقاً یکی وجود دارد. در اینصورت می‌توانیم تابع جدید g را بر B این‌طور تعریف کنیم:

$$g(y) = x \text{ یعنی } y = f(x).$$

عبارت دیگر، مقدار g در هر نقطه y در B عبارت است از x منحصر بفردی در A که $y = f(x)$. این تابع جدید g را معکوس f می‌خوانند. فرایندی که با آن g از f بدست می‌آید فرایند معکوس سازی نام دارد. توجه کنید که بازای هر x در A ، $g[f(x)] = x$ و، بازای هر y در B ، $f[g(y)] = y$.

فرایند معکوس سازی را می‌توان در مورد هر تابع f با این خاصیت که بازای هر y در برد آن دقیقاً یک x در قلمروش هست که $y = f(x)$ بکار برد. بخصوص تابعی که بر بازه‌ای چون $[a, b]$ پیوسته و اکیداً یکنوا باشد از این خاصیت برخوردار است. مثالی در شکل ۱۰.۳ نموده شده است. فرض کنیم $c = f(a)$ و $d = f(b)$. قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته به ما می‌گوید که هر مقدار بین c و d را در بازه $[a, b]$ می‌گیرد. بعلاوه f نمی‌تواند یک مقدار را دوبار بگیرد زیرا هر وقت $x_1 \neq x_2$ ، $f(x_1) \neq f(x_2)$. بنابراین هر تابع اکیداً یکنوای پیوسته دارای معکوس است.

رابطه بین تابع f و معکوسش g را می‌توان با تنظیم مفهوم تابع بصورت جفت‌های مرتب نیز بسادگی توضیح داد. در بخش ۳.۱ ما تابع f را بصورت مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب (x, y) توصیف کردیم که هیچ دوتای آنها عناصر اول برابر ندارند. تابع معکوس g این‌طور تشکیل می‌شود که جفت‌های (y, x) در f را گرفته و عنصرهای x و y را با هم عوض می‌کنیم. یعنی $(y, x) \in g$ اگر و فقط اگر $(x, y) \in f$. هرگاه f اکیداً یکنوا باشد آنگاه هیچ دوجفت موجود در f یک عنصر دوم ندارند، و در نتیجه هیچ دوجفت در g دارای یک عنصر اول نخواهند بود. پس g واقعاً یک تابع است.

مثال. تابع ریشه n ، اگر n عدد صحیح مثبتی باشد بازای $x \geq 0$ قرار می‌دهیم $f(x) = x^n$. در اینصورت f بر هر بازه $[a, b]$ ، که $0 \leq a \leq b$ ، اکیداً صعودی است. تابع معکوس g تابع ریشه n است که بازای $y \geq 0$ با معادله

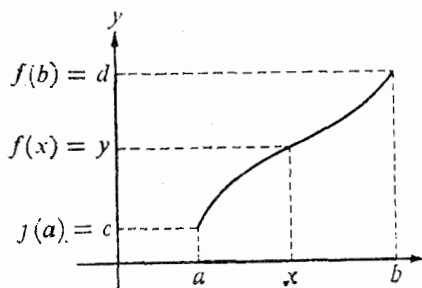
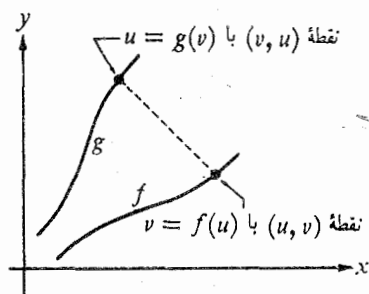
$$g(y) = y^{1/n}$$

تعریف می‌شود.

۱۳.۳ خواصی از تابع‌ها که در معکوس سازی حفظ می‌شوند

بسیاری از خواص تابع f به معکوس g منتقل می‌گردند. شکل ۱۱.۳ رابطه بین نمودارهای

آنها را نشان می‌دهد. هر یک را می‌توان از دیگری صرفاً بوسیله انعکاس نسبت به خط $y = x$ بدست آورد، زیرا نقطه (u, v) بر نمودار f قرار دارد اگر و فقط اگر نقطه (v, u) بر نمودار g واقع باشد.



شکل ۱۰.۳ یک تابع پیوسته اکیداً صعودی. شکل ۱۱.۳ نمایش فرایند معکوس‌سازی.

همانطور که قضیه زیر توصیف کرده، خواص یکنوایی و پیوستگی f به تابع معکوس g منتقل می‌شوند.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی و پیوسته باشد. قرار می‌دهیم $c = f(a)$ و $d = f(b)$ و g را معکوس f می‌انگاریم، یعنی برای هر y در $[c, d]$ ، $g(y)$ را آن x در $[a, b]$ می‌دانیم که $y = f(x)$. در اینصورت (الف) g بر $[c, d]$ اکیداً صعودی است؛ (ب) g بر $[c, d]$ پیوسته می‌باشد.

برهان. $y_1 < y_2$ را در $[c, d]$ اختیار کرده و فرض می‌کنیم $x_1 = g(y_1)$ و $x_2 = g(y_2)$. پس $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون f اکیداً صعودی است رابطه $y_1 < y_2$ را اینجاب می‌کند که، بنوبه خود، اکیداً صعودی بودن g بر $[c, d]$ را گواهی می‌دهد. این قسمت (الف) را ثابت خواهد کرد. حال (ب) را ثابت می‌کنیم. برهان آن در شکل ۱۲.۳ مصور شده است. نقطه y_0 را در بازه باز (c, d) اختیار می‌کنیم. برای اثبات پیوستگی g در y_0 باید نشان دهیم که برای هر $\epsilon > 0$ ، δ مثبتی هست بطوری که

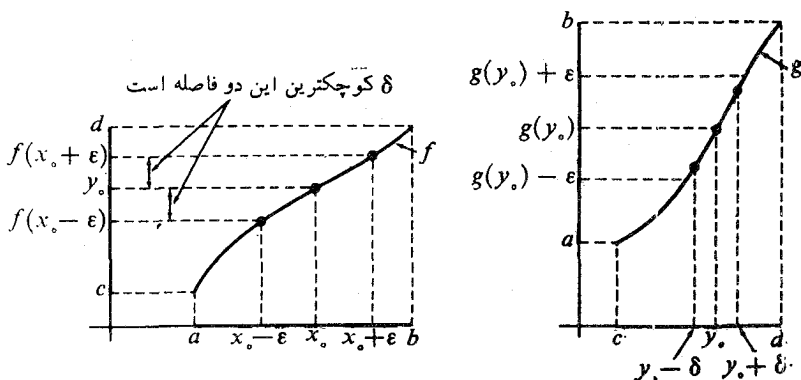
$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \text{ هرگاه } y \text{ آنگاه}$$

$$(22.3) \quad g(y_0) - \epsilon < g(y) < g(y_0) + \epsilon.$$

قرار می‌دهیم $x_0 = g(y_0)$ ، پس $f(x_0) = y_0$. فرض کنیم ϵ داده شده باشد. (اگر فقط به آن ϵ های کوچکی که هم $x_0 - \epsilon$ و هم $x_0 + \epsilon$ در $[a, b]$ هستند توجه کنیم به کلیت خللی وارد نخواهد شد.) فرض می‌کنیم δ مینیمم دوعدد

$$f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \text{ و } f(x_0) - f(x_0 - \epsilon)$$

باشد. با سانی می توان تحقیق کرد که این δ در (۲۲.۳) کارا است. با تغییر مختصری در استدلال ثابت می شود که g از راست در c و از چپ در d پیوسته است. قضیه ای متناظر برای توابع نزولی وجود دارد. یعنی معکوس تابع اکیداً نزولی و پیوسته f اکیداً نزولی و پیوسته است. این از بکار بردن قضیه ۱۰.۳ در مسورد $f -$ نتیجه می شود.



شکل ۱۲.۳ برهان پیوستگی تابع معکوس.

مثال. پیوستگی تابع ریشه n م. تابع ریشه n م g ، که بازای $y \geq 0$ با معادله $g(y) := y^{1/n}$ تعریف می شود، بر هر بازه $[c, d]$ که $0 \leq c < d$ اکیداً صعودی و پیوسته است چونکه معکوس تابعی است اکیداً صعودی و پیوسته. این برهان دیگری از پیوستگی تابع ریشه n م را بدست می دهد که مستقل از نظریه انتگرال گیری است. از آنجا که حاصلضرب توابع پیوسته پیوسته است دوباره پیوستگی تابع توانی r $h(y) = y^r$ که در آن $r = m/n$ عدد گویای مثبتی است و $y \geq 0$ را نتیجه خواهیم گرفت.

۱۴.۳ معکوسهای توابع قطعه قطعه یکنوا

فرض کنید بخواهیم فرایند معکوس سازی را در مورد تابعی که بر $[a, b]$ یکنوا نیست بکار ببریم. مثلاً فرض کنید بر بازه ای بشکل $[-c, c]$ بر محور x ، $f(x) = x^2$. هر نقطه x در این بازه توسط f دقیقاً به یک نقطه y در بازه $[0, c^2]$ ، یعنی

$$(۲۳.۳) \quad y = x^2,$$

برده می شود. معادله (۲۳.۳) را می توانیم نسبت به x و بر حسب y حل کنیم، اما بازای هر y در $[0, c^2]$ دو مقدار متناظر x ، یعنی

$$x = -\sqrt{y} \text{ و } x = \sqrt{y}$$

وجود دارند. همانطور که پیشتر هم یکبار ذکر شد، زمانی بود که ریاضیدانان می گفتند

معکوس g در این حالت یک تابع دو مقداری است که با

$$g(y) = \pm \sqrt{y}$$

تعریف می‌شود. اما، چون دیدگاه جدیدتر دو مقداری بودن را خاصیتی از توابع نمی‌داند، در چنین حالتی می‌گوئیم فرایند معکوس سازی دو تابع جدید، مثل g_1 و g_2 ، را بدست می‌دهد که

$$(24.3) \quad g_2(y) = -\sqrt{y} \text{ و } g_1(y) = \sqrt{y}, [0, c^2]$$

برای آنکه این وضع را با مفهوم معکوس که در بالا توضیح داده شد هماهنگ کنیم می‌توانیم به معادله $y = x^2$ نه فقط بعنوان معرف یک تابع f بلکه بعنوان تعریف کننده دو تابع، مثل f_1 و f_2 ، بنگریم که بصورت زیر می‌باشد:

$$\text{اگر } 0 \leq x \leq c, f_1(x) = x^2, \text{ و اگر } -c \leq x \leq 0, f_2(x) = x^2$$

اینها را می‌توان، بدلیل داشتن قلمروهای متفاوت، توابع متمایزی بحساب آورد. هر تابع بر قلمرو خود یکنوا بوده و معکوس دارد، معکوس f_1 ، g_1 و معکوس f_2 ، g_2 است که g_1 و g_2 با (24.3) داده می‌شوند.

این نشان می‌دهد که چگونه می‌توان فرایند معکوس سازی را در مورد توابع قطعه قطعه یکنوا بکار برد. فقط کافی است چنین تابعی را بعنوان اجتماعی از توابع یکنوا گرفته و هر قطعه یکنوا را معکوس کنیم.

ما در فصل ۶ از فرایند معکوس سازی بطور وسیعی استفاده خواهیم کرد.

۱۵.۳ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۵ نشان دهید که f بر تمام محور حقیقی اکیداً یکنوا است. فرض کنید g مبین معکوس f باشد. قلمرو g را در هر حالت وصف کنید. بنویسید $y = f(x)$ و آن را نسبت به x و بر حسب y حل نمائید؛ بدین ترتیب دستور (یا دستورهای) برای محاسبه $g(y)$ برای هر y در قلمرو g بیاید.

$$f(x) = x + 1.1 \quad f(x) = 2x + 5.2$$

$$f(x) = 1 - x.3 \quad f(x) = x^3.4$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x < 1 \\ x^2 & \text{اگر } 1 \leq x \leq 4 \\ 8x^{1/2} & \text{اگر } x > 4 \end{cases} .5$$

مقادیر میانگین. فرض کنیم f بر قسمت مثبت محور حقیقی پیوسته و اکیداً یکنوا بوده و g نشانگر معکوس آن باشد. چنانچه $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ عدد حقیقی مثبت مفروضی باشند مقدار میانگین (یا متوسط) آنها نسبت به f ، یعنی M_f ، را این طور تعریف می‌کنیم:

$$M_f = g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)\right).$$

بخصوص، وقتی بازای $f(x) = x^p$, $p \neq 0$ میانگین توانی p ام نام دارد. (همچنین، ر.ک. بخش ۴.۱۰۰)

۶. نشان دهید که $f(M_f) = (1/n) \sum_{i=1}^n f(a_i)$. عبارت دیگر، مقدار f در متوسط M_f میانگین حسابی مقادیر تابعی $f(a_1), \dots, f(a_n)$ می باشد.

۷. نشان دهید که $a_1 < M_f < a_n$ عبارت دیگر، متوسط $a_1, \dots, a_n$ میان بزرگترین و کوچکترین a_i ها قرار دارد.

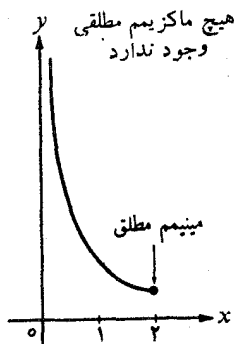
۸. چنانچه $h(x) = af(x) + b$ ، که در آن $a \neq 0$ ، نشان دهید که $M_h = M_f$. این نشان می دهد که توابع متفاوت ممکن است یک متوسط را بدهند. این قضیه را از طریق مقایسه نمودارهای h و f تعبیر هندسی کنید.

۱۶.۳ قضیه مقدار اکستریم برای توابع پیوسته

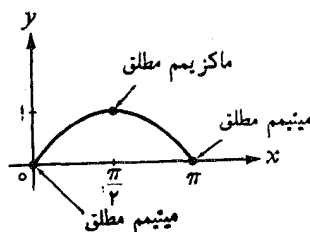
فرض کنیم تابع حقیقی f بر مجموعه S از اعداد حقیقی تعریف شده باشد. می گویند تابع f بر مجموعه S یک ماکزیمم مطلق دارد هرگاه لااقل یک نقطه مثل c در S باشد بطوری که بازای هر x در S ، $f(x) \leq f(c)$.

عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f بر S می خوانند. می گوئیم f بر S یک مینیمم مطلق دارد هرگاه نقطه ای چون d در S باشد بطوری که

$$f(x) \geq f(d), \quad x \text{ در } S$$



$$f(0) = 1; f(x) = \frac{1}{x}, 0 < x \leq 2 \quad \text{اگر (ب)}$$



$$f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi \quad \text{'(الف)'}$$

شکل ۱۳.۳ مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع.

این مفاهیم در شکل ۱۳.۳ مصور شده اند. در شکل ۱۳.۳ (الف)، S بازه بسته

$[0, \pi]$ بوده و $f(x) = \sin x$. مینیمم مطلق، که در هر دو نقطه انتهائی بازه رخ می‌دهد، ۰ است. ماکزیمم مطلق $f(\pi/2) = 1$ می‌باشد.

در شکل ۱۳.۳ (ب)، S بازه بسته $[0, 2]$ بوده و، اگر $f(x) = 1/x$ ، $x > 0$ و $f(0) = 1$. در این مثال f در $x = 2$ مینیمم مطلق دارد اما صاحب ماکزیمم مطلق نیست. ماکزیمم نداشتن بجهت ناپیوستگی در نقطه‌ای از S می‌باشد.

می‌خواهیم ثابت کنیم که هرگاه S بازه بسته‌ای بوده و f همه جا بر آن پیوسته باشد آنگاه f بر S هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق. این مطلب، که به قضیه مقدار اکستریم برای توابع پیوسته معروف شده، بعنوان نتیجه‌ای ساده از قضیه زیر بدست می‌آید.

قضیه ۱۱.۳. قضیه کراندار برای توابع پیوسته. فرض کنیم f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در اینصورت f بر $[a, b]$ کراندار است. یعنی عددی مثل $C \geq 0$ هست بطوری که بازای هر x در $[a, b]$ ، $|f(x)| \leq C$.

برهان. با استفاده از فنی بنام روش دو نیم‌سازی متوالی به برهان خلف می‌رویم. فرض می‌کنیم f بر $[a, b]$ بی‌کران باشد (یعنی کراندار نباشد). همچنین c را نقطه وسط $[a, b]$ می‌انگاریم. چون f بر $[a, b]$ بی‌کران است پس دست کم بر یکی از زیر بازه‌های $[a, c]$ یا $[c, b]$ چنین خواهد بود. فرض کنیم $[a_1, b_1]$ آن نیمه‌ای از $[a, b]$ باشد که f در آن بی‌کران است. چنانچه f در هر دو نیمه بی‌کران باشد $[a_1, b_1]$ را نیمه چپ، یعنی $[a, c]$ ، می‌گیریم. حال این فرایند دو نیم‌سازی را ادامه داده $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ را آن نیمه از $[a_n, b_n]$ می‌انگاریم که f در آن بی‌کران است، با این فرض که اگر f در هر دو نیمه بی‌کران بود ما نیمه چپ را اختیار می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که چون طول هر بازه نصف طول بازه ماقبلش است، پس طول $[a_n, b_n]$ مساوی $(b-a)/2^n$ خواهد بود.

فرض کنیم A مجموعه نقاط انتهائی چپ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ باشد که باین طریق ساخته شده‌اند و α را سوپرمم A می‌انگاریم. در اینصورت α در $[a, b]$ قرار دارد. بخاطر پیوستگی f در α بازه‌ای بشکل $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ هست که در آن

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1. \quad (25.3)$$

اگر $\alpha = a$ این بازه شکل $[a, a + \delta)$ را دارد و اگر $\alpha = b$ از شکل $(b - \delta, b]$ برخوردار است. نامساوی (۲۵.۳) ایجاب می‌کند که

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|,$$

پس f در این بازه بوسیله $1 + |f(\alpha)|$ کراندار است. اما، وقتی n آنقدر بزرگ باشد که $\delta < (b-a)/2^n$ ، بازه $[a_n, b_n]$ داخل $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ قرار می‌گیرد. بنا براین، f نیز در $[a_n, b_n]$ کراندار است که با بی‌کران بودن f بر $[a_n, b_n]$ تعارض دارد. این تناقض برهان را تمام می‌کند.

هرگاه f بر $[a, b]$ کراندار باشد آنگاه مجموعه همه مقادیر تابعی $f(x)$ از بالا و باین کراندار است. پس این مجموعه سوپرمم و اینفیمم دارد که آنها را بترتیب با $\sup f$ و

$\inf f$ نشان می‌دهیم. یعنی می‌نویسیم

$$\sup f = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}, \inf f = \inf\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}.$$

برای هر تابع کراندار f بازای هر x در $[a, b]$ داریم $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$. حال ثابت می‌کنیم که تابع پیوسته f هم $\inf f$ و هم $\sup f$ را جایی در $[a, b]$ می‌گیرد.

قضیه ۱۲.۳. قضیه مقدار اکسترمیم برای توابع پیوسته. فرض کنیم f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در اینصورت نقاطی چون c و d در $[a, b]$ هستند بطوری که

$$f(d) = \inf f \quad f(c) = \sup f$$

برهان. کافی است ثابت کنیم که f سوپرمم خود را در $[a, b]$ احراز می‌کند. پس مطلب مربوط به اینفیم از این نتیجه می‌شود زیرا اینفیم f مساوی سوپرمم f — می‌باشد. قرار می‌دهیم $M = \sup f$. فرض می‌کنیم x در $[a, b]$ که بازای آن $f(x) = M$ وجود ندارد و تناقضی بدست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $g(x) = M - f(x)$. در اینصورت، بازای هر x در $[a, b]$ ، $g(x) > 0$ ، پس متقابل $1/g$ بر $[a, b]$ پیوسته است. $1/g$ بنا بر قضیه ۱۱.۳ بر $[a, b]$ کراندار است، مثلاً، بازای هر x در $[a, b]$ ، $1/g(x) < C$ که در آن $C > 0$. این ایجاب می‌کند که $M - f(x) > 1/C$ ، پس، بازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) < M - 1/C$. این کوچکترین کران بالائی بودن M برای f بر $[a, b]$ را نقض می‌کند. از اینرو دست کم یک x در $[a, b]$ هست که $f(x) = M$.

توجه: این قضیه نشان می‌دهد که هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه $\sup f$ ماکزیمم مطلق و $\inf f$ مینیمم مطلق آن می‌باشد. پس، بنا بر قضیه مقدار میانی، برد f بازه بسته $[\inf f, \sup f]$ خواهد بود.

۱۷.۳ قضیه پیمای کوچک برای توابع پیوسته (پیوستگی یکشکل)

فرض کنیم f بر بازه بسته $[a, b]$ حقیقی و پیوسته بوده و $M(f)$ و $m(f)$ بترتیب مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن را بر $[a, b]$ نشان دهند. متفاضل

$$M(f) - m(f)$$

را پیمای f در بازه $[a, b]$ می‌نامیم. برخی از مؤلفان بجای پیمای اصطلاح نوسان را بکار می‌برند. اما اصطلاح نوسان این عیب را دارد که توابع نوسانی یا شبه موجی را القامی‌کند. کتب درسی قدیمی تر انگلیسی از لغت سالتوس^۱، که کلمه لاتینی پرش است، استفاده کرده‌اند. ظاهراً لغت «پیمای» برای آنچه در اینجا اندازه‌گیری می‌شود مناسب‌تر است. ملاحظه می‌کنیم که پیمای f در هر زیر بازه $[a, b]$ نمی‌تواند از پیمای f در $[a, b]$ تجاوز کند. اینک ثابت می‌کنیم که بازه $[a, b]$ را می‌توان طوری تقسیم کرد که پیمای f در هر زیر بازه بقدر کافی کوچک باشد. عبارت دقیقتر، قضیه زیر را داریم که آن را

قضیهٔ پیمای کوچک برای توابع پیوسته می‌نامیم. از این قضیه معمولاً در نوشتجات بعنوان قضیه در باب پیوستگی یکشکل یاد می‌شود.

قضیهٔ ۱۳.۳. فرض کنیم f بر بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در اینصورت بازای هر $\varepsilon > 0$ افزایی از $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیربازه وجود دارد بطوری که پیمای f در هر زیربازه از ε کمتر است.

برهان. با استفاده از روش دو نیم‌سازی متوالی به برهان خلف می‌رویم. فرض کنیم قضیه نادرست باشد. یعنی که بازای ε ، مثلاً $\varepsilon = 0.01$ ، نتوان بازه $[a, b]$ را به تعدادی متناهی زیربازه چنان تقسیم کرد که پیمای f در هر یک از آنها از ε کمتر شود. فرض کنیم c نقطهٔ وسط $[a, b]$ باشد. در اینصورت، برای همین ε ، قضیه در مورد لاقبل یکی ازدو زیر-بازه $[a, c]$ یا $[c, b]$ نادرست خواهد بود. (اگر قضیه در هر دو بازه $[a, c]$ و $[c, b]$ درست می‌بود در تمام بازه $[a, b]$ نیز برقرار می‌شد.) فرض کنیم $[a_1, b_1]$ آن نیمه از $[a, b]$ باشد که قضیه بازای ε نادرست است. چنانچه قضیه در هر دو نیمه غلط باشد $[a_1, b_1]$ را نیمهٔ چپ، یعنی $[a, c]$ ، می‌گیریم. حال فرایند دو نیم‌سازی را ادامه داده $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ را آن نیمه از $[a_n, b_n]$ می‌انگاریم که قضیه در آن بازای ε غلط است، با این فرض که اگر قضیه در هر دو نیمه $[a_n, b_n]$ نادرست بود ما نیمهٔ چپ را برمی‌گزینیم. توجه کنید که پیمای f در هر یک از زیربازه‌های $[a_n, b_n]$ ساخته شده باین صورت دست‌کم برابر ε است.

فرض کنیم A دستهٔ نقاط انتهائی چپ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ باشد که باین ترتیب ساخته می‌شوند و α را کوچکترین کران بالائی A می‌انگاریم. در اینصورت α در $[a, b]$ قرار خواهد داشت. بنا بر پیوستگی f در α بازه‌ای چون $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ هست که در آن پیمای f از ε کمتر است. (اگر $\alpha = a$ این بازه بصورت $[a, a + \delta)$ و اگر $\alpha = b$ بشکل $(b - \delta, b]$ خواهد بود.) اما، وقتی n آنقدر بزرگ باشد که $\delta < (b - a)/2^n$ ، بازه $[a_n, b_n]$ در $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ جای می‌گیرد، پس پیمای f در $[a_n, b_n]$ نیز از ε کمتر است که بالاقل مساوی ε بودن پیمای f در $[a_n, b_n]$ تعارض دارد. این تناقض برهان قضیهٔ ۱۳.۳ را تمام می‌کند.

۱۸.۳ قضیهٔ انتگرالپذیری برای توابع پیوسته

از قضیهٔ پیمای کوچک می‌توان استفاده کرد و ثابت نمود که یک تابع پیوسته بر $[a, b]$ براین بازه انتگرالپذیر هم هست.

قضیهٔ ۱۴.۳. انتگرالپذیری توابع پیوسته. هرگاه تابع f در هر نقطه از بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است.

برهان. قضیهٔ ۱۱.۳ نشان می‌دهد که f بر $[a, b]$ کراندار است، پس f انتگرال

بالائی $I(f)$ و انتگرال پائینی $I(f)$ دارد. ثابت می‌کنیم که $I(f) = I(f)$. عدد صحیح $N \geq 1$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم $\varepsilon = 1/N$. بنا بر قضیهٔ پیمای کوچک، برای این انتخاب ε ، افزایشی چون $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ به n زیر بازه وجود دارد بطوری که پیمای f در هر زیر بازه از ε کمتر است. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f در زیر بازهٔ k ام $[x_{k-1}, x_k]$ را به ترتیب با $M_k(f)$ و $m_k(f)$ نشان می‌دهیم. در اینصورت برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت

$$M_k(f) - m_k(f) < \varepsilon.$$

حال فرض می‌کنیم s_n و t_n دو تابع پله‌ای باشند که بر $[a, b]$ این‌طور تعریف شده‌اند:

$$\text{اگر } s_n(a) = m_1(f) \text{ و } s_n(x) = m_k(f), x_{k-1} < x \leq x_k$$

$$\text{اگر } t_n(b) = M_n(f) \text{ و } t_n(x) = M_k(f), x_{k-1} \leq x < x_k$$

پس برای هر x در $[a, b]$ داریم $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$. همچنین خواهیم داشت

$$\int_a^b t_n = \sum_{k=1}^n M_k(f)(x_k - x_{k-1}) \text{ و } \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1})$$

تفاضل این دو انتگرال برابر است با

$$\begin{aligned} \int_a^b t_n - \int_a^b s_n &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)](x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

چون $\varepsilon = 1/N$ این نامساوی را می‌توان بشکل

$$(۲۶.۲) \quad \int_a^b t_n - \int_a^b s_n < \frac{b-a}{N}$$

نوشت. از سوی دیگر، انتگرالهای بالائی و پائینی f در نامساویهای

$$\int_a^b s_n \leq I(f) \leq \int_a^b t_n \text{ و } \int_a^b s_n \leq I(f) \leq \int_a^b t_n$$

صدق می‌کنند. با ضرب نامساویهای اول در $1 -$ و افزودن آنها به نامساویهای دوم بدست می‌آوریم که

$$I(f) - I(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n.$$

چنانچه از (۲۶.۳) و رابطهٔ $I(f) \leq I(f)$ استفاده کنیم برای هر عدد صحیح $N \geq 1$ خواهیم داشت

$$0 \leq I(f) - I(f) < \frac{b-a}{N}.$$

بنابراین، طبق قضیه ۳۱.۴، باید داشته باشیم $I(f) = \bar{I}(f)$. این ثابت می‌کند که f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است.

۱۹.۳ قضایای مقدار میانگین برای انتگرالهای توابع پیوسته

در بخش ۱۶.۲ بود که مقدار متوسط $A(f)$ تابع f روی بازه $[a, b]$ را مساوی کسر $\int_a^b f(x)dx / (b - a)$ تعریف کردیم. وقتی f پیوسته باشد می‌توانیم ثابت کنیم که این مقدار متوسط برابر است با مقدار f در نقطه‌ای از $[a, b]$.

قضیه ۱۵.۲. قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها. هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه بازای c ی در $[a, b]$ داریم

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

برهان. فرض می‌کنیم m و M بترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم f بر $[a, b]$ باشند. دراینصورت، بازای هر x در $[a, b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$. با انتگرال گرفتن از این نامساویها و تقسیم بر $b - a$ درخواهیم یافت که $m \leq A(f) \leq M$ که در آن $A(f) = \int_a^b f(x)dx / (b - a)$. اما قضیه مقدار میانگین به ما می‌گوید که بازای c ی در $[a, b]$ ، $A(f) = f(c)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتیجه‌ای متناظر برای مقادیر میانگین وزندار وجود دارد.

قضیه ۱۶.۲. قضیه مقدار میانگین وزندار برای انتگرالها. فرض کنیم f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشند. هرگاه g در $[a, b]$ اصلاً تغییر علامت ندهد آنگاه بازای c ی در $[a, b]$ خواهیم داشت

$$(۲۷.۳) \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

برهان. چون علامت g در $[a, b]$ هرگز عوض نمی‌شود پس g بر $[a, b]$ یا همیشه نامنفی است یا همیشه نامثبت. فرض کنیم g بر $[a, b]$ نامنفی باشد. دراینصورت می‌توانیم مشکل برهان قضیه ۱۵.۲ استدلال کنیم با این تفاوت که از نامساویهای $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ انتگرال بگیریم تا بدست آید که

$$(۲۸.۳) \quad m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

اگر $\int_a^b g(x)dx = 0$ این نامساویها نشان می‌دهند که $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. در این حالت معادله (۲۷.۳) برای هر انتخاب c خودبخود برقرار است زیرا که هر دوطرف آن

صفر می باشند. در غیر این صورت انتگرال g مثبت است و می توانیم نامساویهای (۲۸.۳) را بر این انتگرال تقسیم کرده و، مانند پیش، قضیه مقدار میانی را بکار بریم و برهان را تمام نمائیم. چنانچه g نامثبت باشد همین استدلال را در مورد $-g$ — بکار خواهیم برد. قضیه مقدار میانگین وزندار گاهی تخمین مفیدی برای انتگرال حاصلضرب دو تابع را بدست می دهد، بویژه اگر محاسبه انتگرال یکی از سازه ها آسان باشد. در مجموعه تمرینات بعدی مثالهایی آورده شده اند.

۲۰.۳ تمرینات

۱. با استفاده از قضیه ۱۶.۳ نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}.$$

۲. با توجه به $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$ و استفاده از قضیه ۱۶.۳ نامساویهای

$$\frac{11}{24} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx \leq \frac{11}{24} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

را بدست آورید.

۳. با استفاده از اتحاد $1+x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ و قضیه ۱۶.۳ ثابت کنید که برای $a > 0$ داریم

$$\frac{1}{1+a^6} \left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

با فرض $a = 1/10$ مقدار انتگرال را که تا ۶ رقم اعشار گرد شده حساب کنید.

۴. یکی از دو گزاره زیر نادرست است. دلیل غلط بودن آن را توضیح دهید.

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t} dt > 0 \quad (\text{الف})$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t} dt > \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \quad \text{چونکه}$$

(ب) $\int_{2\pi}^{4\pi} [\sin t / t] dt = 0$ زیرا، بنابر قضیه ۱۶.۳، برای c ای بین 2π و 4π داریم

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{c} \int_{2\pi}^{4\pi} \sin t dt = \frac{\cos(2\pi) - \cos(4\pi)}{c} = 0.$$

۵. اگر n عدد صحیح مثبتی باشد با استفاده از قضیه ۱۶.۳ نشان دهید که

$$\sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi} \quad \text{که در آن} \quad \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt = \frac{(-1)^n}{c}$$

۶. فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. چنانچه $\int_a^b f(x)dx = 0$ ثابت کنید دست کم یک c در $[a, b]$ هست که $f(c) = 0$.
۷. فرض کنید f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر و نامنفی باشد. چنانچه $\int_a^b f(x)dx = 0$ ثابت کنید در هر نقطه پیوستگی f ، $f(x) = 0$. [داهنمائی: اگر در هر نقطه پیوستگی c ، $f(c) > 0$ بازه‌ای حول c هست که در آن $f(x) > f(c)/2$.
۸. فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین، بازای هر تابع پیوسته g بر $[a, b]$ ، $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ ثابت کنید بازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) = 0$.

حساب دیفرانسیل

۱.۴ مقدمه تاریخی

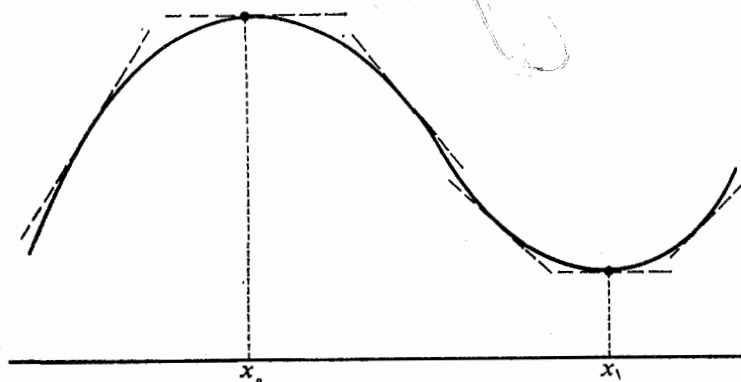
نیوتن ولایب‌نیتز را می‌توان عمدتاً، و کاملاً جدا از هم، عاملان بسط مفاهیم حساب انتگرال تا مرحله‌ای دانست که از آن بی‌عد پرداختن به مسائل لاینحل با روشهای جاری بیش و کم امکان‌پذیر بود. موفقیت این مردان اصولاً بدان خاطر بود که می‌توانستند حساب انتگرال را با دومین شاخه اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی حساب دیفرانسیل، درهم آمیزند. ایده اصلی حساب دیفرانسیل مفهوم مشتق است. مشتق نیز، نظیر انتگرال، از مسئله‌ای در هندسه، یعنی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، ناشی شده است. اما برخلاف انتگرال خیلی دیر در تاریخ ریاضیات ظاهر شد. این مفهوم تا اوایل قرن ۱۷م، یعنی تا قبل از آنکه ریاضیدان فرانسوی، پیر فرما^۱، به تعیین ماکزیممها و مینیممهای چند تابع خاص دست بزند، تنظیم نشده بود.

فکر فرما را که اساساً بسیار ساده است می‌توان با مراجعه به منحنی شکل ۱.۴ دریافت. فرض این است که این منحنی در هر نقطه‌اش امتداد معینی دارد که می‌توان آن را با خط مماس توصیف کرد. بعضی از این مماسها در شکل با خطوط شکسته نموده شده‌اند. فرما دریافت که خطوط مماس در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد (نظیر آنهایی که در شکل با طولهای x و x_1 نموده شده‌اند) باید افقی باشند. از اینرو دیده می‌شود که مسئله تعیین محل این مقادیر اکستريم به حل مسئله‌ای دیگر، یعنی یافتن مماسهای افقی، مربوط است.

این مطلب مشکل کلیتر تعیین امتداد خط مماس در یک نقطه دلخواه منحنی را مطرح می‌کند. تلاش برای حل این مسئله کلی بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی که اساس مفهوم مشتق هستند هدایت کرد.

1. Pierre de Fermat

در نگاه اول این طور بنظر می‌رسد که بین مسئله یافتن مساحت ناحیه زیر یک منحنی



شکل ۱.۴ منحنی در بالای نقاط x_0 و x_1 مماسهای افقی دارد.

و موضوع تعیین خط مماس در یک نقطه از آن هیچ رابطه‌ای وجود ندارد. ظاهراً اولین کسی که دریافت این دو فکر بظاهر دور از هم در واقع ارتباط نسبتاً نزدیکی با هم دارند اسحق بارو^۱ (۱۶۷۷-۱۶۳۵)، معلم نیوتن، بوده است. اما نیوتن ولایب‌نیتز اولین کسانی بودند که به اهمیت واقعی این ارتباط پی برده و از آن منتهای بهره‌برداری را نمودند، و بدین ترتیب فصل جدیدی را در پیشرفت ریاضیات گشودند.

اگرچه مشتق در اصل برای بررسی مسئله مماسها تنظیم شده بود لکن بزودی معلوم شد که طریقه‌ای برای محاسبه سرعت و، بطور کلیتر، میزان تغییر یک تابع را نیز بدست می‌دهد. در بخش بعد مسئله خاصی را در نظر می‌گیریم که مربوط به محاسبه یک سرعت است. حل این مسئله حاوی کلیه وجوه لازم برای مفهوم مشتق بوده و می‌تواند در بیان انگیزه تعریف عمومی آن، که در بخش ۳.۴ داده شده، یاری دهنده باشد.

۲.۴ مسئله‌ای مربوط به سرعت

فرض کنیم پرتابه‌ای با سرعت اولیه ۱۴۴ فوت بر ثانیه مستقیماً از زمین به هوا پرتاب شود. از اصطکاک صرف‌نظر کرده و فرض می‌کنیم پرتابه فقط تحت تأثیر جاذبه چنان باشد که در امتداد خطی مستقیم بالا رفته و به زمین باز-گردد. $f(t)$ را ارتفاع پرتابه به فوت می‌انگاریم که t ثانیه پس از پرتاب احراز می‌کند. اگر نیروی ثقل بر آن اثر نمی‌کرد پرتابه حرکتش را به بالا با سرعت ثابت ادامه داده، در هر ثانیه ۱۴۴ فوت می‌پیمود، و در لحظه t می‌داشتیم $f(t) = 144t$. در عمل، جاذبه سبب کندی حرکت پرتابه می‌شود تا اینکه سرعتش به صفر نزول می‌کند و سپس به زمین باز خواهد گشت. آزمایشهای فیزیکی نشان می‌دهند که تا وقتی پرتابه در فضا است ارتفاع آن $f(t)$ از دستور

$$(۱۰۴) \quad f(t) = ۱۴۴t - ۱۶t^2$$

بدست می‌آید. جمله $۱۶t^2 -$ بواسطه اثر جاذبه می‌باشد. توجه کنید که وقتی $t = ۰$ و $t = ۹$ داریم $f(t) = ۰$. این یعنی که پرتابه پس از ۹ ثانیه به زمین بازمی‌گردد و دستور (۱۰۴) فقط برای $۰ \leq t \leq ۹$ معتبر است.

مسئله موردنظر ما چنین است: تعیین سرعت پرتابه در هر لحظه از حرکت آن. پیش از آنکه بتوانیم این مسئله را بفهمیم باید معنی سرعت در هر لحظه را روشن کنیم. برای این کار ابتدا مفهوم سرعت متوسط در یک فاصله زمانی، مثلاً از لحظه t تا لحظه $t + h$ ، را معرفی می‌کنیم. این مساوی خارج قسمت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\text{تغییر فاصله در یک فاصله زمانی}}{\text{طول فاصله زمانی}} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

این خارج قسمت، که خارج قسمت تفاضلی نام دارد، عددی است که می‌توان آن را هروقت که t و $t + h$ هر دو در بازه $[۰, ۹]$ باشند محاسبه کرد. عدد h ممکن است مثبت یا منفی باشد اما صفر نخواهد بود. ما t را ثابت گرفته و خواهیم دید که با کوچک و کوچکتر کردن $|h|$ چه برسر خارج قسمت تفاضلی می‌آید.

مثلاً لحظه $t = ۲$ را در نظر می‌گیریم. مسافت پیموده شده پس از ۲ ثانیه چنین است:

$$f(۲) = ۲۸۸ - ۶۴ = ۲۲۴.$$

در لحظه $t = ۲ + h$ فاصله طی شده مساوی است با

$$f(۲+h) = ۱۴۴(۲+h) - ۱۶(۲+h)^2 = ۲۲۴ + ۸۰h - ۱۶h^2.$$

بنابراین، سرعت متوسط در فاصله زمانی از $t = ۲$ تا $t = ۲ + h$ چنین خواهد بود:

$$\frac{f(۲+h) - f(۲)}{h} = \frac{۸۰h - ۱۶h^2}{h} = ۸۰ - ۱۶h.$$

همینطور که ما $|h|$ را کوچک و کوچکتر می‌کنیم این سرعت متوسط به ۸۰ نزدیک و نزدیکتر می‌شود. مثلاً، اگر $h = ۰.۰۱$ ، سرعت متوسط ۷۸.۴ را بدست می‌آوریم؛ وقتی $h = ۰.۰۰۱$ ، ۷۹.۹۸۴ را خواهیم داشت؛ زمانی که $h = ۰.۰۰۰۰۱$ مقدار ۷۹.۹۹۹۸۴ بدستمان می‌آید؛ و برای $h = -۰.۰۰۰۰۰۱$ ، ۸۰.۰۰۰۰۱۶ را نتیجه خواهیم گرفت. نکته مهم این است که، با اختیار $|h|$ بقدر کافی کوچک، می‌توانیم سرعت متوسط را هر قدر که بخواهیم به ۸۰ نزدیک کنیم. عبارت دیگر، وقتی h به صفر نزدیک شود، سرعت متوسط به حد ۸۰ نزدیک خواهد شد. طبیعی است که این مقدار حلی را سرعت لحظه‌ای در لحظه $t = ۲$ بنامیم.

این نوع محاسبه را می‌توان برای هر لحظه دیگر انجام داد. سرعت متوسط برای هر فاصله زمانی از t تا $t + h$ با کسر

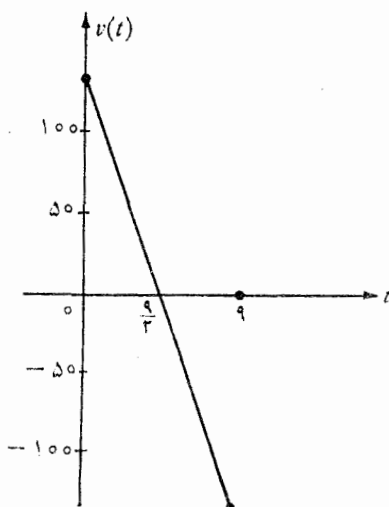
$$\begin{aligned}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{[144(t+h) - 16(t+h)^2] - [144t - 16t^2]}{h} \\ &= 144 - 32t - 16h\end{aligned}$$

داده می‌شود.

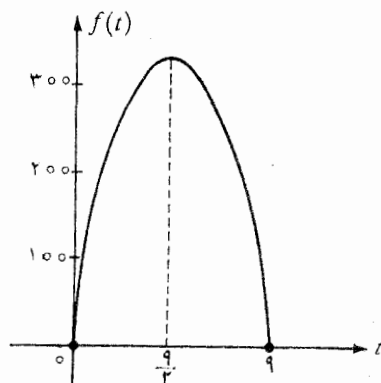
وقتی h به صفر نزدیک شود عبارت سمت راست به $144 - 32t$ بعنوان حد نزدیک خواهد شد، و این حد سرعت لحظه‌ای در لحظه t تعریف می‌شود. چنانچه سرعت لحظه‌ای را با $v(t)$ نشان دهیم می‌توانیم بنویسیم

$$(2.4) \quad v(t) = 144 - 32t.$$

دستور (۱.۴) برای فاصله $f(t)$ معرف تابع f است که به ما می‌گوید که پرتابه در هر لحظه از حرکتش در چه ارتفاعی است. ما از f بعنوان تابع مکان یاد می‌کنیم. قلمرو آن بازه بسته $[0, 9]$ بوده و نمودارش در شکل ۲.۴ (الف) نشان داده شده است. [در هر دو شکل ۲.۴ (الف) و (ب) مقیاس محور قائم تغییر یافته است.] دستور (۲.۴) برای سرعت $v(t)$ تابع جدید v را تعریف می‌کند که به ما سرعت پرتابه را در هر لحظه از حرکتش یادآوری می‌شود. این را تابع سرعت می‌خوانند، و نمودار آن در شکل ۲.۴ (ب) نشان داده شده است. وقتی t از ۰ تا ۹ افزایش یابد $v(t)$ بتدریج از $144 = v(0)$ تا $-144 = v(9)$ کاهش می‌یابد. برای یافتن زمان t که در آن $v(t) = 0$ معادله $144 = 32t$ را حل کرده بدست می‌آوریم $t = 9/2$. بنابراین، در نیمه حرکت، اثر جاذبه سرعت را به صفر تقلیل داده و در یک آن پرتابه بحال سکون درمی‌آید. ارتفاع پرتابه در این لحظه $f(9/2) = 324$ است. زمانی که $t > 9/2$ سرعت منفی می‌باشد که نشان می‌دهد که



(ب)



(الف)

شکل ۲.۴ (الف) نمودار تابع مکان $f(t) = 144t - 16t^2$.

(ب) نمودار تابع سرعت $v(t) = 144 - 32t$.

ارتفاع در حال کاهش است.

عمل حدگیری، که با آن $v(t)$ از خارج قسمت تفاضلی بدست می آید، را می توان بطور علامتی این طور نوشت:

$$(۳.۴) \quad v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

این معادله فقط برای تعریف سرعت در این مثال خاص نبوده بلکه، بطور کلی، در مورد هر جسمی که در امتداد یک خط راست حرکت کند بکار خواهد رفت مشروط بر آنکه تابع مکان f چنان باشد که خارج قسمت تفاضلی با نزدیک شدن h به صفر به حد معینی میل نماید.

۳.۴ مشتق یک تابع

مثال وصف شده در بخش پیش راه معرفی مفهوم مشتق را نشان می دهد. ما با تابع f که حداقل بر بازه (a, b) بازی چون روی محور x تعریف شده شروع می کنیم. سپس نقطه ثابت x را در این بازه اختیار و خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

را معرفی می نمایم که در آن h ، که ممکن است مثبت یا منفی (ولی نه صفر) باشد، بقسمی است که $x+h$ نیز در (a, b) قرار دارد. صورت این کسر تغییر تابع را وقتی x از x به $x+h$ تغییر می کند اندازه می گیرد. از خود کسر بعنوان میزان متوسط تغییر f در بازه ای که x را به $x+h$ وصل می کند یاد می شود.

حال h را به صفر نزدیک کرده و ببینیم چه بر سر این کسر می آید. هرگاه این خارج قسمت به مقدار معینی بعنوان حد نزدیک شود (که ایجاب می کند که آن حد چه h با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود چه با مقادیر منفی یکی است) آنگاه این حد را مشتق f در x نامیده و با علامت $f'(x)$ (بخوانید: « f پریم x ») نشان می دهند. پس تعریف صورتی $f'(x)$ را می توان این طور بیان کرد:

تعریف مشتق. مشتق $f'(x)$ با معادله

$$(۴.۴) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

بشرط وجود حد، تعریف می شود. عدد $f'(x)$ را میزان تغییر f در x نیز می نامند.

از مقایسه (۴.۴) با (۳.۴) می بینیم که مفهوم سرعت لحظه ای چیزی جز مثالی از مفهوم مشتق نیست. سرعت $v(t)$ مساوی مشتق $f'(t)$ است که در آن f تابعی است که جای

جسم را معین می‌کند. این را اغلب این طور توصیف می‌کنند که می‌گویند سرعت میزان تغییر مکان است نسبت به زمان. در مثالی که در بخش ۲.۴ حل شد تابع مکان f با معادله

$$f(t) = 144t - 16t^2$$

توصیف شده و مشتقش f' تابع جدیدی است (سرعت) که توسط

$$f'(t) = 144 - 32t$$

داده می‌شود.

بطور کلی عمل حدی که $f'(x)$ را از $f(x)$ می‌سازد طریقه بدست آوردن تابع جدید f' را از تابع معلوم f در اختیار ما می‌گذارد. این فرایند را مشتق‌گیری و f' را مشتق اول f می‌نامند. چنانچه f' ، بنوبه خود، بر بازه بازی تعریف شده باشد می‌توانیم برای محاسبه مشتق اول آن، که با f'' نموده شده و مشتق دوم f نام دارد، اقدام کنیم. به همین نحو، مشتق n م f ، که با $f^{(n)}$ نموده می‌شود، مساوی مشتق اول $f^{(n-1)}$ تعریف می‌گردد. قرارداد می‌کنیم که $f = f^{(0)}$ یعنی مشتق صفرم خود تابع باشد.

برای حرکت مستقیم الخط، مشتق اول سرعت (مشتق دوم مسافت) شتاب نام دارد. مثلاً، برای محاسبه شتاب در مثال بخش ۲.۴، می‌توانیم از معادله (۲.۴) استفاده کرده خارج قسمت تفاضلی

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{[144 - 32(t+h)] - [144 - 32t]}{h} \\ &= \frac{-32h}{h} = -32 \end{aligned}$$

را تشکیل دهیم. چون این خارج قسمت برای هر $h \neq 0$ مقدار ثابت ۳۲ - را دارد پس حد آن، وقتی $h \rightarrow 0$ ، نیز ۳۲ - خواهد بود. لذا شتاب در این مسئله ثابت و برابر ۳۲ - می‌باشد. این نتیجه به ما می‌گوید که سرعت بمیزان ۳۲ فوت بر ثانیه در هر ثانیه کاهش می‌یابد. در ۹ ثانیه کل کاهش در سرعت $288 = 9 \times 32$ فوت بر ثانیه است. این نتیجه با این مطلب که در طول ۹ ثانیه حرکت سرعت از $v(0) = 144$ تا $v(9) = -144$ تغییر می‌کند مطابقت دارد.

۴.۴ مثالهایی از مشتقات

مثال ۱. مشتق تابع ثابت. فرض می‌کنیم f تابع ثابتی باشد، مثلاً برای هر x ، $f(x) = c$ خارج قسمت تفاضلی عبارت است از

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

چون این کسر برای هر $h \neq 0$ صفر است پس حد آن $f'(x)$ نیز برای هر x صفر

می باشد. عبارت دیگر، یک تابع ثابت همه جا مشتق صفر دارد.

مثال ۲. مشتق تابع خطی. فرض می کنیم f یک تابع خطی باشد، مثلاً بازای هر x حقیقی $f(x) = mx + b$. چنانچه $h \neq 0$ خواهیم داشت

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + b - (mx + b)}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

چون این خارج قسمت تفاضلی، وقتی h به صفر نزدیک می شود، تغییری نمی کند نتیجه می گیریم که

$$f'(x) = m, x \text{ بازای هر } x$$

از اینرو مشتق یک تابع خطی تابع ثابتی خواهد بود.

مثال ۳. مشتق تابع توانی با توان عدد صحیح مثبت. اینک تابع $f(x) = x^n$ را در نظر می گیریم که در آن n عدد صحیح مثبتی است. خارج قسمت تفاضلی بصورت

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

در می آید. بررسی این کسر، وقتی h به ۰ نزدیک می شود، را می توان به دو طریق انجام داد، یا با تجزیه صورت بعنوان تفاضل دو توان n یا با استفاده از قضیه دو جمله ای برای بسط $(x+h)^n$. ما بررسی را با روش اول انجام می دهیم و روش دیگر را بعنوان تمرین برای خواننده می گذاریم. (ر.ک. تمرین ۳۹ در بخش ۶.۴)

ازجبر مقدماتی اتحاد

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

را داریم. چنانچه فرض کنیم $a = x + h$ و $b = x$ و دو طرف را بر h تقسیم کنیم این اتحاد بصورت

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k}$$

در می آید. در این مجموع n جمله وجود دارد. همینطور که h به ۰ صفر نزدیک می شود $(x+h)^k$ به x^k نزدیک شده جمله k ام به $x^{n-1-k} = x^{n-1-k}$ نزدیک می گردد، و لذا

۱. این اتحاد نتیجه فوری خاصیت توی هم روی مجموعه های متناهی است. در واقع، اگر هر جمله مجموع را در $(a-b)$ ضرب کنیم، درمی یابیم که

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}) = a^n - b^n.$$

مجموع تمام n جمله به nx^{n-1} نزدیک خواهد شد. از این نتیجه می شود که
 بازای هر x ، $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال ۴. مشتق تابع سینوس. فرض می کنیم $s(x) = \sin x$. خارج قسمت تفاضلی مربوطه چنین است:

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

برای تبدیل این کسر بشکلی که بتوان حد را وقتی $h \rightarrow 0$ حساب کرد از اتحاد مثلثاتی

$$\sin y - \sin x = 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}$$

با فرض $y = x + h$ استفاده می کنیم. با این کار به دستور

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

می رسم. وقتی $h \rightarrow 0$ سازه $\cos(x + h/2)$ بدلیل پیوستگی کسینوس، به $\cos x$ میل می کند. همچنین، دستور حدی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

که پیشتر دربخش ۴.۳ ثابت شد، نشان می دهد که

$$(5.4) \quad \frac{\sin(h/2)}{h/2} \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

بنابراین، وقتی $h \rightarrow 0$ ، خارج قسمت تفاضلی دارای حد $\cos x$ خواهد بود. بعبارت دیگر، بازای هر x ، $s'(x) = \cos x$ یعنی مشتق تابع سینوس تابع کسینوس است.

مثال ۵. مشتق تابع کسینوس. فرض کنیم $c(x) = \cos x$. ثابت می کنیم $c'(x) = -\sin x$ یعنی مشتق تابع کسینوس منهای تابع سینوس است. با اتحاد

$$\cos y - \cos x = -2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y+x}{2}$$

شروع کرده و فرض می کنیم $y = x + h$. با این فرض دستور

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

حاصل می شود. پیوستگی سینوس نشان می دهد که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $\sin(x + h/2) \rightarrow \sin x$.

پس از (۵.۴) خواهیم داشت $c'(x) = -\sin x$.

مثال ۶. مشتق تابع ریشه n م. اگر n عدد صحیح مثبتی باشد بازای $x > 0$ قرار می‌دهیم $f(x) = x^{1/n}$. خارج‌قسمت تفاضلی درمورد f چنین است:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{h}$$

قرار می‌دهیم $u = (x+h)^{1/n}$ و $v = x^{1/n}$. در اینصورت داریم $u^n = x+h$ و $v^n = x$ ، پس $h = u^n - v^n$ و خارج‌قسمت تفاضلی بصورت

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

درمی‌آید. پیوستگی تابع ریشه n م نشان می‌دهد که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $u \rightarrow v$. بنابراین، وقتی $h \rightarrow 0$ ، هر جمله در مخرج طرف راست دارای حد v^{n-1} می‌باشد. رویهم n جمله وجود دارد، پس خارج‌قسمت تفاضلی حد v^{n-1}/n را خواهد داشت. چون $v = x^{1/n}$ این ثابت می‌کند که

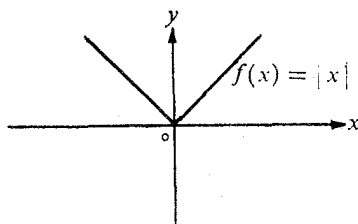
$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$

مثال ۷. پیوستگی توابعی که مشتق دارند. هرگاه تابع f در نقطه x مشتق داشته باشد آنگاه در x پیوسته نیز هست. برای اثبات این مطلب از اتحاد

$$f(x+h) = f(x) + h \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

استفاده می‌کنیم که بازای $h \neq 0$ معتبر است. با فرض $h \rightarrow 0$ خارج‌قسمت تفاضلی سمت راست به $f'(x)$ نزدیک می‌شود و، چون این خارج‌قسمت در سازه‌ای ضرب شده که به ۰ میل می‌کند، پس جمله دوم طرف راست به $0 = f'(x) \cdot 0$ نزدیک خواهد شد. این نشان می‌دهد که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $f(x+h) \rightarrow f(x)$ ، و در نتیجه f در x پیوسته می‌باشد.

این مثال راه جدیدی را برای نشان دادن پیوستگی توابع می‌گشاید. هر وقت که وجود مشتق $f'(x)$ را ثابت کنیم همزمان با آن پیوستگی f در x را نیز نشان داده‌ایم. اما لازم است تذکر دهیم که عکس این درست نیست. پیوستگی در x لزوماً باین معنی که مشتق $f'(x)$ وجود دارد نمی‌باشد. مثلاً، وقتی $f(x) = |x|$ ، نقطه $x = 0$ یک نقطه پیوستگی f است [زیرا، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow 0$] اما در ۰ مشتق وجود ندارد. (ر.ک. شکل ۳.۴). خارج‌قسمت تفاضلی $[f(0+h) - f(0)]/h$ مساوی $|h|/h$ است. این، وقتی $h > 0$ ، مقدارش ۱+ و، وقتی $h < 0$ ، مقدارش ۱- خواهد بود، و در نتیجه، وقتی $h \rightarrow 0$ ، به حدی میل نخواهد کرد.



شکل ۳.۴ تابع در ۰ پیوسته است ولی $f'(0)$ وجود ندارد.

۵۴ جبر مشتقات

همانطور که قضایای حد در بخش ۴.۳ طرز محاسبه حدود مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت دو تابع را به ما یاد می‌دهند، قضیه بعدی مجموعه قواعد متناظری را برای محاسبه مشتقات در اختیار ما خواهد گذاشت.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم f و g دو تابع باشند که بر بازه مشترکی تعریف شده‌اند. در هر نقطه که f و g مشتق داشته باشند مجموع $f + g$ ، تفاضل $f - g$ ، حاصلضرب $f \cdot g$ ، و خارج قسمت f/g نیز چنین‌اند. (در مورد f/g این شرط اضافی را که g در نقطه مورد نظر صفر نباشد لازم خواهیم داشت.) مشتقات این توابع با دستورهایی زیر داده می‌شوند:

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\text{یکم})$$

$$(f - g)' = f' - g' \quad (\text{دوم})$$

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f' \quad (\text{سوم})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}, \quad g(x) \neq 0 \quad (\text{چهارم})$$

در نقاط x که $g(x) \neq 0$

این قضیه را لحظه‌ای دیگر ثابت می‌کنیم، امسبا ابتدا می‌خواهیم به چند نتیجه آن اشاره نماییم. حالت خاصی از (سوم) وقتی رخ می‌دهد که یکی از دو تابع ثابت است، مثلاً، برای هر x مورد نظر $g(x) = c$. در این حالت، (سوم) بصورت $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ درمی‌آید. بعبارت دیگر، مشتق حاصلضرب یک مقدار ثابت در f مساوی است با آن مقدار ثابت ضربدر مشتق f . با تلفیق این نتیجه و آن مطلب که مشتق مجموع برابر مجموع مشتقات است [خاصیت (یکم)]، درمی‌یابیم که برای هر جفت ثابت c_1 و c_2 داریم

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'.$$

این را خاصیت خطی مشتق می‌نامند و با خاصیت خطی انتگرال شباهت دارد. با استفاده از استقرای ریاضی می‌توانیم خاصیت خطی را به هر مجموع متناهی این طور تعمیم دهیم:

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot f_i\right)' = \sum_{i=1}^n c_i \cdot f_i'$$

که در آن $c_1, \dots, c_n$ ثابت بوده و $f_1, \dots, f_n$ توابعی با مشتقات $f'_1, \dots, f'_n$ می باشند.

هر دستور درباره مشتق را می شود به دو طریق نوشت، یا بصورت یک تساوی بین دو تابع یا بشکل یک تساوی مستلزم اعداد. خواص قضیه ۱.۴، بصورتی که در فوق نوشته شده اند، معادلاتی هستند مستلزم توابع. بعنوان مثال، خاصیت (یکم) چنین می گوید که مشتق تابع $f + g$ مجموع دو تابع f' و g' است. وقتی این توابع در نقطه x حساب شوند دستورهائی مستلزم اعداد را به ما می دهند. پس دستور (یکم) ایجاب می کند که

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

حال می پردازیم به اثبات قضیه ۱.۴.

برهان (یکم). فرض کنیم x نقطه ای باشد که در آن هر دو مشتق $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود دارند. خارج قسمت تفاضلی برای $f + g$ چنین است:

$$\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

وقتی $h \rightarrow 0$ اولین کسر سمت راست به $f'(x)$ نزدیک می شود، دومین کسر به $g'(x)$ و در نتیجه مجموع به $f'(x) + g'(x)$ نزدیک خواهد شد. این (یکم) را ثابت می کند، و برهان (دوم) بهمین نحو خواهد بود.

برهان (سوم). خارج قسمت تفاضلی برای حاصلضرب $f.g$ عبارت است از

$$(۶.۴) \quad \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

برای بررسی این کسر وقتی $h \rightarrow 0$ ، جمله ای به صورت آن افزوده و از آن کم می کنیم تا بتوانیم (۶.۴) را بشکل مجموع دو جمله که مستلزم خارج قسمتهای تفاضلی f و g اند بنویسیم. با افزودن و کاستن $g(x)f(x+h)$ می بینیم که (۶.۴) باین وضع در می آید:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

وقتی $h \rightarrow 0$ اولین جمله سمت راست به $g(x)f'(x)$ نزدیک می شود. چون f در x پیوسته است داریم $f(x+h) \rightarrow f(x)$ ، پس جمله دوم به $f(x)g'(x)$ نزدیک خواهد شد. این (سوم) را ثابت می کند.

برهان (چهارم). حالت خاصی از (چهارم) زمانی رخ می‌دهد که بازای هر x ، $f(x) = 1$ در این حالت، بازای هر x ، $f'(x) = 0$ و، با شرط $g(x) \neq 0$ (چهارم) به دستور

$$(7.4) \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

تحویل می‌گردد. دستور کلی (چهارم) را می‌توانیم از این حالت خاص، با نوشتن f/g بصورت حاصلضرب و استفاده از (سوم)، نتیجه بگیریم زیرا

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{1}{g} \cdot f' + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}.$$

پس فقط اثبات (7.4) باقی می‌ماند. خارج قسمت تفاضلی برای $1/g$ چنین است:

$$(8.4) \quad \frac{[1/g(x+h)] - [1/g(x)]}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x+h)}.$$

وقتی $h \rightarrow 0$ اولین کسر سمت راست به $g'(x)$ و سومین سازه به $1/g(x)$ نزدیک می‌شود. پیوستگی g در x لازم است زیرا ما از این مطلب که «وقتی $h \rightarrow 0$ ، $g(x+h) \rightarrow g(x)$ » استفاده می‌کنیم. پس کسر آمده در (8.4) به $-g'(x)/g(x)^2$ نزدیک می‌شود و این (7.4) را ثابت خواهد کرد.

توجه: برای نوشتن (8.4) لازم است بدانیم که بازای کلیه h های بقدر کافی کوچک $g(x+h) \neq 0$. این از قضیه 7.3 نتیجه می‌شود.

چنانچه از قضیه 1.4 در معیت امثله حل شده در بخش 4.4 استفاده کنیم می‌توانیم به دستورهای مشتقگیری تازه‌ای برسیم.

مثال 1. چند جمله‌ایها. در مثال 3 از بخش 4.4 نشان دادیم که هرگاه $f(x) = x^n$ که در آن n عدد صحیح مثبتی است، آنگاه $f'(x) = nx^{n-1}$. ممکن است خواننده اینکه این را بعنوان نتیجه‌ای از حالت خاص $n = 1$ دوباره بدست آورد آموزنده بداند، بدین صورت که از استقرای ریاضی همراه با دستور مشتقگیری از حاصلضرب استفاده نماید. با استفاده از این نتیجه و خاصیت خطی می‌توانیم از هر چندجمله‌ای با محاسبه مشتق هر جمله و افزودن آنها بهم مشتق بگیریم. لذا، هرگاه

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k,$$

آنگاه، با مشتقگیری جمله به جمله، خواهیم داشت

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n kc_k x^{k-1}.$$

ملاحظه کنید که مشتق یک چندجمله‌ای درجه n چندجمله‌ای تازه‌ای است از درجه $n-1$. بعنوان مثال، هرگاه $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$ ، آنگاه

$$f'(x) = 4x + 5.$$

مثال ۲. توابع گویا. هرگاه r خارج قسمت دو چندجمله‌ای باشد، مثلاً $r(x) = p(x)/q(x)$ ، آنگاه مشتق $r'(x)$ را می‌توان با دستور خارج قسمتی (چهارم) در قضیه ۱.۴ حساب کرد. مشتق $r'(x)$ در هر x که $q(x) \neq 0$ وجود دارد. توجه کنید که تابع r' که باین ترتیب تعریف می‌شود خود تابعی گویا است. بویژه، وقتی $r(x) = 1/x^m$ که در آن m عدد صحیح مثبتی است و $x \neq 0$ ، در می‌یابیم که

$$r'(x) = \frac{x^m \cdot 0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}}.$$

اگر این رابطه را بشکل $r'(x) = -mx^{-m-1}$ بنویسیم برای دستور مشتقگیری از توانهای m تعمیمی از نماهای مثبت به نماهای منفی بدست خواهد آمد.

مثال ۳. توانهای گویا. فرض می‌کنیم بازای $x > 0$ ، $f(x) = x^r$ که در آن r عدد گویائی است. ما قبلاً دستور مشتقگیری

$$(9.4) \quad f'(x) = rx^{r-1}$$

را برای $r = 1/n$ که n عدد صحیح مثبتی است، ثابت کرده‌ایم. حال آن را به کلیه توانهای گویا تعمیم می‌دهیم. دستور مشتقگیری از حاصلضرب نشان می‌دهد که معادله (۹.۴) برای $r = 2/n$ و، باستقرا، برای $r = m/n$ که m عدد صحیح مثبت دلخواهی است نیز اعتبار دارد. (استقرا نسبت به m صورت می‌گیرد.) بنابراین، معادله (۹.۴) بازای کلیه اعداد گویای مثبت r معتبر خواهد بود. حال دستور مشتقگیری از کسر نشان می‌دهد که (۹.۴) برای عدد گویای منفی r نیز معتبر است. مثلاً، اگر $f(x) = x^{2/3}$ ، داریم $f'(x) = 2x^{-1/3}/3$. هرگاه $f(x) = x^{-1/2}$ آنگاه $f'(x) = -x^{-3/2}/2$. در هر حالت به اینکه $x > 0$ نیاز خواهیم داشت.

۹.۴ تمرینات

- اگر $f(x) = 2 + x - x^2$ ، $f'(0)$ ، $f'(1/2)$ ، $f'(1)$ ، $f'(-10)$ را حساب کنید.
- اگر $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x$ ، $f(x)$ کلیه x هایی را بیابید که (الف) $f'(x) = 0$ ؛ (ب) $f'(x) = -2$ ؛ (پ) $f'(x) = 10$.

در تمرینات ۳ تا ۱۲، برای $f(x)$ توصیف شده، دستوری جهت $f'(x)$ بیابید.

$$f(x) = x^4 + \sin x \cdot ۴$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \cdot 3$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, x \neq -1 \text{ اگر } ۶$$

$$f(x) = x^4 \sin x \cdot ۵$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1 \text{ اگر } ۸$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} + x^5 \cos x \cdot ۷$$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1} \cdot ۱۰$$

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos x} \cdot ۹$$

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2} \cdot ۱۲$$

$$f(x) = \frac{2-\sin x}{2-\cos x} \cdot ۱۱$$

۱۳. فرض کنید ارتفاع $f(t)$ پرتابه‌ای t ثانیه پس از اینکه با سرعت اولیه v_0 فوت بر ثانیه مستقیماً از زمین به هوا پرتاب شده با دستور

$$f(t) = v_0 t - 16t^2$$

داده شده باشد.

(الف) با استفاده از روش وصف شده در بخش ۲.۴ نشان دهید که سرعت متوسط پرتابه در فاصله زمانی از t تا $t+h$ ، $h > 0$ ، $32t - 16h$ ، $32t - 32$ فوت بر ثانیه و سرعت لحظه‌ای آن در لحظه t ، $32t - 32$ فوت بر ثانیه می‌باشد.

(ب) زمان لازم برای آنکه سرعت به صفر برسد را (بر حسب v_0) محاسبه نمایید.

(پ) سرعت پرتابه در بازگشت به زمین چقدر است؟

(ت) سرعت اولیه پرتابه چقدر باید باشد تا بعد از ۱۰ ثانیه، ۱۰ ثانیه، T ثانیه به زمین بازگردد؟

(ث) نشان دهید که پرتابه با شتاب ثابت حرکت می‌کند.

(ج) دستور دیگری برای ارتفاع ارائه دهید که شتاب ثابت ۲۰ - فوت بر مجذور ثانیه را بدهد.

۱۴. میزان تغییر حجم یک مکعب نسبت به طول یال آن چقدر است؟

۱۵. (الف) مساحت دایره‌ای بشاع r ، πr^2 و محیطش $2\pi r$ است. نشان دهید که میزان تغییر مساحت نسبت به شعاع برابر محیط خواهد بود.

(ب) حجم کره‌ای بشاع r ، $4\pi r^3/3$ و مساحت رویه آن $4\pi r^2$ است. نشان دهید که میزان تغییر حجم آن نسبت به شعاع مساوی مساحت رویه‌اش می‌باشد.

در تمرینات ۱۶ تا ۲۳، برای هر $f(x)$ تعریف شده، دستوری جهت $f'(x)$ بیابید.

$$x > 0, f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot ۱۷$$

$$x > 0, f(x) = \sqrt{x} \cdot ۱۶$$

$$x > 0, f(x) = x^{-3/2} \cdot ۱۹$$

$$x > 0, f(x) = x^{3/2} \cdot ۱۸$$

$$x > 0, f(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4} \cdot ۲۰$$

$$.x > 0, f(x) = x^{-1/2} + x^{-1/3} + x^{-1/4}. ۲۱$$

$$.x > 0, f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}. ۲۳ \quad .x > 0, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}. ۲۲$$

۲۴. فرض کنید $f_1, \dots, f_n$ تابع با مشتقات $f'_1, \dots, f'_n$ باشند. برای مشتگیری از حاصلضرب $f_1 \dots f_n = g$ قاعده‌ای ارائه داده و آن را باستقرای ریاضی ثابت نمائید. نشان دهید که در آن x هائی که هیچیک از مقادیر تابعی $f_1(x), \dots, f_n(x)$ صفر نیستند داریم

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \dots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)}.$$

۲۵. درایه‌های جدول کوتاه زیر درباره مشتقا را تحقیق کنید. فرض این شده که دستورها برای آن x هائی برقرار باشند که $f(x)$ بازای آنها تعریف شده است.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\sec x$	$\tan x \sec x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\csc x$	$-\cot x \csc x$

در تمرینات ۲۶ تا ۳۵، $f'(x)$ را محاسبه کنید. فرض این شده که هر دستور برای x هائی برقرار باشد که $f(x)$ بازای آنها تعریف شده است.

$$.f(x) = x \tan x. ۲۷ \quad .f(x) = \tan x \sec x. ۲۶$$

$$.f(x) = \frac{2x}{1-x^2}. ۲۹ \quad .f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}. ۲۸$$

$$.f(x) = \frac{\sin x}{x}. ۳۱ \quad .f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}. ۳۰$$

$$.f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}. ۳۳ \quad .f(x) = \frac{1}{x + \sin x}. ۳۲$$

$$.f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{\sin x + \cos x}. ۳۵ \quad .f(x) = \frac{\cos x}{2x^2+3}. ۳۴$$

۳۶. اگر $f(x) = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x$ مقادیر ثابت a, b, c, d را چنان تعیین کنید که $f'(x) = x \cos x$.

۳۷. اگر $g(x) = (ax^2+bx+c)\sin x + (dx^2+ex+f)\cos x$ مقادیر ثابت a, b, c, d, e, f را طوری تعیین کنید که $g'(x) = x^2 \sin x$.

۳۸. با فرض داده شدن دستور

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

(که بازای $x \neq 1$ معتبر است)، با مشتگیری، دستورهای زیر بیاید:

$$(الف) \quad 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$(ب) \quad 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + n^2x^n$$

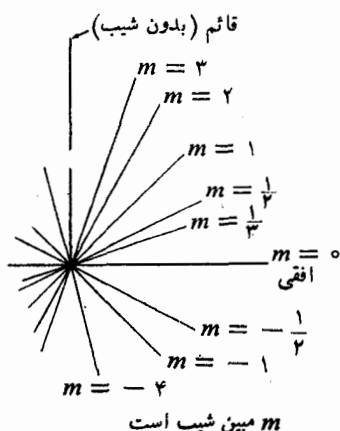
۳۹. فرض کنید $f(x) = x^n$ که در آن n عدد صحیح مثبتی است. با استفاده از قضیه دوجمله‌ای $(x+h)^n$ را بسط داده و این دستور را نتیجه بگیرید:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}.$$

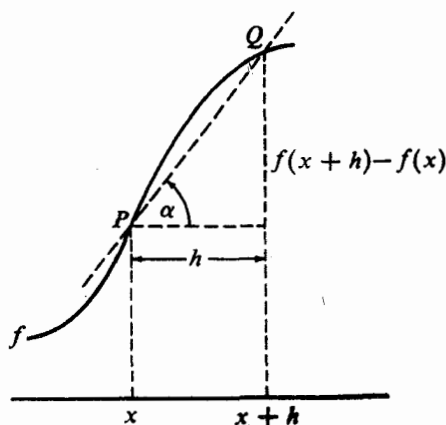
مجموع طرف راست را با نماد جمع‌بندی بیان نمایید. فرض کنید $h \rightarrow 0$ و نتیجه بگیرید که $f'(x) = nx^{n-1}$. بگوئید چه قضایای حد را بکار می‌برید. (این نتیجه در مثال ۳ از بخش ۴.۴ بطریقی دیگر بدست آمد).

۷.۴ تعبیر هندسی مشتق بعنوان شیب

روشی که در تعریف مشتق بکار رفت تعبیری هندسی دارد که بنحوی طبیعی به ایده خط مماس بر یک منحنی منجر می‌شود. بخشی از نمودار تابعی مانند f در شکل ۴.۴ نموده شده است. دو نقطه P و Q از آن با مختصات بترتیب $(x, f(x))$ و $(x+h, f(x+h))$ نشان داده شده‌اند. مثلث قائم‌الزاویه با وتر PQ را در نظر می‌گیریم؛ ارتفاع آن، یعنی



شکل ۴.۴ خطوط با شیبهای مختلف.



شکل ۴.۴ تعبیر هندسی خارج قسمت تفاضلی بعنوان تانژانت یک زاویه.

$f(x+h) - f(x)$ ، نمایشگر تفاضل عرضهای دو نقطه P و Q است. از اینرو خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (۱۰.۴)$$

نشانگر تانزانت مثلثاتی زاویه α است که PQ با محور افقی می سازد. عدد حقیقی $\tan \alpha$ را شیب خط مار بر P و Q می نامند، و این عدد برای اندازه گیری «شیبی» این خط روشی بسدست می دهد. بعنوان مثال، اگر f یک تابع خطی باشد، مثلاً $f(x) = mx + b$ ، خارج قسمت تفاضلی (۱۰.۴) دارای مقدار m است، در نتیجه شیب خط مساوی m خواهد بود. چند نمونه از خطوط با شیبهای مختلف در شکل ۵.۴ نشان داده شده اند. برای یک خط افقی $\alpha = 0$ و شیب، یعنی $\tan \alpha$ ، نیز ۰ می باشد. اگر α بین ۰ و $\pi/2$ باشد خط در طول حرکت ما از چپ به راست بالا می رود و شیبش مثبت است. چنانچه α بین $\pi/2$ و π باشد با حرکت از چپ به راست خط پائین می آید و شیب منفی خواهد بود. خطی که برای آن $\alpha = \pi/4$ دارای شیب ۱ است. وقتی α از ۰ تا $\pi/2$ صعود کند $\tan \alpha$ بطور نامحدود صعود خواهد کرد و خطوط متناظر با شیبهای $\tan \alpha$ به وضع قائم نزدیک می شوند. چون $\tan(\pi/2)$ تعریف نشده است می گوئیم خطوط قائم شیب ندارند.

حال فرض کنیم f در x مشتق داشته باشد. این بدان معناست که، وقتی h به صفر نزدیک می شود، خارج قسمت تفاضلی به حد معین $f'(x)$ نزدیک خواهد شد. این در تعریف هندسی به ما می گوید که، وقتی h به ۰ نزدیک و نزدیکتر شود، نقطه P ثابت مانده، و در امتداد منحنی بسوی P حرکت می کند، و خط PQ امتدادش را چنان تغییر می دهد که شیب آن به عدد $f'(x)$ بعنوان حد نزدیک خواهد شد. باین دلیل ظاهراً طبیعی است که شیب منحنی در P مساوی $f'(x)$ تعریف شود. خط مار بر P و دارای این شیب را خط مماس در P می خوانند.

توجه: مفهوم خط مماس بردایره (و بر محدودی منحنی خاص دیگر) در فکر یونانیان باستان بوده است. آنها خط مماس بر یک دایره را خطی تعریف می کردند که یکی از نقاطش بردایره و کلیه نقاط دیگرش خارج آنند. از این تعریف بسیاری از خواص خطوط مماس بردایره را می توان نتیجه گرفت. بعنوان مثال، می توانیم ثابت کنیم که مماس در هر نقطه بر شعاع همان نقطه عمود است. اما تعریف یونانی خط مماس را نمی توان برای منحنیهای کلیتر بآسانی تعمیم داد. ثابت شده که روش فوق، که در آن خط مماس بر حسب مشتق تعریف گشته، بسیار قانع کننده تر است. با استفاده از این تعریف می توانیم ثابت کنیم که، در مورد دایره، خط مماس از کلیه خواصی که هندسه دانان یونانی به آن نسبت داده اند برخوردار می باشد. مفاهیمی نظیر تعامد و توازی را می توان با اصطلاحات تحلیلی و استفاده از شیب خطوط بطور نسبتاً ساده ای توضیح داد. مثلاً از اتحاد مثلثاتی

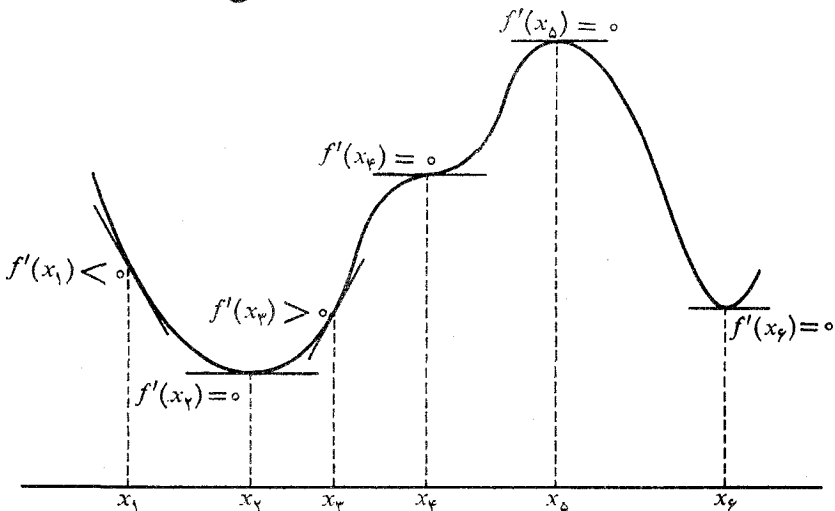
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

نتیجه می شود که دو خط مایل دارای یک شیب موازی اند. همچنین از اتحاد

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

درمی یابیم که هر دوخط مایل که حاصلضرب شیبهایشان ۱- باشد متعامدند.

علامت جبری مشتق یک تابع در باب رفتار نمودار آن اطلاعات مفیدی به ما می دهد. بعنوان مثال، هرگاه x یک نقطه در بازه بازی باشد که مشتق در آن مثبت است، آنگاه، در حرکت از چپ به راست، نمودار درحوالی نزدیک x بالا خواهد رفت. این اتفاق در شکل ۶.۴ در x_4 رخ می دهد. مشتق منفی در یک بازه بدان معناست که نمودار، همانطور که در x_1 نشان داده شده، پائین می آید، درحالی که مشتق صفر در یک نقطه بمعنی وجود خط مماس افقی خواهد بود. در یک ماکزیمم یا مینیمم، نظیر آنهایی که در x_5 ، x_3 و x_6 و x_4 مشاهده اند، شیب باید صفر باشد. فرما اولین کسی بود که پی برد نقاطی شبیه x_5 ، x_3 و x_6 که در آنها f ماکزیمم یا مینیمم دارد، باید جزو ریشه های معادله $f'(x) = 0$ باشند. مهم درک این مطلب است که $f'(x)$ ممکن است در نقاطی که ماکزیمم و مینیممی وجود ندارد نیز صفر شود (مثل نقطه x_4 در پائین). توجه کنید که این خط مماس خاص از نمودار می گذرد. این یکی از حالاتی است که با تعریف یونانی تماس قابل توضیح نیست.



شکل ۶.۴ معنی هندسی علامت مشتق.

تذکرات قبلی مربوط به اهمیت علامت جبری مشتق ممکن است در تعبیر هندسی کاملاً واضح بنظر برسند. برهانهای تحلیلی این مطالب، که بر خواص عمومی مشتقات استوارند، در بخش ۱۶.۴ داده خواهند شد.

۸.۴ نمادهای دیگری برای مشتقات

نمادگذاری درگسترش ریاضیات نقش بی اندازه مهمی داشته است. بعضی ازعلامات ریاضی، نظیر x^a یا a_x صرفاً اختصاراتی هستند که عبارات یا دستورهای طولی را در فضای کمی جا می دهند. دیگران، مثل علامت انتگرالگیری $\int_a^b f(x) dx$ ، نه فقط فرایند موردنظر را یادآور می شوند بلکه درانجام محاسبات نیز یار ما خواهند بود.

گاهی برای یک ایده چندین نماد متفاوت بکارمی رود، رجحان یکی بر دیگری بسته به مقتضیاتی است که استفاده از این علامات را ایجاب می کنند. این بویژه درحساب دیفرانسیل صادق است که درآن از نمادهای متفاوت بسیاری برای مشتق استفاده می شود. دربحث قبلی ما مشتق تابع f با f' نشان داده شد، نمادی که توسط لاگرانژ^۱ (۱۸۱۳ - ۱۷۳۶) در اواخر قرن ۱۸ معرفی گردید. این نماد براین تأکید دارد که f' تابع جدیدی است که از f با مشتقگیری بدست آمده است، مقدارش در x با $f'(x)$ نموده می شود. مختصات x و y هر نقطه (x, y) واقع بر نمودار f با معادله $y = f(x)$ بهم مربوط می شوند، و علامت y' نیز برای نمایش مشتق $f'(x)$ بکار می رود. همچنین y'' ، y''' ، $y^{(n)}$ مشتقات بالاتر $f''(x)$ ، $f'''(x)$ ، $f^{(n)}(x)$ را نشان می دهند. بعنوان مثال، هرگاه $y = \sin x$ ، آنگاه $y' = \cos x$ ، $y'' = -\sin x$ ، و مانند اینها. نمادگذاری لاگرانژ از نمادگذاری نیوتن، که بجای y' و y'' می نوشت y° و $y^{\circ\circ}$ ، زیاد دور نیستند. نمادهای نقطه دار نیوتن هنوز هم توسط برخی از مؤلفان، بویژه برای نشان دادن سرعت و شتاب، بکار می روند.

درسال ۱۸۵۵ نماد دیگری توسط آربوگاست^۲ (۱۸۵۳ - ۱۷۵۹) معرفی شد. او مشتق f را با Df نشان داد، علامتی که امروزه کاربرد بسیار وسیعی دارد. علامت D را یک عملگر مشتقگیری می نامند، و این فکر را القا می کند که Df تابع جدیدی است که از f با عمل مشتقگیری بدست می آید. مشتقات بالاتر f'' ، f''' ، $f^{(n)}$ بترتیب بصورت D^2f ، D^3f ، $D^n f$ ، $\dots$ و مقادیر این مشتقها در x بشکل $D^2f(x)$ ، $D^3f(x)$ ، $\dots$ ، $D^n f(x)$ نوشته می شوند. مثلاً داریم $D \sin x = \cos x$ و $D \cos x = -\sin x$. قاعده مشتقگیری از مجموع دو تابع با نماد D بصورت $D(f + g) = Df + Dg$ درمی آید. محاسبه مشتقها در x دستور $[D(f + g)](x) = Df(x) + Dg(x)$ را به ما می دهد که بشکل $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$ نیز نوشته می شود. خواننده می تواند قواعد حاصلضرب و خارج قسمت را با نماد D باسانی تنظیم کند.

درمان پیشگامان اولیه آنالیز ریاضی لایب نیتز بیش از هرکس دیگر به اهمیت علامات مناسب پی برده بود. او علامات را با حوصله زیاد آزمایش می کرد و با سایر ریاضیدانان مکاتبات بسیار داشت و از این طریق محاسن یا معایب نمادهای مختلف را برای آنها مطرح می ساخت. اثر قابل ملاحظه ای که حساب دیفرانسیل و انتگرال برگسترش ریاضیات نوین داشته تا حدودی بواسطه علامات بسیار پیشرفته و الهام بخشی است که بسیاری از آنها توسط لایب نیتز ابداع شده اند.

لایب‌نیتز نمادی را برای مشتقها عرضه کرد که با نمادهای مذکور در بالا بکلی متفاوت است. او، با استفاده از y بجای $f(x)$ ، خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

را بشکل

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نوشت که در آن Δx (بخوانید: «دلتا x ») برای h و Δy برای $f(x+h) - f(x)$ نوشته می‌شد. علامت Δ را عملگر تفاضلی می‌خوانند. لایب‌نیتز برای حد خارج قسمت تفاضلی، یعنی برای مشتق $f'(x)$ ، می‌نوشت dy/dx . با این نماد تعریف مشتق بصورت

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

درمی‌آید. نه تنها نماد لایب‌نیتز فرق داشت بلکه طرز فکرش دربارهٔ مشتقها نیز متفاوت بود. اوحد dy/dx را بصورت کسری از مقادیر «بی‌نهایت کوچک» dy و dx بنام «دیفرانسیل» می‌پنداشت و از مشتق dy/dx بعنوان «خارج قسمت دیفرانسیلی» یاد می‌کرد. لایب‌نیتز بی‌نهایت کوچکها را نوع کاملاً جدیدی از اعداد می‌دانست که، گرچه صفر نبودند، اما از هر عدد حقیقی مثبت کوچکتر بودند.

با آنکه لایب‌نیتز نمی‌توانست تعریف مقننی از بی‌نهایت کوچکها را عرضه کند لکن او و پیروانش آنها را آزادانه در بحثهای خود از حساب دیفرانسیل و انتگرال بکار می‌بردند. در نتیجه اشخاص زیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را تا حدودی مرموز یافته و اعتبار روشهای آن را مورد سؤال قرار می‌دادند. کارهای کشتی و دیگران در قرن ۱۹م تدریجاً جای بی‌نهایت کوچکها را به نظریهٔ کلاسیک حدود بخشید. معه‌ذا عدهٔ بسیاری اندیشیدن بر حسب بی‌نهایت کوچکها بشیوهٔ لایب‌نیتز را ثمربخش یافته‌اند. این نوع تفکر دارای جذبهٔ شهودی است و اغلب ما را سریعاً به نتایجی که می‌توان درست بودنشان را با وسائل رسمی تری ثابت کرد می‌رساند.

اخیراً آبراهام رابینسون^۱ نشان داده است که دستگاه اعداد حقیقی را می‌توان طوری وسعت داد که بی‌نهایت کوچکها را بهمان صورتی که برای لایب‌نیتز مطرح بودند شامل شود. بخشی از این توسیع و اثرش بر بسیاری از شاخه‌های ریاضی در کتاب رابینسون^۲ آمده است.

گرچه بعضی از ایده‌های لایب‌نیتز گرفتار بی‌آبرویی موقتی شدند اما این بلا بر سر

1. Abraham Robinson

2. *Non-standard Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.

نمادهای او نیامد. علامت dy/dx برای مشتق دارای این مزیت آشکار است که کل فرایند تشکیل خارج قسمت تفاضلی و رفتن به حد را خلاصه می‌کند. بعداً به مزیت دیگر آن پی می‌بریم و آن اینکه وقتی مشتقها با نماد لایب‌نیتز نوشته می‌شوند یادآوری و کار با بعضی دستورها سهلتر خواهد شد.

۹.۴ تمرینات

۱. فرض کنید بازای هر x ، $f(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1$. نقاطی را بر نمودار f بیابید که خط مماس در آنها افقی باشد.
۲. فرض کنید بازای هر x ، $f(x) = 2x^3/3 + x^2/2 - x - 1$. نقاطی را بر نمودار f بیابید که شیب در آنها عبارت باشد از (الف) ۵؛ (ب) ۱-؛ (پ) ۵.
۳. فرض کنید بازای هر x ، $f(x) = x + \sin x$. کلیه x هایی را بیابید که نمودار f در $(x, f(x))$ شیب صفر داشته باشد.
۴. فرض کنید بازای هر x ، $f(x) = x^2 + ax + b$. مقادیر a و b را چنان بیابید که خط $y = 2x$ بر نمودار f در نقطه $(2, 4)$ مماس باشد.
۵. ثابتهای a ، b ، و c را طوری بیابید که نمودارهای دوچندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax + b$ و $g(x) = x^3 - c$ در نقطه $(1, 2)$ متقاطع شده و در این نقطه یک خط مماس داشته باشند.
۶. نمودار تابع f تعریف شده با معادله $f(x) = x^2 + ax + b$ را که در آن a و b ثابتهای هستند در نظر بگیرید.
- (الف) شیب وترى را بیابید که دو نقطه نمودار با طولهای $x_1 = x$ و $x_2 = x$ را بهم وصل می‌کند.
- (ب) کلیه مقادیر x (بر حسب x_1 و x_2) را بیابید که شیب خط مماس در $(x, f(x))$ همان شیب وتر مذکور در قسمت (الف) باشد.
۷. نشان دهید که خط $y = -x$ بر منحنی معین شده با معادله $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ مماس است. نقطه تماس را بیابید. آیا این خط مماس منحنی را جای دیگری هم قطع می‌کند؟
۸. نمودار چندجمله‌ای درجه سوم $f(x) = x - x^3$ را روی بازه بسته $-2 \leq x \leq 2$ بکشید. ثابتهای m و b را طوری بیابید که خط $y = mx + b$ بر نمودار f در نقطه $(0, 0)$ مماس باشد. خط دومى ماربر $(0, 1)$ نیز بر نمودار f در نقطه (a, c) مماس است. مختصات a و c را تعیین کنید.
۹. تابع f بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x \leq c \\ ax + b & \text{اگر } x > c \end{cases} \quad (a, b, c \text{ ثابت هستند})$$

مقادیر a و b را (بر حسب c) طوری بیابید که $f'(c)$ وجود داشته باشد.

۱۰. تمرین ۹ را وقتی حل کنید که f این طور تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & , |x| > c \\ a + bx^2 & , |x| \leq c \end{cases}$$

۱۱. تمرین ۹ را زمانی حل کنید که f این طور تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \leq c \\ ax + b & , x > c \end{cases}$$

۱۲. اگر بازای $x > 0$ ، $f(x) = (1 - \sqrt{x}) / (1 + \sqrt{x})$ ، برای $D^2 f(x)$ ، $Df(x)$ و $D^3 f(x)$ دستورهائی بیابید.

۱۳. چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بصورتی است که $P(0) = -2$ ، $P'(0) = -1$ ، $P''(0) = 10$ و a ، b و c و d را حساب کنید.

۱۴. دو تابع f و g در 0 مشتق اول و دوم داشته و در این روابط صدق می‌کنند:

$$f(0) = 2/g(0), \quad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0), \\ g''(0) = 5f''(0) = 6f(0) = 3.$$

(الف) فرض کنید $h(x) = f(x)/g(x)$ و $h'(0)$ را محاسبه نمایید.

(ب) فرض کنید $k(x) = f(x)g(x)\sin x$ و $k'(0)$ را محاسبه نمایید.

(پ) حد $g'(x)/f'(x)$ را، وقتی $x \rightarrow 0$ ، محاسبه نمایید.

۱۵. فرض شده که مشتق $f'(a)$ وجود دارد. بگوئید از گزاره‌های زیر کدامها درست و کدامها نادرست‌اند. برای نظرتان در هر حالت دلیلی بیاورید.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a} \quad (\text{الف})$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \quad (\text{ب})$$

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + 2t) - f(a)}{t} \quad (\text{پ})$$

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + 2t) - f(a + t)}{2t} \quad (\text{ت})$$

۱۶. فرض کنید بجای تعریف معمولی مشتق $Df(x)$ نوع جدیدی از مشتق، یعنی $D^*f(x)$ را با دستور

$$D^*f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h}$$

تعریف کنیم که در آن $f^2(x)$ بمعنی $[f(x)]^2$ است.

(الف) برای محاسبه مشتق D^*f مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت دستور-هائی بیاید.

(ب) $D^*f(x)$ را برحسب $Df(x)$ بیان کنید.

(پ) بازای چه توابعی $D^*f = Df$ ؟

۱۰.۴ قاعده زنجیره‌ای برای مشتگیری از توابع مرکب

بکمک دستورهای مشتگیری که تا بحال عرضه شده می‌توانیم مشتق توابعی چون f را بیابیم که $f(x)$ بصورت مجموعی متناهی از حاصلضربها یا خارج‌قسمتهای مضارب ثابتی از $\sin x$ ، $\cos x$ و x^r (گویا) می‌باشد. ولی تا این لحظه نمی‌دانیم که با وضعی مانند $f(x) = \sin(x^2)$ بدون مراجعه به تعریف مشتق، چطور برخورد کنیم. در این بخش قضیه‌ای را ارائه می‌دهیم، بنام قاعده زنجیره‌ای، که به ما توان مشتگیری از توابع مرکبی نظیر $f(x) = \sin(x^2)$ را خواهد بخشید. این قضیه عده توابعی را که ما قادر به مشتگیری از آنها هستیم بنحو قابل توجهی بالا می‌برد.

یادآوری می‌کنیم که اگر u و v چنان توابعی باشند که قلمرو u شامل برد v باشد می‌توانیم تابع مرکب $f = u \circ v$ را با معادله

$$f(x) = u[v(x)]$$

تعریف کنیم. قاعده زنجیره‌ای به ما نحوه بیان مشتق f را برحسب مشتقات u و v بازگو می‌کند.

قضیه ۲.۴. قاعده زنجیره‌ای. فرض کنیم ترکیب دو تابع u و v باشد، مثلاً $f = u \circ v$. همچنین هر دو مشتق $v'(x)$ و $u'(y)$ ، که $y = v(x)$ ، وجود داشته باشند. در اینصورت مشتق $f'(x)$ نیز وجود دارد و با دستور

$$(11.4) \quad f'(x) = u'(y) \cdot v'(x)$$

داده می‌شود. عبارت دیگر، برای محاسبه مشتق $f = u \circ v$ در x ابتدا مشتق u را در نقطه y ، که $y = v(x)$ ، حساب کرده و بعد آن را در $v'(x)$ ضرب می‌کنیم.

پیش از آنکه برهان (۱۱.۴) را مطرح کنیم چندراه دیگر بیان دستور قاعده زنجیره‌ای را ذکر می‌نمائیم. اگر (۱۱.۴) را کلاً برحسب x بنویسیم دستور

$$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$$

را بدست می‌آوریم. قاعده زنجیره‌ای بصورت معادله‌ای مستلزم توابع بجای اعداد شکل زیر را بخود می‌گیرد:

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'.$$

با نماد $u(v)$ برای مشتق تابع مرکب $u(v)$ می‌نویسیم $u'(v)$ و برای ترکیب $u \circ v$

می‌نویسیم $u'(v)$. در اینصورت آخرین دستور باین شکل درخواهد آمد:

$$u(v)' = u'(v) \cdot v'.$$

برهان قضیه ۲.۴. حال می‌پردازیم به اثبات (۱۱.۴). فرض می‌کنیم v در x و u در $v(x)$ مشتق دارد، و می‌خواهیم ثابت کنیم f در x دارای مشتقی است که با حاصلضرب $u'(v(x)) \cdot v'(x)$ داده می‌شود. خارج قسمت تفاضلی برای f چنین است:

$$(12.4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)] - u[v(x)]}{h}.$$

در این مرحله معرفی چند نماد جدید سودمند خواهد بود. قرار می‌دهیم $y = v(x)$ و $k = v(x+h) - v(x)$ (درک اینکه k به h وابسته است اهمیت دارد). در اینصورت داریم $v(x+h) = y + k$ و (۱۲.۴) باین شکل درمی‌آید:

$$(13.4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{h}.$$

طرف راست (۱۳.۴) شبیه خارج قسمت تفاضلی است که حدش $u'(y)$ را تعریف می‌کند جز آنکه بجای k درمخرج h ظاهر شده است. چنانچه $k \neq 0$ تمام برهان آسان خواهد بود. اگر فقط صورت و مخرج را در k ضرب کنیم سمت راست (۱۳.۴) چنین می‌شود:

$$(14.4) \quad \frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

وقتی $h \rightarrow 0$ آخرین کسر سمت راست به $v'(x)$ میل می‌کند. همچنین، وقتی $h \rightarrow 0$ $k \rightarrow 0$ زیرا $k = v(x+h) - v(x)$ و v در x پیوسته است. بنابراین، وقتی $h \rightarrow 0$ اولین کسر سمت راست (۱۴.۴) به $u'(y)$ نزدیک می‌شود، و این فوراً به (۱۱.۴) منجر خواهد شد.

استدلال پیشگفته گرچه ظاهراً طبیعی‌ترین راه اقدام است لیکن کاملاً عمومیت ندارد. چون $k = v(x+h) - v(x)$ ممکن است، وقتی $h \rightarrow 0$ ، بازای بی‌نهایت مقدار از h ، $k = 0$ ، که در این وضع رسیدن از (۱۳.۴) به (۱۴.۴) میسر نیست. برای غلبه بر این مشکل لازم است در برهان اصلاح مختصری صورت گیرد.

به معادله (۱۳.۴) بازگشته و کسر سمت راست را بشکلی درمی‌آوریم که مخرجش شامل k نباشد. برای این منظور تفاضل بین مشتق $u'(y)$ و خارج قسمت تفاضلی را که حدش $u'(y)$ است معرفی می‌نمائیم. یعنی تابع جدید g را این طور تعریف می‌کنیم:

$$(15.4) \quad g(t) = \frac{u(y+t) - u(y)}{t} - u'(y), \quad t \neq 0$$

این معادله $g(t)$ را فقط اگر $t \neq 0$ تعریف می‌کند. با ضرب در t و تجدیدآرایش جملات می‌توانیم (۱۵.۴) را باین صورت بنویسیم:

$$(۱۶.۴) \quad u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)].$$

با اینکه (۱۶.۴) با فرض $t \neq 0$ بدست آمده ولی بازای $t = 0$ ، بشرط آنکه به $g(0)$ مقدار معینی نسبت دهیم، نیز برقرار است. چون، وقتی $t \rightarrow 0$ ، $g(t) \rightarrow 0$ می‌توانیم $g(0)$ را ۰ تعریف کنیم. این پیوستگی g را در ۰ تضمین می‌کند. حال اگر در (۱۶.۴) t را با k ، که $k = v(x+h) - v(x)$ ، عوض کرده و طرف راست (۱۶.۴) را در (۱۳.۴) بگذاریم خواهیم داشت

$$(۱۷.۴) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h}[g(k) + u'(y)],$$

دستوری که حتی اگر k مساوی ۰ هم باشد اعتبار دارد. وقتی $h \rightarrow 0$ ، $k/h \rightarrow v'(x)$ و $g(k) \rightarrow 0$ ، پس طرف راست (۱۷.۴) به حد $u'(y) \cdot v'(x)$ نزدیک می‌شود. این برهان قاعده زنجیره‌ای را کامل خواهد کرد.

۱۱.۴ کاربردهای قاعده زنجیره‌ای. میزانهای وابسته و مشتقگیری ضمنی

قاعده زنجیره‌ای مثال بسیار خوبی برای نمایش سودمندی نماد لایب نیتز در مورد مشتقا است. در واقع، اگر (۱۱.۴) را با نماد لایب نیتز بنویسیم، شکل یک اتحاد جبری بدیهی می‌گیرد. ابتدا علامات جدیدی را معرفی می‌کنیم، یعنی قرار می‌دهیم

$$z = u(y) \text{ و } y = v(x)$$

سپس dy/dx را بجای مشتق $v'(x)$ و dz/dy را بجای $u'(y)$ می‌نویسیم. تابع مرکب بصورت

$$z = u(y) = u[v(x)] = f(x)$$

و dz/dx بجای مشتق $f'(x)$ نوشته می‌شود. حال قاعده زنجیره‌ای، بصورتی که در معادله (۱۱.۴) آمده، باین شکل درمی‌آید:

$$(۱۸.۴) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

قدرت الهام بخش قوی این دستور واضح می‌باشد. این رابطه بویژه برای اشخاصی جالب است که از حساب دیفرانسیل و انتگرال در مسائل فیزیکی استفاده می‌کنند. مثلاً فرض می‌کنیم علامت پیشگفته z یک کمیت فیزیکی را نشان می‌دهد که بر حسب کمیات فیزیکی دیگر x و y اندازه‌گیری می‌شود. معادله $z = f(x)$ راه یافتن z را با معلوم بودن x و معادله $z = u(y)$ نحوه یافتن z را با مشخص بودن y به ما نشان می‌دهد. رابطه بین x و y با معادله $y = v(x)$ بیان شده است. قاعده زنجیره‌ای، بصورتی که در (۱۸.۴) آمده، به ما می‌گوید که میزان تغییر z نسبت به x مساوی است با میزان تغییر z نسبت به y ضربدر میزان تغییر y نسبت به x . مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه قاعده زنجیره‌ای می‌تواند در یک مسئله فیزیکی خاص

مورد استفاده قرار گیرد.

مثال ۱. فرض می‌کنیم گازی با یک تلمبه بمیزان ثابت ۵۰ سانتیمتر مکعب در ثانیه وارد بالونی کروی می‌شود. همچنین فشار گاز ثابت مانده و بالون همیشه بشکل کروی است. سرعت ازدیاد شعاع بالون وقتی شعاع ۵ سانتیمتر باشد چقدر است؟

حل. فرض کنیم r شعاع و V حجم بالون در لحظه t باشد. dV/dt ، یعنی میزان تغییر حجم نسبت به زمان، به ما داده شده است و می‌خواهیم dr/dt ، یعنی میزان تغییر شعاع را نسبت به زمان در لحظه‌ای تعیین کنیم که $r = 5$. قاعده زنجیره‌ای ارتباط بین داده‌ها و مجهول را بدست می‌دهد. برطبق آن

$$(19.4) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}.$$

برای محاسبه dV/dr دستور $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ را بکار می‌گیریم که حجم کره را برحسب شعاعش بیان می‌کند. مشتقگیری به ما خواهد داد که $dV/dr = 4\pi r^2$ ، و در نتیجه (۱۹.۴) چنین خواهد شد:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

با قراردادن $dV/dt = 50$ و $r = 5$ در آن خواهیم داشت $dr/dt = 1/(2\pi)$. یعنی، در لحظه‌ای که $r = 5$ ، شعاع بمیزان $1/(2\pi)$ سانتیمتر در ثانیه افزایش می‌یابد.

مثال پیشگفته را مسئله‌ای در میزانهای وابسته می‌خوانند. توجه کنید که برای تعیین مشتق dr/dt لازم نیست r بصورت تابعی از t بیان شود. این مطلب قاعده زنجیره‌ای را بویژه در مسائل میزانهای وابسته قاعده مفیدی می‌سازد.

دومثال بعدی نشان می‌دهند که چگونه قاعده زنجیره‌ای می‌تواند برای رسیدن به دستورهای جدید مشتقگیری مورد بهره قرار گیرد.

مثال ۲. با فرض $f(x) = \sin(x^2)$ ، $f'(x)$ را حساب کنید.

حل. تابع f یک ترکیب است، یعنی $f(x) = u[v(x)]$ که در آن $v(x) = x^2$ و $u(x) = \sin x$. برای استفاده از قاعده زنجیره‌ای لازم است $u'[v(x)] = u'(x^2)$ را معین کنیم. چون $u'(x) = \cos x$ داریم $u'(x^2) = \cos(x^2)$ و در نتیجه (۱۱.۴) به ما چنین خواهد داد:

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot v'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

مسئله را می‌توانیم با استفاده از نماد لایب نیتز نیز حل کنیم. هرگاه بنویسیم $y = x^2$ و $z = \sin y$ آنگاه $z = f(x)$ و $dz/dx = f'(x)$. قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (\cos y)(y'x) = \cos(x^2) \cdot 2x,$$

که با نتیجه قبلی درمورد $f'(x)$ مطابقت دارد.

مثال ۳. اگر $f(x) = [v(x)]^n$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است، $f'(x)$ را بر حسب $v(x)$ و $v'(x)$ حساب کنید.

حل. تابع f یک ترکیب است، یعنی $f(x) = u[v(x)]$ که در آن $u(x) = x^n$ چون $u'(x) = nx^{n-1}$ داریم $u'[v(x)] = n[v(x)]^{n-1}$ و قاعده زنجیره‌ای

$$f'(x) = n[v(x)]^{n-1} v'(x)$$

را بدست خواهد داد. چنانچه x را حذف کرده و این تساوی را با توابع بنویسیم دستورمهم

$$(v^n)' = nv^{n-1} v'$$

را خواهیم داشت که بهما طرز مشتگیری از توان n م v را، در صورت وجود v' ، یاد می‌دهد. این دستور برای توانهای گویا، در صورتی که v^n و v^{n-1} تعریف شده باشند، نیز معتبر است. برای حل مسئله با نماد لایب نیز می‌نویسیم $y = v(x)$ و $z = f(x)$. در این صورت $z = y^n$ ، $dz/dx = f'(x)$ ، و قاعده زنجیره‌ای به ما چنین می‌دهد:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} v'(x) = n[v(x)]^{n-1} v'(x),$$

که با حل اول مطابقت دارد.

مثال ۴. معادله $x^2 + y^2 = r^2$ نمایشگر دایره شعاع r و بمرکز مبدأ است. اگر این معادله را نسبت به y و بر حسب x حل کنیم دو جواب بدست می‌آوریم که معرف دو تابع f و g اند که بر بازه $[-r, r]$ با دستورها

$$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \text{ و } f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

داده می‌شوند. (نمودار f نیمدایره بالائی و نمودار g نیمدایره پائینی می‌باشد). مشتقات f و g را می‌توانیم با قاعده زنجیره‌ای حساب کنیم. برای f از مثال ۳ با فرض $v(x) = r^2 - x^2$ و $n = 1/2$ استفاده می‌کنیم تا

$$(۲۰.۴) \quad f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{f(x)},$$

وقتی $f(x) \neq 0$ ، بدست آید. اگر همین روش را درمورد g اعمال کنیم به ما

$$(۲۱.۴) \quad g'(x) = -\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{g(x)}$$

را، زمانی که $g(x) \neq 0$ ، خواهد داد. ملاحظه کنید که هرگاه y را بمعنی $f(x)$ یا $g(x)$ بگیریم آنگاه می‌توانیم هر دو دستور (۲۰.۴) و (۲۱.۴) را به یک دستور تبدیل کنیم، یعنی بنویسیم

$$(۲۲.۴) \quad \text{اگر } y \neq 0, y' = \frac{-x}{y}$$

کاربرد مفید دیگر قاعدهٔ زنجیره‌ای مربوط به فنی می‌شود که به مشتقگیری ضمنی معروف است. این روش و مزیت‌های آن را با نتیجه‌گیری مجدد مثال ۴ بطرزی ساده‌تر توضیح می‌دهیم.

مثال ۵. مشتقگیری ضمنی. دستور (۲۲.۴) را می‌توان مستقیماً از معادلهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ بدون حل کردن آن نسبت به y ، بدست آورد. بخاطر می‌آوریم که y تابعی است از x یا $y = f(x)$ یا $y = g(x)$. با فرض وجود y' از دو طرف معادلهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ مشتق می‌گیریم تا بدست آید که

$$(۲۳.۴) \quad 2x + 2yy' = 0.$$

(جملهٔ $2yy'$ با مشتقگیری از y^2 ، صورتی که در مثال ۳ توضیح شد، حاصل می‌شود.) چنانچه معادلهٔ (۲۳.۴) را نسبت به y' حل کنیم (۲۲.۴) نتیجه خواهد شد.

می‌گویند معادلهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ را بطور ضمنی بعنوان تابعی از x تعریف می‌کند (این معادله در واقع معرف دو تابع است)، و فرایندی که توسط آن (۲۳.۴) از این معادله بدست می‌آید مشتقگیری ضمنی نام دارد. نتیجهٔ نهائی برای هریک از توابع f و g که این طور تعریف شده‌اند معتبر است. توجه کنید که خط مماس در هر نقطهٔ (x, y) واقع بر دایره که $x \neq 0$ و $y \neq 0$ شبیهی برابر y/x دارد، حال آنکه شعاع واصل از مرکز به (x, y) دارای شیب y/x می‌باشد. از آنجا که حاصلضرب دوشیب ۱- است پس خط مماس بر شعاع عمود خواهد بود.

۱۲.۴ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۴ مشتق $f'(x)$ را تعیین کنید. در هر مورد فرض شده که x مقید به مقادیری باشد که بازای آنها دستور مربوط به $f(x)$ معنی دارد.

$$۱. f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad ۲. f(x) = \cos 2x - 2\sin x$$

$$۳. f(x) = (2-x^2)\cos^2 x + 2x\sin x^3$$

$$۴. f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

$$۵. f(x) = \sin^n x \cdot \cos nx \quad ۶. f(x) = \sin[\sin(\sin x)]$$

$$۷. f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} \quad ۸. f(x) = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$$

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2} \quad ۱۰$$

$$f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x \quad ۹$$

$$f(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{1/2} \quad ۱۲$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad ۱۱$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} \quad ۱۳$$

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \quad ۱۴$$

۱۵. $f'(x)$ را در صورتی حساب کنید که

$$x^3 \neq -3 \text{ و } f(x) = (1+x)(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{1/3}$$

۱۶. فرض کنید اگر $x \neq 0$ ،

$$g(x) = \frac{1}{1+1/f(x)} \text{ و } f(x) = \frac{1}{1+1/x}$$

$f'(x)$ و $g'(x)$ را محاسبه نمایید.

۱۷. جدول مقادیر زیر در مورد جفتی از توابع f و g و مشتقاتشان f' و g' است. جدول

متناظری برای دو تابع مرکب h و k که با $k(x) = g[f(x)]$ و $h(x) = f[g(x)]$ داده شده‌اند بسازید.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
۰	۱	۵	۲	-۵
۱	۳	-۲	۰	۱
۲	۰	۲	۳	۱
۳	۲	۴	۱	-۶

۱۸. تابع f و دو مشتق اول آن، بصورتی که نموده شده، در جدول آمده‌اند. فرض کنید

$g(x) = xf(x^2)$ و جدولی از g و دو مشتق اول آن بازای $x = 0, 1, 2$ بسازید.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
۰	۰	۱	۲
۱	۱	۱	۱
۲	۳	۲	۱
۴	۶	۳	۰

۱۹. مشتق $g'(x)$ را بر حسب $f'(x)$ در صورتی بیابید که

(الف) $g(x) = f(x^2)$ (ب) $g(x) = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$

(پ) $g(x) = f[f(x)]$ (ت) $g(x) = f\{f[f(x)]\}$

میزانهای وابسته و هشتگگیری ضمنی

۲۰. هر یال یک مکعب بمیزان ۱ سانتیمتر بر ثانیه در حال انبساط است. سرعت تغییر حجم مکعب در لحظه‌ای که طول هر یال (الف) ۵ سانتیمتر؛ (ب) ۱۰ سانتیمتر؛ (پ) x سانتیمتر باشد چقدر خواهد بود؟

۲۱. هواپیمائی در هشت میلی^۱ زمین بطور افقی با سرعت ثابت پرواز می‌کند. (در این تمرین فرض کنید زمین مسطح است.) مسیر پرواز مستقیماً از بالای نقطه P در روی زمین می‌گذرد. فاصله هواپیما از P در لحظه‌ای که این فاصله ۱۰ میل است بمیزان ۴ میل در دقیقه در حال کاهش می‌باشد. سرعت هواپیما را بر حسب میل در ساعت حساب کنید.

۲۲. یک محوطه بازی بیس بال ۹۰ فوت مربع است. توپی در امتداد خط پایه سوم با سرعت ثابت ۱۰۰ فوت در ثانیه زده می‌شود. فاصله آن از اولین پایه با چه سرعتی در این مواقع تغییر می‌کند: (الف) توپ در نیمه راه پایه سوم است؛ (ب) توپ به پایه سوم رسیده است.

۲۳. قایقی بموازات ساحل مستقیمی و در فاصله ۴ میلی آن با سرعت ثابت ۱۲ میل در ساعت در حال حرکت است. سرعت نزدیک شدن آن به یک چراغ دریائی واقع در ساحل در لحظه‌ای که فاصله‌اش تا چراغ دقیقاً ۵ میل است چقدر می‌باشد؟

۲۴. یک منبع آب بشکل مخروط مستدیر قائم است. ارتفاع آن ۱۰ فوت و شعاع قاعده‌اش ۴ فوت می‌باشد. آب بمیزان ثابت ۵ فوت مکعب در دقیقه وارد منبع می‌شود. سرعت بالا آمدن آب وقتی عمق آب ۵ فوت باشد در این حالات چقدر است: (الف) رأس مخروط بسمت بالا است؛ (ب) رأس مخروط بطرف پائین می‌باشد.

۲۵. یک مخزن آب بشکل مخروط مستدیر قائمی است که رأسش بطرف پائین است. ارتفاع آن ۱۰ فوت و شعاع قاعده‌اش ۱۵ فوت می‌باشد. آب بمیزان ثابت ۱ فوت مکعب در ثانیه از ته مخزن خارج و بمیزان ثابت c فوت مکعب در ثانیه وارد آن می‌شود. c را طوری تعیین کنید که سطح آب در لحظه‌ای که عمق آن ۲ فوت است بمیزان ۴ فوت در ثانیه در حال بالا آمدن باشد.

۲۶. آب به داخل یک مخزن نیمه کروی بشعاع ۱۰ فوت (که قسمت مسطح آن بطرف بالا است) جریان دارد. فرض کنید در هر لحظه h عمق آب از کف مخزن، r شعاع سطح آب، و V حجم آب موجود در مخزن باشد. dV/dh را در لحظه‌ای که h مساوی ۵ فوت است حساب کنید. اگر آب بمیزان ثابت $5\sqrt{3}$ فوت مکعب در ثانیه داخل مخزن شود dr/dt ، یعنی میزان تغییر r ، را در لحظه t که h مساوی ۵ فوت است محاسبه نمایید.

۱. یک میل = یک و سه پنجم کیلومتر

۲۷. مثلث قائم الزاویه متغیر ABC در صفحه xy در رأس B قائمه است، رأس A می آن در مبدأ ثابت شده، و رأس سومش C مقید است که بر سهمی $y = 1 + 7x^2/36$ قرار گیرد. نقطه B در لحظه $t = 0$ از نقطه $(0, 1)$ شروع به حرکت کرده و با سرعت ثابت ۲ سانتیمتر بر ثانیه در امتداد محور y بالا می رود. سرعت افزایش مساحت مثلث در لحظه $t = 7/2$ ثانیه t چقدر است؟

۲۸. شعاع یک استوانه مستدیر قائم بمیزان ثابتی افزایش می یابد. ارتفاع آن یک تابع خطی از شعاع است و سه برابر تندتر از شعاع بزرگ می شود. وقتی شعاع ۱ فوت باشد ارتفاع ۶ فوت است. زمانی که شعاع ۶ فوت باشد حجم بمیزان ۱ فوت مکعب در ثانیه ازدیاد می یابد. وقتی شعاع ۳۶ فوت باشد حجم بمیزان n فوت مکعب در ثانیه (که n عدد صحیحی است) در حال افزایش است. n را حساب کنید.

۲۹. ذره ای مقید است که در امتداد یک سهمی که معادله اش $x^2 = y$ می باشد حرکت کند. (الف) در چه نقطه از منحنی طول و عرض بیک میزان تغییر می کنند؟ (ب) اگر حرکت طوری باشد که در لحظه t داشته باشیم $x = \sin t$ و $y = \sin^2 t$ ، این میزان را بیابید.

۳۰. معادله $1 = y^3 + x^3$ ، y را بعنوان یک یا چند تابع از x تعریف می کند. (الف) با فرض وجود y' و بدون حل معادله نسبت به y نشان دهید که y' در معادله $0 = x^2 y' + y^2 x' = 0$ صدق می کند.

(ب) با فرض وجود y'' نشان دهید که وقتی $y \neq 0$ ، $y'' = -2xy'^5$. ۳۱. اگر $0 < x < 5$ معادله $5 = x^{1/2} + y^{1/2}$ معرف y بعنوان تابعی از x است. بدون حل آن نسبت به y نشان دهید که y' از علامت ثابتی برخوردار است. (می توانید وجود y' را دانسته بگیرید.)

۳۲. اگر $|x| \leq 2$ معادله $12 = 4y^2 + 3x^2$ ، y را بطور ضمنی بعنوان دو تابع از x تعریف می کند. با فرض وجود y'' نشان دهید که این مشتق در معادله $4y^3 y'' = -9$ صدق می نماید.

۳۳. معادله $0 = x \sin xy + 2x^2 = y$ را بطور ضمنی بعنوان تابعی از x تعریف می کند. با فرض وجود y' نشان دهید که این مشتق در معادله

$$y' x^2 \cos xy + xy \cos xy + \sin xy + 4x = 0$$

صدق می نماید.

۳۴. هرگاه $y = x^r$ که در آن r عدد گویائی است، مثلاً $r = m/n$ ، آنگاه $y'' = x^m$. با فرض وجود y' دستور $y' = rx^{r-1}$ را با استفاده از مشتقگیری ضمنی و دستور متناظر برای نماهای صحیح بدست آورید.

۱۳۰۴ کاربردهای مشتقگیری در مقادیر اکستريم توابع

ماکزیمها و مینیمهای توابع را می توان بیاری مشتقگیری تعیین محل کرد. در واقع

واژه «ماکزیم» در حساب دیفرانسیل و انتگرال دو مورد استعمال مختلف دارد و بوسیلهٔ دو صفت مطلق و نسبی از هم متمایز می‌شوند. مفهوم ماکزیم مطلق در فصل ۳ معرفی شد. یادآور می‌شویم که تابع حقیقی f بر مجموعهٔ S در صورتی ماکزیم مطلق دارد که لااقل یک نقطه مانند c در S باشد بطوری که

$$f(x) \leq f(c), \quad x \text{ در } S,$$

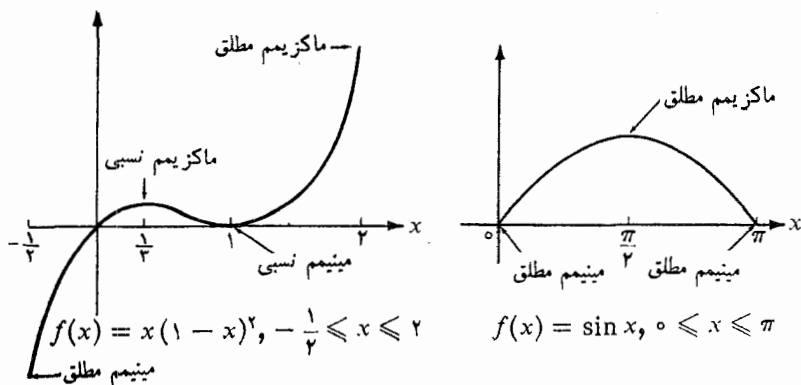
مفهوم ماکزیم نسبی بصورت زیر تعریف می‌گردد.

تعریف ماکزیم نسبی. گویند تابع f ، که بر مجموعهٔ S تعریف شده، در نقطهٔ c از S در صورتی ماکزیم نسبی دارد که بازهٔ بازی چون I حاوی c باشد قسمی که

$$f(x) \leq f(c), \quad x \text{ در } I \cap S$$

مفهوم مینیم نسبی بطور مشابه با تغییر جهت نامسادی تعریف خواهد شد.

بعبارت دیگر، ماکزیم نسبی در c یک ماکزیم مطلق در یکی از همسایگیهای c است هر چند که الزاماً بر تمام S چنین نمی‌باشد. مثالهایی در شکل ۷.۴ نموده شده‌اند. البته هر ماکزیم مطلق بخصوص یک ماکزیم نسبی هست.



شکل ۷.۴ اکسترمهای توابع.

تعریف اکسترم. عددی که یا ماکزیم نسبی یا مینیم نسبی تابع f باشد یک مقدار اکسترم یا یک اکسترم f نامیده می‌شود.

قضیهٔ بعدی، که در شکل ۷.۴ مصور شده، اکسترمهای یک تابع را به مماسهای افقی نمودارش ربط می‌دهد.

قضیهٔ ۳.۴. صفر شدن مشتق در یک اکسترم درونی. فرض کنیم f بر بازهٔ باز I تعریف شده و در نقطهٔ درونی c از I ماکزیم نسبی یا مینیم نسبی داشته باشد. هرگاه $f'(c)$ وجود داشته باشد آنگاه $f'(c) = 0$.

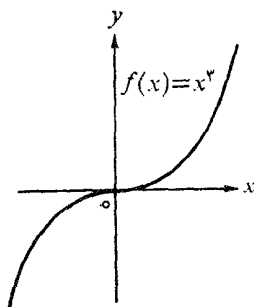
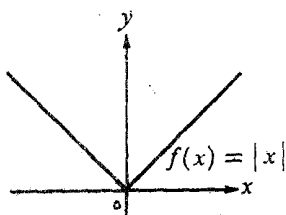
بوهان. تابع Q را بر I این طور تعریف می‌کنیم:

$$Q(c) = f'(c); Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, x \neq c \text{ اگر}$$

چون $f'(c)$ وجود دارد پس، وقتی $x \rightarrow c$ ، $Q(x) \rightarrow Q(c)$ ، در نتیجه Q در c پیوسته است. می‌خواهیم ثابت کنیم $Q(c) = 0$. این را با نشان دادن اینکه هر یک از نامساویهای $Q(c) > 0$ و $Q(c) < 0$ به تناقض می‌رسند انجام می‌دهیم.

فرض کنیم $Q(c) > 0$. بنا بر خاصیت محفوظ ماندن علامت توابع پیوسته، بازه‌ای حول c وجود دارد که در آن $Q(x)$ مثبت است. بنابراین، برای هر $x \neq c$ در این بازه، صورت کسر $Q(x)$ همان علامت مخرجش را خواهد داشت. بعبارت دیگر، وقتی $x > c$ ، $f(x) > f(c)$ و، وقتی $x < c$ ، $f(x) < f(c)$. این با فرض اینکه f در c اکسترمم دارد متناقض است. پس نامساوی $Q(c) > 0$ غیرممکن است. استدلالی شبیه به این نشان می‌دهد که $Q(c) < 0$ را نیز نمی‌توانیم داشته باشیم. بنابراین، همانطور که حکم شده، $Q(c) = 0$. چون $Q(c) = f'(c)$ این فصلیه را ثابت خواهد کرد.

درک این مطلب که مشتق صفر در c وجود اکسترمم در c را ایجاب نمی‌کند اهمیت دارد. بعنوان مثال، فرض می‌کنیم $f(x) = x^3$. نمودار f در شکل ۸.۴ نشان داده شده است. در اینجا $f'(x) = 3x^2$ ، پس $f'(0) = 0$. اما این تابع در هر بازه‌ی حاوی ۰



شکل ۸.۴ در اینجا $f'(0)$ مساوی صفر است اما در صفر اکسترمم وجود ندارد. شکل ۹.۴ در صفر اکسترمم وجود دارد ولی $f'(0)$ موجود نیست.

صعودی است، پس در ۰ اکسترمم وجود ندارد. این مثال نشان می‌دهد که مشتق صفر در c برای وجود اکسترمم در c کافی نیست.

مثال دیگر، یعنی $f(x) = |x|$ ، نشان می‌دهد که همیشه مشتق صفر در یک اکسترمم رخ نمی‌دهد. در اینجا، همانطور که شکل ۹.۴ نشان داده، یک مینیمم نسبی در ۰ وجود دارد اما نمودار تابع در خود ۰ گوشه‌تیز داشته و مشتق در آن وجود ندارد. در قضیه ۳.۴ فرض شده که $f'(c)$ در اکسترمم موجود است. بعبارت دیگر، قضیه ۳.۴ به ما می‌گوید که، در صورت عدم وجود گوشه‌های تیز، چنانچه اکسترممی در نقطه‌ی درونی یک بازه رخ دهد مشتق

ازوماً باید در آن صفر شود.

در یکی از بخشهای آتی آزمونی را برای اکستریمها توصیف می‌کنیم که آنقدر جامع است که هر دو مثال شکل ۷.۴ و نیز مثال شکل ۹.۴ را دربر می‌گیرد. این آزمون، که در قضیه ۸.۴ وصف شده، به ما می‌گوید که یک اکستریم همیشه در نقطه‌ای رخ می‌دهد که در آن مشتق تغییر علامت می‌دهد. این مطلب با آنکه از نظر هندسی واضح است ولی بامطالبی که تا بحال عرضه شده بآسانی قابل اثبات نیست. ما این را بعنوان نتیجه‌ای از قضیه مقدار میانگین برای مشتقات، که اینک مورد بحث قرار می‌گیرد، بدست خواهیم آورد.

۱۴.۴ قضیه مقدار میانگین برای مشتقات

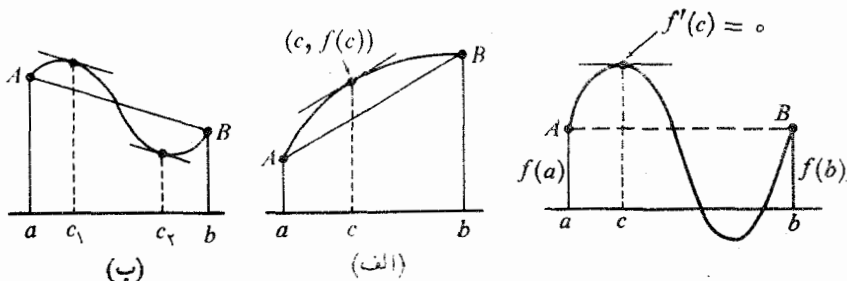
قضیه مقدار میانگین برای مشتقات منزلت زیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد زیرا بسیاری از خواص تابعها را براحتی می‌توان از آن نتیجه گرفت. پیش از آنکه قضیه مقدار میانگین را بیان کنیم یکی از حالات خاصش را که قضیه کلیتر از آن نتیجه می‌شود مورد بررسی قرار می‌دهیم. این حالت خاص در سال ۱۶۹۰ توسط میشل رول^۱ (۱۶۵۲-۱۷۱۹)، ریاضیدان فرانسوی، کشف شد.

قضیه ۴.۴. قضیه رول. فرض کنیم f تابعی باشد که همه جا بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه بازه باز (a, b) مشتق دالدا، بعلاوه فرض می‌کنیم

$$f(a) = f(b).$$

در اینصورت دست کم یک نقطه مانند c در بازه باز (a, b) هست که $f'(c) = 0$.

معنی هندسی قضیه رول در شکل ۱۰.۴ مصور شده است. قضیه فقط این را می‌گوید که منحنی نموده شده باید جایی بین a و b مماسی افقی داشته باشد.



شکل ۱۱.۴ معنی هندسی قضیه مقدار میانگین.

شکل ۱۰.۴ تعبیر هندسی قضیه رول.

برهان. فرض می‌کنیم بازای هر x در بازه باز (a, b) ، $f'(x) \neq 0$ و باین صورت به تناقض می‌رسیم: بنابر قضیه مقدار اکستریم برای توابع پیوسته، f باید ماکزیمم مطلق

خود M و مینیمم مطلقش m را جایی در بازه بسته $[a, b]$ بگیرد. قضیه ۳.۴ به ما می‌گوید که هیچیک از مقادیر اکستریم نمی‌تواند در یک نقطه درونی گرفته شود (در غیر اینصورت مشتق در آنجا صفر خواهد شد). پس هر دو مقدار اکستریم در نقاط انتهایی a و b گرفته می‌شوند. اما، چون $f(a) = f(b)$ ، این یعنی که $m = M$ ، و در نتیجه f بر $[a, b]$ ثابت است. این متناقض آن است که بازای هر x در (a, b) ، $f'(x) \neq 0$ ، پس نتیجه می‌شود که بازای دست‌کم یک c صادق در $a < c < b$ ، $f'(c) = 0$ ، که قضیه را ثابت می‌کند.

قضیه دل را می‌توانیم برای اثبات قضیه مقدار میانگین بکار ببریم. پیش از بیان قضیه مقدار میانگین بررسی معنی هندسی آن سودمند است. هر یک از منحنیهای شکل ۱۱.۴ نمودار تابع پیوسته‌ای است چون f که در روی هر نقطه بازه (a, b) خط مماس دارد. خط مماس در نقطه $(c, f(c))$ (نموده شده در شکل ۱۱.۴ (الف)) با وتر AB موازی است. در شکل ۱۱.۴ (ب) دو نقطه وجود دارند که خط مماس در آنها با وتر AB موازی می‌باشد. قضیه مقدار میانگین وجود لااقل یک نقطه با این خاصیت را تضمین خواهد کرد.

برای تبدیل این خاصیت هندسی به عبارتی تحلیلی فقط کافی است ملاحظه کنیم که تساوی دوخط بمعنی تساوی شیبهای آنها می‌باشد. چون شیب وتر AB مساوی کسر $[f(b) - f(a)] / (b - a)$ و شیب خط مماس در c برابر مشتق $f'(c)$ است پس حکم بالا این را می‌گوید که بازای c ای در بازه (a, b) ،

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (24.4)$$

برای ارائه گواه شهودی نیرومندی در حقانیت (۲۴.۴) می‌توانیم $f(t)$ را مسافتی بینگاریم که یک ذره متحرک تا لحظه t پیموده است. در اینصورت کسر طرف چپ (۲۴.۴) نمایشگر سرعت میانگین یا متوسط در فاصله زمانی $[a, b]$ و مشتق $f'(t)$ بیانگر سرعت لحظه‌ای در زمان t خواهد بود. معادله حکم می‌کند که باید لحظه‌ای باشد که در آن سرعت لحظه‌ای مساوی سرعت متوسط گردد. مثلاً، هرگاه سرعت متوسط در مسافت با اتومبیل ۴۵ میل در ساعت باشد، آنگاه سرعت‌سنج باید در طول سفر، حتی یکبار هم که شده، ۴۵ میل در ساعت را نشان دهد.

قضیه مقدار میانگین را می‌توان بشکل صوری این طور بیان کرد:

قضیه ۵.۴. قضیه مقدار میانگین برای مشتقات. فرض کنیم f همه جا بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه از بازه باز (a, b) مشتق داشته باشد. در اینصورت لااقل یک نقطه در (a, b) مثل c هست که بازای آن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (25.4)$$

برهان. برای بکار بردن قضیه دل نیاز به تابعی داریم که مقادیرش در نقاط انتهایی

a و b یکی باشند. برای آنکه چنین تابعی را بسازیم f را این طور تغییر می دهیم: فرض می کنیم

$$h(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)].$$

در این صورت $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. همچنین h بر $[a, b]$ پیوسته است و در بازه باز (a, b) مشتق دارد. با اعمال قضیه رل در مورد h درمی یابیم که بازای c ای در (a, b) ، $h'(c) = 0$ اما

$$h'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)].$$

این، وقتی $x = c$ ، معادله (۲۵.۴) را به ما خواهد داد.

توجه کنید که قضیه درباره محل دقیق یک یا چند «مقدار میانگین» c هیچ حکمی نمی کند جز آنکه می گوید که همه آنها جایی بین a و b واقعند. در بعضی از توابع می توان جای مقادیر میانگین را دقیقاً مشخص کرد ولی در اکثر حالات تعیین دقیق این نقاط بسیار مشکل خواهد بود. با اینحال سودمندی واقعی قضیه در این نهفته است که بسیاری از نتایج را می توان با دانستن فقط وجود لاقابل یک مقدار میانگین بدست آورد.

توجه: مهم این است که درک شود که قضیه مقدار میانگین ممکن است درحالتی که مشتق در نقطه ای بین a و b وجود ندارد برقرار نشود. مثلاً تابع f که با معادله $f(x) = |x|$ تعریف شده همه جا بر محور حقیقی پیوسته است و همه جا جز دره مشتق دارد. فرض کنیم $A = (-1, f(-1))$ و $B = (2, f(2))$. شیب وتر واصل بین A و B برابر با

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

است ولی مشتق در هیچ کجا مساوی $1/3$ نمی باشد.

تعمیم زیر از قضیه مقدار میانگین غالباً مفید واقع می شود.

قضیه ۲۴.۴. دستور مقدار میانگین کتی. فرض کنیم f و g دو تابع باشند که بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و در بازه باز (a, b) مشتق دارند. در این صورت بازای c ای در (a, b) داریم

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

برهان. برهان شبیه برهان قضیه ۲۴.۵ است. قرار می دهیم

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

در این صورت $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. با اعمال قضیه رل

در مورد h درمی یابیم که بازای c ای در (a, b) ، $h'(c) = 0$. چنانچه $h'(c)$ را از دستور معرف h حساب کنیم دستور مقدار میانگین کشی را خواهیم داشت.
قضیه ۵.۴ حالت خاصی است که با فرض $g(x) = x$ بدست می آید.

۱۵.۴ تمرینات

۱. نشان دهید که، روی نمودار هر چندجمله ای درجه دوم، وتر واصل میان نقاطی که در آنها $x = a$ و $x = b$ موازی خط مماس در نقطه میانی $x = (a + b)/2$ است.
۲. با استفاده از قضیه رل ثابت کنید که، بدون توجه به مقدار b ، حداکثر یک نقطه مانند x در بازه $1 \leq x \leq 1$ هست که بازای آن $x^3 - 3x + b = 0$.
۳. تابع f را بصورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \geq 1 \text{ اگر } f(x) = \frac{3 - x^2}{2}, x \leq 1$$

- (الف) نمودار f را بازای x های موجود در بازه $0 \leq x \leq 2$ بکشید.
- (ب) نشان دهید که f در شرایط قضیه مقدار میانگین روی بازه $[0, 2]$ صدق می کند و کلیه مقادیر میانگینی را که از قضیه بدست می آیند معین نمایید.
۴. فرض کنید $f(x) = 1 - x^{2/3}$. نشان دهید که $f(1) = f(-1) = 0$ اما $f'(x)$ هرگز در بازه $[-1, 1]$ صفر نیست. توضیح دهید که این وضع، با توجه به قضیه رل، چگونه میسر است.

۵. نشان دهید که دقیقاً بازای دومقدار حقیقی از x ، $x^2 = x \sin x + \cos x$.

۶. نشان دهید که دستور مقدار میانگین را می توان به شکل
 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ که در آن $0 < \theta < 1$ ، در آورد. θ را برحسب x و h در این حالات معین نمایید: (الف) $f(x) = x^2$ ؛ (ب) $f(x) = x^3$.
در هر حالت x را ثابت بگیرید، فرض کنید $x \neq 0$ ، و حد θ را وقتی $h \rightarrow 0$ بیابید.

۷. فرض کنید f یک چندجمله ای باشد. عدد حقیقی α را یک صفر f از تکرار m خوانند هرگاه $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ که در آن $g(\alpha) \neq 0$.
(الف) اگر f در بازه $[a, b]$ صفر داشته باشد ثابت کنید f' لااقل $1 - r$ صفر دارد و، بطور کلی، مشتق k ام $f^{(k)}$ در $[a, b]$ دست کم $r - k$ صفر خواهد داشت (صفرها بتعداد تکرار آنها بحساب می آیند).

(ب) اگر مشتق k ام $f^{(k)}$ دقیقاً r صفر در $[a, b]$ داشته باشد در مورد عدد صفرهای f در $[a, b]$ چه نتیجه ای می توانید می گیرید؟

۸. با استفاده از قضیه مقدار میانگین این نامساویها را بدست آورید:

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad (\text{الف})$$

$$(ب) \text{ اگر } y \leq x \text{ و } 0 < y \leq x, n = 1, 2, 3, \dots \text{ و } ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y).$$

۹. تابع f چنان است که بر $[a, b]$ پیوسته بوده و هم‌جا بر بازه (a, b) مشتق دوم دارد. پاره خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ نمودار f را در نقطه سومی چون $(c, f(c))$ قطع می‌کند که $a < c < b$. ثابت کنید بازای دست‌کم یک نقطه مانند t در (a, b) ، $f''(t) = 0$.

۱۰. این تمرین برهان قضیه مقدار میانی برای مشتقات را با اختصار شرح می‌دهد: فرض کنیم f هم‌جا بر بازه I مشتق داشته باشد. a و b را در I طوری اختیار می‌کنیم که $a < b$. در این صورت f' هر مقدار بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را جایی در (a, b) خواهد گرفت. (الف) تابع جدید g را بر $[a, b]$ این‌طور تعریف کنید:

$$\text{اگر } x \neq a, g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; g(a) = f'(a)$$

ثابت کنید g هر مقدار بین $f'(a)$ و $g(b)$ را در بازه (a, b) می‌گیرد. با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای مشتقات نشان دهید که f' هر مقدار بین $f'(a)$ و $g(b)$ را در بازه (a, b) خواهد گرفت.

(ب) تابع جدید h را بر $[a, b]$ بصورت زیر تعریف کنید:

$$\text{اگر } x \neq b, h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}; h(b) = f'(b)$$

با استدلالی شبیه قسمت (الف) نشان دهید که f' هر مقدار بین $f'(b)$ و $h(a)$ را در (a, b) می‌گیرد. چون $h(a) = g(b)$ این قضیه مقدار میانی برای مشتقات را ثابت خواهد کرد.

۱۶.۴ کاربردهای قضیه مقدار میانگین در خواص هندسی توابع

قضیه مقدار میانگین را می‌توان برای تعیین خواص یک تابع با دانستن علامت جبری مشتق آن بکار برد. این مطلب در قضیه زیر منعکس شده است.

قضیه ۷.۴. فرض کنیم f تابعی باشد که بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه از بازه (a, b) مشتق دارد. در اینصورت

(الف) اگر بازای هر x در (a, b) داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، f بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است؛

(ب) اگر بازای هر x در (a, b) داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، f بر $[a, b]$ اکیداً نزولی است؛

(پ) اگر بازای هر x در (a, b) داشته باشیم $f'(x) = 0$ ، f در سراسر $[a, b]$ ثابت خواهد بود.

برهان. برای اثبات (الف) باید نشان دهیم که هر وقت $a \leq x < y \leq b$ ، $f(x) < f(y)$. لذا فرض می‌کنیم $x < y$ و قضیه مقدار میانگین را در مورد زیر بازه بسته $[x, y]$ بکار می‌بریم. خواهیم داشت

$$(۲۶.۴) \quad f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \quad \text{که در آن } x < c < y$$

چون $f'(c)$ و $y - x$ هر دو مثبت اند پس $f(y) - f(x)$ نیز چنین است و این یعنی که، طبق حکم، $f(x) < f(y)$. این (الف) را ثابت می‌کند، و برهان (ب) مشابه خواهد بود. برای اثبات (ب) معادله (۲۶.۴) را با فرض $x = a$ بکار می‌بریم. چون $f'(c) = 0$ بازای هر y در $[a, b]$ خواهیم داشت $f(y) = f(a)$ ، پس f بر $[a, b]$ ثابت است.

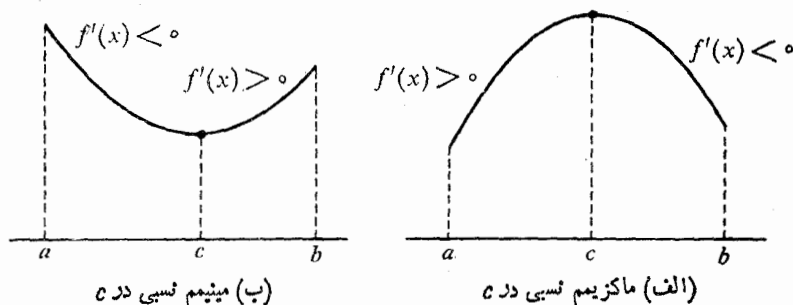
قضیه ۷.۴ را می‌توان بکار برده ثابت کنیم هر جا مشتق تغییر علامت دهد اکسترمم روی می‌دهد.

قضیه ۸.۴. فرض کنیم f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و f' همه جا در بازه باز (a, b) ، بجز احتمالاً در c وجود داشته باشد.

(الف) هرگاه $f'(x)$ بازای هر $x < c$ مثبت و برای هر $x > c$ منفی باشد آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

(ب) از سوی دیگر، هرگاه $f'(x)$ بازای هر $x < c$ منفی و برای هر $x > c$ مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

برهان. در حالت (الف) قضیه ۷.۴ (الف) به ما می‌گوید که f بر $[a, c]$ اکیداً صعودی و بر $[c, b]$ اکیداً نزولی است. از اینرو بازای هر $x \neq c$ در (a, b) ، $f(x) < f(c)$ ، پس f در c ماکزیمم نسبی دارد. این (الف) را ثابت می‌کند، و برهان (ب) کاملاً مشابه خواهد بود. هر دو حالت در شکل ۱۲.۴ مصور شده‌اند.



شکل ۱۲.۴ وقتی مشتق تغییر علامت دهد اکسترمم روی می‌دهد.

۱۷.۴ آزمون مشتق دوم برای اکسترممها

چنانچه تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد قضیه مقدار اکسترمم ماکزیمم مطلق و مینیمم

مطلق داشتن آن را جایی در $[a, b]$ بازگویی کند. هرگاه f در هر نقطه درونی مشتق داشته باشد آنگاه اکسترمها فقط در این مکانها روی می دهند:

(۱) در نقاط انتهائی a و b ؛

(۲) در آن نقاط درونی x که $f'(x) = 0$.

نقاط از نوع (۲) را اغلب نقاط بحرانی f می خوانند. برای تعیین وجود ماکزیمم یا مینیمم (یا هیچکدام) در نقطه بحرانی c به اطلاعات بیشتری درباره f نیاز داریم. معمولاً رفتار f در یک نقطه بحرانی را می توان از علامت جبری مشتق در حوالی c تعیین کرد. قضیه بعدی نشان می دهد که بررسی علامت مشتق دوم در نزدیکی c نیز می تواند ثمربخش باشد.

قضیه ۹.۴. آزمون مشتق دوم برای اکسترم در یک نقطه بحرانی. فرض کنیم c یک نقطه بحرانی f در بازه باز (a, b) باشد؛ یعنی فرض می کنیم $a < c < b$ و $f'(c) = 0$. همچنین وجود f'' در (a, b) را دانسته می انگاریم. در اینصورت این احکام را خواهیم داشت:

(الف) اگر f'' در (a, b) منفی باشد f در c ماکزیمم نسبی دارد.

(ب) اگر f'' در (a, b) مثبت باشد f در c مینیمم نسبی خواهد داشت.

هر دو حالت در شکل ۱۲.۴ مصور شده اند.

برهان. حالت (الف) را در نظر می گیریم، یعنی فرض می کنیم $f'' < 0$ در (a, b) باشد. بنا بر قضیه ۷.۴ (در مورد f') معلوم می شود که تابع f' در (a, b) اکیداً نزولی است. اما $f'(c) = 0$ ، پس، همانطور که در شکل ۱۲.۴ (الف) نموده شده، f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد. پس، طبق قضیه ۸.۴، f در c ماکزیمم نسبی دارد. برهان حالت (ب) کاملاً مشابه خواهد بود.

چنانچه f'' در c پیوسته بوده و $f''(c) \neq 0$ ، همسایگویی از c وجود دارد که در آن f'' با $f''(c)$ همعلامت است. بنا بر این، اگر $f'(c) = 0$ ، تابع f در صورت منفی بودن $f''(c)$ در c ماکزیمم نسبی و در صورت مثبت بودن $f''(c)$ در این نقطه مینیمم نسبی دارد. این آزمون برای بررسی بسیاری از مثالهایی که در عمل روی می دهند کافی است.

علامت مشتق دوم در تعیین تحدب یا مقعر f نیز اثر دارد. قضیه بعدی نشان می دهد که، همانطور که شکل ۱۲.۴ (ب) نشان داده، تابع در بازه هایی که f'' مثبت باشد محدب است. در شکل ۱۲.۴ (الف) f بدلیل منفی بودن f'' مقعر می باشد. کافی است فقط حالت تحدب را مطرح کنیم زیرا هرگاه f محدب باشد آنگاه f — مقعر خواهد بود.

قضیه ۱۰.۴. آزمون مشتق برای تحدب. فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته بوده و در بازه باز (a, b) مشتق داشته باشد. هرگاه f' بر (a, b) صعودی باشد آنگاه f بر $[a, b]$ محدب است. بویژه، اگر f'' در (a, b) وجود داشته و نامنفی باشد، f محدب خواهد بود.

برهان. فرض می کنیم $y < x$ در $[a, b]$ بوده و قرار می دهیم $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$

که در آن $0 < \alpha < 1$ می‌خواهیم ثابت کنیم که $f(z) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x)$ چون $f(z) = \alpha f(z) + (1 - \alpha)f(z)$ این معادل آن است که ثابت کنیم

$$(1 - \alpha)[f(z) - f(x)] \leq \alpha[f(y) - f(z)].$$

بنابر قضیه مقدار میانگین (که دوبار بکار رود) نقاطی مثل c و d صادق در $x < c < z$ و $y < d < z$ وجود دارند بطوری که

$$f(y) - f(z) = f'(d)(y - z) \text{ و } f(z) - f(x) = f'(c)(z - x)$$

چون f' صعودی است داریم $f'(c) \leq f'(d)$. همچنین خواهیم داشت $(1 - \alpha)(z - x) = \alpha(y - z)$ پس می‌توانیم بنویسیم

$$(1 - \alpha)[f(z) - f(x)] = (1 - \alpha)f'(c)(z - x) \leq \alpha f'(d)(y - z) = \alpha[f(y) - f(z)],$$

که نامساوی مورد نیاز برای تحدب را ثابت می‌کند.

۱۸.۴ رسم منحنی

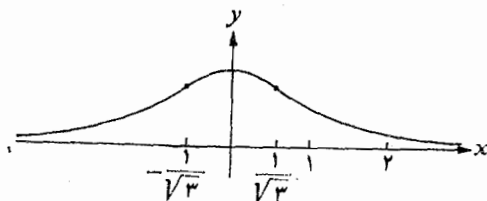
اطلاعات موجود در قضاای چند بخش آخر اغلب برای رسم منحنی مفیدند. برای رسم نمودار تابع f ابتدا باید قلمرو f [مجموعه x هائی که $f(x)$ تعریف شده] را معین کنیم و، چنانچه این کار آسان بود، باید برد f [مجموعه مقادیری که توسط f گرفته می‌شوند] را بیابیم. شناخت قلمرو و برد ایده‌ای از نحوه گسترش منحنی $y = f(x)$ را به ما می‌دهد زیرا بخشی از صفحه xy را مشخص می‌کند که باید تمام منحنی در آن جای گیرد. پس بد نیست سعی کنیم آن نقاطی را (در صورت وجود) بیابیم که منحنی از محورهای مختصات می‌گذرد. اینها را برخورد با محوره‌های نمودار می‌نامند. برخورد با y نقطه $(0, f(0))$ (یا فرض بودن 0 در قلمرو f) است، و برخوردهای با x نقاطی چون $(x, 0)$ هستند که $f(x) = 0$. محاسبه برخوردهای با x ممکن است عملاً خیلی مشکل باشد، و شاید مجبور شویم فقط به مقادیر تقریبی آنها قناعت کنیم.

همچنین بایسد با معاینه علامت f' سعی کنیم بازه‌هایی را معین کنیم که در آنها f یکنوا است و، با بررسی علامت f'' ، بازه‌های تحدب و تقعر را مشخص نمائیم. بایسد به آن نقاط از نمودار که مماس افقی دارند توجه خاصی مبذول گردد.

مثال ۱. نمودار $f(x) = x + 1/x$ ، $x \neq 0$ که در آن $f(x) = x + 1/x$. در این حالت نمودار با هیچیک از محورها برخورد نمی‌کند. دوشق اول با دستورهای زیر داده می‌شوند:

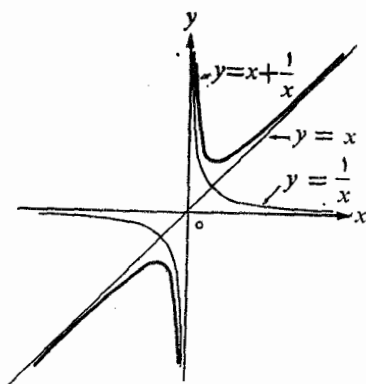
$$f'(x) = 1 - 1/x^2, f''(x) = 2/x^3.$$

مشق اول در صورتی که $x^2 > 1$ مثبت است، وقتی $x^2 < 1$ منفی است، و زمانی که



شکل ۱۴.۴ نمودار

$$f(x) = 1/(x^2 + 1).$$



شکل ۱۳.۴ نمودار

$$f(x) = x + 1/x.$$

$x^2 = 1$ صفر می باشد. پس در $x = 1$ مینیمم نسبی و در $x = -1$ ماکزیمم نسبی وجود دارد. بازای $x > 0$ مشتق دوم مثبت است، پس مشتق اول اکیداً صعودی می باشد. برای $x < 0$ مشتق دوم منفی است، و در نتیجه مشتق اول اکیداً نزولی خواهد بود. جمله x ، بازای x های نزدیک ۰، در مقایسه با $1/x$ کوچک بوده و رفتار منحنی شبیه منحنی $y = 1/x$ است. (ر.ک. شکل ۱۳.۴). از سوی دیگر، بازای x های خیلی بزرگ (مثبت یا منفی)، جمله $1/x$ در مقایسه با x کوچک بوده و وضع منحنی خیلی شبیه خط $y = x$ می باشد. چون در این مثال تابع فرد است، یعنی $f(-x) = -f(x)$ ، پس نمودار نسبت به مبدأ متقارن خواهد بود.

در مثال پیش خط $y = x$ یک مجانب منحنی است. بطور کلی، هر خط غیر قائم با معادله $y = mx + b$ را در صورتی مجانب نمودار $y = f(x)$ خوانند که، وقتی x مقادیر مثبت بزرگ دلخواه یا مقادیر منفی بزرگ دلخواه اختیار کند، تفاضل $f(x) - (mx + b)$ به ۰ میل نماید. خط قائم $x = a$ را یک مجانب قائم نامند هرگاه، وقتی x از راست یا چپ به a نزدیک شود، $|f(x)|$ مقادیر بزرگ دلخواه را اختیار نماید. در مثال قبل محور y یک مجانب قائم است.

مثال ۲. نمودار $y = f(x)$ که در آن $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ این یک تابع زوج

است، بازای هر x مثبت است، و محور x را بعنوان مجانب افقی دارد. مشتق اول با

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

داده می شود. پس، اگر $x > 0$ ، $f'(x) < 0$ ؛ چنانچه $x < 0$ ، $f'(x) > 0$ ؛ و وقتی $f'(x) = 0$ ، $x = 0$ ؛ بنابراین، تابع روی قسمت منفی محور صعودی، روی قسمت مثبت محور نزولی، و در $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد. چنانچه یکبار دیگر مشتق بگیریم درخواهیم

یافت که

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-2) - (-2x)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

لذا، اگر $1 < 3x^2$ ، $f''(x) > 0$ ، اگر $1 < 3x^2$ ، $f''(x) < 0$. پس مشتق اول وقتی $1/3 < x^2$ صعود کرده و زمانی که $1/3 < x^2$ نزول خواهد نمود. این اطلاعات برای رسم منحنی شکل ۱۴.۴ کافی است. دو نقطه نمودار متناظر $1/3 = x^2$ ، که در آنها مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد، نقاط عطف نام دارند.

۱۹.۴ تمرینات

در تمرینات زیر، (الف) کلیه x هائی را بیابید که $f'(x) = 0$ ؛ (ب) علامت f' را بررسی کرده و آن بازه‌هائی را تعیین کنید که در آنها f یکنوا است؛ (پ) علامت f'' را معاینه نموده و آن بازه‌هائی را معین کنید که در آنها f' یکنوا است؛ (ت) نمودار f را بکشید. در هر حالت تابع بازای کلیه x هائی تعریف شده که دستور داده شده برای $f(x)$ بامعنی است.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad ۲$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad ۱$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5 \quad ۴$$

$$f(x) = (x-1)^2(x+2) \quad ۳$$

$$f(x) = 1/x^2 \quad ۶$$

$$f(x) = 2 + (x-1)^4 \quad ۵$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \quad ۸$$

$$f(x) = x + 1/x^2 \quad ۷$$

$$f(x) = (x^2 - 4)/(x^2 - 9) \quad ۱۰$$

$$f(x) = x/(1+x^2) \quad ۹$$

$$f(x) = x - \sin x \quad ۱۲$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad ۱۱$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}\cos 2x \quad ۱۴$$

$$f(x) = x + \cos x \quad ۱۳$$

۲۰.۴ مثالهای حل شده‌ای از مسائل اکسترم

بسیاری از مسائل اکسترم، چه در ریاضیات محض و چه در ریاضیات کاربردی، را می‌توان با استفاده از حساب دیفرانسیل بطور اصولی حل کرد. در واقع مبادی حساب دیفرانسیل اولین بار وقتی ظاهر شدند که فرما در یافتن روشهائی کلی برای تعیین ماکزیمها و مینیمها می‌کوشید. ما در این بخش چند مثال را حل می‌کنیم و، در مجموعه تمرینات آتی، به خواننده مجال حل مثالهای دیگری را خواهیم داد.

ابتدا دو اصل ساده را تنظیم می‌کنیم که می‌توان آنها را در حل بسیاری از مسائل اکسترم بکار برد.

مثال ۱. اصل مجموع ثابت - حاصلضرب ماکزیمم. فرض کنید عدد مثبت S داده شده باشد. ثابت کنید که در میان کلیه اعداد مثبت x و y که $x + y = S$ ، حاصلضرب xy وقتی بزرگترین است که $x = y = S/2$.

پرهان. هرگاه $x + y = S$ آنگاه $y = S - x$ و حاصلضرب xy مساوی $x(S - x) = xS - x^2$ می باشد. فرض می کنیم $f(x) = xS - x^2$. مشتق اول این چندجمله ای درجه دوم $f'(x) = S - 2x$ است که برای $x < S/2$ مثبت و، برای $x > S/2$ منفی خواهد بود. پس xy وقتی ماکزیمم است که $x = S/2$ و $y = S - x = S/2$. این مطلب را می توان بی استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز اثبات کرد. کافی است بنویسیم $f(x) = S^2/4 - (x - S/2)^2$ و توجه کنیم که $f(x)$ وقتی بزرگترین است که $x = S/2$.

مثال ۲. اصل حاصلضرب ثابت - مجموع مینیمم. فرض کنید عدد مثبت P داده شده باشد. ثابت کنید که در میان کلیه اعداد مثبت x و y که $xy = P$ ، مجموع $x + y$ زمانی کوچکترین است که $x = y = \sqrt{P}$.

پرهان. باید مینیمم تابع $f(x) = x + P/x$ ، برای $x > 0$ ، را معین کنیم. مشتق اول آن برابر است با $f'(x) = 1 - P/x^2$. این بازای $x^2 < P$ منفی و، برای $x^2 > P$ ، مثبت است، پس $f(x)$ در $x = \sqrt{P}$ مینیمم دارد. از اینرو مجموع $x + y$ زمانی کوچکترین است که $x = y = \sqrt{P}$.

مثال ۳. در میان کلیه مستطیلهای با محیطی معلوم، این مربع است که از بیشترین مساحت برخوردار است.

پرهان. مثال ۱ را بکار می گیریم. فرض می کنیم x و y طول اضلاع یک مستطیل کلی باشند. هرگاه محیط ثابت باشد آنگاه $x + y$ ثابت است، پس مساحت، یعنی xy ، وقتی بیشترین مقدار را دارد که $x = y$. لذا مستطیل با ماکزیمم مساحت مربع خواهد بود.

مثال ۴. میانگین هندسی دو عدد مثبت از میانگین حسابی آنها بیشتر نیست. یعنی $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$.

پرهان. چنانچه $a > 0$ و $b > 0$ مفروض باشند قرار می دهیم $P = ab$. در بین همه x و y های مثبتی که $xy = P$ ، مجموع $x + y$ وقتی کوچکترین است که $x = y = \sqrt{P}$. عبارت دیگر، هرگاه $xy = P$ آنگاه $x + y \geq \sqrt{P} + \sqrt{P} = 2\sqrt{P}$ خصوصاً

فقط اگر $a = b$ پس $a + b \geq 2\sqrt{P} = 2\sqrt{ab}$ تساوی برقرار است اگر و

مثال ۵. قطعه چوبی بوزن W روی یک میز صاف بوسیله نیروی مایل که با امتداد حرکت زاویه θ ، که $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، می‌سازد، طبق شکل ۱۵.۴، حرکت می‌کند. فرض کنید نیروی اصطکاک، که متناسب با نیروی قائمی است که چوب را بطور عمودی به میز می‌فشارد، از حرکت جلوگیری نماید. زاویه θ را طوری بیابید که نیروی لازم برای خشنی کردن اصطکاک حداقل باشد.

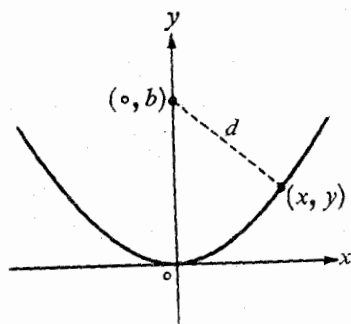
حل. فرض کنیم $F(\theta)$ نیروی وارد بر چوب باشد. این نیرو دارای مؤلفه قائم $F(\theta)\sin\theta$ بطرف بالا است، پس نیروی قائم خالصی که چوب را به میز می‌فشارد $N = W - F(\theta)\sin\theta$ خواهد بود. نیروی اصطکاک μN است که در آن μ (حرف یونانی مو) عدد ثابتی موسوم به ضریب اصطکاک می‌باشد. مؤلفه افقی نیروی وارد $F(\theta)\cos\theta$ است. وقتی این را مساوی نیروی اصطکاک قرار دهیم خواهیم داشت $F(\theta)\cos\theta = \mu[W - F(\theta)\sin\theta]$ که از آن

$$F(\theta) = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

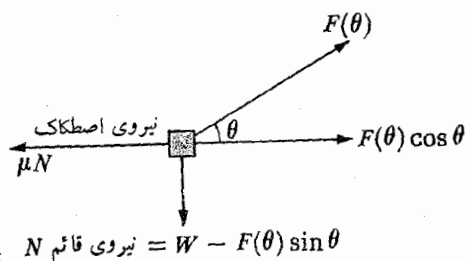
را بدست می‌آوریم. برای مینیمم کردن $F(\theta)$ مخرج کسر، یعنی $g(\theta) = \cos\theta + \mu\sin\theta$ را در بازه $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ماکزیمم می‌کنیم. در نقاط انتهائی داریم $g(0) = 1$ و $g(\pi/2) = \mu$ درون بازه خواهیم داشت

$$g'(\theta) = -\sin\theta + \mu\cos\theta,$$

پس g در $\theta = \alpha$ ، که $\sin\alpha = \mu\cos\alpha$ ، نقطه بحرانی دارد. این نتیجه می‌دهد که $g(\alpha) = \cos\alpha + \mu^2\cos\alpha = (1 + \mu^2)\cos\alpha$ می‌توانیم $\cos\alpha$ را برحسب μ بیان



شکل ۱۶.۴ مثال ۶.



شکل ۱۵.۴ مثال ۵.

کنیم. چون $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \mu^2$ درمی یابیم که $(1 + \mu^2) \cos^2 \alpha = 1$ ، پس $\cos \alpha = 1 / \sqrt{1 + \mu^2}$. لذا $g(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2}$. چون $g(\alpha)$ از $g(0)$ و $g(\pi/2)$ بیشتر است پس ماکزیمم g در نقطه بحرانی رخ می دهد. از اینرو نیروی مینیمم لازم

$$F(\alpha) = \frac{\mu W}{g(\alpha)} = \frac{\mu W}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

خواهد بود.

مثال ۶. کوتاهترین فاصله از نقطه مفروض $(0, b)$ واقع بر محور y تا سهمی $x^2 = 4y$ را بیابید. (عدد b می تواند هر مقدار حقیقی را داشته باشد.)

حل. سهمی مورد نظر در شکل ۱۶.۴ نموده شده است. کمینی که باید مینیمم شود فاصله

$$d = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$$

است با این قید که $x^2 = 4y$. از روی شکل واضح است که وقتی b منفی باشد فاصله مینیمم $|b|$ می باشد. وقتی $(0, b)$ در امتداد قسمت مثبت محور y بطرف بالا حرکت می کند مینیمم b است تا که نقطه به مکان خاص معینی برسد که از آنجا به بالا مینیمم از b کمتر خواهد بود. حال جای دقیق این موضع خاص را تعیین می کنیم.

پیش از هر چیز ملاحظه می کنیم که نقطه (x, y) که d را مینیمم کند d^2 را نیز چنین می کند. (این توجه ما را قادر می سازد تا از مشتقگیری ریشه های دوم اجتناب کنیم.) در این مرحله می توانیم d^2 را فقط برحسب x یا فقط برحسب y بیان داریم. d^2 را برحسب y بیان کرده و انجام محاسبات مربوط به وقتی که d^2 برحسب x بیان می شود را بعنوان تمرین به خواننده محول می نماییم.

بنابراین، تابع f مینیمم شونده با دستور

$$f(y) = d^2 = 4y + (y - b)^2$$

داده می شود. با اینکه $f(y)$ بازای هر y حقیقی تعریف شده اما طبیعت مسئله ایجاب می کند که مقدار مینیمم را فقط در میان y های نامنفی بجوئیم. مشتق، که با $f'(y) = 4 + 2(y - b)$ داده شده، فقط وقتی صفر است که $y = b - 2$. این زمانی که $b < 2$ نقطه بحرانی منفی y را بدست می دهد که قید $y \geq 0$ مانع آن است. بعبارت دیگر، اگر $b < 2$ ، مینیمم در یک نقطه بحرانی رخ نخواهد داد. درواقع، وقتی $b < 2$ ، می بینیم که بازای $y \geq 0$ ، $f'(y) > 0$ و در نتیجه f بازای $y \geq 0$ اکیدا صعودی است. بنابراین، مینیمم مطلق در نقطه انتهائی $y = 0$ واقع می شود. مینیمم متناظر d برابر است با $\sqrt{b^2} = |b|$.

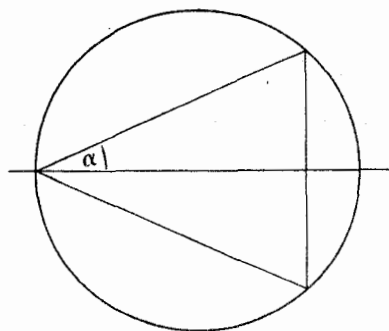
اگر $b \geq 2$ یک نقطه بحرانی قابل قبول در $y = b - 2$ وجود دارد. چون بازای

هر y ، $f''(y) = 2$ پس f' صعودی است، و در نتیجه مینیمم مطلق f در این نقطه بحرانی واقع می شود. مینیمم d برابر است با $\sqrt{4(b-2)+4} = 2\sqrt{b-1}$. پس نشان داده ایم که فاصله مینیمم اگر $b < 2$ مساوی $|b|$ و، اگر $b \geq 2$ برابر $2\sqrt{b-1}$ می باشد. ($b = 2$ مقدار خاصی است که در بالا به آن اشاره شد.)

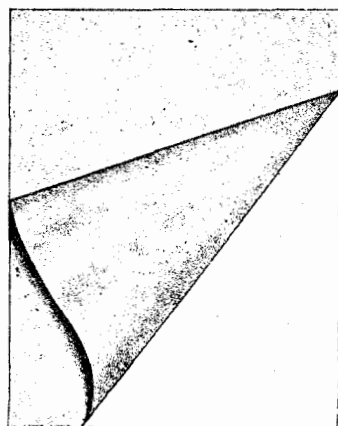
۲۱.۴ تمرینات

۱. ثابت کنید که بین همه مستطیلهای با مساحت معلوم، این مربع است که از کوچکترین محیط برخوردار است.
۲. مترداری L فوت سیم داشته و می خواهد دور یک مربع مستطیلی شکل که در مجاورت دیوار سنگی طولی است حصار بکشد. چه ابعادی مساحت مربع را ماکزیم می کنند؟
۳. مترداری می خواهد دور یک مربع مستطیلی شکل با مساحت A را که در مجاورت دیوار سنگی طولی است حصار بکشد. چه ابعادی کمترین مقدار سیم را لازم دارد؟
۴. $S > 0$ داده شده است. ثابت کنید میان همه اعداد مثبت x و y که $x + y = S$ ، مجموع $x^2 + y^2$ وقتی کوچکترین است که $x = y$.
۵. $R > 0$ داده شده است. ثابت کنید میان همه اعداد مثبت x و y که $x^2 + y^2 = R$ ، مجموع $x + y$ زمانی بزرگترین است که $x = y$.
۶. هر ضلع مربعی بطول L است. ثابت کنید میان کلیه مربعهای محاط شده در این مربع آنکه مساحتش مینیمم است طول ضلعش $L/\sqrt{2}$ می باشد.
۷. هر ضلع مربعی بطول L است. طول ضلع مربعی را بیابید با بزرگترین مساحت که بتوان آن را بر مربع داده شده محیط کرد.
۸. ثابت کنید که بین کلیه مستطیلهای قابل محاط در یک دایره مفروض، مربع بیشترین مساحت را دارد.
۹. ثابت کنید که بین کلیه مستطیلهای با مساحت معلوم، مربع کوچکترین دایره محیطی را دارد.
۱۰. کره ای بشاع R داده شده است. شعاع r و ارتفاع h استوانه مستدیر قائمی با بیشترین سطح جانبی $2\pi rh$ را بیابید که قابل محاط شدن در این کره باشد.
۱۱. ثابت کنید که در بین کلیه استوانه های مستدیر قائم با سطح جانبی معلوم، شعاع کوچکترین کره محیطی $\sqrt{2}/4$ برابر شعاع استوانه می باشد.
۱۲. مخروط مستدیر قائمی بشاع R و ارتفاع H داده شده است. شعاع و ارتفاع استوانه مستدیر قائمی که بیشترین سطح جانبی را داشته و قابل محاط شدن در این مخروط باشد بیابید.
۱۳. ابعاد استوانه مستدیر قائم با حجم ماکزیم را بیابید که بشود آن را در مخروط مستدیر قائمی بشاع R و ارتفاع H محاط کرد.
۱۴. کره ای بشاع R داده شده است. شعاع r و ارتفاع h مخروط مستدیر قائم با حجم ماکزیم را که می شود در این کره محاط کرد بر حسب R حساب کنید.

۱۵. مستطیلی با بیشترین مساحت را چنان بیابید که بشود آن را در یک نیم‌دایره محاط کرد بطوری که قاعده پائینی آن بر قطر قرار گیرد.
۱۶. دوزنقه‌ای را با بیشترین مساحت چنان بیابید که بتوان آن را در یک نیم‌دایره محاط کرد بطوری که قاعده پائینی آن بر قطر واقع شود.
۱۷. یک جعبه باز از یک ورقه مستطیلی شکل این طور ساخته شده که از هر گوشه آن مربعهای مساوی برداشته و بعد اضلاع را بالا برده‌اند. ابعاد جعبه با حجم ماکزیم که بدین نحو قابل ساختن است را در صورتی بیابید که اضلاع ورقه (الف) ۱۰ و ۱۰ باشند؛ (ب) ۱۲ و ۱۸ باشند.
۱۸. اگر a و b ساقهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ۱ باشند بزرگترین مقدار $a + b$ را پیدا کنید.
۱۹. کامیونی در یک بزرگراه ۳۰۰ میل را با سرعت ثابت x میل در ساعت طی می‌کند. قوانین سرعت حکم می‌کنند که $60 \leq x \leq 30$. فرض کنید قیمت سوخت گالنی ۳۰ سنت بوده و به‌میزان $2 + x^2/600$ گالن در ساعت مصرف شود. اگر مزد راننده D دلار در ساعت بوده و کلیه مقررات سرعت را رعایت کند اقتصادی‌ترین سرعت و خرج مسافرت را در این حالات بیابید: (الف) $D = 0$ ؛ (ب) $D = 1$ ؛ (پ) $D = 2$ ؛ (ت) $D = 3$ ؛ (ث) $D = 4$.
۲۰. یک استوانه ازدوران مستطیلی حول محور x بدست آمده است. قاعده مستطیل بر محور x و تمامی آن در ناحیه بین منحنی $y = x/(x^2 + 1)$ و محور x قرار دارد. ماکزیم حجم استوانه را بیابید.
۲۱. گوشه پائینی سمت راست یک صفحه کاغذ طوری تاشده که به لبه سمت چپ رسیده است.



شکل ۱۸.۴ تمرین ۲۲.



شکل ۱۷.۴ تمرین ۲۱.

۱. (الف) پیمانه‌ای است برابر بنا ۳۷۸۵۳ لیتر که آن را wine gallon هم می‌گویند.
(ب) پیمانه‌ای است برابر با ۴۵۴۳۶ لیتر که آن را imperial gallon نیز می‌گویند.

(ر.ک. شکل ۱۷۰۴). اگر پهنای کاغذ ۶ اینچ باشد طول کوتاهترین خط تا خوردگی را بیابید. این خط مینیمم چه زاویه‌ای با لبه راست کاغذ می‌سازد؟ فرض کنید صفحه آنقدر طویل باشد که چین به بالای صفحه نرسد.

۲۲. (الف) مثلث متساوی الساقینی در یک دایره بشعاع ۳، مطابق شکل ۱۸۰۴، محاط شده است. اگر زاویه 2α رأس بین 0 و $\pi/2$ باشد بیشترین و کمترین مقدار محیط مثلث را بیابید. استدلال خود را بتفصیل شرح دهید.

(ب) شعاع کوچکترین قرص مستدیری که بتواند هر مثلث متساوی الساقین با محیط مفروض L را بپوشاند چیست؟ استدلال خود را بتفصیل توضیح دهید.

۲۳. می‌خواهیم پنجره‌ای متشکل از یک مستطیل و یک نیمدایره در بالای آن بسازیم که قطر نیمدایره مساوی قاعده مستطیل باشد. بخش مستطیلی شکل از شیشه سفید بوده و قسمت نیمه مستدیر از شیشه رنگی باشد بطوری که در هر فوت مربع فقط باندازه نصف شیشه سفید نور عبور دهد. محیط کل پنجره برابر طول ثابت P است. ابعاد پنجره را برحسب P طوری تعیین کنید که حداکثر نور را از خود عبور دهد.

۲۴. یک تنه درخت بطول ۱۲ فوت بشکل مخروط مستدیر قائم ناقصی است باقطار ۴ فوت و $(4 + h)$ فوت در دو انتهای آن ($h \geq 0$). حجم بزرگترین استوانه مستدیر قائم هم محور با تنه درخت که می‌توان از آن برید را بصورت تابعی از h تعیین کنید.

۲۵. n عدد حقیقی $a_1, \dots, a_n$ داده شده‌اند. ثابت کنید که مجموع $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$ وقتی مینیمم است که x میانگین حسابی $a_1, \dots, a_n$ باشد.

۲۶. فرض کنید اگر $x > 0$ ، $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$ که در آن A ثابت مثبتی است. کوچکترین A بی را بیابید که برای هر $x > 0$ ، $f(x) \geq 24$.

۲۷. برای هر t حقیقی قرار دهید $f(x) = -x^3/3 + t^2x$ و فرض کنید $m(t)$ مینیمم $f(x)$ در بازه $0 \leq x \leq 1$ باشد. مقدار $m(t)$ را برای هر t در بازه $-1 \leq t \leq 1$ معین نمائید. بخاطر بیاورید که ممکن است مینیمم $f(x)$ برای بعضی مقادیر t در نقاط انتهائی بازه $0 \leq x \leq 1$ رخ دهد.

۲۸. فرض شده که عدد x در بازه $a \leq x \leq b$ ، که در آن $a > 0$ ، قرار دارد. می‌خواهیم x را به عدد دیگر t در $[a, b]$ طوری تقریب کنیم که خطای نسبی، یعنی $|t - x|/x$ ، کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد. فرض کنید $M(t)$ مقدار ماکزیمم $|t - x|/x$ را وقتی x از a تا b تغییر می‌کند نشان دهد. (الف) ثابت کنید که این ماکزیمم در یکی از نقاط انتهائی $x = a$ یا $x = b$ رخ می‌دهد. (ب) ثابت کنید $M(t)$ وقتی کوچکترین است که t میانگین توافقی a و b باشد، یعنی $1/t = (1/a + 1/b)/2$.

۲۲۰۴۰ مشتقات جزئی

این بخش مفهوم مشتق جزئی را توضیح داده و چند نماد و اصطلاح را به خواننده معرفی می‌کند. از نتایج این بخش در هیچ جای دیگر جلد یک استفاده نخواهیم کرد، لذا می‌توان

بدون از دست دادن پیوستگی آنها را حذف کرد یا مطالعه‌شان را بتعویق انداخت. در فصل ۱ تابع بعنوان تناظری تعریف شد که به هر شی در مجموعه X یک و فقط یک شی در مجموعه Y دیگر را مربوط می‌کند؛ مجموعه X قلمرو تابع خوانده شد. تا اینجا با توابعی سروکار داشته‌ایم که قلمروشان از نقاط محور x تشکیل می‌یافتند. این توابع را معمولاً توابع یک متغیر حقیقی می‌نامند. تعمیم بسیاری از ایده‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال به توابع دو یا چند متغیر حقیقی مشکل نیست.

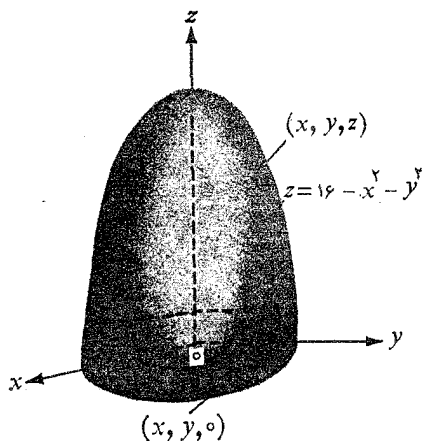
منظور از یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی یعنی تابعی که قلمروش X مجموعه‌ای از نقاط در صفحه xy باشد. اگر f چنین تابعی را نشان دهد مقدار آن در نقطه (x, y) عددی است حقیقی که $f(x, y)$ نوشته می‌شود. تصور اینکه این نوع تابع چگونه در یک مسئله فیزیکی ظاهر می‌شود آسان است. بعنوان مثال، فرض می‌کنیم یک صفحه فلزی تخت بشکل قرص مستدیری بشعاع ۴ سانتیمتر روی صفحه xy طوری قرار داده شده که مرکزش در مبدأ بوده و قسمی گرما می‌بیند که درجه حرارتش در هر نقطه (x, y) برابر $16 - x^2 - y^2$ است. سانیگراد می‌باشد. هرگاه درجه حرارت در (x, y) را با $f(x, y)$ نشان دهیم آنگاه f تابعی خواهد بود از دو متغیر که با معادله

$$(27.4) \quad f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$$

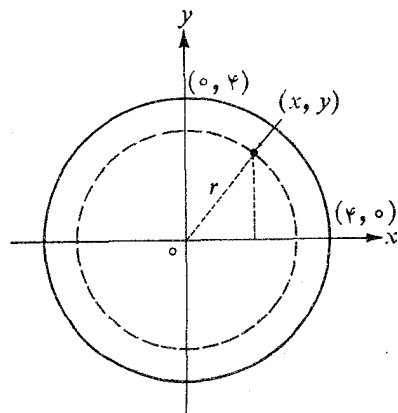
تعریف می‌شود. قلمرو این تابع مجموعه کلیه نقاطی مانند (x, y) است که فاصله‌شان تا مبدأ از ۴ تجاوز نمی‌کند. قضیه فیثاغورس به ما می‌گوید که همه نقاط (x, y) که در فاصله r از مبدأ قرار دارند در معادله

$$(28.4) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

صدق می‌کنند. بنابراین، قلمرو در این حالت از کلیه نقاطی مثل (x, y) تشکیل شده که در نامساوی $x^2 + y^2 \leq 16$ صدق می‌کنند. توجه کنید که درجه حرارت روی دایره توصیف



شکل ۲۵.۴ سطحی که با معادله $z = 16 - x^2 - y^2$ نمایش داده می‌شود.



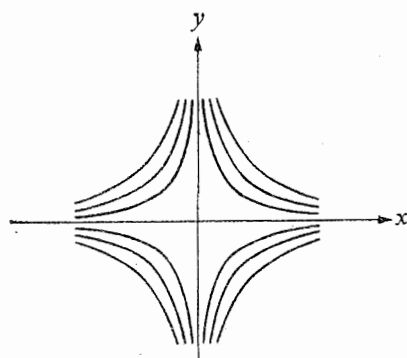
شکل ۱۹.۴ درجه حرارت بر هردایره بمركز مبدأ ثابت است.

شده با (۲۸.۴) برابر با $f(x, y) = 16 - x^2$ است. یعنی تابع f بر هر دایره بمرکز مبدأ ثابت می باشد. (ر.ک. شکل ۱۹.۴).

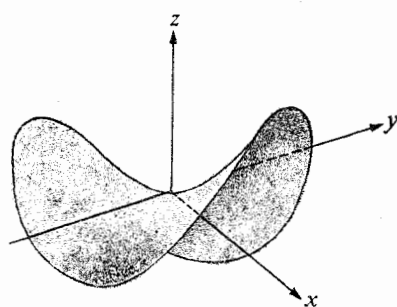
برای بدست آوردن شکل هندسی یک تابع دومتغیره دو روش مفید را شرح می دهیم. یکی از آنها بوسیله یک سطح در فضا صورت می گیرد. برای ساختن این سطح محور مختصات سومی (بنام محور z) را معرفی می کنیم؛ این محور از مبدأ گذشته و بر صفحه xy عمود است. بالای هر نقطه (x, y) نقطه (x, y, z) را رسم می کنیم که مختص z آن از معادله $z = f(x, y)$ بدست آمده است.

سطح مثال فوق در شکل ۲۰.۴ نموده شده است. چنانچه میزان الحارراه ای را در نقطه (x, y) روی صفحه قرار دهیم سطح بالای ستون جیوه با سطح ما درست در نقطه (x, y, z) تماس می یابد که در آن $z = f(x, y)$ ، البته در صورتی که فاصله های یکه بر محور z مناسب انتخاب شده باشند.

شکل متفاوت دیگری از یک تابع دومتغیره را می توان کاملاً در صفحه xy کشید. این روش روش خطوط پیرامنی است که توسط طراحان نقشه برای نمایش یک چشم انداز سه بعدی بوسیله یک رسم دو بعدی بکار می رود. فرض می کنیم سطح فوق با صفحات افقی مختلفی (موازی صفحه xy) قطع شده باشد. این صفحات سطح را در نقاطی چون (x, y, z) قطع می کنند که ارتفاع z آنها ثابت است. با تصویر این نقاط بر صفحه xy خانواده ای از خطوط پیرامنی یا منحنیهای تراز را بدست می آوریم. هر منحنی تراز از آن نقاط و فقط آن نقاط (x, y) تشکیل شده که مختصاتشان در معادله $f(x, y) = c$ ، که در آن c ارتفاع ثابت منحنی است، صدق می کنند. در مثال فوق منحنیهای تراز دایره متحد المרכזی هستند و منحنیهای بادرجه حرارت ثابت، یا یکدمائیها، را نشان می دهند که شبیه منحنیهای است که در نقشه های پیش بینی وضع هوا کشیده می شوند. مثالی دیگر از یک سطح و منحنیهای ترازش در شکل



(ب) منحنیهای تراز: $xy = c$



(الف) $z = xy$

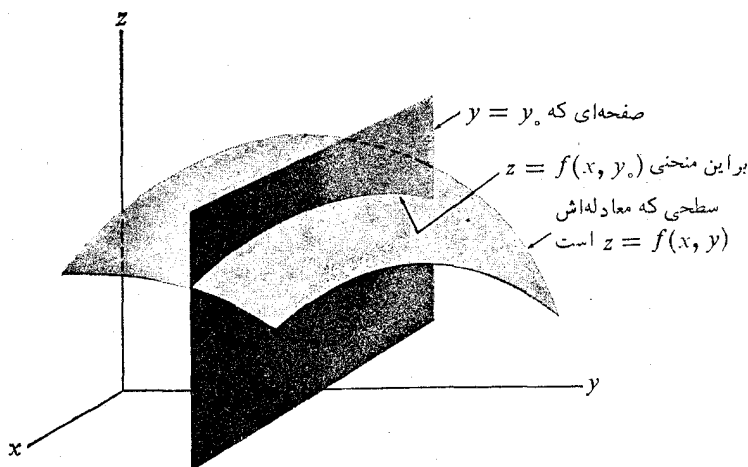
شکل ۲۱.۴ (الف) سطحی که معادله اش $z = xy$ است. (ب) منحنیهای

تراز متناظر منحنی ثابت xy .

۲۱.۴ نموده شده است. معادله سطح در این حالت $z = xy$ است. سطح «زینی شکل»

با نام سهمی گون هذلولوی شهرت یافته است.

خطوط پیرامنی در نقشه برداری اغلب برای هر ۱۰۰ فوت ارتفاع نشان داده می شوند. وقتی این منحنیها بهم نزدیک باشند ارتفاع با رفتن از یک منحنی به منحنی بعدی سرعت تغییر می کند؛ این در اطراف یک کوه با شیب تند اتفاق می افتد. وقتی خطوط پیرامنی از هم دور باشند تغییر ارتفاع کند خواهد بود. با توجه به وضع منحنیهای تراز یک چشم انداز می توانیم ایده ای کلی از پستی و بلندیهای آن بیابیم. اما برای بدست آوردن اطلاعات



شکل ۲۲.۴ منحنی اشتراک سطح $z = f(x, y)$ با صفحه $y = y_0$.

دقیقی از میزان تغییر ارتفاع بایستی سطح را بر حسب تابعی بیان کنیم که ایده‌های حساب دیفرانسیل در مورد آن قابل اعمال باشند.

میزان تغییر ارتفاع در نقطه (x_0, y_0) بستگی به جهتی دارد که از این نقطه دور می شویم. برای ساده بودن وضع فعلا فقط دو امتداد خاص موازی محورهای x و y را در نظر می گیریم. فرض کنید موضوع بررسی سطحی باشد که با معادله‌ای بشکل $z = f(x, y)$ توصیف می شود؛ این سطح را با صفحه‌ای عمود بر محور y مطابق شکل ۲۲.۴، قطع می کنیم. این صفحه از کلیه نقاط (x, y, z) ی در فضا تشکیل شده که مختص y آنها ثابت است، مثلا $y = y_0$. (معادله $y = y_0$ را معادله‌ای از این صفحه می نامند.) اشتراک این صفحه با سطح منحنی مسطحی است که کلیه نقاطش در معادله $z = f(x, y_0)$ صدق می کنند. روی این منحنی ارتفاع $f(x, y_0)$ فقط تابعی از x خواهد بود.

حال فرض کنید از نقطه (x_0, y_0) به نقطه $(x_0 + h, y_0)$ برویم. تغییر ارتفاع متناظر برابر $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$ می باشد. این پیشنهاد می کند که خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (29.4)$$

را تشکیل داده و h را به ۰ میل دهیم. اگر این خارج قسمت، وقتی $h \rightarrow 0$ ، به حد معینی نزدیک شود این حد را مشتق جزئی f نسبت به x در (x_0, y_0) می نامیم. برای نمایش مشتقات جزئی علامات متنوعی بکار می روند که

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, f'_x(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0), f_1(x_0, y_0), D_1 f(x_0, y_0)$$

از متداولترین آنها می باشند. زیرنویس ۱ در دو نماد آخر اشاره بدان می کند که در خارج قسمت تفاضلی (۲۹.۴) فقط مختص اول اجازه تغییر دارد. مثلاً داریم

$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

بهمین نحو، مشتق جزئی نسبت به y در (x_0, y_0) را با معادله

$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

تعریف می کنیم. نمادهای دیگر عبارتند از

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, f'_y(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), D_2 f(x_0, y_0).$$

هرگاه بنویسیم $z = f(x, y)$ آنگاه $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ نیز برای نمایش مشتقات جزئی بکار می روند.

مشتقگیری جزئی مفهوم تازه ای نیست. هرگاه تابع یک متغیره دیگر g را با معادله

$$g(x) = f(x, y_0)$$

تعریف کنیم آنگاه مشتق معمولی $g'(x_0)$ درست همان مشتق جزئی $f_1(x_0, y_0)$ است. از نظر هندسی، مشتق جزئی $f_1(x, y_0)$ نمایشگر شیب خط مماس در یک نقطه نمونه منحنیی است که در شکل ۲۲.۴ نشان داده شده است. بهمین ترتیب، وقتی x ثابت باشد، مثلاً $x = x_0$ ، معادله $z = f(x_0, y)$ منحنی اشتراک سطح را با صفحه ای توصیف می کند که معادله اش $x = x_0$ می باشد. مشتق جزئی $f_2(x_0, y)$ شیب خط مماس بر این منحنی را بدست می دهد. از این نکات درمی یابیم که برای محاسبه مشتق جزئی $f(x, y)$ نسبت به x می توانیم به y چنان نظر کنیم که گویی ثابت است و سپس قواعد معمولی حساب دیفرانسیل را بکار گیریم. لذا، مثلاً، اگر $z = x^2 - 16 - f(x, y)$ خواهیم داشت $f_1(x, y) = -2x$. بهمین نحو، اگر x را ثابت بگیریم، درمی یابیم که $f_2(x, y) = -2y$.

مثالی دیگر تابعی است که با

$$(30.4) \quad f(x, y) = x \sin y + y^2 \cos xy$$

داده می شود. مشتقات جزئی آن چنین اند:

$$f_1(x, y) = \sin y - y^2 \sin xy,$$

$$f_2(x, y) = x \cos y - xy^2 \sin xy + 2y \cos xy.$$

مشتقگیری جزئی فرایندی است که از تابع مفروض f توابع جدید $f_1 = \partial f / \partial x$ و $f_2 = \partial f / \partial y$ را می‌سازد. چون f_1 و f_2 نیز توابعی دومتغیره هستند می‌توانیم به مشتقات جزئی آنها نظر کنیم. اینها را مشتقات جزئی مرتبه دوم f می‌نامند که چنین نمایش داده می‌شوند:

$$f_{1,1} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{1,2} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f_{2,1} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_{2,2} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

توجه کنید که $f_{1,2}$ بمعنی $(f_1)_2$ است، یعنی مشتق جزئی f_1 نسبت به y . با نماد ∂ ، مرتبه مشتقات را با نوشتن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

می‌نمایانیم. این مشتق همیشه مساوی مشتق جزئی مخلوط دیگر، یعنی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

نیست. لکن دومشتق جزئی مخلوط تحت شرائط معینی که عموماً اغلب توابع ظاهر شده در عمل حائز آنها هستند مساوی می‌شوند. ما این شرائط را در جلد دوم مورد بحث قرار خواهیم داد.

درمورد مثال (۲۷.۴) درمی‌یابیم که مشتقات جزئی مرتبه دوم f با این دستورها داده می‌شوند:

$$f_{1,1}(x, y) = -2, f_{1,2}(x, y) = f_{2,1}(x, y) = 0, f_{2,2}(x, y) = -2.$$

درمثال (۳۰.۴) بدست می‌آوریم که

$$f_{1,1}(x, y) = -y^2 \cos xy,$$

$$f_{1,2}(x, y) = \cos y - xy^2 \cos xy - 2y^2 \sin xy,$$

$$f_{2,1}(x, y) = \cos y - xy^2 \cos xy - y^2 \sin xy - 2y^2 \sin xy$$

$$= f_{1,2}(x, y),$$

$$f_{2,2}(x, y) = -x \sin y - x^2 y^2 \cos xy - 2xy \sin xy - 2xy \sin xy$$

$$+ 2 \cos xy = -x \sin y - x^2 y^2 \cos xy$$

$$- 4xy \sin xy + 2 \cos xy.$$

بررسی مشروحتری از مشتقات جزئی در جلد دو صورت خواهد گرفت.

۲۳.۴۰ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۸ کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم را حساب کنید. در هر مورد تحقیق کنید که مشتقات جزئی مخلوط $f_{\lambda, \mu}(x, y)$ و $f_{\mu, \lambda}(x, y)$ برابرند.

$$f(x, y) = x \sin(x + y) \cdot ۲ \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \cdot ۱$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot ۴ \quad (y \neq 0) f(x, y) = xy + \frac{x}{y} \cdot ۳$$

$$f(x, y) = \sin[\cos(2x - 3y)] \cdot ۶ \quad f(x, y) = \sin(x^2y^3) \cdot ۵$$

$$(x \neq y) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \cdot ۷$$

$$(x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot ۸$$

$$z = (x - 2y)^2 \text{ (الف) که در صورتی } x(\partial z / \partial x) + y(\partial z / \partial y) = 2z \text{ نشان دهید} \cdot ۹$$

$$z = (x^4 + y^4)^{1/2} \text{ (ب)}$$

$$۱۰. \text{ اگر بازای } (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = xy / (x^2 + y^2)^2 \text{ نشان دهید که}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

رابطه بین انتگرالگیری و مشتقگیری

۱۰۵ مشتق انتگرال نامعین. اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

حال به ارتباط قابل توجهی که میان انتگرالگیری و مشتقگیری وجود دارد اشاره می‌کنیم. رابطه بین این دو فرایند بنوعی شبیه به ارتباطی است که «مجدور کردن» و «جذرگرفتن» باهم دارند. چنانچه عدد مثبتی را مربع کرده و سپس از آن جذر مثبت بگیریم دوباره همان عدد اول را خواهیم داشت. بهمین نحو، اگر از تابع پیوسته f انتگرال بگیریم، به تابع جدیدی (انتگرال نامعین f) دست می‌یابیم که، وقتی مشتق بگیریم، به تابع اولی f باز می‌گردیم. بعنوان مثال، هرگاه $x^2 = f(x)$ ، آنگاه انتگرال نامعین A از f را می‌توان با معادله

$$A(x) = \int_c^x f(t) dt = \int_c^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3}$$

تعریف کرد که در آن c ثابت است. با مشتقگیری درمی‌یابیم که $f(x) = x^2 = A'(x)$. این مثال یک نتیجه کلی را نشان می‌دهد، بنام اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، که می‌توان آن را این طور بیان کرد:

قضیه ۱۰۵. اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنیم f تابعی باشد که بر $[a, x]$ ، برای هر x در $[a, b]$ ، انتگرالپذیر است. همچنین c چنان باشد که $a \leq c \leq b$ و تابع جدید A این طور تعریف شود:

$$A(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

در اینصورت $A'(x)$ در هر نقطه x از بازه (a, b) ، که در آن f پیوسته است، وجود دارد و بازای چنین x ی داریم

$$(۱.۵) \quad A'(x) = f(x).$$

ابتدا دلیل هندسی می آوریم که توضیح می دهد چرا باید قضیه درست باشد؛ بعد برهان تحلیلی را عرضه خواهیم کرد.

انگیزه هندسی. شکل ۱.۵ نمودار تابعی مانند f را روی بازه $[a, b]$ نشان می دهد. در این شکل h مثبت بوده و

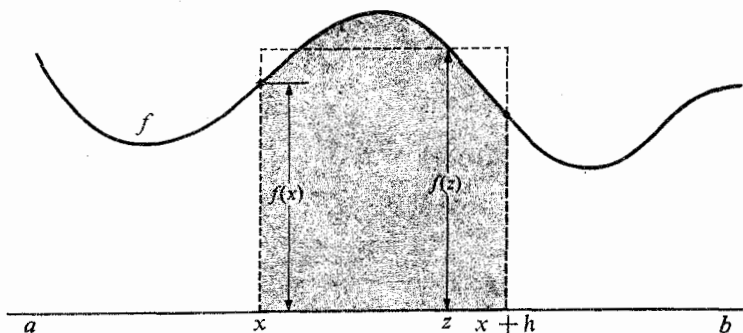
$$\int_x^{x+h} f(t) dt = \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = A(x+h) - A(x).$$

این f در سراسر بازه $[x, x+h]$ پیوسته است. پس، طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها، داریم

$$A(x+h) - A(x) = hf(z) \quad \text{که در آن } x \leq z \leq x+h.$$

از اینرو خواهیم داشت

$$(۲.۵) \quad \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(z),$$



شکل ۱.۵ انگیزه هندسی اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

و، چون $x \leq z \leq x+h$ ، درمی یابیم که وقتی h با مقادیر مثبت به ۰ میل کند $f(z) \rightarrow f(x)$. اگر h با مقادیر منفی به ۰ میل کند استدلال بهمین نحو خواهد بود. بنابراین، $A'(x)$ وجود دارد و برابر $f(x)$ است. در این استدلال فرض شده که تابع f در یکی از همسایگیهای نقطه x پیوسته است. لکن فرض قضیه به پیوستگی f در تنها نقطه x اشاره می کند. لذا، برای اثبات قضیه با این شرط ضعیفتر از روش دیگری استفاده می کنیم.

برهان تحلیلی. فرض کنیم x یک نقطه پیوستگی f باشد، x را ثابت می گیریم، و کسر

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

را تشکیل می‌دهیم. برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که این کسر، وقتی $h \rightarrow 0$ ، به حد $f(x)$ نزدیک می‌شود. صورت کسر عبارت است از

$$A(x+h) - A(x) = \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

اگر در آخرین انتگرال بجای $f(t)$ بنویسیم $f(x) + [f(t) - f(x)]$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_x^{x+h} f(x) dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \\ &= hf(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt, \end{aligned}$$

که از آن درمی‌یابیم که

$$(۳.۵) \quad \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt.$$

بنابراین، برای اتمام برهان (۱.۵) کافی است فقط نشان دهیم که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = 0.$$

در این قسمت از برهان است که از پیوستگی f در x استفاده می‌شود.

جمله دوم سمت راست (۳.۵) را با $G(h)$ نشان می‌دهیم. بایستی ثابت کنیم که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $G(h) \rightarrow 0$. با استفاده از تعریف حد باید نشان دهیم که بازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مثل $\delta > 0$ هست بطوری که

$$(۴.۵) \quad \text{هرگاه } |h| < \delta \text{ و } |G(h)| < \varepsilon \text{ آنگاه } 0 < |h| < \delta$$

پیوستگی f در x به ما می‌گوید که اگر ε داده شده باشد عدد مثبتی چون δ هست که

$$(۵.۵) \quad |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

بازای

$$(۶.۵) \quad x - \delta < t < x + \delta$$

برقرار می‌باشد. هرگاه h را بطوری اختیار کنیم که $0 < h < \delta$ آنگاه هر t در بازه $[x, x+h]$ در (۶.۵) صدق می‌کند و، در نتیجه، (۵.۵) بازای هر چنین t ای برقرار می‌شود. با استفاده از خاصیت $\int_x^{x+h} |g(t)| dt \leq \int_x^{x+h} g(t) dt$ که $g(t) = f(t) - f(x)$ ، ملاحظه می‌کنیم که نامساوی (۵.۵) به روابط

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

$$\leq \int_x^{x+h} \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{h\varepsilon}{2} < h\varepsilon$$

منجر می‌گردد. با تقسیم بر h می‌بینیم که (۴.۵)، برای $0 < h < \delta$ ، برقرار است. اگر $h < 0$ استدلال مشابهی ثابت می‌کند که (۴.۵)، وقتی $0 < |h| < \delta$ ، برقرار می‌باشد، و این برهان را تمام خواهد کرد.

۲.۵ قضیه مشتق صفر

چنانچه تابع f بر بازه (a, b) ثابت باشد مشتقش همه‌جا بر (a, b) صفر است. این مطلب را قبلاً از تعریف مشتق فوراً نتیجه گرفتیم. همچنین عکس آن را در قسمت (پ) قضیه ۷.۴ ثابت کردیم که در اینجا بشکل قضیه جداگانه‌ای دوباره بیان می‌داریم.

قضیه ۲.۵. قضیه مشتق صفر. هرگاه برای هر x در بازه I داشته باشیم $f'(x) = 0$ آنگاه f بر I ثابت است.

این قضیه وقتی با اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال تلفیق شود دومین قضیه اساسی بدست می‌آید که در بخش بعد توصیف خواهد شد.

۳.۵ توابع اولیه و دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

تعریف تابع اولیه. تابع P را یک اولیه (یا یک پادمشتق) تابع f بر بازه I نامند هرگاه مشتق P برابر f باشد، یعنی، برای هر x در I ، $P'(x) = f(x)$.

مثلاً تابع سینوس یک اولیه تابع کسینوس بر هر بازه است زیرا مشتق سینوس برابر کسینوس می‌باشد. بجای گفتن اولیه می‌گوئیم یک اولیه زیرا هرگاه P یک اولیه f باشد آنگاه $P + k$ ، برای هر ثابت k ، نیز چنین است. بعکس، تفاوت هر دو اولیه P و Q تابع f فقط می‌تواند در مقدار ثابتی باشد چونکه تفاضل $P - Q$ ، برای هر x در I ، دارای مشتق

$$P'(x) - Q'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

بوده و در نتیجه، بنا بر قضیه ۲.۵، $P - Q$ بر I ثابت می‌باشد.

اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما می‌گوید که همیشه با انتگرالگیری می‌توانیم یک اولیه تابع پیوسته‌ای را بسازیم. وقتی این مطلب را با این واقعیت که «دو اولیه یک تابع فقط در مقدار ثابتی متفاوتند» تلفیق کنیم دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نصیبمان خواهد شد.

قضیه ۳.۵. دوین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنیم f بر بازه I پیوسته بوده و P یکی از اولیه‌های آن بر I باشد. در اینصورت بازای هر c و هر x در I داریم

$$(۷.۵) \quad P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt.$$

برهان. قرار می‌دهیم $A(x) = \int_c^x f(t)dt$. از آنجا که f در هر x از I پیوسته است اولین قضیه اساسی به ما می‌گوید که بازای هر x در I ، $A'(x) = f(x)$. بعبارت دیگر، A یک اولیه f بر I است. چون دو اولیه f فقط می‌توانند در مقدار ثابتی با هم فرق کنند پس باید بازای ثابتی چون k داشته باشیم $A(x) - P(x) = k$. این دستور وقتی $x = c$ ، بدلیل $A(c) = 0$ ، ایجاب می‌کند که $P(c) = k$ - . پس $A(x) - P(x) = -P(c)$ که از آن (۷.۵) را بدست می‌آوریم.

قضیه ۳.۵ به ما راه یافتن هر اولیه P تابع پیوسته f را یاد می‌دهد. کافی است f را از نقطه ثابت c تا نقطه دلخواه x انتگره کرده و بر آن ثابت $P(c)$ را بیفزائیم تا $P(x)$ حاصل شود. لکن قدرت واقعی قضیه وقتی ظاهری می‌گردد که معادله (۷.۵) را بشکل زیر بنویسیم:

$$(۸.۵) \quad \int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c).$$

این رابطه باین شکل به ما می‌گوید که اگر اولیه P را بدانیم می‌توانیم فقط با تفریق مقدار انتگرال را حساب کنیم. مسئله ارزیابی یک انتگرال به مسئله دیگری بدل می‌شود - که یافتن اولیه P ی f است. مسئله دوم در عمل به مراتب از مسئله اول آسانتر است. هر دستور مشتقگیری، اگر در جهت عکس خوانده شود، اولیه تابع f ی را بدست می‌دهد و این، بنوبه خود، به یک دستور انتگرالگیری برای تابع منتهی می‌گردد. از دستوره‌های انتگرالگیری که تا بحال پیدا کرده‌ایم می‌توانیم دستوره‌های انتگرالگیری زیر را بعنوان نتایجی از دومین قضیه اساسی بدست آوریم.

مثال ۱. انتگرالگیری از توانهای گویا. دستور انتگرالگیری

$$(۹.۵) \quad \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

در بخش ۲۳.۱ مستقیماً از تعریف انتگرال ثابت شد. با استفاده از دومین قضیه اساسی می‌توان این نتیجه را دوباره بدست آورد و به نماهای گویا تعمیم داد. قبل از هر چیز ملاحظه می‌کنیم که تابع P تعریف شده با معادله

$$(۱۰.۵) \quad P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

بازای هر عدد صحیح نامنفی n دارای مشتق $P'(x) = x^n$ است. از آنجا که این مطلب

بازای هر x حقیقی معتبر است می توانیم (۸.۵) را بکار برده و برای همه بازه های $[a, b]$ بنویسیم

$$\int_a^b x^n dx = P(b) - P(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

این دستور، که بازای کلیه اعداد صحیح $n \geq 1$ ثابت شد، برای تمام عددهای صحیح منفی جز $n = -1$ (که بدلیل ظاهر شدن $n+1$ در مخرج مستثنی می شود) نیز برقرار است. برای اثبات (۹.۵) بازای n منفی کافی است نشان دهیم که (۱۰.۵) رابطه $P'(x) = x^n$ را وقتی n منفی و غیر از -1 باشد ایجاب می کند، و این مطلبی است که با آسانی با مشتقگیری از P بعنوان یک تابع گویا تحقیق می شود. البته وقتی n منفی است هیچیک از $P(x)$ و $P'(x)$ بازای $x=0$ تعریف نشده است، و زمانی که (۹.۵) را با n منفی بکار می بریم مهم آن است که بازه های $[a, b]$ ای را که حاوی نقطه $x=0$ اند مستثنی کنیم.

مثال ۳ بخش ۵.۴ ما این توان را می بخشد که (۹.۵) را به کلیه نماهای گویا (بجز -1) تعمیم دهیم مشروط بر آنکه انتگرالده بر بازه موردنظر $[a, b]$ همه جا تعریف شده باشد. مثلاً، اگر $0 < a < b$ و $n = -1/2$ ، درمی یابیم که

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_a^b x^{-1/2} dx = \left. \frac{x^{1/2}}{1/2} \right|_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

این مطلب قبلاً، با استفاده از اصول موضوع مساحت، ثابت شده بود. از این اصول در برهان فعلی هیچ استفاده ای نمی شود.

در فصل بعدی تابع توانانی کلی f را طوری تعریف می کنیم که بازای هر نمای حقیقی c ، $f(x) = x^c$. متوجه می شویم که این تابع دارای مشتق $f'(x) = cx^{c-1}$ بوده و، اگر $c \neq -1$ ، ازاولیه $P(x) = x^{c+1}/(c+1)$ برخوردار است. این ما را قادر می سازد تا (۹.۵) را به کلیه نماهای حقیقی جز -1 تعمیم دهیم. توجه کنید که هیچ تابعی به شکل $P'(x) = x^n$ نیست که با مشتقگیری از آن بشود به $P'(x) = 1/x$ رسید. معیناً تابعی چون P هست که مشتقش $P'(x) = 1/x$ باشد. برای نمایش چنین تابع فقط کافی است انتگرال نامعین مناسبی را بنویسیم، مثلاً،

$$P(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

این انتگرال، بدلیل یکنوایی انتگرالده، وجود دارد. تابعی که باین طریق تعریف می شود لگاریتم (به بیان دقیقتر، لگاریتم طبیعی) نام دارد. خواص آن بطور اصولی در فصل ۶ ظاهر می شوند.

مثال ۴. انتگرالگیری از سینوس و کسینوس. از آنجا که مشتق سینوس کسینوس و مشتق کسینوس منهای سینوس است دومین قضیه اساسی دستورهای زیر را نیز به ما خواهد داد:

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a,$$

$$\int_a^b \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

این دستورها در فصل ۲ نیز مستقیماً بوسیلهٔ تعریف انتگرال ثابت شده بودند.

نمونه‌های دیگری از دستوره‌های انتگرال‌گیری را می‌توان از مثالهای ۱ و ۲، با اختیار مجموعه‌های متناهی از جملات Ax^n ، $B \sin x$ و $C \cos x$ ، که در آنها A و B و C ثابت هستند، بدست آورد.

۴.۵ خواصی از یک تابع که از خواص مشتقش نتیجه می‌شوند

اگر تابع f بر بازهٔ باز I مشتق پیوسته داشته باشد دومین قضیهٔ اساسی می‌گوید که بازای هر دو نقطهٔ x و c در I

$$(11.5) \quad f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) \, dt.$$

این دستور، که مبین f بر حسب مشتقش f' است، به ما این نیرو را می‌دهد که خواصی از یک تابع را از خواص مشتق آن نتیجه بگیریم. با آنکه خواص زیر بیشتر در فصل ۴ مطرح بوده‌اند اما دیدن اینکه چگونه می‌شود آنها را بعنوان نتایج ساده‌ای از معادلهٔ (۱۱.۵) بدست آورد ممکن است جالب باشد.

فرض کنیم f' بر I پیوسته و نامنفی باشد. هرگاه $x > c$ آنگاه $\int_c^x f'(t) \, dt \geq 0$ و در نتیجه $f(x) \geq f(c)$. عبارت دیگر، اگر مشتق بر I پیوسته و نامنفی باشد، تابع بر I صعودی خواهد بود.

در قضیهٔ ۹.۲ ثابت کردیم که انتگرال نامعین یک تابع صعودی محدب است. بنا بر این، اگر f' بر I پیوسته و صعودی باشد، معادلهٔ (۱۱.۵) نشان می‌دهد که f بر I محدب است. بهمین نحو، f بر آن بازه‌هایی که f' پیوسته و نزولی است مقعر خواهد بود.

۵.۵ تمرینات

در هریک از تمرینات ۱ تا ۱۰ یکی از اولیه‌های f را بیابید، یعنی تابعی مانند P را پیدا کنید که $f(x) = P'(x)$ ، و با استفاده از دومین قضیهٔ اساسی، انتگرال $\int_a^b f(x) \, dx$ را محاسبه نمائید.

$$f(x) = 5x^3 \cdot 1 \quad f(x) = 4x^4 - 12x \cdot 2$$

$$f(x) = (x+1)(x^2-2) \cdot 3 \quad x \neq 0, f(x) = \frac{x^4 + x - 3}{x^3} \cdot 4$$

$$x > 0, f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{x/2} \quad ۶ \quad x > 0, f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 \quad ۵$$

$$x > 0, f(x) = 2x^{1/3} - x^{-1/3} \quad ۸ \quad x > 0, f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{x}} \quad ۷$$

$$f(x) = x^{2/3} - 5\cos x \quad ۱۰ \quad f(x) = 3\sin x + 2x^5 \quad ۹$$

۱۱. ثابت کنید که چندجمله‌ای f که مشتقش با دستور $f'(x) = 1/x$ داده شود وجود ندارد.

۱۲. نشان دهید که بازای هر x حقیقی $\int_0^x |t| dt = x|x|/2$

۱۳. نشان دهید که

$$\int_0^x (t + |t|)^2 dt = \frac{2x^2}{3} (x + |x|) \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی}$$

۱۴. تابع f همه‌جا پیوسته است و بازای هر x در معادله

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

صدق می‌کند. $f(\pi/4)$ و $f'(\pi/4)$ را حساب کنید.

۱۵. تابع f و مقدار ثابت c را چنان بیابید که

$$\int_c^x f(t) dt = \cos x - \frac{1}{2} \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی}$$

۱۶. تابع f و مقدار ثابت c را طوری بیابید که

$$\int_c^x t f(t) dt = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2} x^2 \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی}$$

۱۷. تابعی مانند f وجود دارد که در هر x حقیقی تعریف شده و پیوسته است و در معادله‌ای بشکل

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 t^2 f(t) dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$$

صدق می‌کند که در آن c ثابت است. برای $f(x)$ دستور صریحی یافته و مقدار ثابت c را پیدا کنید.

۱۸. تابع f در هر x حقیقی با دستور

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin t}{2 + t^2} dt$$

تعریف شده است. بدون محاسبه این انتگرال چندجمله‌ای درجه دوم

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

را طوری بیابید که $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ و $p''(0) = f''(0)$

۱۹. تابع g ، که همه‌جا پیوسته است، داده شده بطوری که $g(1) = 5$ و $\int_0^1 g(t) dt = 2$

فرض کنید $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt / 2$ ثابت کنید که

$$f'(x) = x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x t g(t) dt,$$

سپس $f''(1)$ و $f'''(1)$ را محاسبه نماید.

۲۵. بدون محاسبه انتگرالهای نامعین زیر $f'(x)$ را در هر حالت که $f(x)$ یکی از این مقادیر است بیابید:

$$\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt \quad (\text{الف}) \quad \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt \quad (\text{ب})$$

$$\int_{x^2}^{x^3} (1+t^2)^{-3} dt \quad (\text{پ})$$

۲۱. اگر f با دستور

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^6}{1+t^4} dt$$

تعریف شده باشد $f'(x)$ را بدون محاسبه انتگرال حساب کنید.

۲۲. اگر f در هر حالت پیوسته بوده و در دستور داده شده برای هر $x \geq 0$ صدق کند $f(2)$ را محاسبه نماید.

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x) \quad (\text{پ}) \quad \int_0^x f(t) dt = x^2(1+x) \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x \quad (\text{ت}) \quad \int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x) \quad (\text{ب})$$

۲۳. قاعده جسمی مجموعه عرضی تابع نامنفی f روی بازه $[0, a]$ است. کلیه مقاطع عرضی عمود بر این بازه مربع هستند. حجم جسم برای هر $a \geq 0$ مساوی

$$a^3 - 2a \cos a + (2 - a^2) \sin a$$

می باشد. f را بر $[0, a]$ پیوسته گرفته و $f(a)$ را حساب کنید.

۲۴. دستگاهی یک جسم را در امتداد خطی مستقیم بجلو می راند. این دستگاه طوری تعبیه شده که تغییر مکان جسم از نقطه اولیه ۰ واقع بر خط در لحظه t با دستور $f(t) = t^2/2 + 2t \sin t$ داده می شود. دستگاه تا زمان $t = \pi$ بطور کامل کار می کند تا اینکه در این لحظه اشکال غیر منتظره ای در کارش پیدا می شود. از این به بعد جسم با سرعت ثابت (سرعتی که در لحظه $t = \pi$ بدست آورده) به حرکت خود ادامه می دهد. این مقادیر را حساب کنید: (الف) سرعت آن در لحظه $t = \pi$ ؛ (ب) شتاب آن در لحظه $t = \pi/2$ ؛ (پ) شتاب در زمان $t = 3\pi/2$ ؛ (ت) تغییر مکانش از ۰ در لحظه $t = 5\pi/2$ ؛ (ث) لحظه $t > \pi$ را که جسم به نقطه اولیه ۰ برمی گردد بیابید یا اینکه ثابت کنید هرگز به ۰ باز نخواهد گشت.

۲۵. جسمی در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. جسم در لحظه t در فاصله $f(t)$ از مبدأ است. وقتی $0 \leq t \leq 1$ جای آن توسط

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 + 2 \sin \pi x \cos \pi x}{1 + x^2} dx$$

مشخص می‌شود. (لازم نیست این انتگرال را حساب کنید.) وقتی $t \geq 1$ جسم با شتاب ثابت (شتابی که در لحظه $t = 1$ بدست آورده) حرکت می‌کند. این مقادیر را محاسبه نمایید: (الف) شتاب آن در لحظه $t = 2$ ؛ (ب) سرعتش وقتی $t = 1$ ؛ (پ) سرعتش در زمان $t > 1$ ؛ (ت) تفاضل $f(t) - f(1)$ وقتی $t > 1$.

۲۶. در هر یک از حالات زیر تابع f را طوری بیابید که دارای مشتق دوم پیوسته f'' بوده و در کلیه شرایط داده شده صدق کند یا توضیح دهید چرا این تابع نمی‌تواند وجود داشته باشد.

(الف) بازای هر x ، $f''(x) > 0$ ، $f'(0) = 1$ ، $f'(1) = 0$.

(ب) بازای هر x ، $f''(x) > 0$ ، $f'(0) = 1$ ، $f'(1) = 3$.

(پ) بازای هر x ، $f''(x) > 0$ ، $f'(0) = 1$.

بازای هر $x > 0$ ، $f(x) \leq 100$.

(ت) بازای هر x ، $f''(x) > 0$ ، $f'(0) = 1$.

بازای هر $x < 0$ ، $f(x) \leq 100$.

۲۷. جسمی در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند و در لحظه t فاصله‌اش از مبدأ $f(t)$ است. حرکت را با سرعت اولیه $f'(0) = 0$ آغاز کرده و دارای شتاب پیوسته $f''(t) \geq 6$ در بازه $0 \leq t \leq 1$ می‌باشد. ثابت کنید بازای هر t در بازه‌ای چون $[a, b]$ ، که $0 \leq a < b \leq 1$ و $b - a = 1/2$ ، سرعت $f'(t)$ از ۳ ناکمتر است.

۲۸. تابع f چنان داده شده که انتگرال $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ بازای هر x در بازه $[a, b]$ وجود دارد. فرض کنید c نقطه‌ای در بازه (a, b) باشد. ده گزاره زیر را در باب

	α	β	γ	δ	ϵ
a					
b					
c					
d					
e					

در جدولی شبیه به این، چنانچه یک گزاره با حرف لاتین گزاره‌ای با حرف یونانی را همیشه ایجاب کرد، در مربع مربوط به آن دو علامت T را قرار دهید. مربعهای دیگر را خالی بگذارید. مثلاً، اگر (a) گزاره (α) را نتیجه می‌دهد، علامت T را در مربع گوشه چپ بالائی بگذارید، و مانند اینها.

این f و این A در نظر بگیرید:

$f(a)$ در c پیوسته است.	$A(\alpha)$ در c پیوسته است.
$f(b)$ در c ناپیوسته است.	$A(\beta)$ در c ناپیوسته است.
$f(c)$ بر (a, b) صعودی است.	$A(\gamma)$ بر (a, b) محدب است.
$f'(c)$ وجود دارد.	$A'(c)$ وجود دارد.
$f'(c)$ در c پیوسته است.	$A'(\epsilon)$ در c پیوسته است.

۶.۵ نماد لایب نیتز برای اولیه‌ها

حال بازمی‌گردیم تا رابطه میان انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری را بیشتر مطالعه کنیم. ابتدا نمادی را که توسط لایب نیتز معرفی شد مطرح می‌کنیم.

ما اولیه P ی تابع f را چنان تابعی تعریف کرده‌ایم که $P'(x) = f(x)$. اگر f بر بازه‌ای پیوسته باشد یکی از اولیه‌ها با دستور

$$P(x) = \int_c^x f(t) dt$$

داده می‌شود و تفاوت سایر اولیه‌ها با این فقط می‌تواند در مقدار ثابتی باشد. لایب نیتز علامت $\int f(x) dx$ را برای نمایش یک اولیه کلی f بکار برد. در این نمادگذاری معادله‌ای بصورت

$$(12.5) \quad \int f(x) dx = P(x) + C$$

صرفاً طریقه دیگری است برای نوشتن $P'(x) = f(x)$. مثلاً، چون مشتق سینوس کسینوس است، می‌توانیم بنویسیم

$$(13.5) \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

همچنین، از اینکه مشتق $x^{n+1}/(n+1)$ برابر x^n است، بازای هر توان گویای $n \neq -1$ می‌توانیم بنویسیم

$$(14.5) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

علامت C نمایشگر ثابت دلخواهی است، لذا هر یک از معادلات (۱۳.۵) و (۱۴.۵) حقیقتاً حکمی درباره تمام مجموعه‌ای از توابع است.

علامت $\int f(x) dx$ با علامت انتگرال‌گیری $\int_a^b f(x) dx$ با وجود تشابه ظاهری فرق مفهوم دارد. این علامات از دو فرایند کاملاً متفاوت مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ناشی می‌شوند. لکن، چون دوفرایند بوسیله قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بهم

مرتبطند، میان دو علامت روابط متناظری وجود خواهند داشت.

اولین قضیه اساسی چنین می‌گوید که هر انتگرال نامعین f یک اولیه f نیز هست. بنابراین، $P(x)$ در معادله (۱۲.۵) را می‌شود بازای حدی پائینی چون c با $\int_c^x f(t) dt$ عوض کرد و (۱۲.۵) را این طور نوشت:

$$(15.5) \quad \int f(x) dx = \int_c^x f(t) dt + C.$$

این یعنی که می‌توانیم علامت $\int f(x) dx$ را نمایشگر انتگرال نامعینی از f به علاوه مقداری ثابت بدانیم.

دومین قضیه اساسی به ما می‌گوید که بازای هر اولیه P از f و هر ثابت C داریم

$$\int_a^b f(x) dx = [P(x) + C] \Big|_a^b.$$

اگر $P(x) + C$ را با $\int f(x) dx$ عوض کنیم این دستور را می‌توانیم بشکل

$$(16.5) \quad \int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_a^b$$

بنویسیم. دو دستور (۱۵.۵) و (۱۶.۵) را می‌شود بعنوان صورت علامتی اولین و دومین قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال منظور داشت.

بسیاری از کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال علامت $\int f(x) dx$ را، بدلیل استفاده تاریخی طولانی از آن در این معنی، یک «انتگرال نامعین» می‌دانند تا یک اولیه یا پاد مشتق. این تا حدودی بوسیله معادله (۱۵.۵) قابل توجیه است که به ما می‌گوید که علامت $\int f(x) dx$ ، قطع نظر از ثابت جمعپذیر C ، یک انتگرال نامعین f می‌باشد. به همین دلیل است که بسیاری از کتب راهنمای جداول ریاضی شامل جدولهای مبسوطی از دستورها هستند تحت عنوان «جداول انتگرالهای نامعین» که فی الواقع جدولهایی از اولیه‌ها می‌باشند. برای آنکه علامت $\int f(x) dx$ را از $\int_a^b f(x) dx$ تمیز دهند دومی را یک انتگرال معین می‌خوانند. از آنجا که دومین قضیه اساسی مسئله انتگرالگیری را به مشکل یافتن اولیه بدل می‌کند اصطلاح «فن انتگرالگیری» به هر روش اصولی برای پیدا کردن اولیه‌ها اطلاق خواهد شد. این اصطلاح در نوشتجات ریاضی بطور وسیعی بکار می‌رود و در این کتاب نیز پذیرفته می‌شود. لذا، مثلاً، وقتی از کسی خواسته می‌شود که «انتگرال $\int f(x) dx$ را بگیرد» منظور این است که کلیترین اولیه f را از او خواسته‌ایم.

برای ساختن جداول انتگرالهای نامعین سه روش عمده وجود دارد، و تسلط به آنها بر هر کس که طالب معرفت عملی خوبی از حساب دیفرانسیل و انتگرال باشد واجب است. اینها عبارتند از (۱) انتگرالگیری بوسیله جانشانی، روشی است مبتنی بر قاعده زنجیره‌ای که در بخش بعد تشریح می‌شود؛ (۲) انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء، روشی است بر مبنای دستور مشتقگیری از حاصلضرب که در بخش ۹.۵ وصف می‌شود؛ و (۳) انتگرالگیری بوسیله کسرهای جزئی، فنی است جبری که در انتهای فصل ۶ مطرح می‌گردد. این فنون نه تنها نحوه

تشکیل جداول انتگرالهای نامعین را نشان می‌دهند بلکه به ما چگونگی تبدیل برخی از دستورها به شکلهای اساسی مندرج در جداول را نیز بازگو می‌نمایند.

۷.۵ انتگرالگیری بوسیله جانشانی

فرض کنیم Q ترکیبی از دو تابع P و g باشد، مثلاً بازای هر x در بازه‌ای چون $Q(x) = P[g(x)]$ ، I ، اگر مشتق P را بدانیم، مثلاً $P'(x) = f(x)$ ، قاعده زنجیره‌ای به ما می‌گوید که مشتق Q با دستور $Q'(x) = P'[g(x)]g'(x)$ داده می‌شود. چون $P' = f$ این مبین آن است که $Q'(x) = f[g(x)]g'(x)$ بعبارت دیگر،

$$(۱۷.۵) \quad P'(x) = f(x) \text{ ایجاب می‌کند که } Q'(x) = f[g(x)]g'(x)$$

این عبارت را می‌شود با نماد لایب نیتز این طور نوشت: هرگاه دستور انتگرالگیری

$$(۱۸.۵) \quad \int f(x) dx = P(x) + C$$

را داشته باشیم آنگاه دستور کلیتر

$$(۱۹.۵) \quad \int f[g(x)]g'(x) dx = P[g(x)] + C$$

را نیز خواهیم داشت.

بعنوان مثال، هرگاه $f(x) = \cos x$ ، آنگاه (۱۸.۵) بازای $P(x) = \sin x$ برقرار است، پس (۱۹.۵) بصورت

$$(۲۰.۵) \quad \int \cos g(x) \cdot g'(x) dx = \sin g(x) + C$$

درمی‌آید. بویژه، اگر $g(x) = x^3$ ، رابطه بالا چنین به ما می‌دهد:

$$\int \cos x^3 \cdot 3x^2 dx = \sin x^3 + C,$$

نتیجه‌ای که، چون مشتق $\sin x^3$ برابر $3x^2 \cos x^3$ است، مستقیماً با آسانی قابل تحقیق می‌باشد.

حال توجه می‌کنیم که دستور کلی (۱۹.۵) با فرایند مکانیکی ساده‌ای به (۱۸.۵) مربوط می‌شود. فرض کنید $g(x)$ را در (۱۹.۵) همه‌جا با علامت جدید u و $g'(x)$ را با du/dx (نماد لایب نیتز برای مشتقها) عوض کرده باشیم. در اینصورت (۱۹.۵) چنین می‌شود:

$$\int f(u) \frac{du}{dx} dx = P(u) + C.$$

در این مرحله قویاً اغوا می‌شویم که ترکیب $(du/dx) dx$ را با du عوض کنیم. اگر

چنین کنیم آخرین دستور بصورت

$$(۲۱.۵) \quad \int f(u) du = P(u) + C$$

درمی آید. توجه کنید که این عیناً همان (۱۸.۵) است جز آنکه همه جا بجای x علامت u ظاهر شده است. بعبارت دیگر، هر دستور انتگرالگیری نظیر (۱۸.۵) را می توان فقط با جانشانی علامات به دستور انتگرالگیری کلیتری بدل ساخت. ما x موجود در (۱۸.۵) را با علامت جدید u عوض می کنیم تا (۲۱.۵) بدست آید و سپس u را بعنوان تابع جدیدی از x ، مثلاً $u = g(x)$ ، در نظر می آوریم. بعد علامت du را با ترکیب $g'(x) dx$ عوض کرده و معادله (۲۱.۵) را به دستور کلی (۱۹.۵) بدل می نماییم.

بعنوان مثال، اگر در دستور $\int \cos x dx = \sin x + C$ بجای x علامت u را بگذاریم

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

را بدست می آوریم. در دستور اخیر می توان u را با $g(x)$ و du را با $g'(x) dx$ عوض کرد و به یک دستور صحیح انتگرالگیری، یعنی (۲۰.۵)، رسید.

وقتی این فرایند مکانیکی در جهت عکس صورت گیرد روش انتگرالگیری بوسیله جانشانی حاصل می شود. هدف این روش آن است که یک انتگرال با انتگرالده پیچیده، نظیر $\int 3x^2 \cos x^3 dx$ ، را به انتگرال آشناتری، مثل $\int \cos u du$ ، بدل کند. این روش هر وقت که انتگرال اصلی را بشود بشکل

$$\int f[g(x)] g'(x) dx$$

نوشت قابل اجرا است زیرا جانشانی

$$u = g(x), du = g'(x) dx$$

این انتگرال را به $\int f(u) du$ بدل می کند. چنانچه به محاسبه $\int f(u) du$ تسوئق یابیم یک اولیه، مثل $P(u)$ ، را بدست می آوریم و سپس می توانیم از تعویض u با $g(x)$ در دستور مربوط به $P(u)$ انتگرال اصلی را حساب کنیم.

خواننده باید متوجه باشد که ما برای خود علامات du و dx معینی قائل نشده ایم. اینها را بعنوان ابزارهای صوری محضی بکار می بریم که در انجام اعمال ریاضی بطریقه ای مکانیکی به ما یاری می دهند. هر بار که از این فرایند استفاده می کنیم در واقع گزاره (۱۷.۵) را بکار می بریم.

موفقیت در این روش به قدرت شخص در تعیین اینکه در آغاز چه قسمتی از انتگرالده باید با علامت u عوض بشود بستگی دارد، و این توانائی از طریق ممارست بسیار در حل مثالهای خاص حاصل می گردد. امثله زیر نحوه انجام این روش را در عمل نشان می دهند.

مثال ۱. انتگرال $\int x^3 \cos x^4 dx$ را بگیرید.

حل. بخاطر داشته باشید که ما سعی داریم $x^3 \cos x^4$ را با اختیار f و g ی مناسبی بشکل $f[g(x)] g'(x)$ بنویسیم. چون $\cos x^4$ یک ترکیب است این به ما تکلیف می‌کند که $f(x) = \cos x$ و $g(x) = x^4$ را اختیار کنیم بطوری که $\cos x^4$ بصورت $f[g(x)]$ درآید. این انتخاب g نتیجه می‌دهد که $g'(x) = 4x^3$ ، و لذا $f[g(x)] g'(x) = (\cos x^4)(4x^3)$ مشکل سازه اضافی ۴ را می‌توان با ضرب انتگرالده در ۴ و تقسیمش بر این عدد بآسانی رفع کرد. لذا داریم

$$x^3 \cos x^4 = \frac{1}{4} (\cos x^4) (4x^3) = \frac{1}{4} f[g(x)] g'(x).$$

حال جانشانی $u = g(x) = x^4$ ، $du = g'(x) dx = 4x^3 dx$ را انجام داده و بدست می‌آوریم که

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4} \int f(u) du = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C.$$

چنانچه در آخرین نتیجه u را با x^4 عوض کنیم دستور

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4} \sin x^4 + C$$

را خواهیم داشت که می‌توان درستی آن را مستقیماً بوسیله مشتقگیری تحقیق کرد. شخص پس از کمی تمرین می‌تواند برخی از مراحل فوق را بطور ذهنی انجام دهد و تمام محاسبات را می‌شود این‌طور خلاصه تر کرد: قرار می‌دهیم $u = x^4$. پس $du = 4x^3 dx$ و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos x^4 dx &= \frac{1}{4} \int (\cos x^4) (4x^3 dx) = \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin x^4 + C. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در این مثال روش جانشانی از اینجهت کارا است که نمای سازه x^3 از توان x که در $\cos x^4$ ظاهر شده یکی کمتر است.

مثال ۲. انتگرال $\int \cos^2 x \sin x dx$ را بگیرید.

حل. قرار می‌دهیم $u = \cos x$. پس $du = -\sin x dx$ و خواهیم داشت

$$\int \cos^2 x \sin x dx = - \int (\cos x)^2 (-\sin x dx) = - \int u^2 du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

در اینجا نیز نتیجه نهائی با سانی بوسیله مشتقگیری تحقیق می شود.

مثال ۳. انتگرال $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ را بگیرد.

حل. قرار می دهیم $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. پس $du = (x^{-1/2}/2)dx$ یا $dx/\sqrt{x} = 2du$ لذا

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin u du = -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

مثال ۴. انتگرال $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$ را بگیرد.

حل. قرار می دهیم $u = 1+x^2$. در این صورت $du = 2x dx$ پس $x dx = du/2$ و خواهیم داشت

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = u^{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

شکی نیست که روش جانمایی در مورد انتگرالهای معین نیز قابل اجرا است. مثلاً، برای محاسبه انتگرال معین $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$ ، ابتدا انتگرال نامعین را، بصورتی که در مثال ۲ توضیح شد، مشخص می کنیم و بعد، با استفاده از دومین قضیه اساسی، می نویسیم

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} \left(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0 \right) = \frac{1}{3}.$$

گاهی مطلوب آن است که دومین قضیه اساسی را مستقیماً در مورد انتگرالی که بر حسب u بیان شده اعمال کنیم. این را می توان با استفاده از حدود انتگرالگیری جدید انجام داد. نحوه عمل را در یک مثال خاص نشان داده و سپس این فرایند را با قضیه ای کلی توجیه خواهیم کرد.

مثال ۵. انتگرال $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ را حساب کنید.

حل. قرار می دهیم $u = x^2 + 2x + 3$. در این صورت $du = (2x+2)dx$ پس

$$\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

حال با توجه به اینکه وقتی $x = 2$ ، $u = 11$ و، وقتی $x = 3$ ، $u = 18$ ، حدود انتگرالگیری جدیدی را بدست می آوریم. سپس می نویسیم

$$\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2} \int_{11}^{18} u^{-1/2} du = \sqrt{u} \Big|_{11}^{18} = \sqrt{18} - \sqrt{11}.$$

همین نتیجه با بیان همه چیز بر حسب x بدست می آید. یعنی داریم

$$\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \sqrt{x^2+2x+3} \Big|_2^3 = \sqrt{18} - \sqrt{11}.$$

حال قضیه‌ای کلی را ثابت می‌کنیم که فرایند بکار رفته در مثال ۵ را توجیه می‌کند.

قضیه ۴.۵. قضیه جانشانی برای انتگرالها. فرض کنیم g بر بازه I مشتق پیوسته داشته باشد. همچنین J مجموعه‌ی مقادیری باشد که توسط g بر I گرفته می‌شود و f بر J پیوسته فرض شود. دوانصورت بازای هر x و هر c در I داریم

$$(22.5) \quad \int_c^x f[g(t)] g'(t) dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u) du.$$

برهان. قرار می‌دهیم $a = g(c)$ و دو تابع جدید P و Q را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } x \in J, P(x) = \int_a^x f(u) du; \text{ اگر } x \in I, Q(x) = \int_c^x f[g(t)] g'(t) dt.$$

چون P و Q انتگرالهای نامعین توابعی پیوسته‌اند پس دارای مشتقاتی هستند که بادستورهای

$$P'(x) = f(x), Q'(x) = f[g(x)] g'(x)$$

داده می‌شوند. حال فرض می‌کنیم R تابع مرکب $R(x) = P[g(x)]$ باشد. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای درمی‌یابیم که

$$R'(x) = P'[g(x)] g'(x) = f[g(x)] g'(x) = Q'(x).$$

چنانچه دومین قضیه اساسی را دوبار بکار ببریم بدست می‌آوریم که

$$\int_{g(c)}^{g(x)} f(u) du = \int_{g(c)}^{g(x)} P'(u) du = P[g(x)] - P[g(c)] = R(x) - R(c)$$

و

$$\int_c^x f[g(t)] g'(t) dt = \int_c^x Q'(t) dt = \int_c^x R'(t) dt = R(x) - R(c).$$

این نشان می‌دهد که دو انتگرال مذکور در (۲۲.۵) برابرند.

۸.۵ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۲۰ انتگرالها را بوسیله روش جانشانی حساب کنید.

۱. $\int \sqrt{2x+1} dx$. ۱
۲. $\int x\sqrt{1+3x} dx$. ۲
۳. $\int x^2\sqrt{x+1} dx$. ۳
۴. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x dx}{\sqrt{2-3x}}$. ۴
۵. $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x+2)^2}$. ۵
۶. $\int \sin^2 x dx$. ۶
۷. $\int z(z-1)^{1/2} dz$. ۷
۸. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$. ۸
۹. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sqrt{4 - \sin 2x} dx$. ۹
۱۰. $\int \frac{\sin x dx}{(3 + \cos x)^2}$. ۱۰
۱۱. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$. ۱۱
۱۲. $\int_2^8 \frac{\sin \sqrt{x+1} dx}{\sqrt{x+1}}$. ۱۲
۱۳. $\int x^5 dx / \sqrt{1-x^6}$. ۱۳
۱۴. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}}$. ۱۴
۱۵. $\int t(1+t)^{1/2} dt$. ۱۵
۱۶. $\int (x^2+1)^{-3/2} dx$. ۱۶
۱۷. $\int x^2(8x^2+27)^{2/3} dx$. ۱۷
۱۸. $\int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{(\sin x - \cos x)^{1/2}}$. ۱۸
۱۹. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{(1+x^2)^3}}$. ۱۹
۲۰. $\int \frac{(x^2+1-2x)^{1/2} dx}{1-x}$. ۲۰

۲۱. دستورهای قضایای ۱۸.۱ و ۱۹.۱ را با روش جانشانی نتیجه بگیرید.

۲۲. فرض کنید

$$F(x, a) = \int_0^x \frac{t^p}{(t^q + a^q)^q} dt$$

که در آن $a > 0$ و p و q اعداد صحیح مثبتی هستند. نشان دهید که

$$F(x, a) = a^{p+1-2q} F(x/a, 1).$$

۲۳. نشان دهید که

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} \quad x > 0 \text{ اگر}$$

۲۴. چنانچه m و n اعداد صحیح مثبتی باشند نشان دهید که

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

۲۵. اگر m عدد صحیح مثبتی باشد نشان دهید که

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^m x dx = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx.$$

۲۶. (الف) نشان دهید که

$$[u = \pi - x: \text{داهنمائی}] \cdot \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف) دستور

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

را نتیجه بگیرد.

۲۷. نشان دهید که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد

$$[x = \sin u: \text{داهنمائی}] \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du$$

می توان انتگرال سمت راست را با روش انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء، که در بخش بعد موضوع بحث است، محاسبه کرد.

۹.۵ انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء

در فصل ۴ ثابت کردیم که مشتق حاصلضرب دو تابع f و g با دستور

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

داده می شود که در آن $h(x) = f(x)g(x)$. وقتی این دستور بانماد لایب نیتز برای اولیه ها تبیین شود شکل $\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) + C$ را بخود می گیرد که معمولاً آن را بصورت زیر می نویسند:

$$(۲۳.۵) \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

این معادله، که به دستور انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء معروف شده، فسن انتگرالگیری جدیدی را در اختیار ما می گذارد.

برای محاسبه یک انتگرال، مثلاً $\int k(x)dx$ ، با استفاده از (۲۳.۵)، سعی می‌کنیم دو تابع f و g را طوری بیابیم که بشود $k(x)$ را بشکل $f'(x)g(x)$ نوشت. هرگاه این کار مقدور باشد آنگاه (۲۳.۵) مبین آن است که داریم

$$\int k(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx + C$$

و مشکل ما در محاسبه $\int g(x)f'(x)dx$ خلاصه خواهد شد. چنانچه f و g مناسب اختیار شوند ممکن است محاسبه این انتگرال آخری از انتگرال اصلی آسانتر باشد گاهی دو یا چند بار استفاده از (۲۳.۵) انتگرالی را بدست می‌دهد که یا باسانی قابل محاسبه است و یا می‌توان آن را در جدول یافت. مثالهای حل شده زیر طوری اختیار شده‌اند که مزایای این روش را منعکس می‌کنند. رابطه (۲۳.۵) برای انتگرالهای معین به دستور

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

تبدیل می‌شوند.

چنانچه جانشانیهای $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ ، $du = f'(x)dx$ و $dv = g'(x)dx$ را انجام دهیم دستور انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء بشکل اختصاری

$$(24.5) \quad \int u dv = uv - \int v du + C$$

در می‌آید که بخاطر سپردنش برای بسیاری از افراد آسانتر است.

مثال ۱. انتگرال $\int x \cos x dx$ را بگیرد.

حل. $f(x)$ را برابر x و $g'(x)$ را مساوی $\cos x$ می‌گیریم. این یعنی که داریم $f'(x) = 1$ و $g(x) = \sin x$ ، پس (۲۳.۵) بصورت

$$(25.5) \quad \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx + C = x \sin x + \cos x + C$$

درخواهد آمد. توجه کنید که در این حالت انتگرال دومی را قبلاً حساب کرده‌ایم.

برای انجام همین محاسبات با نماد اختصاری (۲۴.۵) می‌نویسیم

$$u = x, \quad dv = \cos x dx,$$

$$du = dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x,$$

$$\int x \cos x dx = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x dx + C$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

اگر u را مساوی $\cos x$ و dv را برابر $x dx$ گرفته بودیم بدست می‌آوردیم که

به ما چنین می‌داد: $v = x^2/2$, $du = -\sin x dx$ و (۲۴.۵)

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \frac{1}{2} x^2 \cos x - \frac{1}{2} \int x^2 (-\sin x) dx + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx + C.\end{aligned}$$

چون انتگرال آخری را تا بحال حساب نکرده‌ایم این u و v با اندازه u و v قبلی مفید نیستند. اما توجه کنید که این معادله آخر را می‌توانیم نسبت به $\int x^2 \sin x dx$ حل کرده و با استفاده از (۲۵.۵)

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x + 2 \cos x - x^2 \cos x + C$$

را بدست آوریم.

مثال ۲. انتگرال $\int x^2 \cos x dx$ را بگیرید.

حل. فرض کنیم $u = x^2$ و $dv = \cos x dx$. در این صورت $du = 2x dx$ و $v = \int \cos x dx = \sin x$ پس داریم

$$\begin{aligned}(26.5) \quad \int x^2 \cos x dx &= \int u dv = uv - \int v du + C \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx + C.\end{aligned}$$

اگر انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء را بار دیگر بکار ببریم می‌توانیم انتگرال آخر را محاسبه کنیم. چون وضع مشابه مثال ۱ است فقط نتیجه را بیان می‌داریم:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

با قراردادن در (۲۶.۵) و ادغام دو ثابت دلخواه درهم خواهیم داشت

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

مثال ۳. گاهی روش بالا، باین دلیل که به انتگرال اصلی منجر می‌شود، قابل اجرا نیست. مثلاً سعی می‌کنیم $\int x^{-1} dx$ را بطریقه جزء به جزء بگیریم. هرگاه قرار دهیم $u = x$ و $dv = x^{-1} dx$ آنگاه $du = dx$ و $v = -x^{-1}$ پس (۲۴.۵) نتیجه می‌دهد که

$$(27.5) \quad \int x^{-1} dx = \int u dv = uv - \int v du + C$$

$$= -1 + \int x^{-1} dx + C,$$

و ما به جایی بازگشته ایم که شروع کرده بودیم. بعلاوه، اگر $u = x^n$ و $du = x^{n-1} dx$ را هم امتحان کنیم وضع را بهتر نخواهد کرد.

از این مثال اغلب وقتی استفاده می شود که می خواهند اهمیت توجه به ثابت دل واد C را نشان دهند. اگر دستور (۲۷.۵) را بدون C بنویسیم معادله $\int x^{-1} dx = -1 + \int x^{-1} dx$ را خواهیم داشت که گاهی بعنوان برهان سفسطه آمیز $0 = -1$ بکار می رود. بعنوان کاربردی از روش انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء شکل دیگر قضیه مقدار میانگین و زنندار برای انتگرالها (قضیه ۱۶.۳) را بدست می آوریم.

قضیه ۵.۵. دوین قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها. فرض کنیم g بر $[a, b]$ پیوسته باشد و f مشتقی داشته باشد که در $[a, b]$ پیوسته بوده و هرگز تغییر علامت ندهد. در اینصورت بازای c ای در $[a, b]$ خواهیم داشت

$$(28.5) \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx.$$

برهان. قرار می دهیم $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. چون g پیوسته است داریم $G'(x) = g(x)$. بنابراین، از آنجا که $G(a) = 0$ ، انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء به ما چنین خواهد داد:

$$(29.5) \quad \begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(x)G'(x)dx \\ &= f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)dx. \end{aligned}$$

بنابر قضیه مقدار میانگین و زنندار، ازای c ای در $[a, b]$ داریم

$$\int_a^b f'(x)G(x)dx = G(c) \int_a^b f'(x)dx = G(c)[f(b) - f(a)].$$

بنابراین، (۲۹.۵) بصورت

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)G(b) - G(c)[f(b) - f(a)] \\ &= f(a)G(c) + f(b)[G(b) - G(c)] \end{aligned}$$

در می آید. این (۲۸.۵) را ثابت می کند زیرا

$$G(b) - G(c) = \int_c^b g(x) dx \text{ و } G(c) = \int_a^c g(x) dx$$

۱۰.۵ تمرینات

از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده انتگرالهای تمرینات ۱ تا ۶ را حساب کنید.

$$۱. \int x \sin x dx \quad ۲. \int x^2 \sin x dx$$

$$۳. \int x^2 \cos x dx \quad ۴. \int x^3 \sin x dx$$

$$۵. \int \sin x \cos x dx \quad ۶. \int x \sin x \cos x dx$$

۷. از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده دستور

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

را نتیجه بگیرید. در انتگرال دوم بنویسید $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و بدینوسیله دستور

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

را نتیجه بگیرید.

۸. از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده دستور

$$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

را نتیجه بگیرید. در انتگرال دوم بنویسید $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و بدینوسیله دستور بازگشتی

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

را نتیجه بگیرید.

۹. از تمرینات ۷ و ۸ استفاده کرده نشان دهید که

$$؛ \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

$$؛ \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{3\pi}{16} \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \frac{5\pi}{32} \quad (\text{پ})$$

۱۰. از تمرینات ۷ و ۸ استفاده کرده دستورهای زیر را نتیجه بگیرید.

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x \quad (\text{الف})$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \quad (\text{ب})$$

$$\int \sin^6 x dx = -\frac{5}{8} x + \frac{5}{48} \cos 2x - \frac{1}{80} \cos 4x \quad (\text{پ})$$

۱۱. دستورهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء و تمرینهای ۷ و ۱۰ نتیجه بگیرید.

$$\int x \sin^2 x dx = \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{6} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x \quad (\text{الف})$$

$$\int x \sin^4 x dx = \frac{3}{8} \sin x - \frac{1}{32} \sin^3 x - \frac{3}{8} x \cos x + \frac{1}{12} x \cos 2x \quad (\text{ب})$$

$$\int x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{6} x^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} x^2 \right) \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x \quad (\text{پ})$$

۱۲. از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده دستور بازگشتی

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

را نتیجه بگیرید.

۱۳. از تمرین ۱۲ استفاده کرده دستورهای زیر را بدست آورید.

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \quad (\text{الف})$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{12} \sin^3 x \quad (\text{ب})$$

$$\int \cos^6 x dx = \frac{5}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin^3 2x \quad (\text{پ})$$

۱۴. با استفاده از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء نشان دهید که

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

در انتگرال دوم بنویسید $1 + x^2 = x^2 - 1 + 1$ و دستور

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

را نتیجه بگیرد.

۱۵. (الف) از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده دستور

$$\int (a^2 - x^2)^n dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx + C$$

را نتیجه بگیرد.

(ب) قسمت (الف) را بکار برده انتگرال $\int_0^a (a^2 - x^2)^{5/2} dx$ را حساب کنید.

۱۶. (الف) چنانچه $I_n(x) = \int_0^x t^n (t^2 + a^2)^{-1/2} dt$ از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده نشان دهید که

$$n I_n(x) = x^{n-1} \sqrt{x^2 + a^2} - (n-1) a^2 I_{n-2}(x), n \geq 2$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که

$$\int_0^5 x^5 (x^2 + 5)^{-1/2} dx = \frac{168}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}$$

۱۷. با فرض $\int_{-1}^2 (y + t^2)^{1/2} dt = 11.35$ انتگرال $\int_{-1}^2 t^2 (y + t^2)^{-1/2} dt$ را حساب کنید. جواب برحسب $\sqrt{31}$ و $\sqrt{3}$ باشد.

۱۸. از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده دستور

$$\int \frac{\sin^{n+1} x}{\cos^{m+1} x} dx = \frac{1}{m} \frac{\sin^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m} \int \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} dx$$

را نتیجه بگیرد. این دستور را بکار برده انتگرالهای $\int \tan^4 x dx$ و $\int \tan^2 x dx$ را حساب کنید.

۱۹. از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده دستور

$$\int \frac{\cos^{m+1} x}{\sin^{n+1} x} dx = -\frac{1}{n} \frac{\cos^m x}{\sin^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} dx$$

را نتیجه بگیرد. این دستور را بکار برده انتگرالهای $\int \cot^4 x dx$ و $\int \cot^2 x dx$ را حساب کنید.

۲۰. (الف) عدد صحیح n را بیابید که $\int_0^1 t f''(t) dt = n \int_0^1 x f''(2x) dx$

(ب) چنانچه $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$ ، انتگرال $\int_0^2 x f''(2x) dx$ را محاسبه نماید.

۲۱. (الف) اگر φ'' بر $[a, b]$ پیوسته و ناصفر بوده و ثابت $m > 0$ چنان باشند که بازای هر t در $[a, b]$ ، $\varphi'(t) \geq m$ ، با استفاده از قضیه ۵.۵ ثابت کنید که

$$\left| \int_a^b \sin \varphi(t) dt \right| \leq \frac{4}{m}.$$

[داهنمائی: انتگرالده را در $\varphi'(t)$ ضرب و بر آن تقسیم کنید.]

(ب) چنانچه $a > 0$ نشان دهید که برای هر $x > a$, $| \int_a^x \sin(t^2) dt | \leq 2/a$.

۱۱.۵* تمرینات متفرقه برای دوره

۱. فرض کنید f یک چندجمله‌ای باشد که $f(0) = 1$ و قرار دهید $g(x) = x^n f(x)$.

$g(0), g'(0), \dots, g^{(n)}(0)$ را حساب کنید.

۲. چندجمله‌ای P از درجهٔ نایشتتر از ۵ را طوری بیابید که $P(0) = 1, P(1) = 2$ و

$P'(0) = P''(0) = P'(1) = P''(1) = 0$.

۳. اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ ثابت کنید که

$$g^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}n\pi\right) \text{ و } f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{1}{4}n\pi\right)$$

۴. اگر $h(x) = f(x)g(x)$ ثابت کنید مشتق h با دستور

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

داده می‌شود که در آن $\binom{n}{k}$ ضریب دوجمله‌ای است. این را دستود لایب نیتز می‌خوانند.

۵. دو تابع f و g داده شده‌اند که مشتقاتشان f' و g' در معادلات

$$(30.5) \quad f'(x) = g(x), g'(x) = -f(x), f(0) = 0, g(0) = 1$$

بازای هر x دربارهٔ باز J حاوی ۰ صدق می‌کنند. بعنوان مثال، این معادلات وقتی

$$f(x) = \sin x \text{ و } g(x) = \cos x \text{ برقرار می‌شوند.}$$

(الف) ثابت کنید بازای هر x در J , $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

(ب) فرض کنید F و G جفت دیگری از توابع باشند که در (30.5) صدق می‌کنند.

ثابت کنید بازای هر x در J , $F(x) = f(x)$ و $G(x) = g(x)$. [داهنمائی:

$$h(x) = [F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2 \text{ را در نظر بگیرید.}]$$

(پ) دربارهٔ توابع f و g صادق در (30.5) چه حکم دیگری می‌کنید؟

۶. تابع f ، که بازای کلیهٔ اعداد حقیقی مثبت تعریف شده، در معادلهٔ $f(x^2) = x^2$ بازای

هر $x > 0$ صدق می‌کند. $f'(4)$ را معین کنید.

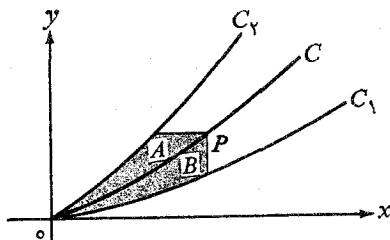
۷. تابع g ، که بازای کلیهٔ اعداد حقیقی مثبت تعریف شده، در دوشروط زیر صدق می‌کند:

$$g(1) = 1 \text{ و } g(x^2) = x^2, x > 0. g'(4) \text{ را حساب کنید.}$$

۸. نشان دهید که

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1} dt \geq 0, x \geq 0$$

۹. فرض کنید C_1 و C_2 دو منحنی باشند که، همانطور که شکل ۲.۵ نشان داده، از مبدأ بگذرند. منحنی C را «منصف در مساحت» ناحیه بین C_1 و C_2 می نامند هرگاه برای هر نقطه P از C مساحت دو ناحیه سایه دار A و B نموده شده در شکل یکی باشند. با این فرض که منحنی منصف C معادله اش $y = x^2$ و منحنی پایینی C_1 معادله اش $y = x^2/2$ است معادله منحنی بالائی C_2 را تعیین کنید.



شکل ۲.۵ تمرین ۹.

۱۰. تابع f بازای هر x این طور تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

فرض کنید اگر $h \neq 0$ ، $Q(h) = f(h)/h$. (الف) ثابت کنید، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $Q(h) \rightarrow 0$. (ب) ثابت کنید f در 0 مشتق دارد و $f'(0)$ را محاسبه نمایید.

انتگرالهای داده شده در تمرینات ۱۱ تا ۲۰ را حساب کنید. از روش جانشانی و (یا) انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء (هرجا ممکن بود) استفاده کرده سعی کنید محاسبات را خلاصه کنید.

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx \quad ۱۲ \quad \int (2+3x) \sin 5x dx \quad ۱۱$$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{(6x+7)^2} dx \quad ۱۴ \quad \int_{-2}^1 x(x^2-1)^9 dx \quad ۱۳$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^{20} dx \quad ۱۶ \quad \int x^4(1+x^5)^5 dx \quad ۱۵$$

$$\int \sin \sqrt[4]{x-1} dx \quad ۱۸ \quad \int_{-1}^2 x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx \quad ۱۷$$

$$\int \sqrt{1+3\cos^2 x} \sin 2x dx \quad ۲۰ \quad \int x \sin x^2 \cos x^2 dx \quad ۱۹$$

۲۱. نشان دهید که مقدار انتگرال $\int_0^2 x^5 (x^2+1)^{-4} dx$ بازای عدد صحیحی چون

n برابر 2^n است.

۲۲. دو عدد a و b را طوری تعیین کنید که

$$\int_0^1 (ax + b)(x^2 + 3x + 2)^{-2} dx = \frac{3}{4}.$$

۲۳. فرض کنید $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$. نشان دهید که $I_n = 2n I_{n-1}$ ($2n + 1$).
بعد از این رابطه استفاده کرده I_4, I_3, I_2 و I_1 را حساب کنید.

۲۴. فرض کنید $F(m, n) = \int_0^x t^m (1 + t)^n dt$ ، $m > 0$ ، $n > 0$. نشان دهید که

$$(m + 1)F(m, n) + nF(m + 1, n - 1) = x^{m+1}(1 + x)^n.$$

از این استفاده کرده $F(10, 2)$ را محاسبه نمائید.

۲۵. فرض کنید $f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ که در آن $n \geq 1$. نشان دهید که

$$f(n + 1) < f(n) \quad (\text{الف})$$

$$f(n) + f(n - 2) = \frac{1}{n - 1}, \quad n > 2 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{n + 1} < 2f(n) < \frac{1}{n - 1}, \quad n > 2 \quad (\text{پ})$$

۲۶. با فرض $f(\pi) = 2$ و $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$ ، $f(0)$ را حساب کنید.

۲۷. فرض کنید A مقدار انتگرال

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x + 2)^2} dx$$

باشد. انتگرال زیر را بر حسب A محاسبه نمائید:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{x + 1} dx.$$

دستورهای تمرینات ۲۸ تا ۳۳ در جداول انتگرال آمده‌اند. صحت هریک را با هر روشی که خواستید تحقیق کنید.

$$\int \frac{\sqrt{a + bx}}{x} dx = 2\sqrt{a + bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} + C. \quad 28$$

$$\left(n \neq -\frac{3}{2}\right) \int x^n \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{a(2n + 3)} [x^n (ax + b)^{3/2} - nb \int x^{n-1} \sqrt{ax + b} dx] + C. \quad 29$$

$$\left(m \neq -\frac{1}{2}\right) \int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{(2m+1)b} (x^m \sqrt{a+bx} - ma \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}} dx) + C. \quad ۳۰$$

$$(n \neq 1) \int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{ax+b}} + C \quad ۳۱$$

$$(m \neq n) \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n) \sin^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx + C. \quad ۳۲$$

$$(n \neq 1) \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx + C. \quad ۳۳$$

۳۴. (الف) چندجمله‌ای $P(x)$ را طوری بیابید که $P'(x) - 3P(x) = 4 - 5x + 3x^2$ ثابت کنید فقط یک جواب وجود دارد.

(ب) اگر $Q(x)$ چندجمله‌ای مفروضی باشد ثابت کنید یک و فقط یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ هست که $P'(x) - 3P(x) = Q(x)$.

۳۵. دنباله‌ای از چندجمله‌ایها (بنام چندجمله‌ایهای برنولی) باستقرا این طور تعریف شده‌اند:

$$P_0(x) = 1; \text{ اگر } n \geq 1, P'_n(x) = nP_{n-1}(x) \text{ و } \int_0^1 P_n(x) dx = 0$$

(الف) برای $P_1(x), P_2(x), \dots, P_6(x)$ دستورهای صریحی ارائه دهید.

(ب) باستقرا ثابت کنید که $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n از x است که جمله بالاترین درجه آن x^n می‌باشد.

(پ) ثابت کنید که اگر $n \geq 2$, $P_n(0) = P_n(1)$.

(ت) ثابت کنید که اگر $n \geq 1$, $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$.

(ث) ثابت کنید بازای $n \geq 2$ خواهیم داشت

$$\sum_{r=1}^{k-1} r^n = \int_0^k P_n(x) dx = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

(ج) ثابت کنید که اگر $n \geq 1$ ، $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$.

(چ) ثابت کنید که اگر $n \geq 1$ ، $P_{2n-1}(1/2) = 0$ و $P_{2n+1}(0) = 0$.

۳۶. فرض کنید بازای هر x در بازه $[0, a]$ ، $|f''(x)| \leq m$ ، و f بیشترین مقدار خود را در یک نقطه درونی این بازه بگیرد. نشان دهید که $|f'(0)| + |f'(a)| \leq am$ می توانید f'' را در $[0, a]$ پیوسته بدانید.

لازم نیست خودمان را به پایه ۱۰ محدود کنیم. هر پایه مثبت دیگر $b \neq 1$ بخوبی ۱۰ کار می‌کند. لذا

$$(۲.۶) \quad x = b^u \text{ یعنی } u = \log_b x$$

و خاصیت اساسی (۱.۶) بصورت

$$(۳.۶) \quad \log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

درمی‌آید.

چنانچه تعریف (۲.۶) را از یک دیدگاه انتقادی بررسی کنیم بی‌می‌بریم که بر آن چند ایراد منطقی وارد است. قبل از هر چیز برای درک (۲.۶) بایستی معنی b^u را بدانیم. این تعریف برای وقتی u عددی صحیح یا عددی گویا (خارج قسمت دو عدد صحیح) باشد آسان است لکن زمانی که u گنگ است ساده نمی‌باشد. مثلاً می‌پرسیم $10^{7/2}$ را چگونه باید تعریف کنیم؟ حتی اگر به تعریف رضایت بخشی از b^u دست یابیم برای اینکه بتوانیم (۲.۶) را بعنوان تعریف مناسبی از لگاریتمها بکار ببریم باید مشکلات دیگری را نیز از میان برداریم. بایستی نشان داد که بازای هر $x > 0$ عملاً عددی مثل u هست که $x = b^u$. همچنین باید قانون نماها، یعنی $b^+ b^- = b^0 = 1$ ، را برای کلیه نماهای u و v ثابت کرد تا (۳.۶) از (۲.۶) نتیجه گردد.

با این روش می‌توان بر مشکلات بالا فائق آمد و به تعریف مقنعی از لگاریتمها رسید لکن این عمل طولانی و کسل‌کننده است. اما خوشبختانه می‌توان بررسی لگاریتمها را به - طریقی کاملاً متفاوت، که خیلی ساده‌تر بوده و توان و ظرافت روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال را متجلی می‌کند، انجام داد. طرز عمل باین شکل است که ابتدا لگاریتمها معرفی می‌شوند و بعد، با استفاده از لگاریتمها، b^u تعریف خواهد شد.

۲.۶ انگیزه تعریف لگاریتم طبیعی بصورت انتگرال

لگاریتم نمونه‌ای است از یک مفهوم ریاضی که می‌توان آن را براههای متفاوت بسیاری تعریف کرد. وقتی یک ریاضیدان سعی در تنظیم تعریف مفهومی، نظیر لگاریتم، دارد معمولاً یک عده خواصی را که مایل است این مفهوم داشته باشد در نظر می‌آورد. او، با معاینه این خواص، اغلب به دستور یا فرایند ساده‌ای می‌رسد که ممکن است از آن، بعنوان تعریف، کلیه خواص مطلوب بصورت نتایجی منطقی بدست آیند. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از این روش به تعریف لگاریتم، که در بخش بعد داده شده، رسید.

یکی از خواصی را که می‌خواهیم لگاریتمها داشته باشند این است که لگاریتم حاصلضرب باید مساوی مجموع لگاریتمهای تک تک سازدها باشد. خود این خاصیت را در نظر می‌گیریم و ببینیم ما را به کجا می‌برد. هرگاه به لگاریتم بعنوان تابعی چون f فکر کنیم آنگاه می‌خواهیم این تابع دارای خاصیت زیر باشد: بازای هر x و y و xy که در قلمرو f هستند

$$(۴.۶) \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

هر معادله مانند (۴.۶)، که مبین رابطه‌ای میان مقادیر یک تابع در دو یا چند نقطه است، را یک معادله تابعی می‌نامند. بسیاری از مسائل ریاضی را می‌توان به حل یک معادله تابعی تحویل کرد، جواب تابعی است که در معادله صدق کند. معمولاً معادله‌ای از این نوع جوابهای گوناگون بسیار دارد و عموماً یافتن همه آنها خیلی دشوار است. ساده‌تر آن است که فقط جوابهایی را بجوئیم که خاصیتی اضافی نظیر پیوستگی یا مشتقپذیری دارند. بهر حال اینها اغلب تنها جوابهایی هستند که به آنها توجه داریم. این دیدگاه را می‌پذیریم و همه جوابهای مشتقپذیر (۴.۶) را معین می‌کنیم. اما ابتدا سعی می‌کنیم آنچه را که می‌توانیم فقط از (۴.۶)، بدون گذاردن قید دیگری بر f ، بدست آوریم مشخص نمائیم.

یکی از جوابهای (۴.۶) تابعی است که همه جا بر محور حقیقی صفر است. در واقع این تنها جوابی از (۴.۶) است که بازای کلیه اعداد حقیقی تعریف شده است. برای اثبات این موضوع فرض می‌کنیم f تابعی باشد که در (۴.۶) صدق می‌کند. هرگاه 0 در قلمرو f باشد آنگاه می‌توان با گذاردن $0 = y$ در (۴.۶) بدست آوریم که $f(0) = f(x) + f(0)$ ، و این ایجاب می‌کند که بازای هر x در قلمرو f ، $f(x) = 0$. بعبارت دیگر، هرگاه 0 در قلمرو f باشد، آنگاه f باید متحد صفر گردد. بنابراین جوابی از (۴.۶) که متحد صفر نباشد نمی‌تواند در 0 تعریف شده باشد.

اگر f جوابی از (۴.۶) بوده و قلمرو آن شامل 1 باشد می‌توانیم با گذاردن $x = y = 1$ در (۴.۶) بدست آوریم که $f(1) = 2f(1)$ ، و این ایجاب می‌کند که

$$f(1) = 0.$$

چنانچه 1 و -1 هر دو در قلمرو f باشند می‌توانیم با فرض $x = -1$ و $y = -1$ نتیجه بگیریم که $f(-1) = 2f(-1)$ ؛ پس $f(-1) = 0$. حال اگر $x, -x, 1, -1$ و -1 در قلمرو f باشند در (۴.۶) قرار می‌دهیم $y = -1$ تا

$$f(-x) = f(-1) + f(x)$$

نتیجه شود و، چون $f(-1) = 0$ ، درخواهیم یافت که

$$f(-x) = f(x).$$

بعبارت دیگر، هر جواب (۴.۶) الزاماً تابعی زوج است.

حال فرض کنیم f در هر $x \neq 0$ مشتق داشته باشد. اگر در (۴.۶) y را ثابت گرفته و نسبت به x (با اعمال قاعده زنجیره‌ای در سمت چپ) مشتق بگیریم درمی‌یابیم که

$$yf'(xy) = f'(x).$$

این، وقتی $x = 1$ ، به ما $f'(1) = yf'(y)$ را می‌دهد، و در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$f'(y) = \frac{f'(1)}{y}, \quad y \neq 0$$

از این معادله درمی‌یابیم که f' یکنوا بوده و در نتیجه بر هر بازه بسته‌ای که حاوی مبدأ

نباشد انتگرالپذیر است. همچنین f' بر هر چنین بازه‌ای پیوسته است و می‌توانیم دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بکار برده بنویسیم

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t) dt = f'(1) \int_c^x \frac{1}{t} dt.$$

اگر $x > 0$ این معادله بازای هر c مثبت و، اگر $x < 0$ ، بازای هر c منفی برقرار است. از آنجا که $f(1) = 0$ انتخاب $c = 1$ نتیجه می‌دهد که

$$f(x) = f'(1) \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

هرگاه x منفی باشد آنگاه $-x$ مثبت است و، چون $f(x) = f(-x)$ ، درخواهیم یافت که

$$f(x) = f'(1) \int_1^{-x} \frac{1}{t} dt, x < 0$$

این دو دستور برای $f(x)$ را می‌توان به یک دستور بدل کرد که برای هم x های مثبت و هم x های منفی معتبر باشد، یعنی نوشت که

$$(5.6) \quad f(x) = f'(1) \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt, x \neq 0$$

پس نشان داده‌ایم که هرگاه جوابی از (۴.۶) در هر نقطهٔ $x \neq 0$ مشتق داشته باشد آنگاه این جواب باید الزاماً با دستور انتگرالی (۵.۶) داده شده باشد. هرگاه $f'(1) = 0$ آنگاه (۵.۶) ایجاب می‌کند که بازای هر $x \neq 0$ ، $f(x) = 0$ ، و این جواب با جوابی که متحد صفر است مطابقت دارد. از اینرو اگر f متحد صفر نباشد باید داشته باشیم $f'(1) \neq 0$ ، که در این حالت می‌توانیم دوطرف (۵.۶) را بر $f'(1)$ تقسیم کنیم تا چنین بدست آید:

$$(6.6) \quad g(x) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt, x \neq 0$$

که در آن $g(x) = f(x)/f'(1)$. تابع g یک جواب (۴.۶) نیز هست چونکه هر موقع f یک جواب باشد cf نیز چنین می‌باشد. این ثابت می‌کند که هرگاه (۴.۶) جوابی داشته باشد که متحد صفر نبوده و این جواب همه جا جز در مبدأ مشتق داشته باشد آنگاه تابع g که با (۶.۶) داده شده نیز یک جواب است و کلیهٔ جوابها را می‌شود از این با ضرب g در ثابت مناسبی بدست آورد.

لازم است تأکید شود که این استدلال عملاً جواب بودن تابع g ی مذکور در (۶.۶) را ثابت نمی‌کند زیرا ما (۶.۶) را با فرض وجود لاقبل یک جواب که متحد صفر نباشد بدست آوردیم. دستور (۶.۶) برای ساختن اینگونه جواب راهی پیشنهاد می‌کند. ما فقط در جهت عکس عمل می‌کنیم. یعنی با استفاده از انتگرال (۶.۶) تابع g را تعریف کرده و،

بعد، مستقیماً تحقیق می‌کنیم که این تابع عملاً در (۴.۶) صدق می‌کند. عمل فوق این فکر را القا می‌کند که لگاریتم را باید مساوی تابع g ای تعریف کنیم که با (۶.۶) داده شده است. اگر چنین می‌کردیم این تابع دارای خاصیت $g(-x) = g(x)$ می‌شد یا، بعبارت دیگر، اعداد متمایز صاحب یک لگاریتم می‌شدند. بخاطر بعضی از مقاصد آتی ترجیح می‌دهیم لگاریتم طوری تعریف شود که هیچ دو عدد متمایز یک لگاریتم نداشته باشند. این خاصیت اخیر را می‌توان با تعریف لگاریتم فقط برای اعداد مثبت بدست آورد. بنا بر این، تعریف زیر را بکار خواهیم برد.

۳.۶ تعریف لگاریتم. خواص اساسی

تعریف. چنانچه x عدد حقیقی مثبتی باشد لگاریتم طبیعی x را، که فعلاً با $L(x)$ نشان می‌دهیم، با انتگرال زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۷.۶) \quad L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

وقتی $x > 1$ ، $L(x)$ را می‌توان بعنوان مساحت ناحیه سایه‌دار نموده شده در شکل ۱.۶ تعبیر هندسی کرد.

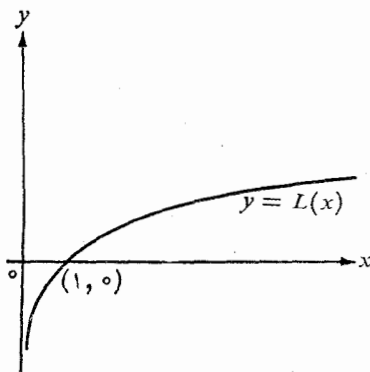
قضیه ۱.۶. تابع لگاریتم دارای خواص زیر است:

(الف) $L(1) = 0$ ؛

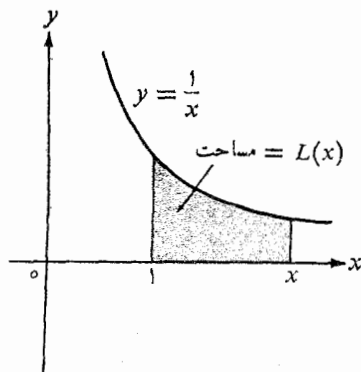
(ب) بازای هر $x > 0$ ، $L'(x) = \frac{1}{x}$ ؛

(پ) بازای هر $a > 0$ و هر $b > 0$ ، $L(ab) = L(a) + L(b)$.

پرهان. قسمت (الف) بی‌درنگ از تعریف نتیجه می‌شود. برای اثبات (ب) کافی است



شکل ۲.۶ نمودار لگاریتم طبیعی.



شکل ۱.۶ تعبیر لگاریتم بعنوان مساحت.

توجه کنیم که L انتگرال نامعین تابع پیوسته‌ای است و اولین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بکار ببریم. خاصیت (پ) از خاصیت جمع‌پذیری انتگرال نتیجه می‌شود. می‌نویسیم

$$L(ab) = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t} = L(a) + \int \frac{dt}{t}.$$

در انتگرال آخری قرار می‌دهیم $u = t/a$ ، $du = dt/a$ ، و درمی‌یابیم که انتگرال به $L(b)$ تحویل می‌یابد، پس (پ) ثابت می‌شود.

۴.۶ نمودار لگاریتم طبیعی

نمودار تابع لگاریتم از صورت کلی مشهود در شکل ۲.۶ برخوردار است. بسیاری از خواص این منحنی را می‌توان بدون محاسبات زائد و فقط با توسل به خواص قضیهٔ ۱.۶ کشف کرد. بعنوان مثال، از (ب) درمی‌یابیم که L همه جا مشتق مثبت دارد، پس بر هر بازه اکیداً صعودی است. چون $L(1) = 0$ نمودار بازای $x > 1$ در بالای محور x و، بازای $0 < x < 1$ ، در پائین آن قرار دارد. منحنی وقتی $x = 1$ دارای شیب ۱ است. بازای $x > 1$ شیب، وقتی x بطور نامحدود صعود کند، تدریجاً به صفر نزول می‌نماید. شیب برای مقادیر کوچک x بزرگ است و، مضاف بر آن، وقتی x به صفر نزول کند بطور نامحدود صعود خواهد نمود. مشتق دوم برابر است با $L''(x) = -1/x^2$ که بازای هر x منفی است، پس L یک تابع مقعر خواهد بود.

۵.۶ نتایج معادلهٔ تابعی $L(ab) = L(a) + L(b)$

از آنجا که نمودار لگاریتم با صعود x بطور نامحدود به حالت افقی میل می‌کند ممکن است این ظن برود که مقادیر L کران بالائی دارند. در واقع تابع از بالا بی‌کران است؛ یعنی بازای هر عدد مثبت M (هر قدر هم بزرگ باشد) مقادیری از x هستند که

$$L(x) > M. \quad (۸.۴)$$

این را می‌توانیم از معادلهٔ تابعی نتیجه بگیریم. وقتی $a = b$ بدست می‌آوریم $L(a^2) = 2L(a)$. اگر بار دیگر از معادلهٔ تابعی با فرض $b = a^2$ استفاده کنیم خواهیم داشت $L(a^3) = 3L(a)$. باستقرا دستور کلی

$$L(a^n) = nL(a)$$

را می‌یابیم که بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ برقرار است. این، وقتی $a = 2$ ، بصورت $L(2^n) = nL(2)$ در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$L(2^n) > M, n > \frac{M}{L(2)} \quad \text{وقتی} \quad (۹.۴)$$

این حکم (۸.۶) را ثابت می‌کند. با فرض $1/a = b$ در معادله تابعی درمی‌یابیم که $L(1/a) = -L(a)$. بخصوص، وقتی $a = 2^n$ که در آن n طبق (۹.۶) اختیار شده است، خواهیم داشت

$$L\left(\frac{1}{2^n}\right) = -L(2^n) < -M,$$

که مبین آن است که مقادیر تابعی کران پائینی هم ندارند. بالاخره مشاهده می‌کنیم که نمودار از هر خط افقی فقط یکبار می‌گذرد. یعنی، اگر عدد حقیقی دلخواه b (مثبت، منفی، یا صفر) داده شده باشد، یک و فقط یک $a > 0$ هست که

$$L(a) = b. \quad (10.6)$$

برای اثبات این مطلب می‌توان این طور استدلال کرد: اگر $b > 0$ عدد صحیح $b/L(2)$ را $n > b/L(2)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، بنابر (۹.۶)، $L(2^n) > b$. حال تابع L را بر بازه بسته $[1, 2^n]$ امتحان می‌کنیم. مقدارش در نقطه انتهایی چپ $L(1) = 0$ و در نقطه انتهایی راست $L(2^n)$ است. چون $0 < b < L(2^n)$ قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته (قضیه ۸.۳ در بخش ۱۰.۳) وجود لااقل یک a را که $L(a) = b$ تضمین می‌کند. مقدار دیگری چون a' که $L(a') = b$ وجود ندارد زیرا این یعنی که بازای $a' \neq a$ ، $L(a) = L(a')$ که با خاصیت صعودی بسودن لگاریتم تعارض دارد. بنابراین، حکم (۱۰.۶) برای $b > 0$ ثابت شده است. از این، در صورتی که از معادله $L(1/a) = -L(a)$ استفاده کنیم، برهان برای b منفی نتیجه خواهد شد. بعبارت دیگر، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۲.۶. بازای هر عدد حقیقی b دقیقاً یک عدد حقیقی مثبت مثل a هست که لگاریتمش $L(a)$ مساوی b باشد.

خصوصاً، درست یک عدد هست که لگاریتم طبیعی آن برابر یک خواهد بود. از آنجا که این عدد، مثل e ، در بسیاری از دستورهای ریاضی بکرات ظاهر می‌شود انتخاب علامتی خاص برای آن ضرور می‌نمود. ظاهراً لئونارد اولبر (۱۷۸۳-۱۷۵۷) اولین کسی بوده که به اهمیت این عدد پی برده است، و او فقط آن را با e نشان می‌داد، نمادی که بزودی بصورت متعارف درآمد.

تعریف. e چنان عددی است که

$$L(e) = 1. \quad (11.6)$$

در فصل ۷ دستورهای صریحی بدست خواهیم آورد که ما را در محاسبه بسط

اعشاری e تا هر درجه از دقت نیرو می بخشند. مقدار e ، درست تا ده رقم اعشار، برابر ۲۸۵۱۸۲۸۱۸۲۸۱۸۲۷ است. در فصل ۷ گنگ بودن e را نیز ثابت خواهیم کرد.

لگاریتمهای طبیعی، بافتخار مبدع آنها جان نپرا^۱ (۱۶۱۷-۱۵۵۰)، لگاریتمهای نپری نیز خوانده می شوند. رسم این شده که برای نمایش لگاریتم x از علامت $\ln x$ یا $\log x$ بجای $L(x)$ استفاده می کنند.

۶.۶ لگاریتمها در هر پایه مثبت $b \neq 1$

آنچه که در بخش ۲.۶ انجام شد به ما می گوید که کلیترین f ی که بر قسمت مثبت محور حقیقی مشتقپذیر بوده و در معادله تابعی $f(xy) = f(x) + f(y)$ صدق می کند با دستور

$$f(x) = c \log x \quad (12.6)$$

بیان می شود که در آن c عدد ثابتی است. بازای هر c می شد این $f(x)$ را لگاریتم x مربوط به c بنامیم گرچه، بی شک، مقدار آن لزوماً همان لگاریتم طبیعی x نخواهد بود. وقتی $c = 0$ ، f متحد صفر است، پس این حالت جالب نمی باشد. چنانچه $c \neq 0$ ، با معرفی مفهوم پایه برای لگاریتمها، می توانیم بستگی f را به c بطریقی دیگر نشان دهیم. از (۱۲.۶) درمی یابیم که، وقتی $c \neq 0$ ، عدد حقیقی منحصر بفردی چون $b > 0$ هست که $f(b) = 1$. این b توسط معادله $c \log b = 1$ به c مربوط می شود؛ پس $b \neq 1$ ، $b = 1/\log b$ و (۱۲.۶) بصورت

$$f(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

در می آید. بازای این انتخاب c می گوئیم $f(x)$ لگاریتم x در پایه b است و بجای $f(x)$ می نویسیم $\log_b x$.

تعریف. اگر $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، و $x > 0$ ، لگاریتم x در پایه b مساوی عدد

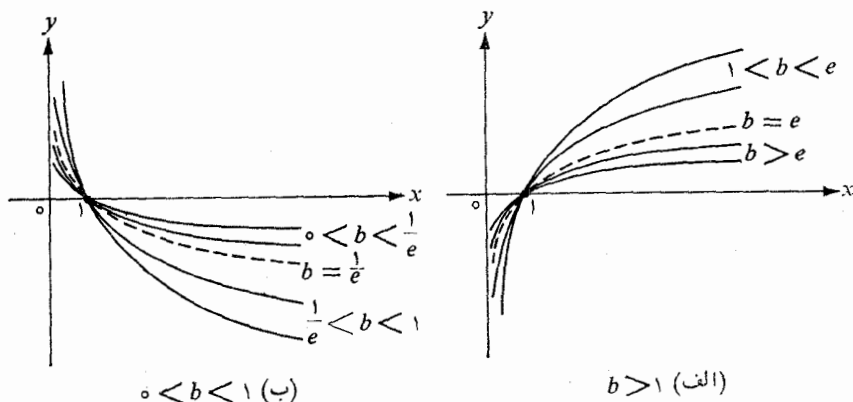
$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$$

است که در آن لگاریتمهای سمت راست طبیعی اند.

توجه کنید که $\log_b b = 1$. همچنین، وقتی $b = e$ ، داریم $\log_e x = \log x$ ، پس لگاریتمهای طبیعی آنها می هستند که پایه e دارند. از آنجا که لگاریتمها در پایه e مکرر در ریاضیات بکار می آیند اصطلاح لگاریتم تقریباً همیشه بمعنی لگاریتم طبیعی خواهد بود. بعداً، در بخش ۱۵.۶، b^u را طوری تعریف می کنیم که معادله $b^u = x$ دقیقاً بمعنی معادله

$u = \log_b x$ باشد.

چون لگاریتمها در پایه b با ضرب لگاریتمهای طبیعی در ثابت $1/\log b$ حاصل می‌شوند پس نمودار معادله $y = \log_b x$ را می‌توان از نمودار معادله $y = \log x$ فقط با ضرب کلیه عرضها در همین سازه بدست آورد. این سازه، وقتی $b > 1$ ، مثبت و زمانی که $b < 1$ ، منفی است. مثالهایی که در آنها $b > 1$ در شکل ۳.۶ (الف) نموده شده‌اند. وقتی $b < 1$



شکل ۳.۶ نمودار $y = \log_b x$ برای مقادیر مختلف b .

ملاحظه می‌کنیم که $1/b > 1$ و $\log b = -\log(1/b)$ پس نمودار $y = \log_b x$ را می‌توان از نمودار $y = \log_{1/b} x$ با انعکاس نسبت به محور x بدست آورد. مثالهایی در شکل ۳.۶ (ب) ارائه شده‌اند.

۷.۶ دستورهای مشتقگیری و انتگرالگیری مربوط به لگاریتمها

چون مشتق لگاریتم با دستور $D \log x = 1/x$ ، بازای $x > 0$ ، داده شده، لذا دستور انتگرالگیری

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

در اختیار ما خواهد بود. بطور کلی، اگر $u = f(x)$ و f مشتق پیوسته داشته باشد، خواهیم داشت

$$(۱۳.۶) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x) + C \quad \text{یا} \quad \int \frac{du}{u} = \log u + C$$

در استعمال (۱۳.۶) باید قدری احتیاط کرد زیرا لگاریتم برای اعداد منفی تعریف نشده

است. بنابراین، دستورهای انتگرالگیری (۱۳.۶) تنها موقعی معتبرند که u ، یا $f(x)$ ، مثبت باشد.

خوشبختانه بآسانی می توان دامنه اعتبار این دستورها را به توابعی که منفی یا مثبت (اما غیر صفر) هستند وسعت داد. کافی است تابع جدید L_0 را که بازای هر $x \neq 0$ حقیقی با معادله

$$(۱۴.۶) \quad L_0(x) = \log|x| = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt$$

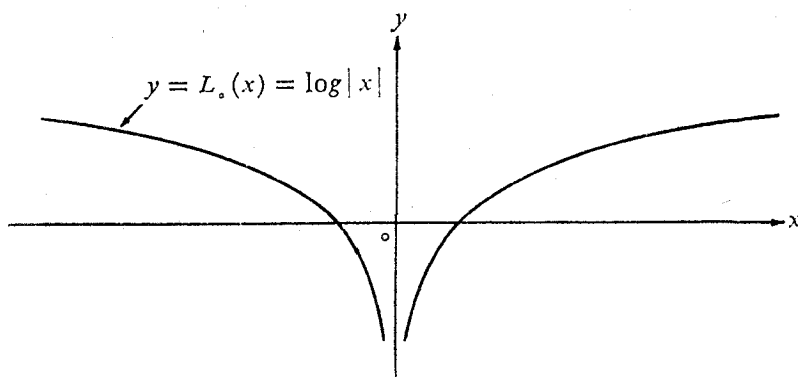
تعریف می شود معرفی کنیم، تعریفی که توسط معادله (۶.۶) بخش ۲.۶ پیشنهاد شده است. همانطور که شکل ۴.۶ نشان داده، نمودار L_0 نسبت به محور y متقارن است. بخشی از نمودار که سمت راست محور y است دقیقاً همان منحنی لگاریتمی شکل ۲.۶ می باشد.

چون $\log|xy| = \log(|x||y|) = \log|x| + \log|y|$ پس تابع L_0 در معادله تابعی اساسی (۴.۶) نیز صدق می کند. یعنی بازای هر x و y حقیقی جز ۰ داریم

$$L_0(xy) = L_0(x) + L_0(y).$$

بازای $x > 0$ داریم $L'_0(x) = 1/x$ زیرا $L_0(x)$ برای x های مثبت همان $\log x$ است. این دستور مشتقگیری برای $x < 0$ نیز برقرار است زیرا، در این حالت، $L'_0(x) = -L'_0(-x) = -1/(-x) = 1/x$ و در نتیجه $L_0(x) = L_0(-x)$ لذا چنین خواهیم داشت:

$$(۱۵.۶) \quad L'_0(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ حقیقی، بازای هر}$$



شکل ۴.۶ نمودار تابع L_0 .

از اینرو، اگر در دستورهای انتگرالگیری پیشگفته بجای L از L_0 استفاده کنیم، می توانیم میدان عمل آنها را به توابعی که مقادیر منفی را مانند مقادیر مثبت می گیرند نیز وسعت دهیم. بعنوان مثال، می توان (۱۳.۶) را این طور تعمیم داد:

$$(۱۶.۶) \quad \int \frac{du}{u} = \log |u| + C, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C.$$

البته موقعی که برای محاسبهٔ یک انتگرال معین از (۱۶.۶) به‌مراه دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده می‌کنیم باید از بازه‌های شامل نقاطی که در آنها u یا $f(x)$ صفر است پرهیز نماییم.

مثال ۱. انتگرال $\int \tan x dx$ را بگیرید.

حل. انتگرال از شکل $\int du/u$ — برخوردار است که در آن $u = \cos x$ و $du = -\sin x dx$ لذا داریم

$$\int \tan x dx = - \int \frac{du}{u} = -\log |u| + C = -\log |\cos x| + C,$$

دستوری که برهر بازه که در آن $\cos x \neq 0$ اعتبار دارد. دو مثال بعدی موارد استعمال انتگرالگیری بطریقهٔ جزء به جزء را نشان می‌دهند.

مثال ۲. انتگرال $\int \log x dx$ را بگیرید.

حل. قرار می‌دهیم $u = \log x$ و $dv = dx$. در اینصورت $du = dx/x$ ، $v = x$ و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int u dv = uv - \int v du = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x + C. \end{aligned}$$

مثال ۳. انتگرال $\int \sin(\log x) dx$ را بگیرید.

حل. قرار می‌دهیم $u = \sin(\log x)$ و $v = x$. در اینصورت

$$du = \cos(\log x) \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

و درخواهیم یافت که

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) dx &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= x \sin(\log x) - \int \cos(\log x) dx. \end{aligned}$$

در انتگرال آخری یکبار دیگر از انتگرالگیری بطریقهٔ جزء به جزء استفاده می‌کنیم تا

$$\int \cos(\log x) dx = x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx$$

بدست آید. چنانچه این را با معادله قبلی تلفیق کنیم درخواهیم یافت که

$$\int \sin(\log x) dx = \frac{1}{\gamma} x \sin(\log x) - \frac{1}{\gamma} x \cos(\log x) + C$$

و

$$\int \cos(\log x) dx = \frac{1}{\gamma} x \sin(\log x) + \frac{1}{\gamma} x \cos(\log x) + C.$$

۸.۶ مشتقگیری لگاریتمی

حال به توصیف فنی می‌پردازیم، بنام مشتقگیری لگاریتمی، که اغلب در محاسبه مشتقات کمک بزرگی خواهد بود. این روش در سال ۱۶۹۷ بوسیله یوهان برنولی^۱ (۱۶۶۷-۱۷۴۸) عرضه شد، و چیزی جز کاربرد ساده‌ای از قاعده زنجیره‌ای نمی‌باشد.

فرض کنیم L را با تابع مشتق‌پذیر دلخواه f ترکیب کرده باشیم؛ مثلاً بازای x هائی که $f(x) \neq 0$ قرار داده باشیم

$$g(x) = L_0[f(x)] = \log |f(x)|.$$

چنانچه قاعده زنجیره‌ای به‌مراه (۱۵.۶) بکار رود دستور

$$(17.6) \quad g'(x) = L'_0[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

نتیجه می‌شود. هرگاه بتوان مشتق $g'(x)$ را بطریق دیگری یافت آنگاه ممکن است از (۱۷.۶) استفاده کرده $f'(x)$ را فقط با ضرب $g'(x)$ در $f(x)$ بدست آورد. این فرایند در عمل مفید است زیرا در بسیاری حالات محاسبه $g'(x)$ از خود $f'(x)$ آسان‌تر می‌باشد. بخصوص این مطلب زمانی که f بصورت حاصلضرب یا خارج‌قسمت چند تابع ساده‌تر باشد صحت دارد. مثال زیر نمونه‌ای است از این وضع.

مثال ۲. $f'(x)$ را در صورتی که $f(x) = x^2 \cos x (1 + x^4)^{-\gamma}$ حساب کنید.

حل. لگاریتم قدرمطلق $f(x)$ را گرفته و بعد مشتق می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} g(x) &= \log |f(x)| = \log x^2 + \log |\cos x| + \log (1 + x^4)^{-\gamma} \\ &= 2 \log |x| + \log |\cos x| - \gamma \log (1 + x^4). \end{aligned}$$

• مشتقگیری نتیجه می دهد که

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{28x^3}{1+x^4}$$

با ضرب این رابطه در $f(x)$ خواهیم داشت

$$f'(x) = \frac{2x \cos x}{(1+x^4)^2} - \frac{x^2 \sin x}{(1+x^4)^2} - \frac{28x^5 \cos x}{(1+x^4)^3}$$

۹.۶ تمرینات

۱. (الف) کلیه c هائی را بیابید که بازای هر $x > 0$ ، $\log x = c + \int_0^x t^{-1} dt$.
 (ب) فرض کنید اگر $x > 0$ ، $f(x) = \log[(1+x)/(1-x)]$ ، اگر a و b اعداد مفروضی بوده و $ab \neq -1$ ، کلیه x هائی را بیابید که

$$f(x) = f(a) + f(b).$$

۲. در هریک از حالات زیر x حقیقی بیابید که در معادله داده شده صدق کند.

- (الف) $\log(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 1$ (ت)
 (ب) $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$
 (پ) $x \neq 2$ ، $2 \log x = x \log 2$

۳. فرض کنید اگر $x > 0$ ، $f(x) = (\log x)/x$ ، بازه هائی را توصیف کنید که در آنها f صعودی، نزولی، محدب، و مقعر است. نمودار f را بکشید.

- $f'(x)$ را در تمرینات ۴ تا ۱۵ بیابید. در هر حالت فرض این است که تابع f بازای x های حقیقی تعریف شده که دستور مفروض برای $f(x)$ در آنها بامعنی است.

$$f(x) = \log \sqrt{1+x^2} \quad ۵ \quad f(x) = \log(1+x^2) \quad ۴$$

$$f(x) = \log(\log x) \quad ۷ \quad f(x) = \log \sqrt{4-x^2} \quad ۶$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \log \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad ۹ \quad f(x) = \log(x^2 \log x) \quad ۸$$

$$f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^n \quad ۱۰$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \log(1 + \sqrt{x+1}) \quad ۱۱$$

$$f(x) = x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \quad ۱۲$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad ۱۳$$

$$f(x) = x [\sin(\log x) - \cos(\log x)] \quad ۱۴$$

$$f(x) = \log_x e \quad ۱۵$$

در تمرینات ۱۶ تا ۲۶ انتگرالها را حساب کنید.

$$\int \log^2 x \, dx \quad ۱۷ \qquad \int \frac{dx}{2 + 3x} \quad ۱۶$$

$$\int x \log^2 x \, dx \quad ۱۹ \qquad \int x \log x \, dx \quad ۱۸$$

$$\int \cot x \, dx \quad ۲۱ \qquad \int_0^{e^2-1} \frac{dt}{1+t} \quad ۲۰$$

$$\int x^2 \log^2 x \, dx \quad ۲۳ \qquad \int x^n \log(ax) \, dx \quad ۲۲$$

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t} \log(1-t)}{1-t} dt \quad ۲۵ \qquad \int \frac{dx}{x \log x} \quad ۲۴$$

$$\int \frac{\log|x|}{x\sqrt{1+\log|x|}} dx \quad ۲۶ \quad ۲۷. \text{ دستور بازگشتی}$$

$$\int x^m \log^n x \, dx = \frac{x^{m+1} \log^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m \log^{n-1} x \, dx$$

را نتیجه گرفته و، با بکار بردن آن، انتگرال $\int x^3 \log^3 x \, dx$ را حساب کنید.

۲۸. (الف) فرض کنید

$$g(x) = \log x - 1 + 1/x \text{ و } f(x) = x - 1 - \log x, \quad x > 0$$

با معاینهٔ علامات f' و g' ثابت کنید که نامساویهای

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

بازای $x > 0$ و $x \neq 1$ معتبرند. اینها وقتی $x = 1$ به تساوی بدل می‌شوند.

(ب) نمودارهای توابع A و B را که بازای $x > 0$ با معادلات $A(x) = x - 1$ و

$B(x) = 1 - 1/x$ تعریف می‌شوند رسم کرده و نامساویهای قسمت (الف) را

تعبیر هندسی نمائید.

۲۹. رابطهٔ حدی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

را با این دو روش ثابت کنید: (الف) تعریف $L'(1)$ را بکار ببرید؛ (ب) از تمرین

۲۸ استفاده نمائید.

۳۰. اگر $a > 0$ معادله تابعی برای لگاریتم را بکار برده ثابت کنید که بازای هر عدد گویای r ، $\log(a^r) = r \log a$.

۳۱. فرض کنید $P = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ افراز دلخواهی از بازه $[1, x]$ باشد که در آن $x > 1$.

(الف) با انتگرالگیری از توابع پله‌ای مناسبی که بر زیر بازه‌های باز P ثابتند نامساویهای زیر را نتیجه بگیرید:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k} \right) < \log x < \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}} \right).$$

(ب) نامساویهای قسمت (الف) را بر حسب مساحات تعبیر هندسی کنید.

(پ) با اختیار افرازی خاص نشان دهید که بازای هر عدد صحیح $n > 1$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

۳۲. دستورهای زیر را، که مربوط به تغییر از یک پایه لگاریتمی به دیگری است، ثابت نمائید:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (\text{ب}) \quad ; \log_b x = \log_b a \log_a x \quad (\text{الف})$$

۳۳. چنانچه $\log_e 10 = 2.302585$ ، که تا شش رقم اعشار درست است، $\log_{10} e$ را با استفاده از یکی از دستورهای تمرین ۳۲ حساب کنید. در محاسبه خود چند رقم اعشار را درست می‌دانید؟ توجه: در جدولی، که تا شش رقم اعشار درست است، $\log_{10} e$ مساوی 0.434294 ره ثبت شده است.

۳۴. تابع f ، پیوسته بر قسمت مثبت محور حقیقی، دارای این خاصیت است که بازای هر انتخاب $x > 0$ و $y > 0$ انتگرال

$$\int_x^{xy} f(t) dt$$

از x مستقل (و در نتیجه فقط تابع y) می‌باشد. اگر $f(2) = 2$ مقدار انتگرال $A(x) = \int_1^x f(t) dt$ را بازای هر $x > 0$ حساب کنید.

۳۵. تابع f ، پیوسته بر قسمت مثبت محور حقیقی، این خاصیت را دارد که بازای هر $x > 0$ و هر $y > 0$

$$\int_1^{xy} f(t) dt = y \int_1^x f(t) dt + x \int_1^y f(t) dt.$$

اگر $f(1) = 3$ ، $f(x)$ را بازای هر $x > 0$ حساب کنید.

۳۶. قاعده جسمی مجموعه عرضی تابع f است که روی بازه $[1, a]$ پیوسته می‌باشد. کلیه مقاطع عرضی عمود بر بازه $[1, a]$ مربعند. بازای هر $a \geq 1$ حجم جسم مساوی

$$\frac{1}{3}a^3 \log^2 a - \frac{2}{9}a^3 \log a + \frac{2}{27}a^3 - \frac{2}{27}$$

می باشد. $f(a)$ را حساب کنید.

۱۰.۶ تقریبهای چندجمله‌ای برای لگاریتم

در این بخش نشان خواهیم داد که تابع لگاریتم قابل تقریب به چندجمله‌ایهایی است که از آنها می‌توان برای محاسبه لگاریتمها با هر درجه از دقت استفاده کرد.

برای ساده کردن دستورهای حاصل ابتدا در انتگرال معرف لگاریتم x را با $1-x$ عوض می‌کنیم تا

$$\log(1-x) = \int_1^{1-x} \frac{dt}{t},$$

که برای $x < 1$ معتبر است، بدست آید. این با تغییر متغیر $t = 1-u$ بشکل

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{du}{1-u}$$

درمی‌آید که برای $x < 1$ اعتبار دارد. حال انتگرالده $1/(1-u)$ را به چندجمله‌ایهایی نزدیک می‌کنیم که با انتگرالگیری از آنها تقریبهای متناظر لگاریتم بدست آیند. برای آنکه نحوه عمل را نشان دهیم با تقریب خطی ساده‌ای برای انتگرالده شروع می‌کنیم.

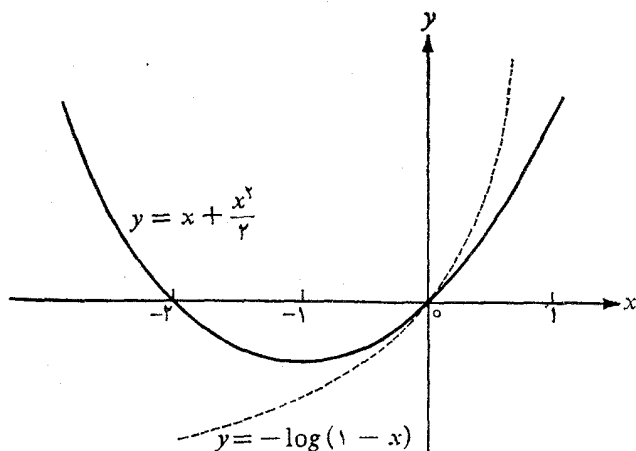
از اتحاد جبری $1-u^2 = (1-u)(1+u)$ دستور

$$(18.6) \quad \frac{1}{1-u} = 1+u + \frac{u^2}{1-u}$$

را بدست می‌آوریم که برای هر $u \neq 1$ حقیقی معتبر است. با انتگرالگیری از این از ۰ تا x ، که $x < 1$ ، خواهیم داشت

$$(19.6) \quad -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{u^2}{1-u} du.$$

نمودار چندجمله‌ای درجه دوم $P(x) = x + x^2/2$ که سمت راست (۱۹.۶) ظاهر شده، به‌مراه نمودار منحنی $y = -\log(1-x)$ ، در شکل ۵.۶ نشان داده شده است. توجه کنید که، برای x های نزدیک صفر، چندجمله‌ای $P(x)$ تقریب خوبی برای $-\log(1-x)$ است. در قضیه بعدی از یک چندجمله‌ای درجه $n-1$ برای تقریب به $1/(1-u)$ استفاده می‌کنیم و بدینوسیله چندجمله‌ای درجه n ی بدست می‌آوریم که به $\log(1-x)$ نزدیک خواهد بود.



شکل ۵.۶ یک تقریب چندجمله‌ای درجه دوم برای منحنی $y = -\log(1-x)$.

قضیه ۳.۶. فرض کنیم P_n چندجمله‌ای درجه n باشد که با

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

داده شده است. در اینصورت برای هر $x < 1$ و هر $n \geq 1$ داریم

$$(۲۰.۶) \quad -\log(1-x) = P_n(x) + \int_0^x \frac{u^n}{1-u} du.$$

برهان. از اتحاد جبری

$$1 - u^n = (1-u)(1+u+u^2+\dots+u^{n-1})$$

دستور

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1-u}$$

را نتیجه می‌گیریم که برای $u \neq 1$ معتبر است. با انتگرال گرفتن از این از ۰ تا x ، که $x < 1$ (۲۰.۶) را بدست خواهیم آورد.

رابطه (۲۰.۶) را می‌توانیم بشکل

$$(۲۱.۶) \quad -\log(1-x) = P_n(x) + E_n(x)$$

بنویسیم که در آن E_n مساوی این انتگرال است:

$$E_n(x) = \int_0^x \frac{u^n}{1-u} du.$$

کمیت $E_n(x)$ مبین خطائی است که در تقریب $-\log(1-x)$ به چند جمله‌ای مرتکب می‌شویم. برای استفاده از (۲۱.۶) در محاسبات لازم است مثبت و منفی بودن خطا و اینکه چقدر می‌تواند بزرگ باشد را بدانیم. قضیه بعدی به ما می‌گوید که خطای $E_n(x)$ برای x های مثبت کوچک مثبت است لکن برای x های منفی با $(-1)^{n+1}$ ، که در آن n درجه چندجمله‌ای تقریب کننده است، همعلامت می‌باشد. این قضیه کرانه‌های بالائی و پائینی مفیدی نیز برای خطا بدست خواهد داد.

قضیه ۴.۶. اگر $0 < x < 1$ نامساویهای

$$(22.6) \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq E_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

را داریم. چنانچه $0 < x < 1$ خطای $E_n(x)$ همان علامت $(-1)^{n+1}$ را دارد و خواهیم داشت

$$(23.6) \quad 0 < (-1)^{n+1} E_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $0 < x < 1$. در انتگرال معرف $E_n(x)$ داریم $0 \leq u \leq x$ پس $1-x \leq 1-u \leq 1$ و در نتیجه انتگرالده در نامساویهای

$$u^n \leq \frac{u^n}{1-u} \leq \frac{u^n}{1-x}$$

صدق می‌کند. چنانچه از این نامساویها انتگرال بگیریم (۲۲.۶) را بدست خواهیم آورد. برای اثبات (۲۳.۶) فرض می‌کنیم $0 < x$ و قرار می‌دهیم $t = -x = |x|$. پس $t > 0$ و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_n(x) = E_n(-t) &= \int_0^{-t} \frac{u^n}{1-u} du = - \int_0^t \frac{(-v)^n}{1+v} dv \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{v^n}{1+v} dv. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $E_n(x)$ همان علامت $(-1)^{n+1}$ را دارد. همچنین داریم

$$(-1)^{n+1} E_n(x) = \int_0^t \frac{v^n}{1+v} dv \leq \int_0^t v^n dv = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

که برهان (۲۳.۶) را تمام می‌کند.

قضیه بعدی دستوری را به ما می‌دهد که برای محاسبات لگاریتمها بسیار مناسب است.

قضیه ۵.۶. اگر $0 < x < 1$ و $m \geq 1$ خواهیم داشت

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} \right) + R_m(x)$$

که در آن جمله خطا، یعنی $R_m(x)$ ، در نامساویهای

$$(24.6) \quad \frac{x^{2m+1}}{2m+1} < R_m(x) \leq \frac{2-x}{1-x} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

صدق می‌کند.

برهان. معادله (۲۱.۶) برای هر $x < 1$ حقیقی معتبر است. اگر در (۲۱.۶) x را با $-x$ عوض کنیم و x را بزرگتر از -1 — نگهداریم به دستور

$$(25.6) \quad -\log(1+x) = P_n(-x) + E_n(-x)$$

خواهیم رسید. چنانچه $-1 < x < 1$ ، (۲۱.۶) و (۲۵.۶) هر دو معتبرند. چنانچه (۲۵.۶) را از (۲۱.۶) کسر کنیم درخواهیم یافت که

$$(26.6) \quad \log \frac{1+x}{1-x} = P_n(x) - P_n(-x) + E_n(x) - E_n(-x).$$

در تفاضل $P_n(x) - P_n(-x)$ توانهای زوج x حذف و توانهای فرد دو برابر می‌شوند. بنابراین، اگر n زوج باشد، مثلاً $n = 2m$ ، خواهیم داشت

$$P_{2m}(x) - P_{2m}(-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} \right),$$

و معادله (۲۶.۶) بصورت

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} \right) + R_m(x)$$

درمی‌آید که در آن $R_m(x) = E_{2m}(x) - E_{2m}(-x)$. این دستور در صورتی معتبر است که x در بازه $-1 < x < 1$ باشد. حال x را به بازه $0 < x < 1$ محدود می‌کنیم. در این صورت تخمینهای قضیه ۴.۶ به ما

$$0 < -E_{2m}(-x) \leq \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \quad \text{و} \quad \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \leq E_{2m}(x) \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

را خواهند داد. با جمع اینها نامساویهای (۲۴.۶) را بدست می‌آوریم زیرا $1 + 1/(1-x) = (2-x)/(1-x)$

مثال. با فرض $m = 2$ و $x = 1/3$ داریم $(1+x)/(1-x) = 2$ و به دستور $\log 2 = 2(1/3 + 1/81) + R_2(1/3)$ می‌رسیم که در آن

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 < R_2 \left(\frac{1}{3} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \frac{1}{486}$$

این، با مقدار بسیار کمی محاسبه، نامساویهای $0.6935 < \log 2 < 0.6921$ را به ما خواهد داد.

۱۱.۶ تمرینات

۱. از قضیه ۵.۶ با فرض $x = 1/3$ و $m = 5$ استفاده کرده برای $\log 2$ تقریبی بیابید. در محاسبات خود نه رقم اعشار بکار برید و نامساویهای

$$0.6931460 < \log 2 < 0.6931476$$

را بدست آورید.

۲. هرگاه $x = 1/5$ آنگاه $x/(1-x) = 3/2$. پس قضیه ۵.۶ به ما این امکان را می‌دهد تا $\log 3$ را بر حسب $\log 2$ حساب کنیم. با فرض $x = 1/5$ و $m = 5$ در قضیه ۵.۶ استفاده از تمرین ۱ نامساویهای $1.098611 < \log 3 < 1.098617$ را بدست آورید. توجه: چون $\log 2 < \log e < \log 3$ نتیجه می‌شود که $2 < e < 3$.
۳. از قضیه ۵.۶ با فرض $x = 1/9$ استفاده کرده $\log 5$ را بر حسب $\log 2$ حساب کنید. درجه چند جمله‌ای تقریب کننده را آنقدر بزرگ بگیرید که نامساویهای

$$1.6094338 < \log 5 < 1.6094338$$

۴. از قضیه ۵.۶ با فرض $x = 1/6$ استفاده کرده $\log 7$ را بر حسب $\log 5$ حساب کنید. درجه چند جمله‌ای تقریب کننده را آنقدر بزرگ بگیرید که نامساویهای

$$1.945907 < \log 7 < 1.945911$$

۵. از تمرینات ۱ تا ۴ استفاده کرده جدول کوتاهی برای $\log n$ ، برای $n = 2, 3, \dots, 10$ ، بسازید. بکمک نامساویهای تمرینات ۱ تا ۴ هر درایه از جدول را با حداکثر رقم اعشاری دست که از آن اطمینان دارید ثبت نمایید.

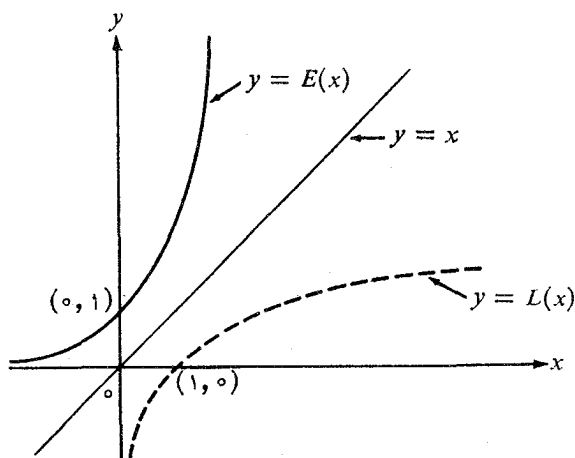
۱۲.۶ تابع نمائی

قضیه ۲.۶ نشان می‌دهد که بازای هر x حقیقی یک و فقط یک y هست که $L(y) = x$. بنا براین می‌توان از فرایند معکوس سازی استفاده کرده y را بعنوان تابعی از x تعریف کرد. تابع معکوس حاصل تابع نمائی، یا پاد لگاریتم، خوانده شده و با E نموده می‌شود.

تعریف. بازای هر x حقیقی $E(x)$ مساوی آن y ی تعریف می‌کنیم که لگاریتمش x است، یعنی $y = E(x)$ به معنی $L(y) = x$ می‌باشد.

قلرو E تمام محور حقیقی است؛ برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. نمودار

E ، که در شکل ۶.۶ نشان داده شده، از نمودار لگاریتم با انعکاس نسبت به خط $y = x$



شکل ۶.۶ نمودار تابع نمائی از نمودار لگاریتم با انعکاس نسبت به خط $y = x$ بدست آمده است.

بدست آمده است. چون L و E معکوسهای یکدیگرند پس برای هر x ، $L[E(x)] = x$ و، برای هر y ، $E[L(y)] = y$ ، $y > 0$.

هر خاصیتی از لگاریتم را می‌توان به خاصیتی از تابع نمائی بدل کرد. مثلاً، چون لگاریتم بر قسمت مثبت محور حقیقی اکیداً صعودی و پیوسته است، از قضیه ۱۰.۳ نتیجه می‌شود که تابع نمائی بر تمام محور حقیقی اکیداً صعودی و پیوسته می‌باشد. همتای قضیه ۱.۶ قضیه زیر خواهد بود.

قضیه ۶.۶. تابع نمائی دارای این خواص است:

(الف) $E(1) = e$ ، $E(0) = 1$

(ب) برای هر x ، $E'(x) = E(x)$

(پ) برای هر a و b ، $E(a + b) = E(a)E(b)$

برهان. قسمت (الف) از معادلات $L(1) = 0$ و $L(e) = 1$ نتیجه می‌شود. اینک (پ)، یعنی معادله تابعی برای تابع نمائی، را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم a و b را داده باشند و قرار می‌دهیم

$$x = E(a), y = E(b), c = L(xy).$$

در این صورت داریم

$$L(x) = a, L(y) = b, E(c) = xy.$$

اما $c = a + b$ یعنی $c = L(xy) = L(x) + L(y) = a + b$ لذا

$$E(c) = E(a + b).$$

ازسوی دیگر، $E(c) = xy = E(a)E(b)$ ، پس $E(a + b) = E(a)E(b)$ ، که (ب) را ثابت خواهد کرد.

حال از معادله تابعی برای اثبات (ب) کمک می‌گیریم. خارج قسمت تفاضلی برای $E'(x)$ چنین است:

$$\frac{E(x + h) - E(x)}{h} = \frac{E(x)E(h) - E(x)}{h} = E(x) \frac{E(h) - 1}{h}.$$

پس برای اثبات (ب) باید نشان دهیم که

$$(27.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h) - 1}{h} = 1.$$

کسر مذکور در (27.6) را بر حسب لگاریتم بیان می‌کنیم. فرض کنیم $k = E(h) - 1$ در اینصورت $k + 1 = E(h)$ پس $L(k + 1) = h$ و کسر مزبور چنین خواهد بود:

$$(28.6) \quad \frac{E(h) - 1}{h} = \frac{k}{L(k + 1)}.$$

حال، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $E(h) \rightarrow 1$ زیرا تابع نمائی در 0 پیوسته است. چون $k = E(h) - 1$ پس وقتی $h \rightarrow 0$ خواهیم داشت $k \rightarrow 0$ ، اما،

$$\frac{L(k + 1)}{k} = \frac{L(k + 1) - L(1)}{k} \rightarrow L'(1) = 1, k \rightarrow 0$$

این، با توجه به (28.6)، (27.6) را ثابت می‌کند که آن نیز بنوبه خود (ب) را ثابت خواهد کرد.

۱۳.۶ تابعهای نهائی بیان شده بصورت توانهایی از e

معادله تابعی $E(a + b) = E(a)E(b)$ نتایج جالب بسیار دارد. مثلاً این معادله را می‌شود بکار برد و ثابت کرد که بازای هر عدد گویای r ،

$$(29.6) \quad E(r) = e^r.$$

ابتدا در معادله تابعی فرض می‌کنیم $b = -a$ تا

$$E(a)E(-a) = E(0) = 1$$

را بدست آوریم، و در نتیجه بازای هر a حقیقی خواهیم داشت $E(-a) = 1/E(a)$

با فرض $b = a$, $b = 2a$, $\dots$, $b = na$ در معادلهٔ تابعی بترتیب داریم
 $E(2a) = E(a)^2$, $E(3a) = E(a)^3$, و، بطور کلی، بازای هر عدد صحیح و مثبت n
 خواهیم داشت

$$(30.6) \quad E(na) = E(a)^n.$$

بهخصوص، وقتی $a = 1$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$E(n) = e^n,$$

حال آنکه بازای $a = 1/n$ داریم $E(1) = E(1/n)^n$. چون $E(1/n) > 0$ این
 ایجاب می‌کند که

$$(31.6) \quad E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n}.$$

پس اگر در (30.6) قرار دهیم $a = 1/m$ و از (31.6) استفاده کنیم درمی‌یابیم که بازای
 کلیهٔ اعداد صحیح و مثبت n و m ،

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(\frac{1}{m}\right)^n = e^{n/m}.$$

بعبارت دیگر، (29.6) را بازای هر عدد گویای مثبت r ثابت کرده‌ایم. از آنجا که
 $E(-r) = 1/E(r) = e^{-r}$ رابطهٔ فوق برای کلیهٔ اعداد گویای منفی r نیز برقرار
 خواهد بود.

۱۴.۶ تعریف e^x بازای x های حقیقی دلخواه

در بخش پیش ثابت کردیم که وقتی x عدد گویای دلخواهی باشد $e^x = E(x)$. اکنون e^x
 را برای x های گنگ این طور تعریف می‌کنیم:

$$(32.6) \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی، } e^x = E(x).$$

یک توجیه این تعریف این است که با استفاده از آن می‌شود ثابت کرد که قانون نماها، یعنی

$$(33.6) \quad e^a e^b = e^{a+b},$$

برای کلیهٔ نماهای حقیقی a و b معتبر است. چنانچه از تعریف (32.6) استفاده کنیم قانون
 (33.6) بدیهی است زیرا چیزی جز بیان مجدد معادلهٔ تابعی نمی‌باشد.

نماد e^x برای $E(x)$ نمادی است که معمولاً برای تابع نمائی بکار می‌رود. گاهی
 $\exp(x)$ بجای e^x نوشته می‌شود، بهخصوص وقتی دستورهای ظاهر شده در نما پیچیده
 باشند. ما گهگاه از $E(x)$ در این فصل استفاده می‌کنیم لکن بعداً به e^x روی خواهیم آورد.
 ما تابع نمائی را طوری تعریف کرده‌ایم که دو معادله

$$x = \log y \text{ و } y = e^x$$

دقیقاً یک معنی را می‌دهند. در بخش بعد توانهای کلتر را تعریف می‌کنیم بطوری که معادلات $y = a^x$ و $x = \log y$ معادل یکدیگر خواهند بود.

۱۵.۶ تعریف a^x برای $a > 0$ و x حقیقی

اکنون که e^x را برای هر x حقیقی دلخواه تعریف کرده‌ایم در تعریف a^x بازای هر $a > 0$ مطلقاً مشکلی وجود نخواهد داشت. یک طریقه این است که a^x را نشانگر آن y بدانیم که $\log_a y = x$. اما این برای $a = 1$ کارا نیست زیرا لگاریتمها در پایه ۱ تعریف نشده‌اند. راه دیگر آن است که a^x را با دستور

$$a^x = e^{x \log a} \quad (۲۴.۶)$$

تعریف کنیم. روش دوم براولی رجحان دارد زیرا، اولاً، برای کلیه a های مثبت (با انضمام $a = 1$) با معنی است و، ثانیاً، اثبات خواص زیر مربوط به تابعهای نمائی را آسان می‌سازد:

$$\begin{aligned} \log a^x &= x \log a; & (ab)^x &= a^x b^x; \\ a^x a^y &= a^{x+y}; & (a^x)^y &= (a^y)^x = a^{xy}; \\ \text{هرگاه } a &\neq 1 \text{ آنگاه } y = a^x \text{ اگر و فقط اگر } x = \log_a y. \end{aligned}$$

اثبات این خواص بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

همانطور که نمودار تابع نمائی از نمودار تابع لگاریتم با انعکاس نسبت به خط $y = x$ حاصل شد می‌توان نمودار $y = a^x$ را از نمودار $y = \log_a x$ بوسیله انعکاس نسبت به همان خط بدست آورد؛ مثالهایی در شکل ۷.۶ نموده شده‌اند. منحنیهای شکل ۷.۶ از منحنیهای شکل ۳.۶ با انعکاس بدست آمده‌اند. البته نمودار متناظر $a = 1$ خط افقی $y = 1$ خواهد بود.

۱۶.۶ دستورهای مشتقگیری و انتگرالگیری مربوط به تابعهای نمائی

یکی از جالبترین خواص تابع نمائی دستور

$$E'(x) = E(x) \quad (۳۵.۶)$$

است که به ما برابری این تابع را با مشتقش بازگو می‌کند. چنانچه از این به همراه قاعده زنجیره‌ای استفاده کنیم می‌توانیم برای توابع نمائی در هر پایه مثبت a دستورهای مشتقگیری بیابیم.

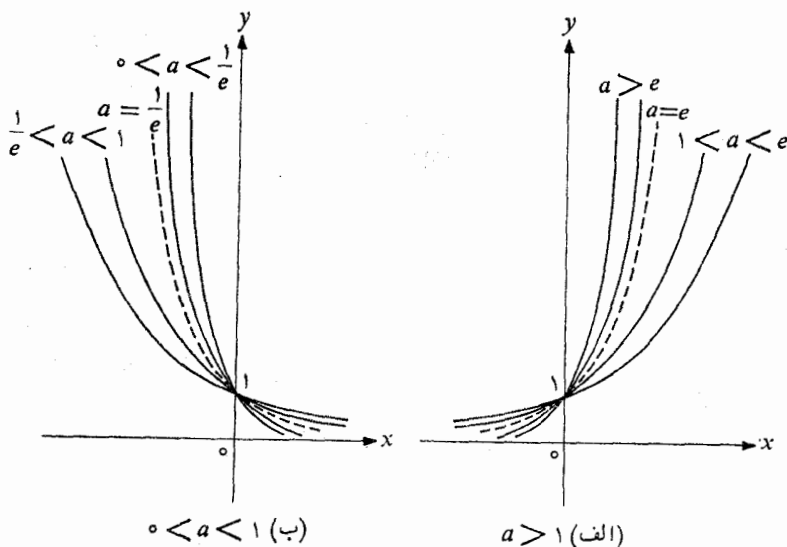
فرض کنیم بازای $x > 0$ ، $f(x) = a^x$. طبق تعریف a^x می‌توان نوشت

$$f(x) = e^{x \log a} = E(x \log a);$$

پس، بنا بر قاعده زنجیره‌ای، خواهیم داشت

$$(۳۶.۶) f'(x) = E'(x \log a) \cdot \log a = E(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a.$$

بعبارت دیگر، در مشتقگیری از a^x فقط a^x در سازه ثابت $\log a$ ضرب می‌شود، این سازه وقتی $a = e$ مساوی یک خواهد بود.



شکل ۷.۶ نمودار $y = a^x$ برای مقادیر مختلفی از a .

بی‌شک این دستورهای مشتقگیری خود بخود به دستورهای انتگرالگیری متناظری منجر می‌شوند. بعنوان مثال، (۳۵.۶) نتیجه می‌دهد که

$$(۳۷.۶) \int e^x dx = e^x + C,$$

در حالی که (۳۶.۶) دستور کلیتر

$$(۳۸.۶) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

را بهما خواهد داد. اینها را می‌توان با روش جانشانی تعمیم بیشتری داد. کافی است در سراسر (۳۷.۶) و (۳۸.۶) x را با u عوض کنیم تا

$$(۳۹.۶) \int e^u du = e^u + C, \int a^u du = \frac{a^u}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

بدست آیند که در اینجا u مبین هر تابع با مشتق پیوسته می‌باشد. چنانچه بنویسیم $u = f(x)$ و $du = f'(x)dx$ ، دستورهای (۳۹.۶) بصورت

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C, \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C$$

درمی آیند که رابطه دوم بازای $a > 0$ و $a \neq 1$ اعتبار دارد.

مثال ۱. انتگرال $\int x^2 e^{x^3} dx$ را بگیرید.

حل. فرض می کنیم $u = x^3$. پس $du = 3x^2 dx$ و داریم

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} (3x^2 dx) = \frac{1}{3} \int e^u u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

مثال ۲. انتگرال $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ را بگیرید.

حل. فرض می کنیم $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. پس

$$du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \sqrt{x} \left(\frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = 2 \int 1 du \\ &= 2 \frac{u}{\log 2} + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\log 2} + C. \end{aligned}$$

مثال ۳. انتگرال $\int \cos x e^{2 \sin x} dx$ را بگیرید.

حل. فرض کنیم $u = 2 \sin x$. پس $du = 2 \cos x dx$ ، و در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \cos x e^{2 \sin x} dx &= \frac{1}{2} \int e^{2 \sin x} (2 \cos x dx) = \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2 \sin x} + C. \end{aligned}$$

مثال ۴. انتگرال $\int e^x \sin x dx$ را بگیرید.

حل. فرض می کنیم $u = e^x$ و $dv = \sin x dx$. پس $du = e^x dx$ و $v = -\cos x$

و درخواهیم یافت که

$$\begin{aligned}
 (۴۰.۶) \quad \int e^x \sin x dx &= \int u dv = uv - \int v du \\
 &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx + C.
 \end{aligned}$$

انتگرال $\int e^x \cos x dx$ بهمین نحو گرفته می‌شود. قرار می‌دهیم $dv = \cos x dx$, $u = e^x$ و بدست می‌آوریم که $v = \sin x$, $du = e^x dx$

$$(۴۱.۶) \quad \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx + C.$$

چنانچه این را در (۴۰.۶) بگذاریم می‌توانیم رابطه را نسبت به $\int e^x \sin x dx$ حل کرده و با یکی کردن ثابتها بدست آوریم که

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

توجه کنید که می‌شود از این در (۴۱.۶) استفاده کرده

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C$$

را نیز بدست آورد.

مثال ۵. انتگرال $\int dx/(1 + e^x)$ را بگیرید.

حل. یک راه پرداختن به این مثال آن است که انتگرالده را بصورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}.$$

حال قرار می‌دهیم $u = e^{-x} + 1$ پس $du = -e^{-x} dx$ و بدست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx &= - \int \frac{-e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} = - \int \frac{du}{u} = - \log|u| + C \\
 &= - \log(1 + e^{-x}) + C.
 \end{aligned}$$

نتیجه حاصل را می‌توان با دستکاری در لگاریتم بصورت‌های دیگر نوشت. بعنوان مثال،

$$\begin{aligned}
 - \log(1 + e^{-x}) &= \log \frac{1}{1 + e^{-x}} = \log \frac{e^x}{e^x + 1} \\
 &= \log(e^x) - \log(e^x + 1) = x - \log(1 + e^x).
 \end{aligned}$$

راه دیگر پرداختن به همین مثال آن است که بنویسیم

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = x - \int \frac{du}{u}$$

که در آن $u = 1 + e^x$. لذا

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \log(1+e^x) + C$$

را خواهیم داشت که یکی از اشکال بدست آمده در فوق می باشد.

۱۷.۶ تمرینات

در هریک از تمرینات ۱ تا ۱۲، $f'(x)$ را بیابید. در هر حالت فرض این است که تابع f بازای آن x های حقیقی تعریف شده که دستور داده شده برای $f(x)$ با معنی است.

$$f(x) = e^{x^2} \quad ۲ \quad f(x) = e^{x-1} \quad ۱$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad ۴ \quad f(x) = e^{-x^2} \quad ۳$$

$$f(x) = 2^x \quad ۶ \quad f(x) = e^{1/x} \quad ۵$$

$$f(x) = e^{\sin x} \quad ۸ \quad f(x) = 2^{x^2} \quad [2^{(x^2)} \text{ یعنی } 2^{x^2}] \quad ۷$$

$$f(x) = e^{\log x} \quad ۱۰ \quad f(x) = e^{\cos x} \quad ۹$$

$$[e^{(e^x)}] f(x) = e^{e^x} \quad ۱۲ \quad [e^{(e^x)} \text{ یعنی } e^{e^x}] f(x) = e^{e^x} \quad ۱۱$$

انتگرالهای نامعین تمرینات ۱۳ تا ۱۸ را حساب کنید.

$$\int x e^{-x} dx \quad ۱۴ \quad \int x e^x dx \quad ۱۳$$

$$\int x^2 e^{-x} dx \quad ۱۶ \quad \int x^2 e^x dx \quad ۱۵$$

$$\int x^2 e^{-x^2} dx \quad ۱۸ \quad \int e^{\sqrt{x}} dx \quad ۱۷$$

۱۹. کلیه ثابتهای a و b را که $e^x = b + \int_a^x e^t dt$ مشخص نمایید.

۲۵. فرض کنید $A = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ و $B = \int e^{ax} \sin bx \, dx$ که در آنها a و b ثابت بوده و هردو صفر نیستند. از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء استفاده کرده نشان دهید که

$$aA - bB = e^{ax} \cos bx + C_1, \quad aB + bA = e^{ax} \sin bx + C_2$$

که در آنها C_1 و C_2 ثابتهای دلخواهی می باشند. با حل این روابط نسبت به A و B دستورهای انتگرالگیری زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

در تمرینات ۲۱ تا ۳۴، $f'(x)$ را بیابید. در هر حالت فرض بر این است که تابع f بازای آن x های حقیقی تعریف شده که دستور داده شده برای $f(x)$ با معنی است. در بعضی حالات ممکن است مشتقگیری لگاریتمی سبب تسهیل کار شود.

$$f(x) = x^x \quad ۲۱. \quad f(x) = (1+x)(1+e^x) \quad ۲۲.$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ۲۳. \quad f(x) = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad ۲۴.$$

$$f(x) = \log [\log (\log x)] \quad ۲۵. \quad f(x) = \log (e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) \quad ۲۶.$$

$$f(x) = x^{x^x} \quad ۲۷. \quad f(x) = (\log x)^x \quad ۲۸.$$

$$f(x) = x^{\log x} \quad ۲۹. \quad f(x) = \frac{(\log x)^x}{x^{\log x}} \quad ۳۰.$$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} \quad ۳۱.$$

$$f(x) = x^{1/x} \quad ۳۲.$$

$$f(x) = \frac{x^x (3-x)^{1/3}}{(1-x)(3+x)^{1/3}} \quad ۳۳. \quad f(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{b_i} \quad ۳۴.$$

۳۵. فرض کنید $f(x) = x^r$ که در آن $x > 0$ و r عدد حقیقی دلخواهی است. دستور $f'(x) = rx^{r-1}$ پیشتر برای r گویا ثابت شد.

(الف) نشان دهید که این دستور برای هر r حقیقی نیز برقرار است. [داهنمایی: بنویسید $x^r = e^{r \log x}$]

(ب) توضیح دهید که تحت چه شرائطی قسمت (الف) برای $x \leq 0$ برقرار می شود.

۳۶. از تعریف $a^x = e^{x \log a}$ استفاده کرده خواص زیر را برای توابع نمائی کلی

نتیجه بگیرید:

$$(\text{الف}) \log a^x = x \log a$$

$$(\text{ب}) (ab)^x = a^x b^x$$

$$(\text{پ}) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(\text{ت}) (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$$

(ث) هرگاه $a \neq 1$ آنگاه $y = a^x$ اگر و فقط اگر $x = \log_a y$.

۳۷. فرض کنید اگر $a > 0$ ، $f(x) = (a^x + a^{-x})/2$ نشان دهید که

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

۳۸. فرض کنید $f(x) = e^{cx}$ که در آن c عدد ثابتی است. نشان دهید که $f'(0) = c$ و ازاین استفاده کرده رابطه حدی زیر را نتیجه بگیرید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{cx} - 1}{x} = c.$$

۳۹. فرض کنید تابع f همهجا برمحور حقیقی تعریف شده و دارای مشتقی باشد که بازای هر x در معادله

$$f'(x) = cf(x),$$

که در آن c عدد ثابتی است، صدق کند. ثابت کنید عدد ثابتی چون K هست بطوریکه بازای هر x ، $f(x) = Ke^{cx}$ [داهمنائی؛ فرض کنید $g(x) = f(x)e^{-cx}$ و $g'(x)$ را درنظر بگیرید.]

۴۰. فرض کنید f تابعی باشد که همهجا برمحور حقیقی تعریف شده است. همچنین f در معادله تابعی زیر صدق کند:

$$(\text{یکم}) \quad f(x+y) = f(x)f(y), \quad y, x \text{ بازای هر}$$

(الف) فقط با استفاده از معادله تابعی ثابت کنید که $f(0)$ یا 0 است یا 1 . همچنین ثابت کنید که هرگاه $f(0) \neq 0$ آنگاه بازای هر x ، $f(x) \neq 0$. علاوه بر (یکم) فرض کنید $f'(x)$ بازای هر x وجود دارد و ایسن احکام را ثابت نمائید:

$$(\text{ب}) \text{ بازای هر } x \text{ و } y, f'(x)f(y) = f'(y)f(x).$$

$$(\text{پ}) \text{ عدد ثابتی مانند } c \text{ هست که بازای هر } x, f'(x) = cf(x).$$

$$(\text{ت}) \text{ چنانچه } f(0) \neq 0, f(x) = e^{cx}, \text{ [داهمنائی؛ ر.ک. تمرین ۳۹].}$$

۴۱. (الف) فرض کنید بازای هر x ، $f(x) = e^x - 1 - x$ ، ثابت کنید که اگر $x \geq 0$ ، $f'(x) \geq 0$ و اگر $x \leq 0$ ، $f'(x) \leq 0$. با استفاده ازاین مطلب نامساویهای

$$e^x > 1 + x, e^{-x} > 1 - x$$

را، که برای هر $x > 0$ معتبرند، نتیجه بگیرید. (اینها وقتی $x = 0$ به تساوی تبدیل می‌شوند.)

از این نامساویها انتگرال بگیرید تا نامساویهای دیگر زیر، که برای $x > 0$ اعتبار دارند، نتیجه شوند:

$$(ب) \quad e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}, e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$(پ) \quad e^{-x} > 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}, e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

(ت) تعمیم نامساویهای فوق را حدس زده و حدس خود را ثابت نمائید.

۴۲. چنانچه n عدد صحیح مثبتی بوده و $x > 0$ نشان دهید که

$$e^x < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \text{ اگر } x < n, \text{ و } \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^x$$

با انتخاب n مناسبی نتیجه بگیرید که $2.718 < e < 2.799$.

۴۳. فرض کنید $f(x, y) = x^y$ که در آن $x > 0$. نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x \text{ و } \frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$

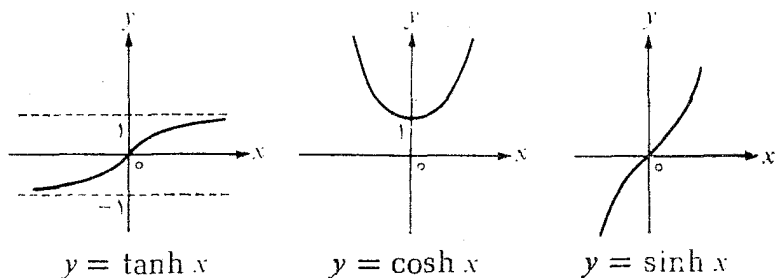
۱۸.۶ توابع هذلولوی

بعضی از ترکیبات توابع نمایی مکرر در آنالیز ظاهر می‌شوند، و ارزش آن را دارد که نامی خاص بر آنها نهاده و بعنوان توابع جدید مطالعه گردند. این ترکیبات، که سینوس هذلولوی ($\sinh$)، کسینوس هذلولوی ($\cosh$)، تانژانت هذلولوی ($\tanh$)، و مانند اینها، خوانده می‌شوند، این طور تعریف می‌گردند:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x}.$$

صفت «هذلولوی» بدان علت است که این توابع بطور هندسی به هذلولی مربوطند، تقریباً بهمان صورتی که توابع مثلثاتی به دایره ارتباط دارند. این وابستگی در فصل ۱۴، زمانی که هذلولی را مطالعه می‌کنیم، با تفصیل بیشتر بحث خواهد شد. نمودارهای $\sinh$ ، $\cosh$ و $\tanh$ در شکل ۸.۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۸.۶ نمودارهای توابع هذلولوی.

توابع هذلولوی خواصی که مشابه خواص توابع مثلثاتی باشند بسیار دارند. برخی از اینها در بخش زیر بعنوان تمرین آمده‌اند.

۱۹.۶ تمرینات

خواص توابع هذلولوی را که در تمرینات ۱ تا ۱۵ ذکر شده‌اند بدست آورده و، هر جا که مقدور بود، آنها را با خواص نظیرشان در توابع مثلثاتی مقایسه کنید.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad ۱.$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad ۲.$$

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad ۳.$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad ۴.$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad ۵.$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad ۶.$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad ۷.$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad ۸.$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad ۹.$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} \quad ۱۰.$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx \quad (n \text{ یک عدد صحیح}) \quad ۱۱.$$

$$2 \sinh^2 \frac{1}{2} x = \cosh x - 1 \quad ۱۲.$$

$$2 \cosh^2 \frac{1}{2} x = \cosh x + 1 \quad ۱۳.$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \quad ۱۴.$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \quad ۱۵$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ۱۶$$

$$\sinh x > 0 \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ۱۷$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ۱۸$$

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ۱۹$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ۲۰$$

دستورهای مشتقگیری تمرینات ۲۱ تا ۲۶ را ثابت کنید.

$$D \cosh x = \sinh x \quad ۲۲ \quad D \sinh x = \cosh x \quad ۲۱$$

$$D \coth x = -\operatorname{csch}^2 x \quad ۲۴ \quad D \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad ۲۳$$

$$D \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \quad ۲۶ \quad D \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad ۲۵$$

۲۰.۶ مشتقات توابع معکوس

ما فرایند معکوس سازی را برای ساختن تابع نمایی از تابع لگاریتم بکار برده ایم. در بخش بعدی توابع مثلثاتی را معکوس خواهیم کرد. در این مرحله شایسته است یک قضیه کلی را بیان کنیم که نشان دهد که فرایند معکوس سازی مشتقگیری یک تابع را به معکوس آن انتقال خواهد داد.

قضیه ۲۰.۶. فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی و پیوسته بوده و g معکوس آن باشد. هرگاه $f'(x)$ در نقطه x از (a, b) وجود داشته و مخالف صفر باشد آنگاه $g'(y)$ نیز در نقطه متناظر y ، که $y = f(x)$ ، وجود داشته و مخالف خواهد بود. بعلاوه، دو مشتق متقابل یکدیگرند؛ یعنی داریم

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (۲۰.۶)$$

توجه: هرگاه نمادهای لایب نیتز را بکار برده بجای $f(x)$ بنویسیم y ، بجای $f'(x)$ بنویسیم dy/dx ، بجای $g(y)$ بنویسیم x ، و بجای $g'(y)$ بنویسیم dx/dy ، آنگاه معادله (۲۰.۶) بصورت

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

درمی آید که ظاهر یک اتحاد جبری بدیهی را دارد.

پرهان. فرض کنیم x نقطه‌ای در (a, b) باشد بطوری که $f'(x)$ وجود دارد و صفر نیست، و قرار می‌دهیم $y = f(x)$. نشان می‌دهیم که خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k},$$

وقتی $k \rightarrow 0$ به حد $1/f'(x)$ نزدیک می‌شود.

قرار می‌دهیم $h = g(y+k) - g(y)$. چون $x = g(y)$ این ایجاب می‌کند که $h = g(y+k) - g(y)$ یا $x+h = g(y+k)$. پس $x+h = f(x+h)$ و در نتیجه $k = f(x+h) - f(x)$. توجه کنید که اگر $k \neq 0$ ، $h \neq 0$ زیرا g اکیداً صعودی است. بنابراین، اگر $k \neq 0$ ، خارج قسمت تفاضلی مورد بحث چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} (43.6) \quad \frac{g(y+k) - g(y)}{k} &= \frac{h}{f(x+h) - f(x)} \\ &= \frac{1}{[f(x+h) - f(x)]/h}. \end{aligned}$$

وقتی $k \rightarrow 0$ ، بدلیل پیوستگی g در y [خاصیت (ب) در قضیه ۱۰.۳]، داریم $g(y+k) - g(y) \rightarrow 0$. این یعنی که، وقتی $k \rightarrow 0$ ، $h \rightarrow 0$. اما می‌دانیم که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، [چون $f'(x)$ وجود دارد] خارج قسمت تفاضلی موجود در مخرج کسر طرف راست (۴۳.۶) به $f'(x)$ نزدیک می‌شود. بنابراین، وقتی $k \rightarrow 0$ ، کسر سمت چپ (۴۳.۶) به حد $1/f'(x)$ نزدیک خواهد شد. این قضیه ۷.۶ را ثابت می‌کند.

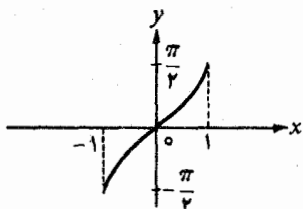
۲۱.۶ معکوسهای توابع مثلثاتی

فرایند معکوس سازی را می‌توان درمورد توابع مثلثاتی بکار برد. فرض کنیم با تابع سینوس شروع کرده باشیم. برای تعیین معکوس منحصر بفرد باید سینوس را روی بازه‌ای در نظر بگیریم که در آن یکنوا باشد. البته از این بازه‌ها زیادند، مثلاً $[-\pi/2, \pi/2]$ ، $[\pi/2, 3\pi/2]$ ، $[-3\pi/2, -\pi/2]$ ، و غیره، و واقعاً اینکه کدام را اختیار کنیم اهمیتی ندارد. رسم این شده که $[-\pi/2, \pi/2]$ را انتخاب کرده و تابع جدید f را این طور تعریف می‌نمایند:

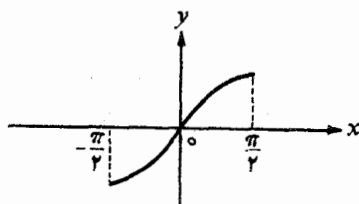
$$f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

تابع f که باین صورت تعریف شده بر بازه $[-\pi/2, \pi/2]$ اکیداً صعودی است و هر

مقدار بین -1 و 1 را دقیقاً یکبار می‌گیرد. (ر.ک. شکل ۹.۶). از اینرو تابع منحصر بفردی مثل g که بر $[-1, 1]$ تعریف شده وجود دارد که به هر عدد y در $[-1, 1]$ آن x ی را در $[-\pi/2, \pi/2]$ نسبت می‌دهد که $y = \sin x$. این تابع g را معکوس



شکل ۱۰.۶ $y = \arcsin x$



شکل ۹.۶ $y = \sin x$

سینوس یا آرک سینوس می‌خوانند و مقدارش در y با $\arcsin y$ یا $\sin^{-1} y$ ، نموده می‌شود. بنابراین،

$$u = \arcsin v \text{ یعنی } v = \sin u \text{ و } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

نمودار آرک سینوس در شکل ۱۰.۶ نشان داده شده است. یادآور می‌شویم که آرک سینوس در خارج بازه $[-1, 1]$ تعریف نشده است.

مشتق آرک سینوس را می‌توان از دستور (۴۲.۶) در بخش ۲۰.۶ بدست آورد. در این مورد داریم $f'(x) = \cos x$ و این در بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ مخالف صفر است. پس دستور (۴۲.۶) نتیجه می‌دهد که

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1$$

این نتیجه را می‌توان با تغییر نماد چنین نوشت:

$$(44.6) \quad D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

البته این رابطه دستور انتگرالگیری جدید

$$(45.6) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \arcsin t$$

را به ما می‌دهد که بازای $-1 < x < 1$ اعتبار دارد.

توجه: این دستور ممکن است بعنوان نقطه شروع نظریه کاملاً تحلیلی توابع مثلثاتی، بدون هیچ توسلی به هندسه، گرفته شود. نحوه عمل بطور خلاصه باین صورت است که کار با تابع

آرک‌سینوس، که توسط انتگرال (۴۵.۶) تعریف شده (درست همانطور که لگاریتم را بوسیله انتگرال تعریف کردیم)، آغاز می‌شود. بعد تابع سینوس بعنوان معکوس آرک‌سینوس و تابع کسینوس بعنوان مشتق سینوس تعریف می‌گردد. برای انجام این برنامه بطور کامل جزئیات بسیاری لازم است و ما قصد اینکه آنها را در اینجا توضیح دهیم نداریم. در فصل ۱۱ روش دیگری برای معرفی توابع مثلثاتی بطور تحلیلی ذکر خواهد شد.

ممکن است دستور (۴۵.۶) را با نماد لایب نیتز برای انتگرالهای نامعین بشکل

$$(۴۶.۶) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

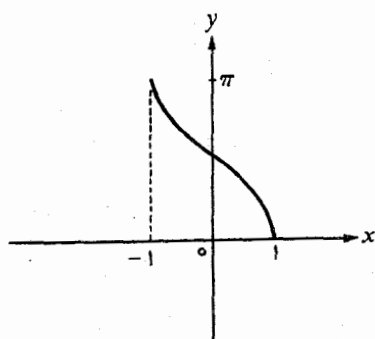
بنویسیم. انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء دستور انتگرالگیری دیگر زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

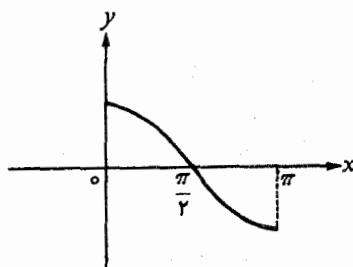
کسینوس و تانژانت با روش مشابهی معکوس می‌شوند. در مورد کسینوس رسم این است که معکوس‌سازی در بازه $[0, \pi]$ صورت می‌گیرد. (ر.ک. شکل ۱۱.۶). تابع معکوس حاصل، که آرک‌کسینوس نام دارد، این طور تعریف می‌گردد:

$$u = \arccos v \quad \text{یعنی} \quad v = \cos u \quad \text{و} \quad 0 \leq u \leq \pi$$

نمودار تابع آرک‌کسینوس در شکل ۱۲.۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۲.۶ $y = \arccos x$



شکل ۱۱.۶ $y = \cos x$

برای معکوس کردن تانژانت بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ را اختیار کرده (ر.ک. شکل ۱۳.۶) و آرک‌تانژانت را این طور تعریف می‌نمائیم:

$$u = \arctan v \text{ یعنی } v = \tan u \text{ و } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}.$$

شکل ۱۴.۶ قسمتی از نمودار تابع آرک تانژانت را نشان می‌دهد.

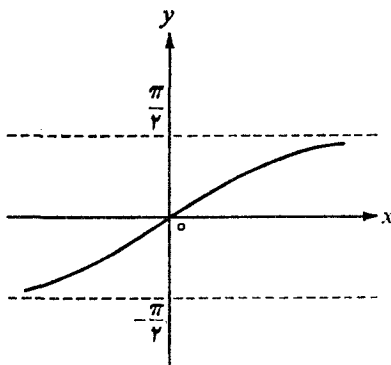
استدلالی که در بدست آوردن (۴۴.۶) مورد استفاده قرار گرفت می‌تواند در مورد توابع آرک کسینوس و آرک تانژانت نیز بکار رود، و این عمل دستورهای مشتقگیری زیر را نتیجه خواهد داد:

$$(۴۷.۶) \quad D \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

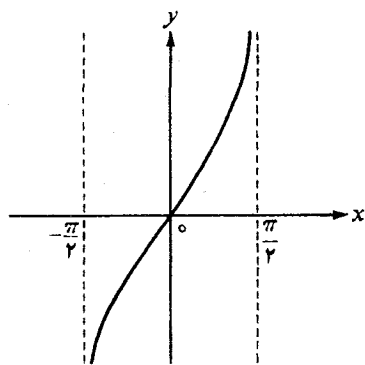
که برای $-1 < x < 1$ معتبر است، و

$$(۴۸.۶) \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

که برای کلیه x های حقیقی اعتبار دارد.



شکل ۱۴.۶ $y = \arctan x$.



شکل ۱۳.۶ $y = \tan x$.

چنانچه (۴۷.۶) را به یک دستور انتگرالگیری تبدیل کنیم باین صورت درمی‌آید:

$$(۴۹.۶) \quad \text{اگر } -1 < x < 1,$$

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -(\arccos x - \arccos 1) = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

از مقایسه (۴۹.۶) با (۴۵.۶) رابطه $\pi/2 - \arccos x = \arcsin x$ را نتیجه می‌گیریم. (این را می‌توان از اتحاد آشنای $\sin(\pi/2 - y) = \cos y$ با نوشتن $y = \arccos x$ نیز بدست آورد.) ممکن است (۴۹.۶) را با نماد لایب نیتز برای انتگرالهای نامعین بصورت زیر بنویسیم:

$$(50.6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

بهمین نحو از (48.6) بدست می آوریم که

$$(51.6) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \text{یا} \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

چنانچه از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء در معیت (50.6) و (51.6) استفاده کنیم می توانیم دستورهای انتگرالگیری دیگر زیر را نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} \int \arccos x dx &= x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \\ \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

معکوسهای کتانزانت، سکانت، و کسکانت را می توان با این دستورها تعریف کرد:

$$(52.6) \quad \text{‘arccot } x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی}$$

$$(53.6) \quad \text{‘arcsec } x = \arccos \frac{1}{x}, \quad |x| \geq 1 \quad \text{چنانچه}$$

$$(54.6) \quad \text{‘arccsc } x = \arcsin \frac{1}{x}, \quad |x| \geq 1 \quad \text{چنانچه}$$

دستورهای مشتقگیری و انتگرالگیری از این توابع در تمرینات زیر آمده اند.

۲۲.۶ تمرینات

دستورهای مشتقگیری آمده در تمرینات ۱ تا ۵ را نتیجه بگیرید.

$$1. \quad D \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \quad \text{اگر}$$

$$2. \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{بازای هر } x \text{ حقیقی}$$

۳. بازای هر x حقیقی $\operatorname{Darccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$

۴. اگر $|x| > 1$ $\operatorname{Darcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

۵. اگر $|x| > 1$ $\operatorname{Darccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

دستورهای انتگرالگیری آمده در تمرینات ۶ تا ۱۰ را نتیجه بگیرید.

۶. $\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$

۷. $\int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \frac{x}{|x|} \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

۸. $\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \frac{x}{|x|} \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

۹. $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2x +$

$2\sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$

۱۰. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \log \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{\arcsin x}{x} + C$

۱۱. (الف) نشان دهید که بازای هر $x \neq 0$ ، $D[\operatorname{arccot} x - \arctan(1/x)] = 0$
(ب) ثابت کنید که عدد ثابتی مانند C نیست که بازای هر $x \neq 0$

$\operatorname{arccot} x - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = C.$

توضیح دهید که چرا این با قضیه مشتق صفر (قضیه ۲.۵) در تضاد نیست.

در تمرینات ۱۲ تا ۲۵، $f'(x)$ را بیابید. در هر حالت فرض این است که تابع f بازای آن x های حقیقی تعریف شده که در آنها دستور داده شده برای $f(x)$ با معنی است.

۱۲. $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$ ۱۳. $f(x) = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$

۱۴. $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$ ۱۵. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan(x^3) \quad \cdot ۱۷ \quad f(x) = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x} \quad \cdot ۱۶$$

$$f(x) = \arctan(\tan^x x) \quad \cdot ۱۹ \quad f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \cdot ۱۸$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x) \quad \cdot ۲۱ \quad f(x) = \arctan(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \cdot ۲۰$$

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \quad \cdot ۲۳ \quad f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad \cdot ۲۲$$

$$f(x) = \log \left(\arccos \sqrt{\frac{1}{x}} \right) \quad \cdot ۲۵ \quad f(x) = [\arccos(x^2)]^{-2} \quad \cdot ۲۴$$

۲۶. نشان دهید که اگر $\arctan(y/x) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$

$$dy/dx = (x+y)/(x-y).$$

۲۷. چنانچه بازای $|x| < 1$ ، $y = (\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$ ، d^2y/dx^2 را حساب کنید.

۲۸. فرض کنید $f(x) = \arctan x - x + x^3/3$ با معاینه علامت f' ثابت کنید

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x, x > 0 \quad \text{اگر}$$

در تمرینات ۲۹ تا ۴۷ انتگرالهای نامعین را حساب کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad \cdot ۳۰ \quad a \neq 0, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \cdot ۲۹$$

$$(ab \neq 0) \int \frac{dx}{a+bx^2} \quad \cdot ۳۲ \quad a \neq 0, \int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad \cdot ۳۱$$

$$\int x \arctan x \, dx \quad \cdot ۳۴ \quad \int \frac{dx}{x^2-x+2} \quad \cdot ۳۳$$

$$\int x (\arctan x)^2 \, dx \quad \cdot ۳۶ \quad \int x^2 \arccos x \, dx \quad \cdot ۳۵$$

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx \quad \cdot ۳۸ \quad \int \arctan \sqrt{x} \, dx \quad \cdot ۳۷$$

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx \quad \cdot ۴۰ \quad \int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \cdot ۳۹$$

[$x = \sin u$: راهنمایی]

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \cdot ۴۲ \quad \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx \cdot ۴۱$$

$$\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx \cdot ۴۴ \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \cdot ۴۳$$

$$b \neq a, \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx \cdot ۴۶ \quad a > 0, \int \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{1/2} dx \cdot ۴۵$$

$$[x-a = (b-a)\sin^2 u: \text{داهمنامی}] \cdot b \neq a, \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \cdot ۴۷$$

۲۳.۶ انتگرالگیری بوسیله کسره‌های جزئی

بیاد می‌آوریم که خارج قسمت دو چندجمله‌ای یک تابع گویا نام دارد. مشتقگیری از یک تابع گویا به تابع گویای جدیدی منجر می‌شود که می‌توان آن را با قاعده خارج قسمت برای مشتقات بدست آورد. ازسوی دیگر، انتگرالگیری از یک تابع گویا ممکن است توابعی را بدست دهد که گویا نباشند. مثلاً داریم

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

ما برای محاسبه انتگرال کلیه توابع گویا روشی را توصیف کرده و خواهیم دید که نتیجه را همیشه می‌توان برحسب چندجمله‌ایها، توابع گویا، معکوس تانژانتها، و لگاریتمها بیان داشت.

فکر اصلی در این روش این است که تابع گویای داده شده را به مجموعی از کسره‌های ساده‌تر (بنام کسره‌های جزئی) تجزیه می‌کنیم بطوری که از آنها بتوان با فنونی که قبلاً بحث شد انتگرال گرفت. ما طرز عمل کلی را با چند مثال ساده که کلیه وجوه لازم این روش را روشن می‌سازند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. در این مثال با دو کسر ساده $1/(x-1)$ و $1/(x+3)$ ، که انتگرالگیری از آنها را می‌دانیم، شروع کرده و می‌بینیم با تشکیل ترکیبی خطی از اینها چه رخ می‌دهد. بعنوان مثال، اگر دو برابر کسر اول را به سه برابر کسر دوم بیفزائیم خواهیم داشت

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} = \frac{2(x+3) + 3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{5x+3}{x^2+2x-3}$$

حال اگر این دستور را از راست به چپ بخوانیم به ما می‌گوید که تابع گویای r ، که با $r(x) = (5x+3)/(x^2+2x-3)$ داده شده، ترکیبی است خطی از $1/(x-1)$ و $1/(x+3)$. پس انتگرال r را می‌شود باین صورت حساب کرد:

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3} dx = 2 \int \frac{dx}{x - 1} + 3 \int \frac{dx}{x + 3}$$

$$= 2 \log |x - 1| + 3 \log |x + 3| + C.$$

مثال ۳. مثال قبل روشی را برای محاسبه انتگرالهای بشکل

$$\int [(ax + b)/(x^2 + 2x - 3)] dx$$

پیشنهاد می‌کند. مثلاً برای محاسبه $\int [(2x + 5)/(x^2 + 2x - 3)] dx$ سعی می‌کنیم انتگرالده را بصورت ترکیبی خطی از $1/(x - 1)$ و $1/(x + 3)$ بنویسیم:

$$(55.6) \quad \frac{2x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$$

که در آن ثابتهای A و B باید معین شوند. هرگاه بتوان A و B را طوری اختیار کرد که معادله (55.6) بصورت اتحاد درآید آنگاه انتگرال کسر سمت چپ مساوی مجموع انتگرالهای کسره‌های ساده ترطرف راست خواهد بود. برای یافتن A و B دوطرف (55.6) را در $(x + 3)(x - 1)$ ضرب می‌کنیم تا کسرها ازین بروند. این کار نتیجه می‌دهد که

$$(56.6) \quad A(x + 3) + B(x - 1) = 2x + 5.$$

دراین مرحله برای یافتن A و B دو روش معمول است. یکی این است که ضرائب توانهای برابر x در (56.6) را متحد هم قرار می‌دهند. این عمل معادلات $A + B = 2$ و $3A - B = 5$ را بدست خواهد داد. چنانچه این دو معادله همزمان را حل کنیم بدست می‌آوریم که $A = 7/4$ و $B = 1/4$. روش دیگر با گذاردن دومقدار از x در (56.6) و بدست آوردن جفت دیگری از معادلات برای A و B صورت می‌گیرد. دراین حالت خاص وجود سازه‌های $x - 1$ و $x + 3$ پیشنهاد می‌کنند که از مقادیر $x = 1$ و $x = -3$ استفاده کنیم. وقتی $x = 1$ را در (56.6) قرار می‌دهیم ضریب B صفر می‌شود و خواهیم داشت $4A = 7$ یا $A = 7/4$. بهمین نحو می‌توان با گذاردن $x = -3$ ضریب A را صفر کرد. این به ما $-4B = -1$ یا $B = 1/4$ را خواهد داد. درهرحال مقادیر A و B را که در (55.6) صدق کنند یافته‌ایم، پس داریم

$$\int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x - 3} dx = \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 3}$$

$$= \frac{7}{4} \log |x - 1| + \frac{1}{4} \log |x + 3| + C.$$

واضح است که روش توصیف شده در مثال ۲ در مسورد انتگرالهای بشکل $\int [f(x)/g(x)] dx$ که در آنها f یک چندجمله‌ای خطی بوده و g چندجمله‌ای درجه دومی باشد که بشود آن را به سازه‌های خطی متمایز با ضرائب حقیقی، مثلاً بصورت

$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه کرد نیز بکار خواهد رفت. در این حالت کسر $f(x)/g(x)$ را می توان بصورت ترکیبی خطی از $1/(x - x_1)$ و $1/(x - x_2)$ بیان کرد، و انتگرالگیری از $f(x)/g(x)$ به ترکیب متناظری از جملات لگاریتمی $\log|x - x_1|$ و $\log|x - x_2|$ منجر خواهد شد.

مثالهای پیشگفته مربوط به توابع گویای f/g ای هستند که در آنها درجه صورت از درجه مخرج کمتر است. هر تابع گویا با این خاصیت را یک تابع گویای حقیقی می نامند. هرگاه f/g حقیقی نباشد (مجازی باشد)، یعنی هرگاه درجه f از درجه g کمتر نباشد، آنگاه می توانیم f/g را بصورت مجموعی از یک چندجمله ای و یک تابع گویای حقیقی بیان داریم. در واقع کافی است f را بر g بخش کنیم تا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

بدست آید که در آن چندجمله ایهای Q و R (که بترتیب خارج قسمت و باقیمانده خوانده می شوند) چنانند که درجه باقیمانده از درجه g کمتر است. بعنوان مثال،

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

لذا اگر در بررسی فن انتگرالگیری خود را به توابع گویای حقیقی محدود کنیم به کلیت خللی وارد نمی شود، و ازحالا به بعد وقتی انتگرال $\int [f(x)/g(x)]dx$ را در نظر می گیریم f درجه ای کمتر از درجه g خواهد داشت.

یک قضیه کلی در جبر می گوید که هر تابع گویای حقیقی را می توان بصورت مجموع تعدادی متاهای از کسرها باشکال

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^m} \text{ و } \frac{A}{(x + a)^k}$$

بیان کرد که در آنها k و m اعداد صحیح مثبتی هستند و A, B, C, a, b, c ثابتائی می باشند و $0 < b^2 - 4c$. شرط $0 < b^2 - 4c$ باین معنی است که چندجمله ای درجه دوم $x^2 + bx + c$ قابل تجزیه به سازه های خطی با ضرایب حقیقی نیست یا، بعبارت دیگر، معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ ریشه حقیقی ندارد. چنین چندجمله ای درجه دوم را تحویل ناپذیری خوانند. زمانی که یک تابع گویا باین صورت بیان شود می گوئیم تابع مزبور به کسره های جزئی تجزیه شده است. بنابراین، مسئله انتگرالگیری از این تابع گویا به مشکل انتگرالگیری از کسره های جزئی آن بدل می گردد. انتگرالگیری از این کسرها را می توان باسانی با فنون توصیف شده در مثالهای زیر انجام داد.

ما به اثبات این مطلب که تجزیه به کسره های جزئی همیشه امکان دارد نمی پردازیم. در عوض (بوسیله چند مثال) نشان می دهیم که کسره های جزئی را در مسائلی خاص چگونه بدست می آورند. در هر مورد که پیش می آید درستی تجزیه به کسره های جزئی را می توان

مستقیماً تحقیق کرد.

شایسته است که بحث را به چند حالت، بسته به چگونگی تجزیهٔ مخرج کسر $f(x)/g(x)$ ، تقسیم کنیم.

حالت ۱. مخرج بصورت حاصلضربی از سازه‌های خطی متمایز است. فرض کنیم $g(x)$ به n سازهٔ خطی متمایز تجزیه شده باشد، یعنی

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

ملاحظه می‌کنیم که هر ترکیب خطی بشکل

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

قابل تبدیل به یک کسر با مخرج مشترک $g(x)$ است و صورت این کسر یک چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n و شامل A ها می‌باشد. بنابراین، اگر بشود A ها را طوری یافت که این صورت مساوی $f(x)$ شود، تجزیهٔ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

را خواهیم داشت و انتگرال $f(x)/g(x)$ مساوی $\sum_{i=1}^n A_i \log|x - x_i|$ خواهد بود. در مثال بعد به حالتی که در آن $n = 3$ می‌پردازیم.

$$\text{مثال ۳. انتگرال } \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx \text{ را بگیرد.}$$

حل. چون $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$ مخرج بصورت حاصلضربی از سازه‌های خطی متمایز می‌باشد، و ما سعی می‌کنیم A_1, A_2, A_3 را طوری بیابیم که

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}.$$

با حذف مخرجها خواهیم داشت

$$2x^2 + 5x - 1 = A_1(x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-1).$$

وقتی $x = 0$ داریم $-1 = -2A_1$ ؛ پس $A_1 = 1/2$ ؛ زمانی که $x = 1$ بدست می‌آوریم $6 = 3A_2$ ؛ پس $A_2 = 2$ ؛ و هنگامی که $x = -2$ درمی‌یابیم که $-3 = 6A_3$ ، یا $A_3 = -1/2$. بنابراین خواهیم داشت

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4} \log|x| + \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log|x+1| + C.$$

حالت ۲. مخرج بصورت حاصلضربی از سازه‌های خطی است که بعضیها تکرار شده‌اند. این حالت را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۴. انتگرال $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2} dx$ را بگیرید.

حل. در اینجا سعی می‌کنیم A_1, A_2, A_3 را طوری بیابیم که

$$(57.6) \quad \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}.$$

ما علاوه بر $A_1/(x-1)$ هم به $A_2/(x+1)$ نیاز داریم و هم به $A_3/(x+1)^2$ تا یک چندجمله‌ای درجه دو در صورت بدست آوریم که موقعی که به تعیین A ها می‌پردازیم بتعداد ثابتها معادله داشته باشیم. با حذف مخرجها خواهیم داشت

$$(58.6) \quad x^2 + 2x + 3 = A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1).$$

با قرار دادن $x = 1$ در می‌یابیم که $4A_1 = 6$ ، پس $A_1 = 3/2$. وقتی $x = -1$ خواهیم داشت $2A_3 = -2$ ، پس $A_3 = -1$. برای تعیین A_2 به یک معادله دیگر احتیاج داریم. چون x دیگری نیست که سازه‌ای را صفر کند x مناسبی اختیار می‌کنیم تا محاسبات را مختصر نماید. بعنوان مثال، انتخاب $x = 0$ معادله $3 = A_1 - A_2 - A_3$ را می‌دهد که از آن خواهیم یافت $A_2 = -1/2$. روش دیگر این است که از طرفین (58.6) مشتق گرفته و بعد x مناسبی را در آن می‌گذاریم. با مشتقگیری از (58.6) معادله

$$2x + 2 = 2A_1(x+1) + A_2(x-1) + A_3(x+1) + A_3$$

حاصل می‌شود و، چنانچه قرار دهیم $x = -1$ ، خواهیم یافت که $0 = -2A_2 + A_3$ ، لذا، مثل قبل، $A_2 = A_3/2 = -1/2$. بنابراین، A هایی را یافته‌ایم که در (57.6) صدق می‌کنند، پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

اگر در سمت چپ (57.6) بجای $(x+1)^2$ سازه $(x+1)^3$ ظاهر شده بود می‌بایست جمله اضافی $A_4/(x+1)^3$ را به طرف راست می‌افزودیم. بطور کلی، هرگاه سازه خطی $p, x+a$ بار در مخرج ظاهر شود، آنگاه برای این سازه باید مجموع p

جمله، یعنی

$$(59.6) \quad \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{(x+a)^k}$$

که در آن A ها ثابتند، را در نظر بگیریم. برای هر سازه خطی تکراری بایستی یکی از این مجموعهها بکار برده شود.

حالت ۳. مخرج حاوی سازه‌های درجه دوم تحویل ناپذیری است که هیچکدام تکرار نمی‌شوند.

$$\text{مثال ۵. انتگرال } \int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx \text{ را بگیرد.}$$

حل. می‌توان مخرج را به حاصلضرب $(x-1)(x^2+x+1)$ که $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ در آن x^2+x+1 تحویل ناپذیر است تجزیه کرد، و ما سعی می‌کنیم تجزیه‌ای بشکل

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

داشته باشیم. در کسری که مخرجش x^2+x+1 است در صورت چندجمله‌ای خطی $Bx+C$ را بکار برده‌ایم تا وقتی معادلات را نسبت به A و B و C حل می‌کنیم بتعداد معادلات ثابت داشته باشیم. با حذف مخرجها و حل معادلات نسبت به A و B و C خواهیم یافت $A=1$ ، $B=2$ ، $C=3$. بنابراین داریم

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx.$$

اولین انتگرال سمت راست مساوی $\log|x-1|$ است. برای محاسبه انتگرال دوم می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int \frac{2}{x^2+x+1} dx \\ &= \log(x^2+x+1) + 2 \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $u = x + 1/2$ و $\alpha = \sqrt{3/4}$ انتگرال آخری چنین می‌شود:

$$2 \int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \arctan \frac{u}{\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx = \log|x - 1| + \log(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3} \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

حالت ۴. مخارج حادی سازه‌های درجه دوم تحویل‌ناپذیری است که بعضی از آنها تکرادی‌اند. در اینجا وضع شبیه حالت ۲ است. در تجزیه $f(x)/g(x)$ به کسرهای جزئی، ابتدا، همانطور که قبلاً گفته شد، برای هر سازه خطی مجموعی بشکل (۵۹.۶) در نظر می‌گیریم. مضاف بر این، اگر سازه درجه دوم تحویل‌ناپذیر $m, x^2 + bx + c$ بار تکرار شده باشد، مجموعی شامل m جمله بصورت

$$\sum_{k=1}^m \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + bx + c)^k}$$

ده در آن صورت هر کسر خطی است منظور می‌نمائیم.

مثال ۶. انتگرال $\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2} dx$ را بگیرید.

حل. می‌نویسیم

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}.$$

با حذف مخارجها و حل معادلات نسبت به A, B, C, D و E درمی‌یابیم که

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}, C = -\frac{1}{3}, D = -1, E = 0.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+2} dx \\ &\quad - \int \frac{xdx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} \\ &\quad + \frac{1}{3} \int \frac{2xdx}{x^2+2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{3} \log|x-1| \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} \log(x^2 + 2) - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2} + C.$$

مثالهای پیشگفته نمونه‌هایی هستند از آنچه که در حالت کلی رخ می‌دهد. مسئله انتگرالگیری از یک تابع گویای حقیقی به محاسبه انتگرالهایی بشکل

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^m}, \quad \int \frac{x dx}{(x^2 + bx + c)^m}, \quad \int \frac{dx}{(x + a)^n}$$

منجر می‌شود. اولین انتگرال بازای $n = 1$ مساوی $\log|x + a|$ و، بازای $n > 1$ ، برابر $(x + a)^{1-n}/(1 - n)$ است. برای محاسبه دو انتگرال دیگر، چندجمله‌ای درجه دوم را بصورت مجموع دو مربع بشرح زیر می‌نویسم:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = u^2 + \alpha^2$$

که در آن $u = x + b/2$ و $\alpha = \sqrt{4c - b^2}/2$. (این کار ممکن است زیرا $4c - b^2 > 0$) با جانشانی $u = x + b/2$ مسئله به محاسبه انتگرالهای

$$(60.6) \quad \int \frac{du}{(u^2 + \alpha^2)^m} \quad \text{و} \quad \int \frac{u du}{(u^2 + \alpha^2)^m}$$

منجر می‌شود. اولین انتگرال بازای $m = 1$ مساوی $[\log(u^2 + \alpha^2)]/2$ و، بازای $m > 1$ ، برابر $[(2(1 - m))^{-1} (u^2 + \alpha^2)^{1-m}]$ می‌باشد. وقتی $m = 1$ دومین انتگرال (60.6) از دستور

$$\int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{u}{\alpha} + C$$

حساب می‌شود. حالت $m > 1$ را می‌شود با چند بار استفاده از دستور بازگشتی

$$\int \frac{du}{(u^2 + \alpha^2)^m} = \frac{1}{2\alpha^2(m-1)} \frac{u}{(u^2 + \alpha^2)^{m-1}} \\ + \frac{2m-3}{2\alpha^2(m-1)} \int \frac{du}{(u^2 + \alpha^2)^{m-1}},$$

که از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء بدست می‌آید، بوضع $m = 1$ درآورد. این بحث نشان می‌دهد که انتگرال هرتابع گویا را می‌توان برحسب چندجمله‌ایها، توابع گویا، معکوس تانژانتها، ولگاریتمها بیان کرد.

۲۴.۶ انتگرالهائی که به انتگرالهای توابع گویا قابل تبدیلند

هر تابع دومتغیره که با معادله‌ای بشکل

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q a_{m,n} x^m y^n$$

تعریف شده باشد یک چندجمله‌ای دو متغیره نامیده می‌شود. خارج قسمت دو چندجمله‌ای از این نوع را یک تابع گویای دومتغیره می‌خوانند. انتگرالهای بشکل

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

که در آنها R یک تابع گویای دومتغیره است، را می‌توان با جانشانی $u = \tan(x/2)$ به انتگرالهائی بشکل $\int r(u) du$ درآورد که در آنها r یک تابع گویای یک متغیره است. انتگرال اخیر را می‌توان با فونونی که هم اکنون توصیف شدند حساب کرد. ما این روش را با مثالی خاص توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. انتگرال $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$ را بگیرد.

حل. جانشانی $u = \tan(x/2)$ نتیجه می‌دهد که

$$x = 2 \arctan u, dx = \frac{2}{1+u^2} du,$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

و

$$\sin x + \cos x = \frac{2u + 1 - u^2}{1 + u^2}.$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = -2 \int \frac{du}{u^2 - 2u - 1} = -2 \int \frac{du}{(u-a)(u-b)}$$

که در آن $a = 1 + \sqrt{2}$ و $b = 1 - \sqrt{2}$. روش کسرهای جزئی نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{du}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b} \right) du$$

و، چون $a \rightarrow b = 2\sqrt{2}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (۶۱.۶) \quad \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{u-b}{u-a} \right| + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{\tan(x/2) - 1 + \sqrt{2}}{\tan(x/2) - 1 - \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

جواب نهائی را می توان با استفاده از اتحادهای مناسب مثلثاتی بنوعی ساده کرد. ابتدا توجه می کنیم که $\sqrt{2} - 1 = \tan(\pi/8)$ ، پس صورت آخرین کسر در (۶۱.۶) برابر $\tan(x/2) + \tan(\pi/8)$ درمخرج می نویسیم

$$\begin{aligned} \left| \tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2} \right| &= (\sqrt{2} + 1) \left| (\sqrt{2} - 1) \tan \frac{x}{2} - 1 \right| \\ &= (\sqrt{2} + 1) \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \tan \frac{\pi}{8} \right|. \end{aligned}$$

با گرفتن لگاریتم بصورتی که در (۶۱.۶) آمده، ممکن است جمله $-\sqrt{2}/2 \log(\sqrt{2} + 1)$ را با ثابت دلخواه تلفیق کرده و (۶۱.۶) را باین صورت بنویسیم:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C.$$

در یکی از بخشهای پیش، دستور انتگرالگیری

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

را بعنوان نتیجه ای از دستور مشتقگیری از $\arcsin x$ بدست آوردیم. حضور $\arcsin x$ این فکر را پیش می آورد که این انتگرال را می شد با جانشانی مثلثاتی $t = \arcsin x$ نیز حساب کنیم. پس داریم

$$x = \sin t, dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t,$$

و درمی یابیم که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos t} = \int dt = t = \arcsin x.$$

این زمانی که در انتگرالده $\sqrt{1-x^2}$ ظاهر می شود همیشه جانشانی مناسبی خواهد بود. بطور کلی، هر انتگرال بشکل $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ که در آن R یک تابع گویای دومتغیره است، را می توان با جانشانی

$$x = a \sin t, dx = a \cos t dt$$

به انتگرالی به شکل $\int R(a \sin t, a \cos t) a \cos t dt$ تبدیل کرد. این، بنوبه خود، همیشه بوسیله یکی از روشهای گفته شده در بالا قابل انتگرالگیری خواهد بود.

مثال ۲. انتگرال $\int \frac{x dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$ را بگیرد.

حل. قرار می دهیم $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t dt$, $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$ و درخواست می یافت که

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}} &= \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{4 \cos^2 t + 2 \cos t} = \int \frac{\sin t dt}{\cos t + 1/2} \\ &= -\log \left| \frac{1}{2} + \cos t \right| + C \\ &= -\log(1 + \sqrt{4 - x^2}) + C. \end{aligned}$$

همین روش برای انتگرالهائی به شکل

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - (cx + d)^2}) dx$$

قابل اجرا است؛ در این مورد از جانشانی مثلثاتی $cx + d = a \sin t$ استفاده می کنیم. به همین نحو می توانیم، با جانشانی $cx + d = a \tan t$, $c dx = a \sec^2 t dt$ به انتگرالهائی به شکل

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + (cx + d)^2}) dx$$

پردازیم. برای انتگرالهائی به شکل

$$\int R(x, \sqrt{(cx + d)^2 - a^2}) dx$$

از جانشانی $cx + d = a \sec t$, $c dx = a \sec t \tan t dt$ استفاده می کنیم. در هر حالت انتگرالده جدید تابعی گویا از $\sin t$ و $\cos t$ خواهد شد.

۲۵.۶ تمرینات

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$۱. \int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx \quad ۲. \int \frac{x dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx \cdot ۴$$

$$\int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1} dx \cdot ۶$$

$$\int \frac{x + 2}{x^2 + x} dx \cdot ۸$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} \cdot ۱۰$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} \cdot ۱۲$$

$$\int \frac{(x+2) dx}{x^2 - 4x + 4} \cdot ۱۴$$

$$\int \frac{(x-3) dx}{x^2 + 3x^2 + 2x} \cdot ۱۶$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-1} dx \cdot ۱۸$$

$$\int \frac{dx}{x^4 - 2x^2} \cdot ۲۰$$

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1} \cdot ۲۲$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} \cdot ۲۴$$

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \cdot ۲۶$$

$$(a > 1) \int \frac{dx}{1 + a \cos x} \cdot ۲۸$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 3x + 2} \cdot ۳$$

$$\int \frac{8x^2 + 7}{(x+1)(2x+1)^2} dx \cdot ۵$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4} \cdot ۷$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} \cdot ۹$$

$$\int \frac{x dx}{(x+1)^2} \cdot ۱۱$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 + x - 6} \cdot ۱۳$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} \cdot ۱۵$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} \cdot ۱۷$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx \cdot ۱۹$$

$$\int \frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)} dx \cdot ۲۱$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} \cdot ۲۳$$

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx \cdot ۲۵$$

$$(0 < a < 1) \int \frac{dx}{1 + a \cos x} \cdot ۲۷$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx \cdot ۲۹$$

$$(ab \neq 0) \int \frac{dx}{a^x \sin^2 x + b^x \cos^2 x} \cdot ۳۰$$

$$۳۱. \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} \cdot (a \neq 0)$$

$$۳۲. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos x + \sin x}$$

$$۳۳. \int \sqrt{3-x^2} \, dx \quad ۳۴. \int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \, dx$$

$$۳۵. \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} \, dx \quad ۳۶. \int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \, dx$$

$$۳۷. \int \sqrt{x^2+5} \, dx \quad ۳۸. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx$$

$$۳۹. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} \quad ۴۰. \int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2} \, dx$$

[داهنمایی: در تمرین ۴۰ صورت و مخرج را در $\sqrt{2-x-x^2}$ ضرب کنید.]

۲۶.۶ تمرینات متفرقه برای دوره

۱. فرض کنید اگر $x > 0$ ، $f(x) + f(1/x) \cdot f(x) = \int_1^x [\log t / (t+1)] \, dt$ را محاسبه نمایید. محض امتحان، باید بدست آورید که

$$f(2) + f(1/2) = (\log^2 2) / 2.$$

۲. تابع f که بازای هر x پیوسته بوده (و همه جا صفر نباشد) را بقسمی بیابید که

$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} \, dt.$$

۳. سعی کنید $\int (e^x/x) \, dx$ را با استفاده از انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء حساب کنید.

۴. انتگرال $\int_0^{\pi/2} \log(e^{\cos x}) \, dx$ را بگیرید.

۵. تابع f با معادله زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+2}{x(x+1)(x+2)}}, \quad x > 0 \text{ اگر}$$

(الف) شیب نمودار f را در نقطه‌ای که $x = 1$ بیابید.

(ب) ناحیه زیر نمودار f و بالای بازه $[1, 4]$ حول محور x چرخیده و در نتیجه جسم دواری را تولید کرده است. حجم این جسم را بصورت انتگرال بنویسید. این انتگرال را حساب کرده و نشان دهید که مقدار آن $\pi \log(25/8)$ است.

۶. تابع F با انتگرال نامعین زیر تعریف شده است:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt, \quad x > 0$$

(الف) $\log x \leq F(x)$ بازای چه مقادیری از x درست است؟

(ب) ثابت کنید که $\int_1^x [e^t/(t+a)] dt = e^{-a}[F(x+a) - F(1+a)]$.

(پ) بطریق مشابه، انتگرالهای زیر را بر حسب F بیان نمائید:

$$\int_1^x \frac{e^{at}}{t} dt, \quad \int_1^x \frac{e^t}{t^n} dt, \quad \int_1^x e^{1/t} dt.$$

۷. تابع پیوسته f را در هر حالت چنان مثال بزنید که در شرائط ذکر شده بازای دلایه x های حقیقی صدق کند، یا اینکه توضیح دهید چرا چنین تابعی وجود ندارد.

$$\int_0^x f(t) dt = e^x \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = 1 - 2^{x^2} \quad (\text{ب}) \quad [2^{(x^2)} \text{ یعنی } 2^{x^2}]$$

$$\int_0^x f(t) dt = f^2(x) - 1 \quad (\text{پ})$$

۸. اگر بازای هر x و هر y ، $f(x+y) = f(x)f(y)$ و $f(x) = 1 + xg(x)$

که در آن، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $g(x) \rightarrow 1$ ، ثابت کنید که (الف) $f'(x)$ بازای هر x

وجود دارد، و (ب) $f(x) = e^x$.

۹. تابع مفروض g بازای هر x حقیقی مشتق داشته و در معادلات زیر صدق می کند:

$$g'(0) = 2 \quad \text{و بازای هر } x \text{ و } y, \quad g(x+y) = e^x g(x) + e^x g(y).$$

(الف) نشان دهید که $g(2x) = 2e^x g(x)$ و دستور مشابهی برای $g(3x)$ بیابید.

(ب) قسمت (الف) را با یافتن دستوری که $g(nx)$ را به $g(x)$ ربط داده و بازای

هر عدد صحیح و مثبت n معتبر است تعمیم دهید. نتیجه خود را باستقرا ثابت کنید.

(پ) نشان دهید که $g(0) = 0$ و حد $g(h)/h$ را، وقتی $h \rightarrow 0$ ، بیابید.

(ت) ثابت C را طوری بیابید که بازای هر x ، $g'(x) = g(x) + Ce^x$ این حکم

را ثابت کرده و مقدار C را پیدا کنید. [داهمنائی: از تعریف $g'(x)$ استفاده نمائید.]

۱۰. تابع متناوب f با دوره تناوب a در $f(x+a) = f(x)$ بازای هر x در قلمروش

صدق می کند. درباره تابعی که همه جا مشتق داشته و بازای هر x در معادله ای بشکل

$$f(x+a) = bf(x)$$

(که در آن a و b ثوابت مثبتی هستند) صدق می کند چه نتایجی می توانید بگیرد؟

۱۱. از مشتقگیری لگاریتمی استفاده کرده بسکمک دستورهای مشتقگیری از مجموعهها و تفاضلها دستورهای برای مشتقگیری از حاصلضربها و خارجقسمتها بدست آورید.

۱۲. فرض کنید $A = \int_0^1 [e^t/(t+1)] dt$ مقادیر انتگرالهای زیر را بر حسب A بیان نماید.

$$\int_0^1 \frac{te^{t^2}}{t^2+1} dt \quad (\text{ب}) \quad \int_{a-1}^a \frac{e^{-t}}{t-a-1} dt \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^1 e^t \log(1+t) dt \quad (\text{ت}) \quad \int_0^1 \frac{e^t}{(t+1)^2} dt \quad (\text{پ})$$

۱۳. فرض کنید $x^2 c_2 + x c_1 + c_0 = p(x)$ و $f(x) = e^x p(x)$

(الف) نشان دهید که $f^{(n)}(0)$ ، یعنی مشتق n م f در 0 ، مساوی

$$c_0 + nc_1 + n(n-1)c_2$$
 است.

(ب) مسئله را وقتی حل کنید که p یک چندجمله‌ای از درجه ۳ باشد.

(پ) مطلب را برای یک چندجمله‌ای از درجه m تعمیم دهید.

۱۴. فرض کنید $f(x) = x \sin ax$ نشان دهید که

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n (a^{2n} x \sin ax - 2na^{2n-1} \cos ax).$$

۱۵. ثابت کنید که

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}.$$

$$[1/(k+m+1)] = \int_0^1 t^{k+m} dt \quad (\text{دانهمایی})$$

۱۶. فرض کنید $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. اگر f به یکی از صورتهای زیر تعریف شده باشد دستور (یا دستورهای) برای محاسبه $F(x)$ ، بازای هر x حقیقی، بدست آورید.

$$f(t) = (t + |t|)^2 \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| \leq 1 \\ 1-|t|, & |t| > 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = e^{-|t|} \quad (\text{پ}) \quad f(t) = t^2 \text{ و } 1 \text{ ماکزیمم} \quad (\text{ت})$$

۱۷. یک جسم دوار با چرخش نمودار تابع پیوسته f حول بازه $[0, a]$ بر محور x بوجود آمده است. اگر بازای هر $a > 0$ حجم جسم مساوی $a^2 + a$ باشد تابع f را پیدا کنید.

۱۸. فرض کنید بازای هر x ، $f(x) = e^{-2x}$ مجموعه عرضی f روی بازه $[0, t]$ را، که

۰ < t، با S(t) نشان دهید. فرض کنید A(t) مساحت S(t) بوده. V(t) حجم جسمی باشد که از دوران S(t) حول محور x حاصل می شود، و W(t) حجم جسمی باشد که از چرخش S(t) حول محور y بدست می آید. این مقادیر را محاسبه نمایید:

$$\lim_{t \rightarrow 0} V(t)/A(t) \quad (الف) \quad A(t) \quad (ب) \quad V(t) \quad (پ) \quad W(t) \quad (ت)$$

۱۹. فرض کنید c چنان عددی باشد که $\sinh c = 3/4$. (لازم نیست c را حساب کنید). در هریک از موارد زیر، آن x هائی را (در صورت وجود) پیدا کنید که در معادله داده شده صدق می کنند. جوابهای خود را بر حسب $\log 2$ و $\log 3$ بیان نمایید.

$$\log(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) = c \quad (الف) \quad \log(e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}) = c \quad (ب)$$

۲۰. درست یا غلط بودن هریک از مطالب زیر را مشخص کنید. هر مطلبی را که درست است ثابت نمایید.

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \quad (ب) \quad 2^{\log 5} = 5^{\log 2} \quad (الف)$$

$$\sum_{k=1}^n k^{-1/2} < 2\sqrt{n}, n \geq 1 \quad (پ)$$

$$1 + \sinh x \leq \cosh x, x \text{ بازای هر } \quad (ت)$$

در تمرینات ۲۱ تا ۲۴ هریک از نامساویها را با معاینه علامت مشتق تابعی مناسب ثابت کنید.

$$2x/\pi < \sin x < x, 0 < x < \pi/2 \quad ۲۱.$$

$$1/(x + 1/2) < \log(1 + 1/x) < 1/x, x > 0 \quad ۲۲.$$

$$x - x^3/6 < \sin x < x, x > 0 \quad ۲۳.$$

$$(x^b + y^b)^{1/b} < (x^a + y^a)^{1/a}, 0 < a < b, y > 0, x > 0 \quad ۲۴.$$

۲۵. نشان دهید که

$$\int_0^x e^{-t} t dt = e^{-x} (e^x - 1 - x) \quad (الف)$$

$$\int_0^x e^{-t} t^2 dt = 2! e^{-x} (e^x - 1 - x - x^2/2!) \quad (ب)$$

$$\int_0^x e^{-t} t^3 dt = 3! e^{-x} (e^x - 1 - x - x^2/2! - x^3/3!) \quad (پ)$$

(ت) تعمیمی را که این روابط پیشنهاد می کنند حدس بزنید و آن را باستقرا ثابت نمایید.

۲۶. چنانچه a و b و a_1 و b_1 با شرط $ab \neq 0$ داده شده باشند نشان دهید که ثابتهای A و B و C چنان وجود دارند که

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \log |a \sin x + b \cos x| + C.$$

[داهنمائی: نشان دهید A و B ای هستند که

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x).]$$

۲۷. در هر یک از حالات زیر تابع f را که در شرائط داده شده صدق می کند بیابید.

(الف) بازای $x > 0$ ؛ $f'(x^2) = 1/x$ ؛ $f(1) = 1$.

(ب) بازای هر x ؛ $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$ ؛ $f(1) = 1$.

(پ) بازای هر x ؛ $f'(\sin x) = \cos^2 x$ ؛ $f(1) = 1$.

(ت) بازای $0 < x \leq 1$ ؛ $f'(\log x) = 1$ ؛ $f(0) = 0$ ؛ بازای $x > 1$.

۲۸. تابعی که انتگرال لگاریتمی خوانده شده و با Li نموده می شود این طور تعریف شده است:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \quad x \geq 2 \text{ اگر}$$

این تابع در نظریه تحلیلی اعداد ظاهر می شود، جایی که ثابت شده که $Li(x)$ تقریب بسیار خوبی برای تعداد اعداد اول نایبتر از x است. خواص زیر را برای $Li(x)$ نتیجه بگیرید.

(الف) $Li(x) = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{2}{\log^2 2}$

(ب) $Li(x) = \frac{x}{\log x} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k! x}{\log^{k+1} x} + n! \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} + C_n$

که در آن C_n یک عدد ثابت (وابسته به n) است. این ثابت را بیابید.

(پ) نشان دهید که عدد ثابتی مانند b هست بطوری که $Li(x) = \int_b^{\log x} (e^t/t) dt$ و مقدار b را پیدا کنید.

(ت) انتگرال $\int_0^x [e^{t/(t-1)}] dt$ را، که در آن $c = 1 + (\log 2)/2$ ، بر حسب انتگرال لگاریتمی بیان نمایند.

(ث) فرض کنید اگر $x > 3$ ، $f(x) = e^x Li(e^{2x-4}) - e^2 Li(e^{2x-2})$ نشان دهید که

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}.$$

۲۹. فرض کنید اگر $x < 0$, $f(x) = \log|x|$. نشان دهید که f معکوس دارد، و این معکوس را با g نشان دهید. قلمرو g چیست؟ برای محاسبه $g(y)$ ، بازای هر y در قلمرو g ، دستوری پیدا کنید. نمودار g را بکشید.

۳۰. فرض کنید اگر $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^x (1+t^3)^{-1/2} dt$. (لازم نیست این انتگرال را محاسبه کنید.)

(الف) نشان دهید که f بر قسمت نامنفی محور حقیقی اکیداً صعودی است.

(ب) فرض کنید g معکوس f باشد. نشان دهید که مشتق دوم g با g^2 متناسب است [یعنی، بازای هر y در قلمرو g , $g''(y) = cg^2(y)$ ، و ثابت تناسب را بیابید.



تقریبهای چند جمله‌ای برای توابع

۱۰۷ مقدمه

چند جمله‌ایها از ساده‌ترین توابعی هستند که در آنالیز ظاهر می‌شوند. در محاسبات عددی کارکردن با آنها دلچسب است زیرا مقادیر آنها را می‌توان با چند بار ضرب و جمع بدست آورد. در فصل ۶ نشان دادیم که تابع لگاریتم را می‌شود به چند جمله‌ایهای نزدیک کرد که محاسبه لگاریتمها را با هر درجه از دقت ممکن می‌سازند. در این فصل نشان می‌دهیم که تقریب توابع بسیار دیگری، از قبیل توابع نمائی و مثلثاتی، به چند جمله‌ایها نیز امکان پذیر است. چنانچه تفاوت بین یک تابع و چند جمله‌ای نزدیک شده به آن بقدر کافی کوچک باشد در کارهای عملی می‌توانیم آن چند جمله‌ای را بجای تابع اصلی بگذاریم.

برای تقریب تابع مفروض f به چند جمله‌ایها، بسته به اینکه چه استفاده‌ای از تقریب مورد نظر باشد، طرق بسیاری در دست است. در این فصل می‌خواهیم چند جمله‌ای بی‌ایم که با f و برخی از مشتقات آن در نقطه‌ای مفروض مطابقت داشته باشد. بحث خود را با مثال ساده‌ای آغاز می‌کنیم.

فرض کنیم f تابع نمائی، یعنی $f(x) = e^x$ ، باشد. در نقطه $x = 0$ تابع f و کلیه مشتقاتش دارای مقدار یک است. چند جمله‌ای خطی

$$g(x) = 1 + x$$

نیز دارای این خاصیت است که $g(0) = 1$ و $g'(0) = 1$ ، پس g با f و مشتق اول آن در 0 مطابقت دارد. این، از نظر هندسی، بدین معنا است که، همانطور که در شکل ۱۰۷ نموده شده، نمودار g خط مماس f در نقطه $(0, 1)$ می‌باشد.

چنانچه f را به یک چند جمله‌ای درجه دوم Q که با f و دومشتق اولش در 0 مطابقت دارد تقریب کنیم می‌توانیم، لااقل در حوالی نقطه $(0, 1)$ ، منتظر تقریب بهتری از تابع

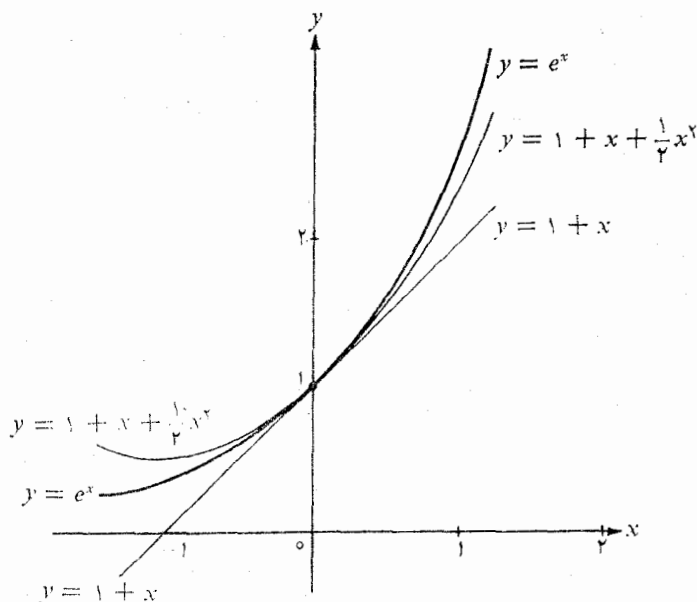
خطی g برای f باشیم. در چندجمله‌ای

$$Q(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

داریم $Q(0) = Q'(0) = 1$ و $Q''(0) = f''(0) = 1$ نشان می‌دهد که، در نزدیکی نقطه $(0, 1)$ ، نمودار Q تقریب بهتری از خط $y = 1 + x$ برای منحنی $y = e^x$ است. می‌توانیم دقت تقریب را با استفاده از چندجمله‌ایهایی که با f در مشتق سوم و مراتب بالاتر مطابقت دارند بیشتر کنیم. تحقیق اینکه چندجمله‌ای

$$(1.7) \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

با تابع نمایی و n مشتق اول آن در نقطه $x = 0$ مطابقت دارد آسان است. البته پیش



شکل ۱.۷ تقریبهای چندجمله‌ای برای منحنی $y = e^x$ در حوالی $(0, 1)$.

از آنکه بتوانیم از این چندجمله‌ایها بمنظور محاسبه مقادیر تقریبی تابع نمایی استفاده کنیم به اطلاعاتی در باب خطای مرکب شده در این تقریب نیاز خواهیم داشت. بجای آنکه این مثال خاص را با تفصیل بیشتری مطرح سازیم به نظریه عمومی رومی آوریم.

۲.۷ چندجمله‌ایهای تیلور تولید شده بوسیله یک تابع

فرض کنیم f در نقطه $x = 0$ تا مرتبه n ($n \geq 1$) مشتق داشته باشد، سعی می‌کنیم چند-

جمله‌ای P ای را پیدا کنیم که با f و n مشتق اول آن در o مطابقت داشته باشد. $n + 1$ شرط هست که بایستی برقرار شوند، یعنی باید

$$(۲.۷) \quad P(o) = f(o), P'(o) = f'(o), \dots, P^{(n)}(o) = f^{(n)}(o).$$

لذا یک چندجمله‌ای درجه n ، مثلاً

$$(۳.۷) \quad P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n,$$

با $n + 1$ ضریب (که باید تعیین شوند) را مورد آزمایش قرار می‌دهیم. از شرائط (۲.۷) استفاده کرده و این ضرائب را بتوالی معین خواهیم کرد.

ابتدا در (۳.۷) قرار می‌دهیم $x = 0$ و در می‌یابیم که $P(o) = c_0$ ، پس $c_0 = f(o)$. حال از دو طرف (۳.۷) مشتق گرفته و سپس بار دیگر قرار می‌دهیم $x = 0$ تا $c_1 = P'(o)$ بدست آید، در نتیجه $c_1 = f'(o)$. اگر دوباره از (۳.۷) مشتق گرفته و در آن $x = 0$ را قرار دهیم درخواهیم یافت که $P''(o) = 2c_2$ ، پس $c_2 = f''(o)/2$. بعد از k بار مشتق‌گیری در می‌یابیم که $P^{(k)}(o) = k!c_k$ ، و این به ما دستور

$$(۴.۷) \quad c_k = \frac{f^{(k)}(o)}{k!}$$

را بازای $n, 0, 1, 2, \dots$ خواهد داد. [وقتی $k = 0$ ، $f^{(0)}(o)$ را بمعنی $f(o)$ می‌گیریم]. آنچه گفته شد ثابت می‌کند که هرگاه یک چندجمله‌ای از درجه نایبتر از n و صادق در (۲.۷) وجود داشته باشد آنگاه ضرائب آن الزاماً از (۴.۷) بدست می‌آیند. (درجه P مساوی n است اگر و فقط اگر $f^{(n)}(o) \neq 0$). بعکس، بآسانی می‌شود تحقیق کرد که چندجمله‌ای P با ضرائب (۴.۷) در (۲.۷) صدق می‌کند، و لذا قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۰۷. فرض کنیم f تابعی باشد که در نقطه o تا مرتبه n مشتق دارد. در اینصورت یک و فقط یک چندجمله‌ای مانند P از درجه نایبتر از n هست که در $n + 1$ شرط

$$P(o) = f(o), P'(o) = f'(o), \dots, P^{(n)}(o) = f^{(n)}(o)$$

صدق می‌کند. این چندجمله‌ای با دستور

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(o)}{k!} x^k$$

داده می‌شود.

بهین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که یک و فقط یک چندجمله‌ای از درجه نایبتر از n وجود دارد که با f و n مشتق اول آن در نقطه $x = a$ مطابقت دارد. درواقع، بجای

(۳.۷)، می‌توانیم P را بر حسب توانهایی از $x - a$ نوشته و مثل قبل عمل کنیم. اگر بعوض ۰ مشتقات را در a حساب کنیم به چندجمله‌ای

$$(۵.۷) \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

خواهیم رسید. این همان چندجمله‌ای منحصر بفردی است که از درجهٔ نایبتر از n بوده و در شرایط

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

صدق می‌کند، و آن را بافتخار ریاضیدان انگلیسی، بروک تیلور^۱ (۱۷۳۱-۱۶۸۵)، یک چندجمله‌ای تیلور می‌نامند. عبارت دقیقتر، می‌گوئیم که چندجمله‌ای (۵.۷) چندجمله‌ای تیلور از درجهٔ n تولید شده بوسیلهٔ f در نقطهٔ a می‌باشد.

بد نیست نمادی داشته باشیم که بستگی چندجمله‌ای تیلور P را به f و n نشان دهد. این بستگی را با نوشتن $P = T_n f$ یا $P = T_n(f)$ بیان می‌داریم. علامت T_n عملگر تیلور از درجهٔ n نام دارد. وقتی این عملگر بر تابع f عمل کند تابع جدید $T_n f$ ، یعنی چندجمله‌ای تیلور از درجهٔ n ، را تولید خواهد کرد. مقدار این تابع در x با $T_n f(x)$ یا $T_n[f(x)]$ نوشته می‌شود. اگر بخواهیم بستگی به a نیز منعکس گردد بجای $T_n f(x)$ می‌نویسیم $T_n f(x; a)$.

مثال ۱. وقتی f تابع نمایی است، یعنی $f(x) = E(x) = e^x$ ، بازای هر k خواهیم داشت $E^{(k)}(x) = e^x$ ، پس $E^{(k)}(0) = e^0 = 1$ و چندجمله‌ای تیلور از درجهٔ n تولید شده بوسیلهٔ E در ۰ با دستور

$$T_n E(x) = T_n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

داده می‌شود. اگر خواهان چندجمله‌ایی باشیم که با E و مشتقات آن در نقطهٔ $a = 1$ مطابقت داشته باشد بازای هر k خواهیم داشت $E^{(k)}(1) = e$ ، پس (۵.۷) به ما

$$T_n E(x; 1) = \sum_{k=0}^n \frac{e}{k!} (x - 1)^k$$

را خواهد داد.

مثال ۲. وقتی $f(x) = \sin x$ داریم $f'(x) = \cos x$ ، $f''(x) = -\sin x$ و مانند اینها، پس $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ و $f^{(2n)}(0) = 0$. از اینرو فقط توانهای فرد x هستند که در چندجمله‌ایهای تیلور تولید شده بوسیلهٔ تابع سینوس در ۰ ظاهر می‌شوند. چندجمله‌ای تیلور از درجهٔ $2n + 1$ بشکل

$$T_{2n+1}(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

خواهد بود.

مثال ۳. اگر مانند مثال ۲ استدلال کنیم درمی یابیم که چندجمله‌ایهای تیلور تولید شده بوسیلهٔ تابع کسینوس در ۰ فقط حاوی توانهای زوج x می باشند. چندجمله‌ای درجهٔ $2n$ چنین است:

$$T_{2n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

توجه داشته باشید که هر چندجمله‌ای تیلور $T_{2n}(\cos x)$ مشتق چندجمله‌ای تیلور $T_{2n+1}(\sin x)$ است بدان خاطر که کسینوس خود مشتق سینوس می باشد. در بخش بعد خواهیم دید که برقراری برخی از روابط بین توابع به چندجمله‌ایهای تیلور آنها سرایت می کند.

۳.۷ حساب چندجمله‌ایهای تیلور

اگر تابع f در نقطهٔ a تا مرتبهٔ n مشتق داشته باشد همیشه می شود چندجمله‌ای تیلور آن $T_n f$ را با دستور

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

تشکیل داد. از آنجا که گاهی محاسبهٔ مشتقات $f^{(k)}(a)$ طولانی می شود شایسته است برای تعیین چندجمله‌ایهای تیلور روشهای دیگری نیز داشته باشیم. قضیهٔ بعدی خواصی از عملگر تیلور را وصف می کند که با استفاده از آنها اغلب می توان از چندجمله‌ایهای تیلور داده شده چندجمله‌ایهای تیلور جدیدی ساخت. در این قضیه فرض آن است که کلیهٔ چندجمله‌ایهای تیلور در یک نقطهٔ مشترک a تولید شده اند.

قضیهٔ ۲.۷. عملگر تیلور T_n خواص زیر را دارد:

(الف) خاصیت خطی. هرگاه c_1 و c_2 اعداد ثابتی باشند آنگاه

$$T_n(c_1 f + c_2 g) = c_1 T_n(f) + c_2 T_n(g);$$

(ب) خاصیت مشتقگیری. مشتق هر چندجمله‌ای تیلور f یک چندجمله‌ای تیلور f' است؛ در واقع داریم

$$(T_n f)' = T_{n-1}(f');$$

(ت) خاصیت اشتگرالگیری. انتگرال نامعین یک چندجمله‌ای تیلور f چندجمله‌ای تیلور انتگرال نامعینی از f است. به بیان دقیقتر، هرگاه $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، آنگاه داریم

$$T_{n+1} g(x) = \int_a^x T_n f(t) dt.$$

برهان. هر یک از احکام (الف)، (ب)، یا (پ) معادله‌ای است مستلزم دو چندجمله‌ای همدرجه. برای اثبات هر کدام کافی است ملاحظه کنیم که چندجمله‌ای سمت چپ در نقطه a همان مقدار و همان مشتقاتی را دارد که چندجمله‌ای طرف راست دارد است. سپس خاصیت یکنائی قضیه ۱۰۷ را بیاری بطلبیم. توجه کنید که مشتگیری از یک چندجمله‌ای درجه‌اش را می‌کاهد حال آنکه انتگرالگیری بر درجه آن خواهد افزود.

قضیه بعدی به ما می‌گوید که اگر در یک چندجمله‌ای تیلور x را با cx عوض کنیم چه اتفاقی خواهد افتاد.

قضیه ۳۰۷. خاصیت جانشانی. فرض کنیم $g(x) = f(cx)$ که در آن c ثابت است. در اینصورت داریم

$$T_n g(x; a) = T_n f(cx; ca).$$

بویژه، وقتی $a = 0$ ، خواهیم داشت $T_n g(x) = T_n f(cx)$.

برهان. چون $g(x) = f(cx)$ قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد که

$$g'(x) = cf'(cx), g''(x) = c^2 f''(cx), \dots, g^{(k)}(x) = c^k f^{(k)}(cx).$$

لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T_n g(x; a) &= \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(ca)}{k!} (cx-ca)^k \\ &= T_n f(cx; ca). \end{aligned}$$

چند مثال. از تعویض x با $-x$ در چندجمله‌ای تیلور برای e^x درمی‌یابیم که

$$T_n(e^{-x}) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

چون $\cosh x = e^x/2 + e^{-x}/2$ می‌توانیم از خاصیت خطی استفاده کرده

$$T_{2n}(\cosh x) = \frac{1}{2} T_{2n}(e^x) + \frac{1}{2} T_{2n}(e^{-x})$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

را بدست آوریم. خاصیت مشتقگیری

$$T_{2n-1}(\sinh x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

را نتیجه خواهد داد.

قضیه بعدی نیز در ساده کردن محاسبات مربوط به چندجمله‌ایهای تیلور مفید واقع می‌شود.

قضیه ۴.۷. فرض کنیم P_n یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 1$ باشد. f و g دو تابع می‌انگاریم که در 0 از مرتبه n مشتق داشته و

$$(۴.۷) \quad f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$$

بطوری که، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $g(x) \rightarrow 0$. در اینصورت P_n چندجمله‌ای تیلور تولید شده بوسیله f در 0 خواهد بود.

پروهان. قرار می‌دهیم $h(x) = f(x) - P_n(x) = x^n g(x)$. با مشتقگیری مکرر از حاصلضرب $x^n g(x)$ خواهیم دید که h و n مشتق اول آن در $x = 0$ صفرند. از اینرو f با P_n و n مشتق اول آن در 0 مطابقت دارد. پس، همانطور که حکم شده، $P_n = T_n f$.

چند مثال. از اتحاد جبری

$$(۷.۷) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

که بازای هر $x \neq 1$ معتبر است، درمی‌یابیم که (۴.۷) بازای $f(x) = 1/(1-x)$ ، $P_n(x) = 1 + x + \dots + x^n$ و $g(x) = x/(1-x)$ برقرار است. چون، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $g(x) \rightarrow 0$ قضیه ۴.۷ به ما می‌گوید که

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

انتگرالگیری از این رابطه به ما چندجمله‌ای تیلور بعدی

$$T_{n+1}[-\log(1-x)] = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

را خواهد داد. در (۷.۷) می‌توانیم x را با x^2 عوض کرده

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$$

را بدست آوریم. چنانچه قضیه ۴.۷ را یکبار دیگر بکار ببریم داریم یا بیم که

$$T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}.$$

انتگرالگیری از این رابطه به دستور

$$T_{2n+1}(\arctan x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

منجر خواهد شد.

۴.۷ تمرینات

۱. نمودارهای چندجمله‌ایهای تیلور

$$T_5(\sin x) = x - x^3/3! + x^5/5! \text{ و } T_7(\sin x) = x - x^3/3!$$

را رسم کنید. به نقاطی که منحیها از محور x می‌گذرند توجه خاصی مبذول دارید. این نمودارها را با نمودار $f(x) = \sin x$ مقایسه نمایید.

۲. تمرین ۱ را در مورد چندجمله‌ایهای تیلور $T_4(\cos x)$ ، $T_6(\cos x)$ ، $T_8(\cos x)$ و $f(x) = \cos x$ حل کنید.

در تمرینات ۳ تا ۱۰ چندجمله‌ایهای تیلور $T_n f(x)$ نموده شده را بدست آورید. در هر حالت فرض این است که $f(x)$ بازای کلیه x ها تعریف شده که $f(x)$ با معنی است. در بسیاری از حالات قضایای ۲.۷، ۳.۷ و ۴.۷ در ساده کردن محاسبات سودمند خواهند بود.

$$T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \quad ۴. \quad T_n(a^x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\log a)^k}{k!} x^k \quad ۳.$$

$$T_{2n+1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \sum_{k=0}^n x^{2k+1} \quad ۵.$$

$$T_n[\log(1+x)] = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \quad ۶.$$

$$T_{2n+1}\left(\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad ۷.$$

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \quad ۸.$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{که در آن } T_n[(1+x)^\alpha] = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k. \quad ۹$$

$$T_{2n}(\sin^2 x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}. \quad ۱۰$$

$$[\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \text{ : دانهائی}]$$

۵.۷ دستور تیلور با باقیمانده

حال درباره خطائی بحث می‌کنیم که در تقریب تابع f به چندجمله‌ای تیلور آن $T_n f$ در نقطه a صورت می‌گیرد. این خطا برابر تفاضل $E_n(x) = f(x) - T_n f(x)$ تعریف می‌شود. لذا، اگر f در a مشتق مرتبه n داشته باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$(۸.۷) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x).$$

این را با اسم دستور تیلور با باقیمانده $E_n(x)$ می‌شناسند؛ این دستور زمانی مفید است که اندازه $E_n(x)$ را بتوان تخمین زد. ما خطا را بصورت یک انتگرال بیان کرده و بعد اندازه انتگرال را تخمین می‌زنیم. برای آنکه خطوط اصلی کار روشن شوند ابتدا خطای حاصل از یک تقریب خطی را مورد توجه قرار می‌دهیم.

قضیه ۵.۷. فرض کنیم f در یکی از همسایگیهای a مشتق دوم پیوسته داشته باشد. در اینصورت برای هر x در این همسایگی داریم

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x)$$

که در آن

$$E_1(x) = \int_a^x (x-t) f''(t) dt.$$

برهان. طبق تعریف خطا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} E_1(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f'(t) dt - f'(a) \int_a^x dt \\ &= \int_a^x [f'(t) - f'(a)] dt. \end{aligned}$$

انتگرال آخری را می‌شود بصورت $\int_a^x u dv$ نوشت که در آن $u = f'(t) - f'(a)$ و $v = t - x$. اما $du/dt = f''(t)$ و $dv/dt = 1$ پس دستور انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \int_a^x u dv = uv \Big|_a^x - \int_a^x (t-x) f''(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f''(t) dt \end{aligned}$$

زیرا، وقتی $t = a$ ، $u = 0$ ، و وقتی $t = x$ ، $v = 0$. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

نتیجه متناظر برای تقریب چندجمله‌ای از درجه n در قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۶.۷. فرض کنیم f در بازای حادی a مشتق مرتبه $n+1$ پیوسته داشته باشد. در اینصورت بازای هر x در این بازه دستور تیلور

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x)$$

را داریم که در آن

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

بوهان. قضیه باستقرا بر n ثابت می‌شود. قبلا آن را برای $n=1$ ثابت کرده‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم بازای n درست باشد و آن را برای $n+1$ ثابت می‌کنیم. دستور تیلور (۸.۷) را بازای $n+1$ و n نوشته و از هم کم می‌کنیم تا

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

بدست آید. حال انتگرال مربوط به $E_n(x)$ را بکار برده و، با توجه به تساوی $\int_a^x (x-t)^n / (n+1) = \int_a^x (x-t)^{n+1} / (n+2)$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n [f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)] dt. \end{aligned}$$

انتگرال آخری را می‌توان بشکل $\int_a^x u dv$ نوشت که در آن

$$v = -(x-t)^{n+1} / (n+1) \text{ و } u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)$$

با انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء و توجه به این مطلب که، وقتی $t = a$ ، $u = 0$ ، زمانی که $t = x$ ، $v = 0$ ، درمی‌یابیم که

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x u dv = -\frac{1}{n!} \int_a^x v du$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) dt.$$

این مرحله استقرا از n به $n+1$ را کامل می‌کند، پس قضیه بازای هر $n \geq 1$ درست خواهد بود.

۶.۷ تخمین خطا در دستور تیلور

چون خطای $E_n(x)$ در دستور تیلور بصورت انتگرالی متضمن مشتق $f^{(n+1)}$ می‌باشد، لذا قبل از آنکه بشود اندازه $E_n(x)$ را تخمین زد به اطلاعات بیشتری در باره $f^{(n+1)}$ نیاز خواهیم داشت. اگر کرانه‌های بالائی و پائینی از $f^{(n+1)}$ را بدانیم، همانطور که در قضیه بعدی توصیف شده، می‌توانیم برای $E_n(x)$ کرانه‌های بالائی و پائینی نظیر را بیابیم.

قضیه ۷.۷. هرگاه مشتق $f^{(n+1)}$ در نامساویهای

$$(9.7) \quad m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

بازای هر t در بازه‌ای حاوی a صدق کند آنگاه تخمینهای زیر را بازای هر x در این بازه خواهیم داشت:

$$(10.7) \quad m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{اگر } x > a$$

و

$$(11.7) \quad m \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} E_n(x) \leq M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{اگر } x < a$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $x > a$. در اینصورت انتگرال مربوط به $E_n(x)$ روی بازه $[a, x]$ خواهد بود. بازای هر t در این بازه داریم $(x-t)^n \geq 0$ ، پس نامساویهای (۹.۷) نتیجه می‌دهند که

$$m \frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq M \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

با انتگرالگیری از a تا x درمی‌یابیم که

$$(12.7) \quad \frac{m}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \leq E_n(x) \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt.$$

جانشانی $du = -dt$, $u = x-t$ می‌دهد که

$$\int_a^x (x-t)^n dt = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

پس (۱۲.۷) به (۱۰.۷) تحویل خواهد شد.

چنانچه $x < a$ انتگرالگیری روی بازه $[x, a]$ صورت می‌گیرد. بازای هر t در این بازه داریم $t \geq x$ ، پس $(t-x)^n \geq 0$ ، $(x-t)^n = (-1)^n (t-x)^n$. بنابراین می‌توانیم نامساویهای (۹.۷) را در سازه نامنفی $(-1)^n (x-t)^n / n!$ ضرب کرده و با انتگرال گرفتن از x تا a (۱۱.۷) را بدست آوریم.

مثال ۱. چنانچه $f(x) = e^x$ و $a = 0$ دستور

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

را خواهیم داشت. چون $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$ ، بر هر بازه صعودی است، و در نتیجه در نامساویهای $e^c \leq f^{(n+1)}(t) \leq e^b$ بر هر بازه بشکل $[b, c]$ صدق می‌کند. درچنین بازه‌ای نامساویهای قضیه ۷.۷ در مورد $E_n(x)$ ، با فرض $m = e^b$ و $M = e^c$ ، برقرار می‌شوند. بخصوص، وقتی $b = 0$ ، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < x \leq c$$

این تخمینها را می‌توان بکاربرده عدد اولر را حساب کرد. با انتخاب $b = 0$ ، $c = 1$ ، $x = 1$ ، و استفاده از نامساوی $e < 3$ خواهیم داشت

$$(13.7) \quad \frac{1}{(n+1)!} \leq E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{که در آن } e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + E_n(1)$$

این محاسبه e را با هر درجه‌ای از دقت ممکن می‌سازد. بعنوان مثال، اگر مقدار e را تا هفت رقم اعشار درست بخواهیم، n را طوری اختیار می‌کنیم که $3/(n+1)! < 10^{-8}/2$. $n = 12$ برای این کار کافی است. می‌توان جدولی از مقادیر $1/n!$ را نسبتاً سریع حساب کرد چونکه $1/n!$ را می‌شود از $1/(n-1)!$ فقط با تقسیم بر n بدست آورد. جدول زیر بازای $12 \leq n \leq 3$ حاوی این اعداد تا نه رقم اعشارگرد شده است. در هر حالت «خطای ناشی از گرد شدن» با علامت بعلاوه یا منها مشخص شده که به ما می‌گوید که مقدار درست از مقدار ثبت شده بیشتر است یا کمتر. (در هر حالت این

n	$\frac{1}{n!}$	n	$\frac{1}{n!}$
۳	۰۰۱۶۶۶۶۶۶۶۶۷-	۸	۰۰۰۰۰۰۰۲۴۸۰۲-
۴	۰۰۰۴۱۶۶۶۶۶۶۷-	۹	۰۰۰۰۰۰۰۰۲۷۵۶-
۵	۰۰۰۰۸۳۳۳۳۳۳۳+	۱۰	۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۷۶-
۶	۰۰۰۰۱۳۸۸۸۸۸۹-	۱۱	۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۵+
۷	۰۰۰۰۰۱۹۸۴۱۳-	۱۲	۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲+

خطا از نصف یک که در آخرین رقم اعشاری کمتر خواهد بود.) جملات متناظر $n = 0, 1, 2$ دارای مجموع $5/2$ اند. چنانچه این را به مجموع درایه‌های جدول (بازای $n \leq 12$) بیفزائیم مقدار 2718281830 را بدست خواهیم آورد. اگر خطاهای ناشی از گردشدن را بحساب آوریم درمی‌یابیم که مقدار واقعی این مجموع (بخاطر هفت علامت منها) ممکن است از این مقدار باندازه $7/2$ یک که در آخرین رقم اعشاری کمتر و یا از آن (بسبب سه علامت بعلاوه) بقدر $3/2$ یک که در آخرین رقم بیشتر باشد. این مجموع را s می‌نامیم. پس آنچه را که می‌شود براساس این محاسبه حکم کرد نامساویهای

$$2718281826 < s < 2718281832$$

است. اما تخمینهای خطای $E_{1/2}(1)$ به ما

$$0.0000000000 \leq E_{1/2}(1) < 0.0000000001$$

را می‌دهند. چون $e = s + E_{1/2}(1)$ این محاسبات به نامساویهای زیر برای e منجر خواهند شد:

$$2718281826 < e < 2718281832.$$

این به ما می‌گوید که مقدار e ، دست تا هفت رقم اعشار، برابر با 27182818 است، یا اینکه مقدار e ، گرد شده تا هشت رقم اعشار، مساوی 271828183 خواهد بود.

مثال ۲. گنگ بودن e . می‌توان از تخمینهای پیشگفته برای خطای $E_n(1)$ استفاده کرده گنگ بودن e را ثابت نمود. ابتدا نامساویهای (۱۳.۷) را این طور می‌نویسیم:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

با ضرب نامساویها در $n!$ نتیجه می‌گیریم که اگر $n \geq 3$,

$$(14.7) \quad \frac{1}{n+1} \leq n! e - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}.$$

بازای هر n ، مجموعی که روی k گرفته شده عددی صحیح است. اگر e گویا می‌بود می‌توانستیم n را آنقدر بزرگ بگیریم که $n! e$ نیز عدد صحیحی بشود. اما در اینصورت (۱۴.۷) به ما می‌گفت که تفاضل این دو عدد صحیح عددی مثبت است که از $3/4$ تجاوز نمی‌کند، و این امکان‌پذیر نیست. بنا براین، e نمی‌تواند گویا باشد.

تقریبهایی چند جمله‌ای اغلب ما را قادر می‌سازند تا برای انتگرالهایی که برحسب توابع مقدما تی مستقیماً قابل محاسبه نیستند مقادیر عددی تقریبی بیابیم. مثالی معروف در این مورد انتگرال

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

است که در نظریه احتمالات و بسیاری مسائل فیزیکی ظاهر می‌شود. معلوم شده که این f یک تابع مقدماتی نیست. یعنی f را نمی‌شود از چندجمله‌ایها، توابع نمایی، لگاریتمها، توابع مثلثاتی، یا مثلثاتی معکوس در چند مرحله با استفاده از اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، یا ترکیب بدست آورد. مثالهای دیگر که در کارهای نظری و عملی کراراً ظاهر می‌شوند عبارتند از:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \int_0^x \sin(t^2) dt, \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

(در انتگرال اولی فرض این است که کسر $(\sin t)/t$ در $t = 0$ مساوی یک می‌باشد. در انتگرال سومی k ثابت بوده و $0 < k < 1$) این بخش را با مثالی پایان می‌بریم که نحوه استفاده از دستور تیلور را برای رسیدن به تخمین دقیقی از انتگرال $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ نشان می‌دهد.

مثال ۳. دستور تیلور برای e^x بازای $n = 4$ چنین است:

$$(15.7) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + E_4(x).$$

حال فرض می‌کنیم $x \leq 0$. در هر بازه $[-c, 0]$ داریم $1 \leq e^x \leq e^c$. پس می‌توان از نامساویهای (۱۱.۷) در قضیه ۷.۷ با فرض $m = 1$ و $M = e^c$ استفاده کرد و این طور نوشت:

$$\text{اگر } x < 0, \quad 0 < (-1)^5 E_4(x) \leq \frac{(-x)^5}{5!}$$

بعبارت دیگر، هرگاه $x < 0$ ، آنگاه $E_4(x)$ منفی و ناکمتر از $-x^5/5!$ است. چنانچه در (۱۵.۷) x را با $-t^2$ عوض کنیم خواهیم داشت

$$(16.7) \quad e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + E_4(-t^2)$$

که در آن $0 < E_4(-t^2) \leq t^8/5!$. اگر $0 \leq t \leq 1/2$ درمی‌یابیم که $0 < E_4(-t^2) \leq (1/2)^8/5! \leq t^8/5!$. بنابراین اگر از (۱۶.۷) از ۰ تا $1/2$ انتگرال بگیریم

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2^7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 2^9 \cdot 4!} - \theta$$

را بدست می‌آوریم که در آن $0 < \theta \leq 0.00000045$. با چهار رقم اعشار گرد شده خواهیم داشت $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt = 0.4613$

۷.۷* شکلهای دیگر باقیمانده در دستور تیلور

ما خطا در دستور تیلور را بصورت انتگرال بیان کرده‌ایم:

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

این خطا می‌تواند باشکال بسیار دیگری نیز بیان گردد. چون سازه $(x-t)^n$ در انتگرالده هرگز در بازه انتگرالگیری تغییر علامت نداده و $f^{(n+1)}$ بر این بازه پیوسته است، بنا بر قضیه مقدار میانگین وزن‌دار برای انتگرالها (قضیه ۱۶.۳)،

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

که در آن c در بازه بسته بین a و x قرار دارد. بنابراین، خطا را می‌شود این‌طور نوشت:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

این را شکل لاگرانژ باقیمانده می‌خوانند. این باقیمانده شبیه جملات اولیه در دستور تیلور است با این تفاوت که $f^{(n+1)}(c)$ بعوض a در نقطه مجهول c حساب شده است. نقطه c به x و همچنین f وابسته است.

با استدلالی متفاوت می‌توان لزوم پیوستگی $f^{(n+1)}$ را حذف کرد و دستور لاگرانژ و شکلهای دیگر باقیمانده را با شرط ضعیفتری بدست آورد. فرض کنیم $f^{(n+1)}$ در بازه باز (h, k) حاوی نقطه a وجود داشته و $f^{(n)}$ در بازه بسته $[h, k]$ پیوسته باشد. در $[h, k]$ x دلخواهی غیر از a اختیار می‌کنیم. برای سهولت فرض می‌کنیم $x \cdot x > a$ را ثابت نگهداشته و تابع جدید F را بر بازه $[a, x]$ این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k.$$

توجه کنید که $F(x) = f(x)$ و $F(a) = T_n f(x; a)$ ، پس $F(x) - F(a) = E_n(x)$. تابع F در بازه بسته $[a, x]$ پیوسته بوده و در بازه باز (a, x) مشتق دارد. اگر $F'(t)$ را حساب کنیم، با توجه به اینکه هر جمله مجموع معرف $F(t)$ بصورت حاصلضرب است، درمی‌یابیم که کلیه جملات جز یکی حذف می‌شوند و معادله

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

باقی می‌ماند. حال فرض می‌کنیم G تابعی باشد که بر $[a, x]$ پیوسته بوده و بر (a, x) مشتقپذیر است. در این‌صورت می‌توانیم دستور مقدار میانگین کشی (قضیه ۶.۴) را بکار برده

بازای c ای در بازه (a, x) بنویسیم

$$G'(c)[F(x) - F(a)] = F'(c)[G(x) - G(a)].$$

این، در صورتی که G' در (a, x) ناصفر باشد، دستور زیر را برای خطای $E_n(x)$ نتیجه می‌دهد:

$$E_n(x) = \frac{F'(c)}{G'(c)}[G(x) - G(a)].$$

می‌توانیم با انتخابهای متفاوتی از G خطا را با شکال مختلفی بیان کنیم. مثلاً، با فرض $G(t) = (x - t)^{n+1}$ ، به شکل لاگرانژ خواهیم رسید:

$$a < c < x \quad \text{که در آن} \quad E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

اگر $G(t) = x - t$ دستور دیگری را خواهیم داشت که به شکل کشی باقیمانده معروف است:

$$a < c < x \quad \text{که در آن} \quad E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a)$$

چنانچه $G(t) = (x-t)^p$ ، که در آن $p \geq 1$ ، به دستور زیر خواهیم رسید:

$$a < c < x \quad \text{که در آن} \quad E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n! p} (x-c)^{n+1-p} (x-a)^p$$

۸.۷ تمرینات

در تمرینات ۱، ۲، و ۳ نمونه‌هایی از دستور تیلور با باقیمانده آورده شده‌اند. در هر حالت ثابت کنید که خطا در نامساویهای داده شده صدق می‌کند.

$$|E_{\gamma n}(x)| \leq \frac{|x|^{\gamma n+1}}{(\gamma n+1)!}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{\gamma k-1}}{(\gamma k-1)!} + E_{\gamma n}(x) \quad ۱.$$

$$|E_{\gamma n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{\gamma n+2}}{(\gamma n+2)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{\gamma k}}{(\gamma k)!} + E_{\gamma n+1}(x) \quad ۲.$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{اگر} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{\gamma k+1}}{\gamma k+1} + E_{\gamma n}(x) \quad ۳.$$

$$|E_{\gamma n}(x)| \leq \frac{x^{\gamma n+1}}{\gamma n+1}.$$

۴. (الف) از تقریب چندجمله‌ای تیلور درجه سوم به $\sin x$ استفاده کرده عدد $r = \sqrt{15} - 3$ را بعنوان تقریبی به ریشه ناصفر معادله $x^2 = \sin x$ نتیجه بگیرید.

(ب) با فرض $0 < 3 - \sqrt{15} < 0.9$ نشان دهید که تقریب قسمت (الف) در نامساوی

$$|\sin r - r^2| < \frac{1}{200}$$

صدق می‌کند. آیا تفاضل $(\sin r - r^2)$ مثبت است یا منفی؟ استدلال خود را مشروحاً بیان دارید.

۵. (الف) از تقریب چندجمله‌ای تیلور درجه سوم به $\arctan x$ استفاده کرده عدد $\arctan x = x^2$ به ریشه ناصفر معادله $x^2 = \arctan x$ را بعنوان تقریبی به ریشه ناصفر معادله $x^2 = \arctan x$ نتیجه بگیرید.

(ب) با فرض $0.9 < \sqrt{21} < 4.6$ و $2^{16} = 65536$ ثابت کنید که تقریب قسمت (الف) در نامساوی

$$|r^2 - \arctan r| < \frac{7}{100}$$

صحن می‌کند. آیا تفاضل $(r^2 - \arctan r)$ مثبت است یا منفی؟ دلیل خود را بتفصیل بیان نمایید.

۶. ثابت کنید $\frac{c}{31} = 1 + \int_0^1 \frac{1+x^{30}}{1+x^6} dx$ که در آن $0 < c < 1$.

۷. ثابت کنید $0.4939948 < \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4} dx < 0.4939958$.

۸. (الف) اگر $0 \leq x \leq 1/2$ نشان دهید $\sin x = x - x^3/3! + r(x)$ که در آن $|r(x)| \leq (1/2)^5/5!$.

(ب) از تخمین قسمت (الف) استفاده کرده برای انتگرال $\int_0^{1/2} \sin(x^2) dx$ مقداری تقریبی بیابید. خطا را نیز تخمین بزنید.

۹. از سه جمله ناصفر اول دستور تیلور در مورد $\sin x$ استفاده کرده برای انتگرال $\int_0^1 [(\sin x)/x] dx$ مقداری تقریبی بیابید و خطا را نیز تخمین بزنید. [فرض این است که کسر $(\sin x)/x$ وقتی $x = 0$ مساوی یک می‌باشد.]

۱۰. این تمرین، با استفاده از دستور تیلور برای $\arctan x$ در تمرین ۳، روشی را برای محاسبه π مختصراً شرح می‌دهد. این روش مبتنی بر این واقعیت است که π تقریباً مساوی 3.2 می‌باشد، پس $\pi/4$ تقریباً برابر 0.8 یا $4/5$ بوده و این حدوداً $1/5 \arctan 4$ خواهد بود. قرار دهید $\alpha = \arctan 1/5$ و $\beta = 4\alpha - \pi/4$.

(الف) اتحاد $\tan(A+B) = (\tan A + \tan B)/(1 - \tan A \tan B)$ را یکبار با فرض $A=B=\alpha$ و بار دیگر با فرض $A=B=2\alpha$ بکار ببرید تا $\tan 4\alpha = 5/12$ و $\tan 2\alpha = 5/12$ بدست آیند. بعد اتحاد فوق را یکبار دیگر با اختیار $A=4\alpha$ و $B=-\pi/4$ بکار ببرید تا $\tan \beta = 1/239$ حاصل شود. این اتحاد قابل توجه

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$$

را ثابت می‌کند که توسط جان ماشین^۱ (۱۶۸۰-۱۷۵۱) در ۱۷۰۶ کشف شد.
(ب) از چندجمله‌ای تیلور $T_{11}(\arctan x)$ با فرض $x = 1/5$ استفاده کرده نشان دهید

$$3158328934 < 16 \arctan \frac{1}{5} < 3158328972.$$

(پ) از چندجمله‌ای تیلور $T_7(\arctan x)$ با فرض $x = 1/239$ استفاده کرده نشان دهید

$$-0.016736309 < -4 \arctan \frac{1}{239} < -0.016736300.$$

(ت) با بکارگیری قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ) نشان دهید که مقدار π ، درست تا هفت رقم اعشار، برابر ۳۱۴۱۵۹۲۶ است.

۹.۷ چند نکته دیگر درباره خطا در دستور تیلور. نماد 0

اگر f در بازه‌ای حاوی نقطه a مشتق $(n+1)$ پیوسته داشته باشد می‌توانیم دستور تیلور را بشکل

$$(19.7) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x)$$

بنویسیم. فرض کنیم x مقید به این شود که در بازه بسته‌ای حول a چون $[a-c, a+c]$ قرار داشته و در آن $f^{(n+1)}$ پیوسته باشد. در این صورت $f^{(n+1)}$ برای بازه کراندار بوده و در نتیجه در نامساوی بشکل

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

که در آن $M > 0$ ، صدق می‌کند. پس، طبق قضیه ۷.۷، تخمین

$$|E_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

را برای خطا بازای هر x در $[a-c, a+c]$ خواهیم داشت. چنانچه x را مخالف a نگهداشته و این نامساوی را بر $|x-a|^n$ بخش کنیم درمی‌یابیم که

$$0 \leq \left| \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|.$$

حال اگر $x \rightarrow a$ خواهیم دید که $E_n(x)/(x-a)^n \rightarrow 0$. این را این طور توصیف می‌کنیم که می‌گوئیم خطای $E_n(x)$ ، وقتی $x \rightarrow a$ ، از مرتبه کوچکتر از $(x-a)^n$ است. عبارت دیگر، تحت شرایط ذکر شده، می‌توان $f(x)$ را درحالی a به یک چند-جمله‌ای درجه n از $(x-a)$ تقریب کرد و خطا در این تقریب، وقتی $x \rightarrow a$ ، از مرتبه کوچکتر از $(x-a)^n$ خواهد بود.

در سال ۱۹۰۹ نماد خاصی توسط لاندو^۱ معرفی شد که خصوصاً وقتی در رابطه با دستور تیلور بکار رود نماد مناسبی خواهد بود. این را نماد o (نماد اوی کوچک) خوانده و بصورت زیر تعریف می‌کنند.

تعریف. فرض کنیم بازای هر $x \neq a$ در بازه‌ای حاوی a ، $g(x) \neq 0$ عبارت

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$$

یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

علامت $f(x) = o(g(x))$ خوانده می‌شود « $f(x)$ اوی کوچک $g(x)$ است» یا « $f(x)$ از مرتبه کوچکتر از $g(x)$ است» و این مقصود را می‌رساند که بازای x های نزدیک a ، $f(x)$ درمقایسه با $g(x)$ کوچک است.

مثال ۱. وقتی $x \rightarrow a$ ، $f(x) = o(1)$ ، یعنی که وقتی $x \rightarrow a$ ، $f(x) \rightarrow 0$.

مثال ۲. وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) = o(x)$ ، یعنی که وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$.

هر معادله بشکل $f(x) = h(x) + o(g(x))$ باین معنی گرفته می‌شود که $f(x) - h(x) = o(g(x))$ ، یا، عبارت دیگر، وقتی $x \rightarrow a$ ،

$$\frac{f(x) - h(x)}{g(x)} \rightarrow 0.$$

مثال ۳. داریم $\sin x = x + o(x)$ زیرا، وقتی $x \rightarrow 0$ ،

$$\frac{\sin x - x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 1 \rightarrow 0.$$

۱. ادموند لاندو (Edmund Landau) (۱۸۷۷-۱۹۳۸) یک ریاضیدان معروف آلمانی بود که در ریاضیات کارهای مهم زیادی کرده است. شهرت او بیشتر بخاطر کتابهای سلیش در آنالیز و نظریه اعداد است.

حال می‌توان نکات پیشگفته مربوط به خطا در دستور تیلور را با نماد o بیان کرد. چنانچه $f^{(n+1)}$ در بازه بسته‌ای حاوی نقطه a پیوسته باشد می‌توانیم این‌طور بنویسیم:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), x \rightarrow a \text{ وقتی}$$

این بیان مجمل این واقعیت است که، وقتی x نزدیک a باشد، جمله خطا در مقایسه با $(x-a)^n$ کوچک می‌باشد. بویژه، از بحثی که در بخشهای پیشتر داشتیم، نمونه‌های زیر از دستور تیلور را که بر حسب نماد o بیان شده در اختیار خواهیم داشت:

وقتی $x \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n);$$

وقتی $x \rightarrow 0$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

وقتی $x \rightarrow 0$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

وقتی $x \rightarrow 0$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

وقتی $x \rightarrow 0$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

وقتی $x \rightarrow 0$,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}).$$

اغلب در محاسبات مربوط به تقریبهای تیلور لازم است که چند جمله شامل علامت o با یکدیگر تلفیق شوند. در قضیه بعدی چند قاعده ساده برای اعمال با o ها مطرح شده‌اند. اینها اغلب حالاتی را که در عمل پیش می‌آیند دربر می‌گیرند.

قضیه ۸.۷. جبر o ها. وقتی $x \rightarrow a$ این مطالب را خواهیم داشت:

$$o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x)) \quad (\text{الف})$$

$$o(cg(x)) = o(g(x)), c \neq 0 \quad (\text{ب}) \quad \text{چنانچه}$$

$$f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \quad (\text{پ})$$

$$o(o(g(x))) = o(g(x)) \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + o(g(x)) \quad (\text{ث}) \quad \text{در صورتی که، وقتی}$$

$$x \rightarrow a, g(x) \rightarrow 0.$$

برهان. عبارت قسمت (الف) یعنی که هرگاه

$$f_2(x) = o(g(x)) \text{ و } f_1(x) = o(g(x))$$

آنگاه $f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))$ اما چون داریم

$$\frac{f_1(x) \pm f_2(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g(x)} \pm \frac{f_2(x)}{g(x)}$$

هر جمله طرف راست، وقتی $x \rightarrow a$ به ۰ میل می کند، در نتیجه قسمت (الف) ثابت خواهد

شد. احکام (ب)، (پ)، و (ت) به همین نحو ثابت می شوند.

برای اثبات (ث) از اتحاد جبری

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u \frac{u}{1+u},$$

در حالی که u با $g(x)$ عوض شده، استفاده کرده و سپس توجه می کنیم که،

$$\frac{g(x)}{1+g(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow a \quad \text{وقتی}$$

مثال ۱. ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\tan x = x + x^3/3 + o(x^3)$.

حل. از تقریبهای تیلور برای سینوس و کسینوس استفاده می کنیم. از قسمت (ث)ی

قضیه ۸.۷، با فرض $g(x) = -x^2/2 + o(x^2)$ ، چنین داریم:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2 + o(x^2)} = 1 + x^2/2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{وقتی}$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = (x - x^3/6 + o(x^3))(1 + x^2/2 + o(x^2)) \\ &= x + x^3/3 + o(x^3). \end{aligned}$$

مثال ۲. ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 0$,

$$(1+x)^{1/x} = e \cdot (1 - x/2 + 11x^2/24 + o(x^2)).$$

حل. چون $(1+x)^{1/x} = e^{(1/x) \log(1+x)}$ برهان را با یک تقریب چندجمله‌ای $\log(1+x)$ آغاز می‌کنیم. با اختیار تقریب درجه سوم داریم

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2),$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$(1+x)^{1/x} = \exp(1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2)) = e \cdot e^u$$

که در آن $u = -x/2 + x^2/3 + o(x^2)$ ، اما، وقتی $u \rightarrow 0$ ، داریم

$$e^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2),$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} e^u &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2). \end{aligned}$$

چنانچه این را در معادله (۱۸.۲) بکار ببریم دستور مطلوب را بازخواهیم یافت.

۱۰.۷ کاربردهای درصورت مبهم

قبلاً نحوه استفاده از تقریبهای چندجمله‌ای را در محاسبه مقادیر تابع نشان داده‌ایم. از آنها می‌شود در محاسبه حدود نیز یاری گرفت. این مطلب را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. حد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

را درصورتی که a و b اعداد مثبتی باشند تعیین کنید.

حل. این مسئله را نمی‌توان با محاسبه حد صورت و حد مخرج بطور جداگانه حل کرد زیرا مخرج به ۰ میل کرده و قضیه خارج قسمت در باب حدود قابل اجرا نیست. در این حالت صورت نیز به ۰ میل می‌کند و می‌گویند که کسر، وقتی $x \rightarrow 0$ ، «صورت مبهم ۰/۰» را بخود می‌گیرد. دستور تیلور و نماد o اغلب ما را قادر می‌سازند تا حد یک صورت

مبهم شبیه فوق را خیلی ساده حساب کنیم. طرزعمل باین ترتیب است که صورت $a^x - b^x$ را به یک چندجمله‌ای از x تقریب کرده، سپس بر x تقسیم نموده، و x را به 0 میل می‌دهیم. می‌توانستیم دستور تیلور را مستقیماً در مورد $f(x) = a^x - b^x$ اعمال کنیم اما، چون $a^x = e^{x \log a}$ و $b^x = e^{x \log b}$ ، در این حالت ساده‌تر آن است که از تقریبهای چندجمله‌ای که قبلاً برای تابع نمائی بدست آمدند استفاده نمائیم. چنانچه با تقریب خطی

$$e^t = 1 + t + o(t), \quad x \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

شروع کرده و t را بترتیب با $x \log a$ و $x \log b$ عوض نمائیم درخواهیم یافت که

$$\text{وقتی } x \rightarrow 0, \quad a^x = 1 + x \log a + o(x) \quad \text{و} \quad b^x = 1 + x \log b + o(x)$$

در اینجا از این مطلب استفاده کرده‌ایم که $o(x \log a) = o(x)$ و $o(x \log b) = o(x)$. حال اگر این روابط را از هم کم کرده و توجه کنیم که $o(x) - o(x) = o(x)$ درخواهیم یافت که $a^x - b^x = x(\log a - \log b) + o(x)$. با تقسیم بر x و استفاده از رابطه $o(x)/x = o(1)$ چنین خواهیم داشت:

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b} + o(1) \rightarrow \log \frac{a}{b}, \quad x \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

$$\text{مثال ۳. ثابت کنید } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{3}$$

حل. از مثال ۱ در بخش ۹.۷ و قضیه ۸.۷ (ث) استفاده کرده می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x). \end{aligned}$$

پس چنین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{3} + o(1) \rightarrow -\frac{1}{3}, \quad x \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

$$\text{مثال ۳. ثابت کنید بازای هر } a \text{ حقیقی} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a$$

حل. مطلب بازای $a = 0$ بدیهی است. اگر $a \neq 0$ از تقریب خطی

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

استفاده می‌کنیم. از تعویض x با ax نتیجه می‌گیریم که

$$\log(1 + ax) = ax + o(ax) = ax + o(x).$$

با تقسیم بر x و فرض $x \rightarrow 0$ حد a را بدست خواهیم آورد.

مثال ۴. ثابت کنید بازای هر a حقیقی داریم

$$(19.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a.$$

حل. کافی است توجه کنیم که $e^{(1/x)\log(1+ax)} = (1 + ax)^{1/x}$ و از مثال ۳ به همراه پیوستگی تابع نمائی استفاده نمائیم.

اگر در (۱۹.۷) ax را با y عوض کنیم رابطه حدی مهم دیگری را خواهیم یافت:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{a/y} = e^a.$$

گاهی اوقات این روابط حدی بعنوان نقطه شروع نظریه تابع نمائی گرفته می‌شوند.

۱۱.۷ تمرینات

۱. چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)$ را چنان بیابید که وقتی $x \rightarrow 0$ ،

$$x^2 = P(x) + o(x^2).$$

۲. چندجمله‌ای درجه سوم $P(x)$ را طوری بیابید که وقتی $x \rightarrow 1$ ،

$$x \cos x = P(x) + o((x - 1)^3).$$

۳. چندجمله‌ای $P(x)$ از کوچکترین درجه را چنان بیابید که وقتی $x \rightarrow 0$ ،

$$\sin(x - x^2) = P(x) + o(x^6).$$

۴. ثابتهای a و b و c را طوری بیابید که وقتی $x \rightarrow 1$ ،

$$\log x = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2 + o((x - 1)^2).$$

۵. یاد آورید که وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$. با استفاده از این

ثابت کنید که وقتی $x \rightarrow 0$ ، $x^{-2}(1 - \cos x) \rightarrow 1/2$ ، بنحوی مشابه، حد $x^{-4}(1 - \cos 2x - 2x^2)$ را، وقتی $x \rightarrow 0$ بدست آورید.

حدود تمرینات ۶ تا ۲۹ را بیابید.

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{e^{1/x} - 1} \cdot 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arctan x} \cdot 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \tan x} \cdot 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x^2 + x - 2} \cdot 13$$

$$b \neq 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} \cdot 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2} \cdot 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} \cdot 14$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \frac{\cos x}{x - (\pi/2)} \cdot 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{1 - \cos x} \cdot 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} \cdot 19$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sin(\pi/2 x)](\log x)}{(x^2 + 5)(x - 1)} \cdot 18$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^2} \cdot 21$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan^2 x - 12 \tan x}{3 \sin^2 x - 12 \sin x} \cdot 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} \cdot 23$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2} \cdot 22$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \cdot 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{1/x})^{1/x} \cdot 24$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} \cdot 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x} \cdot 26$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot 29$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \cdot 28$$

۳۰. بازای چه مقداری از ثابت a ، $x^{-2}(e^{ax} - e^x - x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ به حدی منتهی میل می‌کند؟ مقدار این حد چیست؟

۳۱. دو تابع مفروض f و g در بازه‌ای حاوی 0 مشتق دارند و g مثبت است. همچنین، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) = o(g(x))$. هریک از مطالب زیر را اثبات یا رد کنید.

$$\int_0^x f(t) dt = o\left(\int_0^x g(t) dt\right), x \rightarrow 0 \text{ وقتی (الف)}$$

$$f'(x) = o(g'(x)), x \rightarrow 0 \text{ وقتی (ب)}$$

۳۲. (الف) اگر وقتی $x \rightarrow 0$ ، $g(x) = o(1)$ ، ثابت کنید

$$\frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + g^2(x) + o(g^2(x)), x \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

(ب) با استفاده از (الف) ثابت کنید که

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), x \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

۳۳. تابع f همه‌جا مشتق سوم پیوسته داشته و در رابطه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^2$$

صدق می‌کند. $f(0), f'(0), f''(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x}$ را محاسبه کنید.[داهنمایی: هرگاه $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = A$ آنگاه، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $g(x) = A + o(1)$]۱۲.۷ قاعده هوییتال^۱ در مورد صورت مبهم ۰/۰

در بسیاری از مثالهای بخشهای پیش حد کسر $f(x)/g(x)$ را وقتی گرفته‌ایم که هم $f(x)$ و هم $g(x)$ به ۰ نزدیک می‌شدند. در چنین مثالهایی می‌گویند که کسر $f(x)/g(x)$ «صورت مبهم ۰/۰» را بخود گرفته است.

یک راه پرداختن به مسائل صور مبهم این است که، همانطور که در مثالهای بالا انجام شد، تقریبهایی چندجمله‌ای به $f(x)$ و $g(x)$ بدست آوریم. گاهی می‌توان زحمت این کار را، با استفاده از یکی از فنون مشتقگیری بنام قاعده هوییتال^۲، کم کرد. فکراصلی در این روش بررسی خارج قسمت مشتقات $f'(x)/g'(x)$ است که از این طریق سعی می‌شود اطلاعاتی درباره $f(x)/g(x)$ بدست آید.

پیش از بیان قاعده هوییتال نشان می‌دهیم که خارج قسمت مشتقات $f'(x)/g'(x)$ چگونه با کسر $f(x)/g(x)$ ارتباط دارد. فرض کنیم f و g دو تابع باشند بطوری که $f(a) = g(a) = 0$. در این صورت بازای $x \neq a$ داریم

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} / \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

هرگاه مشتقات $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته و $g'(a) \neq 0$ آنگاه، وقتی $x \rightarrow a$ ، کسر سمت راست به $f'(a)/g'(a)$ نزدیک می‌شود و در نتیجه $f(x)/g(x) \rightarrow f'(a)/g'(a)$.

1. L'Hopital

۲. در سال ۱۶۹۶، Guillaume Francois Antoine de L'Hopital (۱۶۶۱-۱۷۰۴)، اولین کتاب درسی را در باب حساب دیفرانسیل نوشت. این کتاب بارها بطبع رسیده و در معروفیت این مبحث نقش مهمی را ایفا کرد. بسیاری از مطالب این کتاب، از جمله روشی که به «قاعده هوییتال» معروف شده، بر کارهای اولیه یوهان برنولی، یکی از معلمان هوییتال، بنا شده بودند.

مثال. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x}$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $f(x) = 1 - e^{2x}$ و $g(x) = x$ ، پس

$$f'(x) = -2e^{2x} \quad \text{و} \quad g'(x) = 1$$

لذا داریم $f'(0)/g'(0) = -2$ ، در نتیجه حد مورد نظر برابر ۲ - خواهد بود.

در قاعده هوییتال در مورد f ، g ، یا مشتقاتشان در نقطه $x = a$ هیچ فرضی نشده است. در عوض فرض می‌کنیم، وقتی $x \rightarrow a$ ، $f(x)$ و $g(x)$ به ۰ نزدیک می‌شوند و کسر $f'(x)/g'(x)$ به حدی متناهی میل می‌کند. در این صورت قاعده هوییتال به ما می‌گوید که $f(x)/g(x)$ نیز به همان حد میل خواهد کرد. عبارت دقیقتر، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۹.۷. قاعده هوییتال در مورد ۰/۰ فرض کنیم f و g در نقطه x از بازه (a, b) مشتق داشته و

$$(20.7) \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0$$

همچنین، برای هر x در (a, b) ، $g'(x) \neq 0$ ، هرگاه حد

$$(21.7) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وجود داشته و، مثلاً، مساوی L باشد آنگاه حد

$$(22.7) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

نیز وجود دارد و مقدارش L خواهد بود.

توجه داشته باشید که حدود (۲۰.۷)، (۲۱.۷)، و (۲۲.۷) حدود «سمت راستی» هستند. البته قضیه مشابهی وجود دارد که در آن مفروضات در بازه بازی بشکل (b, a) صدق می‌کنند و کلیه حدود «سمت چپی» می‌باشند. همچنین، با تلفیق دو قضیه «یکطرفه» به نتیجه‌ای «دوطرفه» از همان نوع می‌رسیم که در آن x بدون هیچ قیدی به a میل خواهد کرد. پیش از آنکه برهان قضیه ۹.۷ را مطرح کنیم موارد استعمال این قضیه را در چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. از قاعده هوییتال استفاده کرده دستور آشنای

$$(23.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

را نتیجه می‌گیریم. در اینجا $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$. خارج قسمت مشتقات برابر است با $1/(\cos x) = g'(x)/f'(x)$ و این، وقتی $x \rightarrow 0$ ، به ۱ میل می‌کند. طبق قضیه ۹.۷ حد مذکور در (۲۳.۷) نیز وجود داشته و مساوی ۱ خواهد بود.

مثال ۲. برای آنکه حد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$$

را با قاعده هویتال معین کنیم قرار می‌دهیم $f(x) = x - \tan x$ ، $g(x) = x - \sin x$ و درمی‌یابیم که

$$(24.7) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos x}.$$

اگرچه این نیز، وقتی $x \rightarrow 0$ ، بصورت $0/0$ درمی‌آید، لکن در این مرحله می‌توان این ابهام را با وسائل جبری مرتفع ساخت. چنانچه بنویسیم

$$1 - \sec^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = - \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x}$$

کسر موجود در (۲۴.۷) بصورت

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = - \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x}$$

درمی‌آید و این، وقتی $x \rightarrow 0$ ، به $2 -$ نزدیک می‌شود. توجه کنید که ابهام موجود با حذف سازه مشترک $1 - \cos x$ از بین می‌رود. معمولاً در اینگونه مسائل حذف سازه‌های مشترک به ساده شدن کار کمک خواهد کرد.

وقتی خارج قسمت مشتقات $f'(x)/g'(x)$ نیز بصورت مبهم $0/0$ درآید می‌توانیم باریگر قاعده هویتال را امتحان کنیم. در مثال بعدی ابهام پس از دوبار استفاده از این قاعده رفع خواهد شد.

مثال ۳. بازای هر عدد حقیقی c داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x - 1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{cx^{c-1} - c}{2(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{c(c-1)x^{c-2}}{2} = \frac{c(c-1)}{2}. \end{aligned}$$

در این رشته از معادلات فرض این است که وجود هریک از حدود حد قبلی و نیز تساوی آنها را

ایجاب می‌کند.

مثال بعدی نشان می‌دهد که قاعده هوییتال همیشه کارا نیست.

مثال ۴. فرض می‌کنیم اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = e^{-1/x}$ ، و $g(x) = x$. کسر $f(x)/g(x)$ وقتی $x \rightarrow 0+$ ، صورت مبهم $0/0$ بخود می‌گیرد، و یکبار استفاده از قاعده هوییتال به کسر

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(1/x^2)e^{-1/x}}{1} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

منجر می‌شود. این نیز، وقتی $x \rightarrow 0+$ ، مبهم است، و اگر از صورت ومخرج مشتق بگیریم خواهیم داشت $(1/x^2)e^{-1/x}/(2x) = e^{-1/x}/(2x^3)$. پس از n مرحله به کسر $e^{-1/x}/(n! x^{n+1})$ می‌رسیم، پس با این روش هرگز ابهام رفع نخواهد شد.

مثال ۵. وقتی قاعده هوییتال چندین بار بکار می‌رود لازم است دقت بشود که آیا کسر مورد نظر واقعاً بصورت مبهم درمی‌آید یا نه. نوع اشتباهی که معمولاً رخ می‌دهد در محاسبات زیر منعکس است:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{2} = 3.$$

اولین مرحله محاسبه درست است لکن مرحله دوم چنین نخواهد بود. کسر

$$(6x - 2)/(2x - 1),$$

وقتی $x \rightarrow 1$ ، مبهم نیست. حد واقعی، یعنی ۴، با قراردادن یک بجای x در $(6x - 2)/(2x - 1)$ بدست می‌آید.

مثال ۶. گاهی می‌توان با تغییر متغیر از سنگینی کار کاست. بعنوان مثال، می‌توانستیم قاعده هوییتال را مستقیماً بکار برده حد

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{\sqrt{x}}}$$

را حساب کنیم، اما با نوشتن $t = \sqrt{x}$ و توجه به اینکه

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{1 - e^t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{-2e^t} = -\frac{1}{2}$$

می‌شود از مشتقگیری ریشه‌های دوم دوری جست.

حال به اثبات قضیه ۹.۷ می‌پردازیم.

پوهان. دستور مقدار میانگین کشی (قضیه ۶.۴ از بخش ۱۴.۴) را در مورد بازه بسته‌ای که a نقطه انتهائی چپش است بکار می‌بریم. چون ممکن است توابع f و g در a تعریف نشده باشند ما دو تابع جدید را معرفی می‌کنیم که در این نقطه تعریف شده باشند. فرض می‌کنیم

$$\text{اگر } x \neq a, F(x) = f(x); F(a) = 0$$

$$\text{اگر } x \neq a, G(x) = g(x); G(a) = 0$$

F و G هر دو در a پیوسته‌اند. در واقع، اگر $a < x < b$ ، هر دو تابع F و G بر بازه بسته $[a, x]$ پیوسته بوده و همه جا در بازه باز (a, x) مشتق دارند. بنابراین، دستور کشی در مورد بازه $[a, x]$ قابل اجرا بوده و خواهیم داشت

$$[F(x) - F(a)]G'(c) = [G(x) - G(a)]F'(c)$$

که در آن c نقطه‌ای است که در $a < c < x$ صدق می‌کند. چون $F(a) = G(a) = 0$ رابطه بالا باین صورت درمی‌آید:

$$f(x)g'(c) = g(x)f'(c).$$

اما $g'(c) \neq 0$ [چون، بنا به فرض، g' هرگز در (a, b) صفر نمی‌شود] و همچنین $g(x) \neq 0$. در واقع، هرگاه می‌داشتیم $g(x) = 0$ ، آنگاه $G(x) = G(a) = 0$ ، و بنا بر قضیه دل، نقطه‌ای مثل x_1 بین a و x وجود می‌داشت که در آن $G'(x_1) = 0$ ، که با فرض هرگز صفر نبودن g' در (a, b) متناقض بود. لذا می‌توانیم بر $g'(c)$ و $g(x)$ تقسیم کرده نتیجه بگیریم که

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

وقتی $x \rightarrow a$ ، $c \rightarrow a$ (زیرا $a < c < x$) و [بنابر (۲۱.۷)] کسر سمت راست به L نزدیک می‌شود. از اینرو $f(x)/g(x)$ نیز به L نزدیک شده و قضیه بااثبات خواهد رسید.

۱۳.۷ تمرینات

حدود تمرینات ۱ تا ۱۲ را حساب کنید.

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - \sin x}{(x \sin x)^{1/2}} \cdot ۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)} \cdot ۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x} \cdot ۸$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot ۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2} \cdot ۱۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3} \cdot ۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x - 1} \cdot ۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(a \arctan \frac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \frac{\sqrt{x}}{b} \right) \cdot ۱۲$$

۱۳. حد کسر

$$\frac{(\sin 4x)(\sin 3x)}{x \sin 2x}$$

را وقتی $x \rightarrow 0$ و نیز وقتی $x \rightarrow \pi/2$ تعیین کنید.

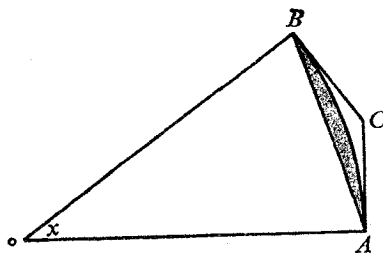
۱۴. بازای چه مقادیری از ثابتهای a و b ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-2} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 0?$$

۱۵. ثابتهای a و b را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = 1.$$

۱۶. قوسی مستدیر بشعاع ۱ مقابل زاویه‌ای برابر x رادیان که $0 < x < \pi/2$ ، مطابق شکل ۲.۷، قرار گرفته است. نقطه C نقطه برخورد دو خط مماس در A و B است.



شکل ۲.۷ تمرین ۱۶.

فرض کنید $T(x)$ مساحت مثلث ABC و $S(x)$ مساحت ناحیه سایه‌دار باشد. این

مقادیر را حساب کنید: (الف) $T(x)$; (ب) $S(x)$; (پ) حد $T(x)/S(x)$ وقتی $x \rightarrow 0 +$.

۱۷. در یک مدار الکتریکی شدت جریان $I(t)$ در لحظه t از رابطه

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

بدست می‌آید که در آن E ، R ، و L اعداد مثبتی می‌باشند. مقدار حدی $I(t)$ را، وقتی $x \rightarrow 0 +$ ، $R \rightarrow 0 +$ تعیین کنید.

۱۸. وزنه‌ای از یک فنر آویزان شده و با یک نیروی سینوسی آن را مرتعش کرده است. تغییر مکان $f(t)$ در لحظه t با معادله‌ای بشکل

$$f(t) = \frac{A}{c^2 - k^2} (\sin kt - \sin ct)$$

داده شده که در آن A ، c ، و k ثوابت مثبتی هستند و $c \neq k$. مقدار حدی تغییر مکان را، وقتی $k \rightarrow c$ ، مشخص نمائید.

۱۴.۷ علامات $+\infty$ و $-\infty$. — تعمیم قاعده هوییتال

قاعده هوییتال را می‌شود بچند طریق تعمیم داد. قبل از هر چیز ممکن است بخواهیم کسر $f(x)/g(x)$ را، وقتی x بطور نامحدود صعود می‌کند، در نظر بگیریم. شایسته است برای این وضع که x بطور نامعین صعود می‌کند علامت توصیفی کوتاهی داشته باشیم. برای این منظور ریاضیدانان از علامت مخصوص $+\infty$ ، بنام «بعلاوه بی‌نهایت»، استفاده می‌کنند. اگرچه ما برای خود علامت $+\infty$ معنی خاصی قائل نمی‌شویم لکن برای عبارات متفاوتی که مستلزم این علامت تعریف دقیقی خواهیم آورد. یکی از این عبارات باین صورت نوشته می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

و خوانده می‌شود «حد $f(x)$ ، وقتی x به بعلاوه بی‌نهایت میل کند، مساوی A است». آنچه که می‌خواهیم در اینجا بگوئیم این است که می‌توان مقادیر تابعی $f(x)$ را، با اختیار x بقدر کافی بزرگ، به عدد حقیقی A بدلیخواه نزدیک کرد. برای دقت ریاضی بخشیدن به این عبارت باید توضیح دهیم که منظور از «بدلیخواه نزدیک» و «بقدر کافی بزرگ» چیست. این کار در تعریف زیر شده است.

تعریف. علامت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

یعنی بازای هر عدد $\varepsilon > 0$ عددی دیگر چون $M > 0$ (که ممکن است تابع ε باشد) هست بطوری که

$$\text{هرگاه } x > M \text{ آنگاه } \varepsilon < |f(x) - A|.$$

محاسبات مربوط به حدود $x \rightarrow +\infty$ را ممکن است به حالت آشناتری تحویل کرد. کافی است x را با $1/t$ عوض کرده (یعنی قرار دهیم $t = 1/x$) و توجه کنیم که، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $t \rightarrow 0$ با مقادیر مثبت به 0 میل می‌کند. بعبارت دقیقتر، کافی است تابع جدید F را این طور معرفی کنیم:

$$(25.7) \quad F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \neq 0$$

و ملاحظه کنیم که دو عبارت

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = A \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

دقیقاً بیک معنی می‌باشند. اثبات معادل بودن اینها فقط به تعاریف دو علامت حد نیاز دارد و بعنوان تمرین باقی خواهد ماند.

وقتی رفتار $f(x)$ ، بازای x های بزرگ منفی، مورد نظر باشد علامت $-\infty$ («منهای بی‌نهایت») را معرفی کرده و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

با این معنی که بازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مثل $M > 0$ هست بطوری که

$$\text{هرگاه } x < -M \text{ آنگاه } \varepsilon < |f(x) - A|.$$

چنانچه F با (25.7) تعریف شده باشد تحقیق معادل بودن دو گزاره

$$\lim_{t \rightarrow 0-} F(t) = A \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

آسان است.

در پرتو نکات فوق نباید از اینکه کلیه قواعد معمول برای محاسبه با حدود (چنان که در قضیه ۱۰.۳ از بخش ۴.۳ بیان شده) را می‌توان در باب حدودی که در آنها $x \rightarrow \pm\infty$ نیز بکار برد شگفت زده بشویم. همین مطالب در مورد قاعده هوییتال، که می‌توان آن را بصورت زیر تعمیم داد، نیز صادق است.

قضیه ۱۰.۷. فرض کنیم f و g بازای هر x بزرگتر از عدد ثابتی چون $M > 0$ مشتق

داشته باشند. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

و، بازای $x > M$ ، $g'(x) \neq 0$ ، هرگاه $f'(x)/g'(x)$ ، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، به حدی میل کند آنگاه $f(x)/g(x)$ نیز به حدی میل کرده و دو حد مساوی خواهند بود. به عبارت دیگر،

$$(۲۶.۷) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \text{ايجاب می کند که} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

برهان. قرار می دهیم $F(t) = f(1/t)$ و $G(t) = g(1/t)$. در این صورت، اگر $t = 1/x$ ، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $t \rightarrow 0+$ ، چون $f(x)/g(x) = F(t)/G(t)$ ، وقتی $t \rightarrow 0+$ ، بصورت مبهم $0/0$ درمی آید خارج قسمت مشتقات $F'(t)/G'(t)$ را مورد معاینه قرار می دهیم. بنا بر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{و} \quad F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$$

همچنین، اگر $0 < t < 1/M$ ، $G'(t) \neq 0$ ، وقتی $x = 1/t$ و $x > M$ خواهیم داشت $F'(t)/G'(t) = f'(x)/g'(x)$ زیرا سازه مشترک $1/t^2$ حذف می شود. بنابراین هرگاه، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $f'(x)/g'(x) \rightarrow L$ ، آنگاه، وقتی $t \rightarrow 0+$ ، $F'(t)/G'(t) \rightarrow L$ ، و در نتیجه، بنا بر قضیه ۹.۷، $F(t)/G(t) \rightarrow L$ ، این، بخاطر اینکه $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$ ، (۲۶.۷) را ثابت خواهد کرد. البته نتیجه‌ای شبیه قضیه ۱۰.۷ وجود دارد که در آن ما حدود را با $x \rightarrow -\infty$ در نظر می گیریم.

۱۵.۷ حدود نامتناهی

در بخش پیش نماد $x \rightarrow +\infty$ را برای رساندن این مطلب که x مقادیر مثبت بزرگ دلخواه را اختیار می کند بکار بردیم. همچنین می نویسیم

$$(۲۷.۷) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

یا، بصورتی دیگر،

$$(۲۸.۷) \quad f(x) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow a \quad \text{وقتی}$$

تا نشان دهیم که $f(x)$ با نزدیک شدن x به a مقادیر بزرگ دلخواه اختیار می کند. معنی دقیق این علامات در تعریف زیر داده شده است.

تعریف. علامت (۲۷.۷) یا (۲۸.۷) باین معنی است که بازای هر عدد مثبت M (هر قدر هم که بزرگ باشد) عدد مثبت دیگری چون δ (که ممکن است تابع M باشد) هست بطوری که

$$\text{هرگاه } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{آنگاه} \quad f(x) > M$$

اگر بازای $0 < x - a < \delta$ داشته باشیم $f(x) > M$ می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$$

و می گوئیم که، وقتی x از راست به a نزدیک می شود، $f(x)$ به بعلاوه بی نهایت میل می کند. چنانچه بازای $0 < a - x < \delta$ داشته باشیم $f(x) > M$ می نویسیم

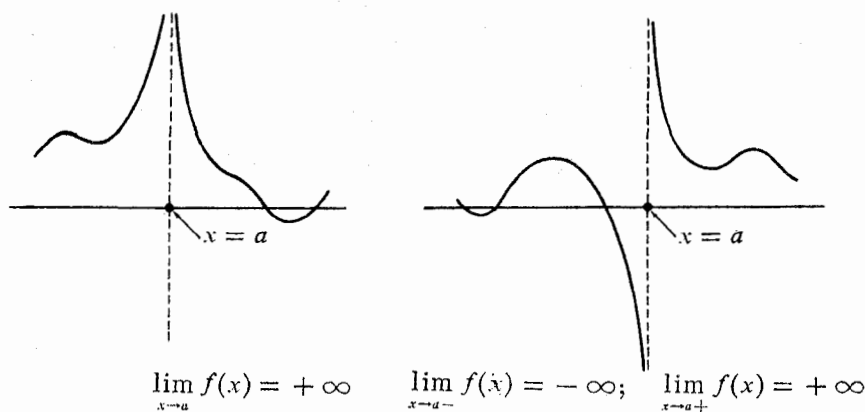
$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$$

و می گوئیم که، وقتی x از چپ به a نزدیک می شود، $f(x)$ به بعلاوه بی نهایت میل خواهد کرد.

علامات

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

به همین نحو تعریف می شوند تنها با این تفاوت که در آنها $f(x) > M$ را با $f(x) < -M$ عوض می کنیم. مثالهایی در شکل ۳.۷ نموده شده اند.



شکل ۳.۷ حدود نامتناهی.

همچنین شایسته است که تعاریف این علامات را طوری تعمیم دهیم که حالات $x \rightarrow \pm\infty$ را نیز در برگیرند. مثلاً، هرگاه بازای هر عدد مثبت M عدد مثبت دیگری چون X باشد بطوری که بازای هر $x > X$ ، $f(x) > M$ ، آنگاه می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

خواننده نباید در تنظیم تعاریف مشابهی برای علامات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

مشکلی داشته باشد.

چند مثال. در فصل ۶ ثابت کردیم که تابع لگاریتم بر قسمت مثبت محور حقیقی

صعودی و کراندار است. این مطلب را می‌شود بطور خلاصه این طور نوشت:

$$(۲۹.۷) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty.$$

بعلاوه در آن فصل ثابت کردیم که هرگاه $۱ < x < \infty$ آنگاه $\log x < \infty$ ، و لگاریتم در بازه $(۱, \infty)$ کران پائینی ندارد. پس همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty.$$

بکمک رابطه بین تابع لگاریتم و تابع نمائی می‌توان باسانی ثابت کرد که

$$(۳۰.۷) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ (یا } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0).$$

با استفاده از اینها بسادگی ثابت می‌شود که برای $\alpha > 0$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

طرز کار باین صورت است که می‌نویسیم $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ و از (۳۰.۷) و (۲۹.۷) استفاده می‌کنیم. دستورهای (۳۰.۷) روابط

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-1/x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0-} e^{-1/x} = +\infty$$

را نیز به ما خواهند داد. اثبات این مطالب تمرینهای خوبی برای آزمودن درک خواننده از علامات حدی شامل $\pm \infty$ خواهند بود.

۱۶.۷ رفتار $\log x$ و e^x برای x های بزرگ

حدود نامتناهی انواع جدیدی از صور مبهم را بدست می‌دهند. بعنوان مثال، ممکن است کسری چون $f(x)/g(x)$ داشته باشیم که در آن، وقتی $x \rightarrow a$ (یا وقتی $x \rightarrow \pm \infty$)، هم $f(x) \rightarrow +\infty$ و هم $g(x) \rightarrow +\infty$. در این حالت است که می‌گوئیم کسر $f(x)/g(x)$ صورت مبهم ∞/∞ را بخود گرفته است. قاعده هوییتال تعمیمهای متفاوتی دارد که در تشخیص رفتار کسری که صورت مبهم ∞/∞ بخود گرفته اغلب یاری دهنده‌اند. اما ما این تعمیمها را مطرح نمی‌کنیم زیرا با استفاده از قضیه زیر (که رفتار توابع لگاریتم و نمائی را برای مقادیر بزرگ x وصف می‌کند) می‌توان اکثر مثالهایی را که در عمل پیش می‌آیند بررسی کرد.

قضیه ۱۱.۷. اگر $a > 0$ و $b > 0$ خواهیم داشت

$$(۳۱.۷) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0$$

$$(۳۲.۷) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0.$$

برهان. ابتدا (۳۱.۷) را ثابت می‌کنیم و بعد از آن استفاده کرده (۳۲.۷) را نتیجه می‌گیریم. می‌توان مستقیماً از تعریف لگاریتم بصورت انتگرال استفاده کرده برهان ساده‌تری برای (۳۱.۷) ارائه داد. چنانچه $c > 0$ و $1 \leq t$ داریم $t^{c-1} \leq t^c$. پس اگر $x > 1$ می‌توانیم بنویسیم

$$0 < \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x t^{c-1} dt = \frac{x^c - 1}{c} < \frac{x^c}{c}.$$

بنابراین، برای هر $c > 0$ خواهیم داشت

$$0 < \frac{(\log x)^b}{x^a} < \frac{x^{bc-a}}{c^b}.$$

هرگاه c را مساوی a/b اختیار کنیم آنگاه $x^{bc-a} = x^{-a/b}$ که، وقتی $x \rightarrow +\infty$ به 0 میل خواهد کرد. این (۳۱.۷) را ثابت می‌کند. برای اثبات (۳۲.۷) تغییر متغیر $t = e^x$ را می‌دهیم. در اینصورت $x = \log t$ و در نتیجه $x^b / e^{ax} = (\log t)^b / t^a$ اما، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $t \rightarrow +\infty$ ، پس (۳۲.۷) از (۳۱.۷) نتیجه خواهد شد.

بکمک تقیم طبیعی نماد o می‌توانیم روابط حدیی را که هم اکنون ثابت شدند با شکل زیر بنویسیم:

$$(\log x)^b = o(x^a), \quad x \rightarrow +\infty \text{ وقتی}$$

و،

$$x^b = o(e^{ax}), \quad x \rightarrow +\infty \text{ وقتی}$$

بعبارت دیگر، هر قدر b بزرگ و هر مقدار a کوچک باشد (تا زمانی که هر دو مثبت باشند)، $(\log x)^b$ از x^a کندتر به بی‌نهایت میل می‌کند. همچنین x^b کندتر از e^{ax} به بی‌نهایت میل خواهد کرد.

مثال ۱. در مثال ۴ از بخش ۱۲.۷ نشان دادیم که هر چند بار هم که قاعده هویتال برای $0/0$ را بکار ببریم نمی‌توانیم رفتار $e^{-1/x}/x$ را برای x های نزدیک 0 معین کنیم. ولی اگر بنویسیم $1/x = t$ این کسر بشکل t/e^t درآمده و، وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، صورت مبهم ∞/∞ را بخود خواهد گرفت. قضیه ۱۱.۷ به ما می‌گوید که

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

بنابراین، وقتی $x \rightarrow 0+$ ، $e^{-1/x}/x \rightarrow 0$ ، یا، بعبارت دیگر،

وقتی $e^{-1/x} = o(x)$, $x \rightarrow 0 +$

علاوه بر $0/0$ و ∞/∞ صور مبهم دیگری نیز وجود دارند. برخی از اینها، که با علامات 0° ، 90° و ∞° نموده می‌شوند، در مثالهای زیر توضیح داده شده‌اند. در اینگونه مثالها، اعمال جبری اغلب ما را قادر می‌سازند تا مسئله را به یکی از صور مبهم از نوع $0/0$ یا ∞/∞ تبدیل کنیم، صوری که می‌توان آنها را توسط قاعده هسپیتال، تقریب چندجمله‌ای، یا قضیه ۱۱.۷ حل کرد.

مثال ۲. $(0, \infty)$. ثابت کنید برای هر α ثابت بزرگتر از ۰، $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$.

حل. با نوشتن $t = 1/x$ درمی یابیم که $x^\alpha \log x = -(\log t)/t^\alpha$ و این، وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، بنابر (۳۱.۷) به ۰ میل خواهد کرد.

مثال ۳. (0^0) . نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

حل. از آنجا که $x^x = e^{x \log x}$ پس، بنا بر پیوستگی تابع نمائی، در صورت وجود آخرین حد، خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \exp(\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x).$$

اما از مثال ۲ می دانیم که، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $x \log x \rightarrow 0$ و در نتیجه $x^x \rightarrow e^0 = 1$.

مثال ۴. (∞^0) . نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1$.

حل. قرار دهید $t = 1/x$ و از مثال ۳ استفاده کنید.

در بخش ۱۰.۷ روابط حدی

$$(33.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{a/x} = e^a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$$

x را با $1/x$ عوض کرد و بترتیب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

را بدست آورد که هردو بازای کلیه a های حقیقی معتبرند.

روابط (۳۳.۷) و آنهایی که درامثله ۲، ۳، و ۴ آمده اند همه از نوع $f(x)^{g(x)}$ می-
باشند.

باشند. اینها را معمولاً بصورت

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

نوشته و بعد نمای $g(x) \log f(x)$ را بوسیله یکی از روشهایی که قبلاً بحث شد مورد رسیدگی قرار می دهند.

۱۷.۷ تمرینات

حدود مذکور در تمرینات ۱ تا ۲۵ را حساب کنید. حروف a و b نمایشگر ثابتهای مثبتی خواهند بود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)} \quad ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}} \quad ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(a + be^x)}{\sqrt{a + bx^2}} \quad ۴$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \frac{\tan^3 x}{\tan x} \quad ۳$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log |\sin x|}{\log |\sin 2x|} \quad ۶$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} \right) \quad ۵$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(x+1)}{e^x} \quad ۸$$

$$\lim_{x \rightarrow (1/2-)} \frac{\log(1-2x)}{\tan \pi x} \quad ۷$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \frac{\tan x - 5}{\sec x + 4} \quad ۱۰$$

$$a > 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} \quad ۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/2} \sin(1/\sqrt{x}) \quad ۱۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad ۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^2 - x^2 + 1}) \quad ۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left[\frac{\log x}{(1+x)^2} - \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \right] \quad ۱۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x^x-1)} \quad ۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (\log x) \log(1-x) \quad ۱۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (1-2^x)^{\sin x} \quad ۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [x^{(x)} - 1] \quad ۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\cot x)^{\sin x} \quad ۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/\log x} \quad ۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log \frac{1}{x} \right)^x \cdot ۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x} \cdot ۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)} \cdot ۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{e/(1+\log x)} \cdot ۲۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)} \right) \cdot ۲۵$$

۲۶. c را طوری بیابید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = ۴.$$

۲۷. ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 0$ ، $(1+x)^c = 1 + cx + o(x)$. از این استفاده کرده حد $\{(x^4 + x^2)^{1/2} - x^2\}$ را، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، محاسبه نمایید.

۲۸. حد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{(x^5 + 7x^4 + 2)^c - x\}$$

بازای مقدار معینی از c متناهی و ناصفر است. این c را مشخص کرده و مقدار حد را حساب کنید.

۲۹. فرض کنید $f(x) = \int_1^x g(t)(t + 1/t) dt$ و $g(x) = x e^{x^2}$. حد $f''(x)/g''(x)$ را، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، محاسبه نمایید.

۳۰. فرض کنید $f(x) = \int_0^x e^{t^2} (3t^2 + 1)^{1/2} dt$ و $g(x) = x^e e^{2x}$. بازای مقدار معینی از c حد $f'(x)/g'(x)$ را، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، متناهی و ناصفر است. c را مشخص کرده و مقدار حد را حساب کنید.

۳۱. فرض کنید اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = e^{-1/x^2}$ و $f(0) = 0$.

(الف) ثابت کنید بازای هر $m > 0$ ، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x)/x^m \rightarrow 0$.

(ب) ثابت کنید مشتق m ام f بازای $x \neq 0$ از شکل $f^{(n)}(x) = f(x)P(1/x)$ برخوردار است که در آن $P(t)$ یک چندجمله‌ای از t می‌باشد.

(پ) ثابت کنید بازای هر $n \geq 1$ ، $f^{(n)}(0) = 0$. این نشان می‌دهد که هر چند جمله‌ای تیلور تولید شده بوسیله f در 0 چندجمله‌ای صفر است.

۳۲. مبلغ P دلار در بانک گذاشته شده که به آن سودی با نرخ مرکب r در سال، و m بار در سال، تعلق می‌گیرد. (مثلاً، وقتی نرخ بهره در سال 6% است، r مساوی 0.06 خواهد بود.) (الف) ثابت کنید مجموع سرمایه بعلاوه سود در پایان n سال برابر $P(1 + r/m)^{mn}$ است. اگر r و n ثابت گرفته شوند این مبلغ، وقتی $m \rightarrow +\infty$ ، به حد Pe^{rn} نزدیک می‌شود. این تعریف زیر را موجب خواهد شد: می‌گوئیم پول با

نرخ سالیانه r بطور مرکب و پیوسته رشد می‌کند اگر که مبلغ $f(t)$ پس از t سال مساوی $f(0)$ شود که در آن t عدد حقیقی نامنفی دلخواهی است. چنانچه نرخ بهره مرکب در سال $e\%$ باشد تقریباً چه مدت طول خواهد کشید تا یک سپرده بانکی در این حالات دو برابر گردد: (ب) سود بطور پیوسته حساب شود؟ (پ) سود چهار بار در سال محاسبه گردد؟



آشنائی با معادلات دیفرانسیل

۱۰۸ مقدمه

بسیاری از مسائل علمی باین ترتیب شکل می‌گیرند که شخص سعی می‌کند چیزی را بوسیله میزان تغییرش بیابد. مثلاً توانستیم وضعیت یک جسم متحرک را با داشتن اطلاعاتی از سرعت یا شتاب آن پیدا کنیم. یا اینکه یک مادهٔ رادیواکتیو بمیزان معینی بتحلیل برود و از ما بخواهند تا مقدار ماده را پس از گذشت زمانی معلوم مشخص نماییم. در اینگونه مثالها سعی ما این است که تابع مجهولی را از اطلاعاتی معلوم که بشکل معادله‌ای مستلزم لافل یکی از مشتقات تابع مجهول است بدست آوریم. این معادلات را معادلات دیفرانسیل می‌نامند و بررسی آنها یکی از مشکلترین شاخه‌های ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

معادلات دیفرانسیل، بسته به اینکه تابع مجهول فقط یک متغیره باشد یا دو یا بیشتر، به دو ردهٔ اساسی تحت عنوانهای معمولی و با مشتقات جزئی تقسیم می‌شوند. یک مثال ساده از معادلهٔ دیفرانسیل معمولی رابطهٔ

$$(۱۰۸) \quad f'(x) = f(x)$$

است که در آن، بخصوص، تابع نمائی $f(x) = e^x$ صدق می‌کند. عنقریب خواهیم دید که هر جواب (۱۰۸) باید بشکل $f(x) = Ce^x$ باشد که در آن C می‌تواند هر مقدار ثابت را دارا شود.

از طرف دیگر، معادله‌ای شبیه

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

نمونه‌ای است از یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی. این معادلهٔ خاص که معادلهٔ لاپلاس^۱ نام دارد، در نظریهٔ الکتریسته و مغناطیس، مکانیک سیالات، و مباحث دیگر ظاهر

می‌شود. این معادله از جوابهای متفاوتی برخوردار است که

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2), f(x, y) = e^x \cos y, f(x, y) = x + 2y$$

از آنجمله می‌باشند.

معادلات دیفرانسیل آن بخش از ریاضیات است که شاید بیش از هر قسمت دیگر مستقیماً از مکانیک، هیت، و فیزیک ریاضی الهام گرفته است. این مبحث در قرن هفدهم پدید آمد و آن زمانی بود که نیوتن، لایبنیتز، و برنولیس^۱ چند معادله دیفرانسیل ساده را که از مسائلی در هندسه و مکانیک ناشی می‌شدند حل کردند. این کشفیات اولیه، که حدود ۱۶۹۰ آغاز شدند، کم‌کم به پیدایش «مجموعه‌ای از شگردها» (که اینک کلاسیک شده‌اند) برای حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل منجر گردیدند. این شگردهای خاص در عین اینکه کاربردهای نسبتاً قلیلی دارند با اینحال به ما توان حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل را که در مکانیک و هندسه روی می‌دهند خواهند بخشید. از اینروست که مطالعه آنها از لحاظ عملی حائز اهمیت است. در اواخر این فصل بعضی از این روشهای خاص و نیز چند مسئله که با این روشها حل می‌شوند مورد بحث قرار خواهند گرفت.

تجربه نشان داده که دست یافتن به نظریه‌های ریاضی جوابهای معادلات دیفرانسیل با منتهای کلیت، جز در مورد معدودی از آنها، مشکل است. در میان این عده قلیل معادلات دیفرانسیل با اصطلاح خطی هستند که در بسیاری از مسائل علمی ظاهر می‌شوند. در این فصل مقدماتی ساده‌ترین نوع معادلات دیفرانسیل خطی و نیز چند کاربرد آنها مورد بحث قرار می‌گیرند. بررسی کاملتری از معادلات خطی در جلد دو صورت خواهد گرفت.

۲۰۸ اصطلاحات و نمادها

وقتی با معادله دیفرانسیلی مثل (۱۰۸) کار می‌کنیم معمولاً y را بجای $f(x)$ و y' را بجای $f'(x)$ می‌نویسیم، مشتقات بالاتر با y'' ، y''' ، و مانند اینها نموده خواهند شد. البته از حروف دیگری نظیر u ، v ، z ، و غیره نیز بجای y استفاده می‌شود. منظور از مرتبه یک معادله مرتبه بالاترین مشتقی است که در آن ظاهر شده است. مثلاً (۱۰۸) یک معادله مرتبه اول است که می‌توان آن را بصورت $y' = y$ نوشت. معادله دیفرانسیل $y' = x^2 y + \sin(xy'')$ یک معادله مرتبه دوم خواهد بود. در این فصل بررسی خود را با معادلات مرتبه اولی آغاز می‌کنیم که می‌توان آنها را نسبت به y' کرد و این‌طور نوشت:

$$(20.8) \quad y' = f(x, y)$$

که در آن عبارت $f(x, y)$ سمت راست از شکلهای خاص متفاوتی برخوردار است. تابع مشتق‌پذیر $y = Y(x)$ را در صورتی یک جواب (۲۰۸) بر بازه I می‌خوانند که، بسازی هر x در I ، تابع Y و مشتقش Y' در رابطه

$$Y'(x) = f[x, Y(x)]$$

صدق کنند. ساده‌ترین حالت وقتی روی می‌دهد که $f(x, y)$ مستقل از y است. در این حالت (۲.۸)، مثلاً، بصورت

$$(۳.۸) \quad y' = Q(x)$$

در می‌آید که در آن تابع معلوم Q بر بازه‌ای چون I تعریف شده است. منظور از حل معادله دیفرانسیل (۳.۸) یعنی که یکی از اولیه‌های Q را بیابیم. دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما نحوه انجام این کار را وقتی Q بر بازه I پیوسته است نشان می‌دهد. کافی است از Q انتگرال گرفته و بر آن مقدار ثابتی بیفزاییم. پس هر جواب (۳.۸) بشکل

$$(۴.۸) \quad y = \int Q(x) dx + C$$

است که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد (معمولاً آن را ثابت دلخواه انتگرالگیری می‌نامند). معادله دیفرانسیل (۳.۸) بی‌نهایت جواب دارد، بازای هر مقدار C یک جواب. چنانچه محاسبه انتگرال (۴.۸) بر حسب توابع آشنا، نظیر چندجمله‌ایها، توابع گویا، توابع مثلثاتی و مثلثاتی معکوس، لگاریتمها، و توابع نمایی، ممکن نشود، حتی اگر بشود جواب را بر حسب انتگرالهای توابع معلوم بیان کرد ما بازهم معادله دیفرانسیل را حل شده می‌دانیم. در عمل برای دست یافتن به مقادیر تقریبی انتگرالها روشهای متعددی وجود دارند که اطلاعات مفیدی را درباره جواب به ما می‌دهند. اغلب ماشینهای کامپیوتر با سرعت بالا در رابطه با این نوع مسائل طرحریزی شده‌اند.

مثال. حرکت خطی معین شده بوسیله سرعت. فرض کنیم جسمی در امتداد یک خط راست طوری حرکت می‌کند که سرعتش در لحظه t ، $2 \sin t$ می‌باشد. جای آن را در لحظه t بیابید.

حل. هرگاه $Y(t)$ جای جسم را در لحظه t نشان دهد که از یک نقطه شروع اندازه‌گیری شده است آنگاه $Y'(t)$ نمایشگر سرعت در زمان t خواهد بود. بنا به فرض داریم

$$Y'(t) = 2 \sin t.$$

با انتگرالگیری در می‌یابیم که

$$Y(t) = 2 \int \sin t dt + C = -2 \cos t + C.$$

این کل اطلاعاتی است که با دانستن فقط سرعت می‌توان درباره $Y(t)$ بدست آورد؛ برای مشخص شدن تابع مکان به اطلاعات بیشتری نیاز خواهد بود. اگر مقدار Y را در یک لحظه مشخص بدانیم C را می‌توانیم معین کنیم. مثلاً هرگاه $Y(0) = 0$ آنگاه $C = 2$ و تابع مکان $Y(t) = 2 - 2 \cos t$ است. اما، هرگاه $Y(0) = 2$ ، آنگاه $C = 4$ و تابع مکان $Y(t) = 4 - 2 \cos t$ خواهد بود.

مثال حل شده در بالا از بعضی جهات نمونه‌ای است از آنچه که در حالت کلی رخ می‌دهد. در حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول جایی باید با انتگرالگیری y' را حذف کرد و در این مرحله است که ثابت دلخواه C ظاهر می‌گردد. نحوه وارد شدن ثابت دلخواه C به جواب به طبیعت معادله دیفرانسیل داده شده بستگی دارد. این ممکن است بصورت یک ثابت جمع‌پذیر، نظیر معادله (۳.۸)، ظاهر شود، لکن احتمال اینکه بشکل دیگری جلوه کند بیشتر است. مثلاً وقتی معادله $y' = y$ مذکور در بخش ۳.۸ را حل می‌کنیم خواهیم دید که هر جواب بشکل $y = Ce^x$ می‌باشد.

در بسیاری مسائل لازم است که از دسته همه جوابها یکی را که مقدارش در نقطه بخصوصی داده شده اختیار کنیم. این مقدار داده شده را یک شرط اولیه خوانده و مسئله تعیین چنین جوابی را یک مسئله با مقدار اولیه می‌نامند. این اصطلاح از مکانیک گرفته شده است جایی که مثلاً مقدار مفروض، همچون مثال بالا، نشانگر وضعیت در لحظه شروع می‌باشد.

ما بررسی خود از معادلات دیفرانسیل را با حالت خاص مهمی آغاز می‌کنیم.

۳.۸ معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای تابع نمائی

تابع نمائی با مشتق خودش برابر است، و همین موضوع در مورد هر تابع نمائی که در عدد ثابتی ضرب شده باشد صادق خواهد بود. باسانی می‌توان نشان داد که اینها تنها توابعی هستند که از این خاصیت بر تمام محور حقیقی برخوردارند.

تذکره ۱.۸. اگر C عدد حقیقی مفروضی باشد یک و فقط یک تابع مانند f هست که در معادله دیفرانسیل

$$f'(x) = f(x),$$

بازای هر x حقیقی، صدق کرده و نیز حائز شرط اولیه $f(0) = C$ می‌باشد. این تابع با دستود

$$f(x) = Ce^x$$

داده می‌شود.

برهان. باسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع $f(x) = Ce^x$ هم در معادله دیفرانسیل مفروض و هم در شرط اولیه داده شده صدق می‌کند. اکنون باید نشان دهیم که این تنها جواب است.

فرض کنیم $y = g(x)$ یک جواب این مسئله با مقدار اولیه باشد:

$$g(0) = C; g'(x) = g(x), \quad x \text{ هر}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $g(x) = Ce^x$ یا $g(x)e^{-x} = C$. تابع $g(x)e^{-x}$ مشتق h عبارت را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم مشتق آن همیشه برابر صفر می‌باشد. مشتق h عبارت از

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = e^{-x}[g'(x) - g(x)] = 0.$$

پس، بنا بر قضیه مشتق صفر، h ثابت است. اما $g(0) = C$ ، در نتیجه $h(0) = g(0)e^0 = C$.
از اینرو بازای هر x داریم $h(x) = C$ ، یعنی، همانطور که می‌خواستیم، $g(x) = Ce^x$.

قضیه ۱۰.۸ نمونه‌ای است از یک قضیه وجودی - یکتائی. این قضیه به ما می‌گوید که مسئله با مقدار اولیه مذکور در قضیه داده‌ای یک جواب (وجود) و فقط یک جواب (یکتائی) است. هدف بسیاری از تحقیقات در نظریه معادلات دیفرانسیل کشف قضایای وجودی و یکتائی برای رده‌های وسیعی از معادلات است.

اینک نوع مهمی از معادلات را که معادلات دیفرانسیل $y' = Q(x)$ و $y' = y$ حالات خاصی از آنند مورد بحث قرار می‌دهیم.

۴.۸ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

یک معادله دیفرانسیل بشکل

$$(۵.۸) \quad y' + P(x)y = Q(x),$$

که در آن P و Q توابع معلومی باشند، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نام دارد. جملاتی که شامل تابع مجهول y و مشتق y' هستند بصورت ترکیبی خطی از y و y' ظاهر می‌شوند. فرض این است که توابع P و Q بر بازه‌ی بازی چون I پیوسته هستند. ما کلیه جوابهای y را که بر I تعریف شده‌اند جستجو می‌کنیم.

ابتدا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن طرف راست، یعنی $Q(x)$ ، متحد صفر است. معادله

$$(۶.۸) \quad y' + P(x)y = 0$$

معادله همگن یا تقلیل یافته متناظر (۵.۸) نام دارد. اکنون نحوه حل معادله همگن را نشان داده و بعد، با استفاده از این حل، معادله غیرهمگن (۵.۸) را حل می‌کنیم.
اگر y بر I ناصفر باشد معادله (۶.۸) با معادله

$$(۷.۸) \quad \frac{y'}{y} = -P(x)$$

معادل است باین معنی که هر y ناصفر صادق در (۶.۸) در (۷.۸) نیز صدق می‌کند و بالعکس. حال فرض می‌کنیم y تابع مثبتی باشد که در (۷.۸) صدق می‌کند. چون کسر y'/y مساوی مشتق $\log y$ است معادله (۷.۸) بصورت $D \log y = -P(x)$ در می‌آید که از آن $\log y = -\int P(x) dx + C$ نتیجه می‌گیریم، پس داریم

$$(۸.۸) \quad A(x) = \int P(x) dx - C \quad \text{که در آن } y = e^{-A(x)}$$

بعبارت دیگر، اگر جواب مثبتی برای (۶.۸) وجود داشته باشد، الزاماً باید شکل (۸.۸) را بازای C ای دارا شود. اما با آسانی می توان دید که هر تابع بشکل (۸.۸) جواب معادله همگن (۶.۸) است. درواقع داریم

$$y' = -e^{-A(x)} A'(x) = -P(x)e^{-A(x)} = -P(x)y.$$

پس کلیه جوابهای مثبت (۶.۸) را بدست آورده ایم. حال وصف کلیه جوابها کار آسانی است. ما این مطلب را بعنوان یک قضیه وجودی - یکتائی بیان می داریم.

قضیه ۲.۸. فرض کنیم P بر بازه I پیوسته باشد. نقطه دلخواه a را در I اختیار کرده و b را عدد حقیقی دلخواهی تصور می کنیم. در اینصورت یک و فقط یک تابع مثل $y = f(x)$ هست که در مسئله با مقدار اولیه زیر بر بازه I صدق می کند:

$$(9.8) \quad f(a) = b \text{ و } y' + P(x)y = 0$$

این تابع بوسیله دستور زیر داده می شود:

$$(10.8) \quad A(x) = \int_a^x P(t)dt \text{ که در آن } f(x) = be^{-A(x)}$$

برهان. فرض کنیم f با (۱۰.۸) تعریف شده باشد. در اینصورت $A(a) = 0$ ، پس $f(a) = be^0 = b$. مشتقگیری نشان می دهد که f در معادله دیفرانسیل (۹.۸) صدق می کند، در نتیجه f یک جواب مسئله با مقدار اولیه خواهد بود. اکنون باید نشان دهیم که این تنها جواب است.

فرض کنیم g یک جواب دلخواه باشد. می خواهیم نشان دهیم

$$g(x)e^{A(x)} = b \text{ یا } g(x) = be^{-A(x)}$$

بنابراین طبیعی است که h را با $h(x) = g(x)e^{A(x)}$ تعریف کنیم. مشتق h عبارت است از $(11.8) \quad h'(x) = g'(x)e^{A(x)} + g(x)e^{A(x)}A'(x) = e^{A(x)}[g'(x) + P(x)g(x)]$. حال گوئیم چون g در معادله دیفرانسیل (۹.۸) صدق می کند پس همه جا بر I داریم $g'(x) + P(x)g(x) = 0$. در نتیجه، بازای هر x در I ، $h'(x) = 0$. این یعنی h بر I ثابت است. پس خواهیم داشت

$$h(x) = h(a) = g(a)e^{A(a)} = g(a) = b.$$

بعبارت دیگر، $g(x)e^{A(x)} = b$ ، پس $g(x) = be^{-A(x)}$ که $g = f$ را نشان می دهد. این برهان را کامل خواهد کرد.

قسمت آخر برهان پیش روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرهمگن (۵.۸) پیشنهاد می کند. فرض کنیم g تابعی صادق در (۵.۸) بوده و $h(x) = g(x)e^{A(x)}$ که در آن، مانند فوق، $A(x) = \int_a^x P(t)dt$. در اینصورت معادله (۱۱.۸) دوباره برقرار است.

لکن، بعلت صادق بودن g در (۵.۸)، دستور مذکور برای $h'(x)$ نتیجه می‌دهد که

$$h'(x) = e^{A(x)} Q(x).$$

حال می‌توانیم ازدومین قضیه اساسی یاری گرفته بنویسیم

$$h(x) = h(a) + \int_a^x e^{A(t)} Q(t) dt.$$

لذا، چون $h(a) = g(a)$ پس هر جواب g ی (۵.۸) از شکل

$$(12.8) \quad g(x) = e^{-A(x)} h(x) = g(a) e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t) e^{A(t)} dt$$

برخوردار خواهد بود. بعکس، بامشتگیری مستقیم از (۱۲.۸) می توان باسانی تحقیق کرد که هرچنین σ ای یک جواب (۵.۸) می باشد، بنابراین کلیه جوابها را بدست آورده ایم. نتیجه حاصل را بصورت زیر بیان می کنیم.

قضیه ۳.۸. فرض کنیم P و Q بر بازه I پیوسته باشند. نقطه دلخواه a را در I اختیار کرده و b را عدد حقیقی دلخواهی می‌انگاریم. در اینصورت یک و فقط یک تابع مانند $y = f(x)$ هست که در مسئله با مقدار اولیه زیر بر بازه I صدق می‌کند:

$$f(a) = b \Rightarrow y' + P(x)y = Q(x)$$

این تابع بوسیلهٔ دستور

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t) e^{A(t)} dt$$

داده می شود که در آن $A(x) = \int_a^x P(t) dt$

تابعال لغت «بازه» بمعنی بازه‌ای کراندار بشکل (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, یا $[a, b]$ بوده است که درهریک $a < b$. شایسته است که به بازه‌های ییکران نیز توجه شود. این بازه‌ها باعلامات $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, +\infty)$, و $[a, +\infty)$ ($-\infty, a]$) نموده شده و مطابق زیرتعریف می گردند:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, (-\infty, a) = \{x \mid x < a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, (-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}.$$

بعلاوه، مناسب آن است که دسته همه اعداد حقیقی را بازه $(-\infty, +\infty)$ نشان دهیم. اذاینرو هروقت از یک معادله دیفرانسیل یا جواب آن روی بازه I صحبت می‌کنیم فرض این است که I یکی از بازه‌های نه گانه وصف شده در بالا می‌باشد.

مثال. کلیه جوابهای معادله دیفرانسیل مرتبه اول $xy' + (1-x)y = e^{x^2}$ را
بر بازه $(0, +\infty)$ بیابید.

حل. ابتدا معادله را بر x تقسیم کرده آن را بشکل $y' + P(x)y = Q(x)$ درمی آوریم. این نتیجه می دهد که

$$y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = \frac{e^{2x}}{x},$$

پس $P(x) = 1/x - 1$ و $Q(x) = e^{2x}/x$. از آنجا که P و Q بر بازه $(0, +\infty)$ پیوسته اند جواب منحصر بفردی مانند $y = f(x)$ هست که در یک شرط اولیه مفروض بشکل $f(a) = b$ صدق می کند. ما کلیه جوابها را بر حسب مقدار اولیه در نقطه $a = 1$ بیان می کنیم. بعبارت دیگر، با داشتن عدد حقیقی b ، کلیه جوابهایی را تعیین می کنیم که برای آنها $f(1) = b$. ابتدا محاسبه زیر را انجام می دهیم:

$$A(x) = \int_1^x P(t) dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt = \log x - (x - 1).$$

لذا خواهیم داشت $e^{-A(x)} = e^{x-1-\log x} = e^{x-1}/x$ و $e^{A(t)} = te^{1-t}$. پس قضیه ۳.۸ به ما می گوید که جواب مطابق دستور زیر است:

$$\begin{aligned} f(x) &= b \frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x} \int_1^x \frac{e^{2t}}{t} te^{1-t} dt = b \frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x} \int_1^x e^t dt \\ &= b \frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x} (e^x - e) = b \frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^{x+1}}{x}. \end{aligned}$$

این را می توانیم بشکل

$$f(x) = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}$$

نیز بنویسیم که در آن $C = be^{-1} - e$. این کلیه جوابها را بر بازه $(0, +\infty)$ بدست می دهد.

ممکن است که مطالعه رفتار جوابها، وقتی $x \rightarrow 0$ ، جالب باشد. چنانچه تابع نمائی را با چند جمله ای تیلور خطی آن تقریب درمی یابیم که، وقتی $x \rightarrow 0$ ،

$$e^x = 1 + x + o(x) \text{ و } e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$$

پس داریم

$$f(x) = \frac{(1+C) + (2+C)x + o(x)}{x} = \frac{1+C}{x} + (2+C) + o(1).$$

بنابراین، وقتی $x \rightarrow 0$ ، تنها جوابی که به یک حد متناهی میل می کند جوابی است که بازای $C = -1$ بدست می آید، این حد مساوی یک خواهد بود.

۵.۸ تمرینات

در هریک از تمرینات ۱ تا ۵ مسئله با مقدار اولیه را بر بازه تعیین شده حل کنید.

$$1. \quad y' - 3y = e^{2x} \quad \text{با این شرط که}$$

$$y = 0, x = 0 \quad \text{وقتی}$$

$$2. \quad xy' - 2y = x^5 \quad \text{با این شرط که}$$

$$y = 1, x = 1 \quad \text{وقتی}$$

$$3. \quad y' + y \tan x = \sin 2x \quad \text{با این شرط که}$$

$$y = 2, x = 0 \quad \text{وقتی}$$

$$4. \quad y' + xy = x^2 \quad \text{با این شرط که}$$

$$y = 0, x = 0 \quad \text{وقتی}$$

$$5. \quad dx/dt + x = e^{2t} \quad \text{با این شرط که}$$

$$x = 1, t = 0 \quad \text{وقتی}$$

$$6. \quad \text{کلّیه جوابهای } y' \sin x + y \cos x = 1 \quad \text{را بر بازه } (0, \pi) \quad \text{بیابید. ثابت کنید که}$$

دقیقاً یکی از این جوابها وقتی $x \rightarrow 0$ و یکی وقتی $x \rightarrow \pi$ حد منتهای دارد.

$$7. \quad \text{کلّیه جوابهای } y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2} \quad \text{را بر بازه } (-1, 0) \quad \text{بیابید. ثابت کنید، وقتی}$$

$x \rightarrow -1$ ، کلّیه جوابها به ۰ نزدیک می‌شوند لکن، وقتی $x \rightarrow 0$ ، فقط یکی از آنها حدش منتهای است.

$$8. \quad \text{کلّیه جوابهای } y' + y \cot x = 2 \cos x \quad \text{را بر بازه } (0, \pi) \quad \text{بیابید. ثابت کنید فقط}$$

یکی از اینها بر $(-\infty, +\infty)$ نیز جواب است.

$$9. \quad \text{کلّیه جوابهای } (x-1)(x-2)y' + 2y = (x-2)(x-3) \quad \text{را بر هریک}$$

از این بازه‌ها بیابید. (الف) $(-\infty, 2)$ ؛ (ب) $(2, 3)$ ؛ (پ) $(3, +\infty)$. ثابت کنید، وقتی $x \rightarrow 2$ ، کلّیه جوابها به حلدی منتهای میل می‌کنند لکن، وقتی $x \rightarrow 3$ ، هیچیک حد منتهای نخواهد داشت.

$$10. \quad \text{فرض کنید اگر } s(x) = (\sin x)/x, x \neq 0 \quad \text{و } s(0) = 1. \quad \text{تعریف کنید}$$

$$T(x) = \int_0^x s(t) dt. \quad \text{ثابت کنید تابع } f(x) = xT(x) \quad \text{در معادله دیفرانسیل}$$

$$xy' - y = x \sin x \quad \text{بر بازه } (-\infty, +\infty) \quad \text{صدق می‌کند و همه جوابها را برای}$$

$$\text{بازه بیابید. ثابت کنید این معادله دیفرانسیل جوابی که در شرط اولیه } f(0) = 1 \quad \text{صدق}$$

کند ندارد، و توضیح دهید چرا این با قضیه ۳.۸ در تضاد نیست.

$$11. \quad \text{ثابت کنید دقیقاً یک تابع مانند } f, \quad \text{که بر قسمت مثبت محور حقیقی پیوسته است،}$$

$$\text{وجود دارد که بازای هر } x > 0,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt,$$

و این تابع را بیابید.

۱۲. تابع f ، که بازای $x > 0$ با معادله

$$f(x) = xe^{(1-x^2)/2} - xe^{-x^2/2} \int_1^x t^{-2} e^{t^2/2} dt$$

تعریف شده، این خواص را دارد: (یکم) بر قسمت مثبت محور حقیقی پیوسته است و (دوم) در معادله

$$f(x) = 1 - x \int_1^x f(t) dt,$$

بازای هر $x > 0$ ، صدق می‌کند. کلیه توابع بهره‌مند از این دو خاصیت را بیابید.

معادله برنولی. هر معادله دیفرانسیل به شکل $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ را، که در آن n مساوی ۰ یا ۱ نباشد، یک معادله برنولی می‌نامند. این معادله، بدلیل حضور y^n ، غیرخطی است. تمرین بعدی نشان می‌دهد که همیشه می‌توان آن را بازای تابع مجهول جدیدی مثل v ، که $y^k = v$ و $k = 1 - n$ ، به یک معادله مرتبه اول خطی بدل کرد.

۱۳. فرض کنید k ثابت ناصفری باشد. همچنین P و Q را بر بازه I پیوسته بگیرید. چنانچه $a \in I$ و b عدد حقیقی دلخواهی باشد $v = g(x)$ را تنها جواب مسئله با مقدار اولیه زیر فرض کنید:

$$g(a) = b \text{ و } v' + kP(x)v = kQ(x)$$

اگر $n \neq 1$ و $k = 1 - n$ ثابت کنید تابع $y = f(x)$ ، که هیچ‌کجای I صفر نیست، یک جواب مسئله با مقدار اولیه زیر است:

$$f(a)^k = b \text{ و } y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

اگر و فقط اگر توان k ام f مساوی g بر I باشد.

در هر یک از تمرینات ۱۴ تا ۱۷ مسئله با مقدار اولیه را بر بازه تعیین شده حل کنید.

$$۱۴. y^{1/2} - 4y = 2e^x \text{ بر } (-\infty, +\infty) \text{ است با این شرط که}$$

$$\text{وقتی } x = 0, y = 2.$$

$$۱۵. y - y^2(x^2 + x + 1) = -y^2 \text{ بر } (-\infty, +\infty) \text{ با این شرط که}$$

$$\text{وقتی } x = 0, y = 1.$$

$$۱۶. \quad xy' - 2y = 4x^3 y^{1/2} \quad (-\infty, +\infty) \text{ بر } x \text{ با این شرط که}$$

$$\text{وقتی } y = 0, x = 1.$$

$$۱۷. \quad xy' + y = y^2 x^2 \log x \quad (0, +\infty) \text{ بر } x \text{ با این شرط که}$$

$$\text{وقتی } y = 1/2, x = 1.$$

$$۱۸. \quad 2xyy' + (1+x)y^2 = e^x \quad (0, +\infty) \text{ بر } x \text{ با این شرط که (الف) وقتی}$$

$$y = \sqrt{e}, x = 1; \quad (ب) \text{ وقتی } y = -\sqrt{e}, x = 1; \quad (پ) \text{ وقتی } x \rightarrow 0, y \text{ حد}$$

متناهی داشته باشد.

$$۱۹. \quad \text{هر معادله بشکل } y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \text{ را یک معادلهٔ دیکاتی}^1$$

می نامند. (برای حل معادلهٔ دیکاتی روش شناخته شده‌ای در دست نیست.) ثابت کنید

هرگاه u جواب معمولی از این معادله باشد آنگاه جوابهای دیگری از آن بصورت

$$y = u + 1/v \text{ وجود دارند که در آنها } v \text{ در معادلهٔ خطی مرتبهٔ اولی صدق می‌کند.}$$

$$۲۰. \quad \text{معادلهٔ ریکارتی } y'' + y' + y = 2 \text{ دوجواب ثابت دارد. با هر کدام شروع کرده}$$

و، ضمن استفاده از تمرین ۱۹، جوابهای دیگرش را باین ترتیب پیدا کنید: (الف) اگر

$$-2 \leq b < 1 \text{ جوابی را بر } (-\infty, +\infty) \text{ بیابید که، وقتی } x = 0, y = b.$$

$$(ب) \text{ چنانچه } b \geq 1 \text{ یا } b < -2 \text{ جوابی را بر بازهٔ } (-\infty, +\infty) \text{ بیابید که،}$$

$$\text{وقتی } y = b, x = 0.$$

۶.۸ چند مسئلهٔ فیزیکی که به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول منجر می‌شوند

در این بخش چند مسئلهٔ فیزیکی متفاوتی را مطرح می‌کنیم که می‌توان آنها را بصورت ریاضی با معادلات دیفرانسیل تنظیم کرد. در هر حالت معادلهٔ دیفرانسیل نمایشگر شکل ساده و فرضی مسئلهٔ فیزیکی است و نمونهٔ ریاضی مسئله نام دارد. معادلهٔ دیفرانسیل ترجمان یک قانون فیزیکی، نظیر دومین قانون حرکت نیوتن، قانون بقا، و غیره می‌باشد. هدف ما در اینجا توجیه انتخاب نمونهٔ ریاضی نیست بلکه تا حدودی منظور رسیدن به نتایج منطقی حاصل از آن می‌باشد. هر نمونه فقط تقریبی است به واقعیت، و توجیه آن کاملاً به علمی مربوط می‌شود که مسئله از آن ناشی شده است. هرگاه گواه شهودی یا تجربی نتایج ریاضی حاصل را تأیید کند آنگاه حس می‌کنیم که آن نمونه نمونهٔ مفیدی است. در غیر اینصورت سعی می‌کنیم نمونهٔ مناسبتری را بیابیم.

مثال ۱. تحلیل رادیو اکتیو. با آنکه میزان تحلیل عناصر رادیو اکتیو بسیار متفاوت است اما این طور بنظر می‌رسد که همه در یک خاصیت مشترک هستند و آن این است که میزان تحلیل یک مادهٔ معین در هر لحظه با مقدار ماده در آن لحظه متناسب می‌باشد. چنانچه مقدار ماده در لحظهٔ t را با $y = f(t)$ نشان دهیم $f'(t) = f'(t)$ نمایش میزان تغییر y در

زمان t است، و «قانون تحلیل» می‌گوید که

$$y' = -ky$$

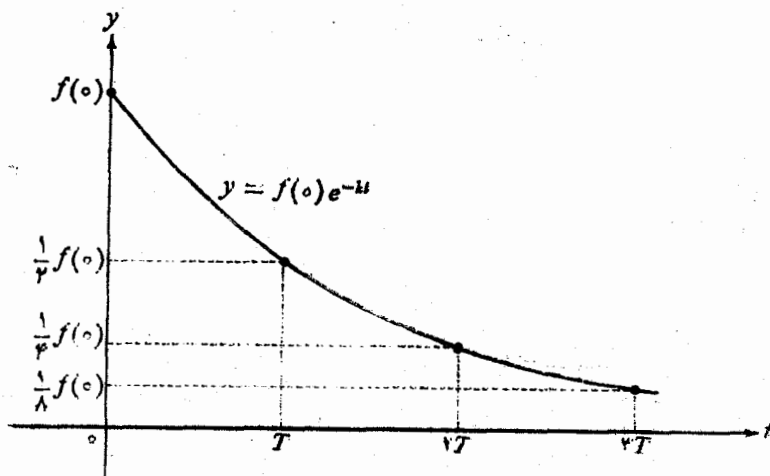
که در آن k ثابت مثبتی است (بنام ثابت تحلیل) که مقدار واقعی آن به عنصر خاص تحلیل رونده بستگی دارد. علامت منها باین علت است که y با ازدیاد t نزول می‌کند، و در نتیجه y' همیشه منفی خواهد بود. معادله دیفرانسیل $y' = -ky$ یک نمونه ریاضی است که در مسائل مربوط به تحلیل مواد رادیو اکتیو بکار می‌رود. هر جواب $y = f(t)$ این معادله دیفرانسیل از شکل

$$(۱۳.۸) \quad f(t) = f(0)e^{-kt}$$

برخورددار است. بنا براین، برای تعیین مقدار ماده در لحظه t ، بایستی مقدار اولیه $f(0)$ و ثابت تحلیل k را بدانیم.

دیدن اینکه چه اطلاعاتی را می‌شود از (۱۳.۸)، بدون دانستن مقدار دقیق $f(0)$ یا k ، بدست آورد جالب است. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که، چون e^{-kt} هرگز صفر نمی‌شود، هیچ لحظه متناهی t که در آن $f(t)$ صفر گردد وجود ندارد. از اینرو مطالعه «کل طول عمر» یک ماده رادیو اکتیو سودی ندارد. اما تعیین زمان لازم برای تحلیل کسری از یک ماده امکان پذیر است. برای سهولت معمولا این کسر $1/2$ اختیار می‌شود و لحظه T که در آن $f(T)/f(0) = 1/2$ یا $f(T) = \frac{1}{2}f(0)$ نیمه عمر ماده نام دارد. این را می‌توان با حل معادله $e^{-kT} = 1/2$ برای T مشخص کرد. با گرفتن لگاریتم خواهیم داشت $-kT = -\log 2$ یا $T = (\log 2)/k$. این معادله نیمه عمر را به ثابت تحلیل ربط می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که چون

$$\frac{f(t+T)}{f(t)} = \frac{f(0)e^{-k(t+T)}}{f(0)e^{-kt}} = e^{-kT} = 1/2$$



شکل ۱.۸ تحلیل ماده رادیو اکتیو با نیمه عمر T .

نیمه عمر برای هر مقدار از یک ماده یکی خواهد بود. شکل ۱۰.۸ سیمای کلی منحنی تحلیل یک مادهٔ رادیواکتیو را مجسم می‌کند.

مثال ۲. سقوط جسم در یک محیط مقاوم. جسمی بجرم m از حال سکون و از ارتفاع زیادی در جو زمین رها می‌شود. فرض کنید سقوط در خط مستقیم صورت گیرد و تنها نیروهای وارد بر آن نیروی جاذبهٔ ثقلی زمین (mg) که در آن g شتاب ثقل است و ثابت فرض می‌شود) و نیروی مقاومت (بعلمت مقاومت هوا) باشد که با سرعت آن متناسب است. در حرکت جسم بحث کنید.

فرض کنیم $s = f(t)$ فاصلهٔ پیموده شدهٔ جسم تا لحظهٔ t بوده و $v = s' = f'(t)$ سرعت آن را نشان دهد. اینکه جسم از حال سکون رها شده یعنی که $f'(0) = 0$.

دو نیرو بر جسم اثر می‌کند، یکی نیروی mg بطرف پائین (بواسطهٔ وزن) و دیگری نیروی kv — بسوی بالا (بخاطر مقاومت هوا) که در آن k ثابت مثبتی می‌باشد. قانون دوم نیوتن می‌گوید که مجموع نیروهای وارد بر جسم در هر لحظه مساوی حاصلضرب جرم آن m در شتابش است. هرگاه شتاب را در لحظهٔ t با a نشان دهیم آنگاه $a = v' = s''$ و قانون نیوتن معادلهٔ

$$ma = mg - kv$$

را به ما خواهد داد. این را می‌شود بعنوان یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم نسبت به تغییر مکان s یا یک معادلهٔ مرتبهٔ اول نسبت به سرعت v در نظر گرفت. این بعنوان یک معادلهٔ مرتبهٔ اول نسبت به v ، معادله‌ای است خطی و می‌توان آن را بشکل

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

نوشت. این معادله نمونهٔ ریاضی مسئله خواهد بود. چون، وقتی $t = 0$ ، $v = 0$ جواب منحصر بفرد معادلهٔ دیفرانسیل با دستور

$$(14.8) \quad v = e^{-kt/m} \int_0^t g e^{ku/m} du = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m})$$

داده می‌شود. توجه کنید که، وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، $v \rightarrow mg/k$. چنانچه از معادلهٔ (۱۴.۸) مشتق بگیریم درمی‌یابیم که شتاب در هر لحظه مساوی $a = ge^{-kt/m}$ است. ملاحظه کنید که، وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، $a \rightarrow 0$. این در تعبیر فیزیکی باین معنا است که مقاومت هوا بالاخره می‌خواهد نیروی ثقل را خنثی کند.

چون $v = s'$ معادلهٔ (۱۴.۸) خود یک معادلهٔ دیفرانسیل برای تغییر مکان s است و می‌توان از آن مستقیماً انتگرال گرفت تا

$$s = \frac{mg}{k} t + \frac{gm^2}{k^2} e^{-kt/m} + C$$

بدست آید. چون، وقتی $t \rightarrow 0$ ، $s = 0$ درخواهیم یافت که $C = -gm^2/k^2$ و معادله حرکت بصورت

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{gm^2}{k^2}(e^{-kt/m} - 1)$$

درمی آید. اگر سرعت اولیه، وقتی $t = 0$ ، مساوی v_0 باشد بایستی دستور (۱۴۰۸) برای سرعت در لحظه t را با

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) + v_0 e^{-kt/m}$$

عوض کرد. جالب است توجه کنیم که بازای هر سرعت اولیه (مثبت، منفی، یا صفر)، سرعت حد، وقتی t بطور نامحدود افزایش یابد، مساوی mg/k است که مستقل از v_0 می باشد. خواننده باید صحت این امر را با دلائل فیزیکی برخورد مسلم نماید.

مثال ۳. مسئلهٔ تبرید. میزان تغییر درجهٔ حرارت یک جسم متناسب است با تفاضل بین درجهٔ حرارت آن و محیط اطرافش. (این مطلب را قانون تبرید نیوتن می نامند.) چنانچه $y = f(t)$ درجهٔ حرارت جسم در لحظهٔ t (مجهول) بوده و $M(t)$ درجهٔ حرارت محیط اطرافش (معلوم) باشد قانون نیوتن معادلهٔ دیفرانسیل

$$(15.8) \quad y' + ky = kM(t) \quad \text{یا} \quad y' = -k[y - M(t)]$$

را بدست می دهد که در آن k عدد ثابت مثبتی است. این معادله خطی مرتبهٔ اول نمونهٔ ریاضی است که ما در مسائل تبرید بکار می بریم. جواب منحصر بفردی از معادله که در شرط اولیهٔ $f(a) = b$ صدق کند با دستور

$$(16.8) \quad f(t) = be^{-kt} + e^{-kt} \int_a^t kM(u)e^{ku} du$$

داده می شود.

حال مسئلهٔ خاصی را در نظر می گیریم که در آن جسمی در یک محیط با درجهٔ حرارت ثابت، مثلاً $M(t) = 10^\circ$ ، ظرف ۴۰ دقیقه از 200° به 100° سرد می شود. اگر t بر حسب دقیقه و $f(t)$ بر حسب درجه باشد خواهیم داشت $f(0) = 200$ و معادله (۱۶.۸) نتیجه می دهد که

$$(17.8) \quad \begin{aligned} f(t) &= 200e^{-kt} + 10ke^{-kt} \int_0^t e^{ku} du \\ &= 200e^{-kt} + 10(1 - e^{-kt}) = 10 + 190e^{-kt}. \end{aligned}$$

k را می توان بکمک $f(40) = 100$ حساب کرد. با گذاردن $t = 40$ در (۱۷.۸) درخواهیم یافت که $190e^{-40k} = 90$ ، پس $40k = \log(90/190)$ ، در نتیجه $k = (\log 19 - \log 9)/40$.

حال، با ثابت نگهداشتن درجه حرارت محیط در 5° ، زمان لازم برای رسیدن درجه حرارت همین جسم را از 200° به 100° محاسبه می‌کنیم. در این حالت معادله (۱۶.۸) برای همان ثابت k منتها $M(u) = 5$ اعتبار دارد. بجای (۱۷.۸) دستور

$$f(t) = 5 + 195e^{-kt}$$

را خواهیم داشت. برای یافتن t ی که $f(t) = 100$ داریم $100 = 5 + 195e^{-kt}$ ، پس $kt = \log(95/195) = \log(19/39)$ ، و در نتیجه

$$t = \frac{1}{k}(\log 39 - \log 19) = 40 \frac{\log 39 - \log 19}{\log 19 - \log 9}.$$

با مراجعه به یک جدول چهار رقمی لگاریتمهای طبیعی می‌بینیم که $\log 39 = 3.66636$ ، $\log 19 = 2.99444$ و $\log 9 = 2.19722$ ، پس، با دقت خط‌کش محاسبه، نتیجه می‌گیریم که 38.5 دقیقه $t = 40(0.719)/(0.747) = 40$.

معادله دیفرانسیل (۱۵.۸) به ما می‌گوید که اگر درجه حرارت جسم به درجه حرارت محیط نزدیک شود میزان پروت بنحو قابل ملاحظه‌ای افت خواهد کرد. برای نشان دادن این مطلب، زمانی را که ماده فوق برای رسیدن از 100° به 10° در محیطی با درجه حرارت 5° لازم دارد حساب می‌کنیم. محاسبه نتیجه می‌دهد که $\log(5/95) = -kt$ یا

$$t = \frac{1}{k} \log 19 = 40 \frac{\log 19}{\log 19 - \log 9} = \frac{40(2.9944)}{0.747} = 158. \text{ دقیقه}$$

ملاحظه می‌کنید که زمان لازم برای افت درجه حرارت از 100° به 10° بیش از چهار برابر ملاظه می‌کند که از 200° به 100° می‌رسد.

مثال ۴. مسئله ترقیق. بشکه‌ای حاوی ۱۰۰ گالن آب نمک بغلظت ۲۵ پوند نمک در گالن است. آب نمکی بغلظت ۲ پوند نمک در گالن بمیزان ۵ گالن در دقیقه وارد آن شده و مخلوط (که با بهم زدن یکنواخت نگهداشته می‌شود) با همان میزان از بشکه خارج می‌گردد. مقدار نمک موجود در بشکه را در هر لحظه بیابید.

فرض کنیم $y = f(t)$ مقدار (به پوند) نمک بشکه t دقیقه پس از شروع اختلاط باشد. دو عامل موجب تغییر y می‌شوند، یکی آب نمک ورودی که نمک را بمیزان ۱۰ پوند در دقیقه وارد می‌کند و دیگری مخلوط خروجی که نمک را بمیزان $5(y/100)$ پوند در دقیقه خارج می‌سازد. (کسر $y/100$ نشانگر غلظت در لحظه t است). لذا معادله دیفرانسیل

$$y' + \frac{1}{20}y = 10 \text{ یا } y' = 10 - \frac{1}{20}y$$

را خواهیم داشت. این معادله خطی نمونه ریاضی مسئله ما می‌باشد. چون، وقتی $t = 0$ ، $y = 250$ جواب منحصر بفرد با دستور

$$(۱۸.۸) \quad y = ۲۵۰e^{-۱/۲۰} + e^{-۱/۲۰} \int_0^t ۱۰e^{u/۲۰} du = ۲۰۰ + ۵۰e^{-۱/۲۰}$$

داده خواهد شد. این معادله نشان می‌دهد که برای هر t ، $y > ۲۰۰$ و، وقتی t بطور نامحدود صعود کند، $y \rightarrow ۲۰۰$. از اینرو کمترین نمک ممکن در بشکه ۲۰۰ پوند خواهد بود. (این را می‌شد از صورت مسئله نیز حدس زد.) معادله (۱۸.۸) را می‌توان نسبت به t و بر حسب y حل کرده

$$t = ۲۰ \log\left(\frac{۵۰}{y - ۲۰۰}\right)$$

را نتیجه گرفت. این به ما امکان یافتن لحظه‌ای را که در آن مقدار نمک بشکه مساوی y معینی است می‌دهد مشروط بر آنکه $۲۵۰ > y > ۲۰۰$.

مثال ۵. مدارهای الکتریکی. شکل ۲۰.۸ (الف) در صفحه ۳۹۵ یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که دارای نیروی محرکه، مقاومت، و سلف است که بطور سری بهم وصل شده‌اند. نیروی محرکه و ولتاژی را بوجود می‌آورد که سبب ایجاد جریان برق در مدار می‌شود. چنانچه خواننده با مدارهای الکتریکی آشنا نیست نباید از این بابت نگرانی به خود راه دهد. برای مقاصد ما آنچه که باید دربارهٔ این مدار بدانیم این است که ولتاژ، یعنی $V(t)$ ، و شدت جریان، یعنی $I(t)$ ، توابعی از زمان t اند که با معادله دیفرانسیلی بشکل

$$(۱۹.۸) \quad LI'(t) + RI(t) = V(t)$$

بهم مربوط می‌شوند. در اینجا L و R ثوابت مثبتی فرض شده‌اند. آنها را بترتیب ضریب سلف و مقاومت مدار می‌نامند. این معادله دیفرانسیل تنظیم ریاضی قانون بقائی است که به قانون ولتاژ کیرشف^۱ شهرت دارد و بعنوان نمونهٔ ریاضی مدار بکار خواهد رفت.

برای خوانندهٔ ناآشنا با مدارها تشبیه جریان برق به جریان آب در یک لولهٔ ثمر-بخش است. نیروی محرکه (که معمولا یک باتری یا یک مولد است) شبیه به تلمبه‌ای خواهد بود که جریان آب در لوله را سبب می‌شود؛ مقاومت مثل اصطکاک در لوله عمل می‌کند که با جریان مخالف است؛ و ضریب سلف اثر متعادل کننده دارد که از تغییرات ناگهانی جریان که بر اثر تغییرات ناگهانی در ولتاژ بوجود می‌آیند جلوگیری می‌نماید.

نوع سؤالی که معمولا در مورد این مدارها مطرح می‌شود این است که اگر ولتاژ $V(t)$ را برمدار اعمال کنیم شدت جریان $I(t)$ چقدر است؟ چون با یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول روبرو هستیم حل این مسئله مطلبی عادی خواهد بود. اگر $I(0)$ شدت جریان اولیه در لحظهٔ $t = 0$ باشد معادله دارای جواب

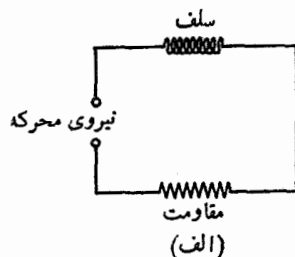
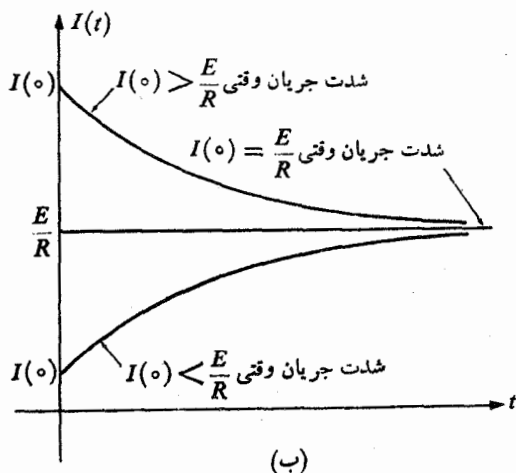
$$I(t) = I(0)e^{-Rt/L} + e^{-Rt/L} \int_0^t \frac{V(x)}{L} e^{Rx/L} dx$$

می باشد.

یک حالت خاص و مهم وقتی است که ولتاژ اعمال شده ثابت باشد، مثلاً، بازای هر $V(t) = E$ در این حالت انتگرالگیری آسان است و دستور

$$I(t) = \frac{E}{R} + \left(I(0) - \frac{E}{R} \right) e^{-Rt/L}$$

را به ما خواهد داد. این نشان می دهد که طبیعت جواب به رابطه بین شدت جریان اولیه



شکل ۲.۸ (الف) نمودار یک مدار سری ساده.
(ب) شدت جریان حاصل از یک ولتاژ ثابت اعمال شده E .

$I(0)$ و کسر E/R بستگی دارد. اگر $I(0) = E/R$ جمله نمایی حضور نداشته و شدت جریان ثابت است، یعنی $I(t) = E/R$. اگر $I(0) > E/R$ ضریب جمله نمایی مثبت بوده و شدت جریان، وقتی $t \rightarrow +\infty$ به مقدار حدی E/R نزول می کند. چنانچه $I(0) < E/R$ شدت جریان به مقدار حدی E/R صعود خواهد کرد. ثابت E/R را شدت جریان حالت پایدار و جمله نمایی $[I(0) - E/R] e^{-Rt/L}$ را شدت جریان گذرا می نامند. مثالهایی در شکل ۲.۸ (ب) نموده شده اند.

مثالهای پیشگفته قدرت متحد کننده و فوائد عملی معادلات دیفرانسیل را منعکس می کنند. این مثالها نشان می دهند که چگونه ممکن است چند نوع مسئله فیزیکی مختلف دقیقاً به یک نوع معادله دیفرانسیل منجر شوند.

معادله دیفرانسیل (۱۹.۸) از این نظر مورد توجه خاص است که، بکمک ادوات الکتریکی، حل بسیاری از مسائل فیزیکی را فراهم می کند. مثلاً فرض می کنیم یک مسئله

فیزیکی به حل معادله دیفرانسیلی بشکل

$$y' + ay = Q$$

منجر شود که در آن a یک ثابت مثبت و Q تابع معلومی باشد. می شود سعی کرد یک مدار الکتریکی با ضریب سلف L و مقاومت R را طوری ساخت که $R/L = a$ و بعد کوشش نمود تا ولتاژ LQ برمدار اعمال شود. در این صورت صاحب یک مدار الکتریکی می شویم که نمونه ریاضی آن دقیقاً همان نمونه ریاضی مسئله فیزیکی ما می باشد. پس می توان، با اندازه گیریهای شدت جریان در مدار، به کسب اطلاعاتی عددی درباره جواب مسئله فیزیکی امیدوار بود. از این ایده در عمل استفاده شده و منجر به پیدایش کامپیوترقیاسی گردیده است.

۷۰۸ تمرینات

در تمرینات زیر یک معادله دیفرانسیل مناسب مرتبه اول را بعنوان نمونه ریاضی مسئله بکار برید.

۱. نیمه عمر رادیوم تقریباً ۱۶۰۰ سال است. معین کنید چند درصد مقدار معلومی از آن در ۱۰۰ سال بتحلیل می رود.

۲. اگر تعدادی از یک نوع باکتری بمیزانی متناسب با تعداد آنها در هر لحظه رشد کنند وعده آنها در هر ساعت دو برابر گردد، افزایش آنها پس از دو ساعت چه خواهد بود؟

۳. $y = f(t)$ مقدار یک ماده را در لحظه t نشان می دهد. فرض می کنیم این ماده به میزانی متناسب با مقدارش در هر لحظه بتحلیل می رود. چنانچه n عدد صحیح مثبتی باشد عدد T را که در رابطه $f(T) = f(0)/n$ صادق کند $1/n$ عمر ماده می نامند. (الف) ثابت کنید که $1/n$ عمر برای هر مقدار از یک ماده معین یکی است و T را بر حسب n وثابت تحلیل k حساب کنید.

(ب) اگر a و b داده شده باشند ثابت کنید که f را می توان بشکل

$$f(t) = f(a)^{w(t)} f(b)^{1-w(t)}$$

در آورد و $w(t)$ را معین نمایید. این نشان می دهد که مقدار ماده در لحظه t میانگین هندسی وزندار مقادیر آن در دو لحظه $t = b$ و $t = a$ است.

۴. شخصی با چتر نجات از ارتفاع زیادی به پائین می پرد. وزن شخص و چتر رویهم ۱۹۲ پوند است. فرض کنید $v(t)$ سرعت شخص (بر حسب فوت بر ثانیه) t ثانیه پس از پرش باشد. در ۱۵ ثانیه اول قبل از باز شدن چتر، مقاومت هوا را $3v(t)/4$ پوند و پس از آن، یعنی زمانی که چتر باز است، مقاومت را $12v(t)$ پوند تصور کنید. شتاب جاذبه را ۳۲ فوت بر مجذور ثانیه انگاشته و دستورهای صریحی را برای سرعت $v(t)$ در لحظه t بیابید. (می توانید، در محاسبات خود از تقریب $37/128 = e^{-5/4}$ استفاده نمایید.)

۵. به مثال ۲ در بخش ۶.۸ باز می‌گردیم. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای بنویسید

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds}$$

و بدینوسیله نشان دهید که معادله دیفرانسیل آن مثال را می‌شود باین صورت نوشت

$$\frac{ds}{dv} = \frac{bv}{c-v}$$

که در آن $b = m/k$ و $c = gm/k$. از این معادله انتگرال گرفته v را بر حسب v بیان کنید. نتیجه خود را با دستورهای که برای v و s در آن مثال بدست آمدند مقابله نمایید.

۶. مثال ۲ در بخش ۶.۸ را، با این فرض که مقاومت هوا با v^2 متناسب است، تغییر دهید. نشان دهید که معادله دیفرانسیل را می‌توان بهر یک از اشکال زیر درآورد:

$$\frac{ds}{dv} = \frac{m}{k} \frac{v}{c^2 - v^2}; \quad \frac{dt}{dv} = \frac{m}{k} \frac{1}{c^2 - v^2}$$

که در آنها $c = \sqrt{mg/k}$. از هریک از اینها انتگرال گرفته و دستورهای زیر را برای v بدست آورید:

$$v^2 = \frac{mg}{k} (1 - e^{-2kst/m}); \quad v = c \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{e^{bt} + e^{-bt}} = c \tanh bt$$

که در آن $b = \sqrt{kg/m}$. مقدار حدی v را، وقتی $t \rightarrow +\infty$ معین نمایید.

۷. جسمی در یک اتاق 60° ظرف نیم ساعت از 200° به 120° می‌رسد.

(الف) نشان دهید که درجه حرارت آن پس از t دقیقه برابر $140e^{-kt} + 60$ است که در آن $k = (\log 3 - \log 7)/30$.

(ب) نشان دهید که زمان لازم t برای آنکه درجه حرارت جسم به T برسد از دستور $t = [\log 140 - \log(T - 60)]/k$ بدست می‌آید که در آن

$$60 < T \leq 200.$$

(پ) لحظه‌ای را بیابید که درجه حرارت جسم 90° باشد.

(ت) چنانچه درجه حرارت اتاق ثابت نبوده و بمیزان 1° در هر ده دقیقه افت کند دستوری برای درجه حرارت جسم در لحظه t بیابید. فرض کنید درجه حرارت اتاق، در لحظه‌ای که از آن جسم 200° است، مساوی 60° باشد.

۸. میزان الحراهِی در یک اتاق با درجه حرارت 75° قرار داشته است. ۵ دقیقه پس از بردن آن به خارج 65° را نشان می‌دهد. بعد از ۵ دقیقه دیگر 60° را نشان

خواهد داد. درجه حرارت خارج اطاق را حساب کنید.

۹. در یک بشکه ۱۰۰ گالن آب نمک حاوی ۵۰ پوند نمک حل شده وجود دارد. آب بمیزان ۳ گالن در دقیقه وارد آن می شود و غلظت را با بهم زدن یکنواخت نگهداشته اند. اگر مخلوط بمیزان ۲ گالن در دقیقه خارج شود چه مقدار نمک در پایان یک ساعت در بشکه خواهد ماند؟

۱۰. به تمرین ۹ باز می گردیم. فرض کنید ته بشکه را با مخلوطی از نمک و یک ماده غیر قابل حل پوشیده باشند. همچنین نمک بمیزانی متناسب با تفاضل بین غلظت محلول و غلظت یک محلول اشباع شده (۳ پوند نمک در گالن) حل شود، و اگر آب تازه می بود یک پوند نمک را در هر دقیقه در خود حل می کرد. در پایان یک ساعت چقدر نمک در محلول وجود خواهد داشت؟

۱۱. یک مدار الکتریکی شبیه مدار مثال ۵ در بخش ۶.۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید نیروی محرکه جریان متناوب یک مولد است که ولتاژی برابر $V(t) = E \sin \omega t$ را تولید می کند که در آن E و ω ثابتهای مثبتی هستند (ω حرف یونانی امگا است). اگر $I(0) = 0$ ثابت کنید شدت جریان بصورت

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-Rt/L}$$

است که در آن α فقط به ω ، L ، و R بستگی دارد. نشان دهید که وقتی $L = 0$ ، $\alpha = 0$.

۱۲. به مثال ۵ در بخش ۶.۸ باز می گردیم. فرض کنید ولتاژ اعمال شده یک تابع پله ای باشد که این طور تعریف می شود: اگر $a \leq t \leq b$ ، $E(t) = E$ ، $a > 0$ ؛ بازای هر t دیگر $E(t) = 0$. چنانچه $I(0) = 0$ ثابت کنید که شدت جریان با این دستورها داده می شود: اگر $t \leq a$ ، $I(t) = 0$ ؛ اگر $a \leq t \leq b$ ، $I(t) = (E/R)(1 - e^{-R(t-a)/L})$ ؛ اگر $t \geq b$ ،

$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-Rt/L} (e^{Rb/L} - e^{Ra/L}).$$

شکلی بکشید که سرشت نمودار I را نشان دهد.

(شد جمعیت. در مطالعه رشد جمعیت (اعم از انسان، حیوان، یا باکتری) تابعی ای که x تا را تا لحظه t می شمارد الزاماً یک تابع پله ای است که فقط مقادیر عددی بخود می گیرد. بنابراین، میزان (شد واقعی، یعنی dx/dt)، وقتی t در بازه بازی باشد که x ثابت است) صفر می باشد و یا dx/dt (وقتی x از یک عدد صحیح به دیگری می پرد) وجود نخواهد داشت. با اینحال اغلب می توان با این فرض که جمعیت x تابع پیوسته ای از t بوده و دارای مشتق dx/dt پیوسته در هر لحظه است اطلاعات مفیدی کسب نمود. در

اینصورت می‌توان برای جمعیت «قوانین رشد» متعددی وضع کرد که به عواملی در محیط که موجب یا مانع رشد می‌شوند بستگی داشته باشند.

مثلاً اگر اثر محیط کم و یا صفر باشد عاقلانه است که میزان رشد را با تعداد جمعیت در هر لحظه متناسب بگیریم. ساده‌ترین نوع قانون رشد بصورت

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (20.8)$$

می‌باشد که در آن k ثابتی است که به نوع خاص جمعیت بستگی دارد. ممکن است وضعی پیش بیاید که سازه k نیز با زمان تغییر کند و بتوان قانون رشد (20.8) را این‌طور تعمیم داد:

$$\frac{dx}{dt} = k(t)x. \quad (21.8)$$

چنانچه بدلائلی جمعیت نتواند از مقدار ماکزیمم M تجاوز کند (مثلاً ممکن است مواد غذایی تمام شوند) می‌توان منطقاً فرض کرد که میزان رشد هم با x و هم با $M - x$ متناسب است. بنابراین، دومین نوع قانون رشد را خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) \quad (22.8)$$

که در آن k ، مانند (21.8)، ممکن است ثابت یا، بطور کلیتر، با زمان تغییر نماید. امکان دارد پیشرفتهای صنعتی مقدار M را بکندی افزایش و یا کاهش دهند، و در نتیجه حتی می‌توانیم (22.8) را، با این فرض که M هم با زمان تغییر می‌کند، تعمیم بیشتری ببخشیم.

۱۳. برای هر یک از «قوانین رشد» (20.8) و (22.8) (با این فرض که k و M هر دو ثابت هستند) x را بصورت تابعی از t بیان نمائید. نشان دهید که نتیجهٔ مربوط به (22.8) را می‌توان باین صورت نوشت:

$$x = \frac{M}{1 + e^{-\alpha(t-t_1)}} \quad (23.8)$$

که در آن α ثابت بوده و t_1 لحظه‌ای است که در آن $x = M/2$.

۱۴. قانون رشد (23.8) در تمرین ۱۳ را صحیح دانسته و فرض کنید در سه فاصلهٔ زمانی مساوی t_1 ، t_2 ، t_3 سرشماری کرده‌اند و نتایج عددی x_1 ، x_2 ، x_3 بدست آمده باشند. نشان دهید که اینها برای تعیین M کافی هستند و، در واقع، داریم

$$M = x_2 \frac{x_3(x_2 - x_1) - x_1(x_3 - x_2)}{x_2^2 - x_1x_3}. \quad (24.8)$$

۱۵. رابطه (۲۳.۸) تمرین ۱۳ در مورد قانون رشد (۲۲.۸) را برای وقتی که k الزاماً ثابت نیست تعمیم دهید. نتیجه را برحسب لحظه t که در آن $x = M/2$ بیان نمایید.

۱۶. اداره سرشماری ارقام زیر را (به میلیون) برای ایالات متحده از سال ۱۷۹۰ تا ۱۹۵۰ در فواصل ده ساله گزارش کرده است: ۳۹، ۷۶، ۹۲، ۱۰۸، ۱۲۲، ۱۳۵، ۱۵۰، ۳۱، ۷۳، ۱۷، ۱۲۹، ۱۷۲، ۲۳، ۳۱.

(الف) با استفاده از معادله (۲۴.۸) مقدار M را برپایه ارقام سرشماری سالهای ۱۷۹۰، ۱۸۵۰ و ۱۹۱۰ تعیین کنید.

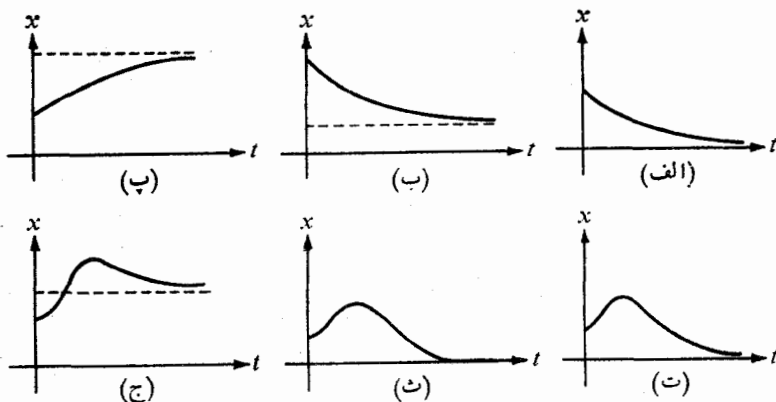
(ب) همین کار را در مورد سالهای ۱۹۱۰، ۱۹۳۰ و ۱۹۵۰ انجام دهید.

(پ) بر مبنای محاسباتان در (الف) و (ب) آیا قانون رشد (۲۳.۸) را برای مردم ایالات متحده می پذیرید یا رد می کنید؟

۱۷. (الف) نمودار $\log x$ را بعنوان تابعی از t رسم کنید که در آن x نشانگر ارقام سرشماری مذکور در تمرین ۱۶ باشد. با استفاده از این نمودار نشان دهید که قانون رشد (۲۰.۸) در سالهای بین ۱۷۹۰ تا ۱۹۱۰ با تقریب بسیار صادق بسوده است. مقدار متوسط مناسبی را برای k در این دوره از زمان پیدا نمایید.

(ب) مقدار متوسط مناسبی را برای k در فاصله سالهای ۱۹۲۰ تا ۱۹۵۰ بیابید، فرض کنید قانون رشد (۲۰.۸) برای این k برقرار باشد، و میزان جمعیت ایالات متحده را در سالهای ۲۰۰۰ تا ۲۰۵۰ پیش بینی نمایید.

۱۸. وجود زهرابه در یک محیط سبب از بین رفتن نوعی از یک باکتری بمیزانی متناسب با عده باکتریها در هر لحظه و مقدار زهرابه می شود. اگر زهرابه ای وجود نمی داشت باکتریها بمیزانی متناسب با تعداد آنها در هر لحظه رشد می کردند. فرض کنید x عده باکتریهای زنده در لحظه t باشد. همچنین مقدار زهرابه بمیزان ثابتی افزایش یافته و تولید آن در لحظه $t = 0$ شروع شود. برای x معادله دیفرانسیلی ساخته و آن را حل کنید. یکی از منحنیهای شکل ۳.۸ رفتار کلی x را به بهترین وجه بعنوان تابعی از t



شکل ۳.۸ تمرین ۱۸.

نشان می‌دهد. این منحنی را نام برده و دلیل خود را ذکر کنید.

۸.۸ معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

هر معادله دیفرانسیل بشکل

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x)$$

را یک معادله خطی مرتبه دوم می‌نامند. توابع P_1 و P_2 که در تابع مجهول y و مشتق y' ضرب شده‌اند ضرایب معادله نام خواهند داشت.

برای معادلات خطی مرتبه اول یک قضیه وجودی - یکتائی را ثابت کرده و کلیه جوابها را با دستور صریحی مشخص نمودیم. اگرچه یک قضیه وجودی - یکتائی نیز برای معادله خطی مرتبه دوم کلی وجود دارد اما، بجز در چند حالت خاص، دستور صریحی که کلیه جوابها را بدهد موجود نیست. بررسی معادله خطی مرتبه دوم کلی در جلد دو صورت خواهد گرفت. در اینجا ما فقط به حالتی می‌پردازیم که ضرایب P_1 و P_2 ثابت هستند. در حالتی که عضو طرف راست، یعنی $R(x)$ ، متحد صفر باشد معادله را همگن می‌نامند.

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت اولین معادله دیفرانسیلی بود که در حالت کلی کاملاً حل شد. حل آن برای اولین بار در ۱۷۴۳ توسط اویلر منتشر گردید. این معادله، جدا از جاذبه تاریخی‌اش، در مسائل عملی گوناگونی ظاهر می‌شود، از اینرو مطالعه آن از اهمیت عملی برخوردار است. علاوه بر این، می‌توان برای کلیه جوابهای آن دستورهای صریحی را ارائه داد.

یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت را در نظر گرفته‌و آن را باین صورت می‌نویسیم:

$$y'' + ay' + by = 0.$$

جوابهای این معادله را بر تمام محور حقیقی $(-\infty, +\infty)$ جستجو می‌کنیم. یک جواب تابع ثابت $y = 0$ است. این را جواب بدیهی می‌خوانند. ما در پی یافتن جوابهای غیر بدیهی هستیم، و بررسی خود را با چند حالت خاص که در آنها جوابهای غیر بدیهی را می‌شود با معاینه یافت آغاز می‌کنیم. در همه این حالات ضریب y' صفر بوده و معادله بشکل $y'' + by = 0$ می‌باشد. خواهیم دید که حل این معادله خاص در حکم حل حالت کلی خواهد بود.

۹.۸ وجود جوابهای معادله $y'' + by = 0$

مثال ۱. معادله $y'' = 0$. در اینجا هر دو ضریب a و b صفرند و آسانی می‌توان کلیه جوابها را معین کرد. فرض می‌کنیم y تابعی باشد که بر $(-\infty, +\infty)$ در $y'' = 0$ صدق می‌کند. در این صورت مشتق آن y' ثابت است، مثلاً، $y' = c$. با انتگرالگیری از این رابطه خواهیم دید که y الزاماً بشکل

$$y = c_1 x + c_2$$

است که در آن c_1 و c_2 ثابت‌هایی می‌باشند. بعکس، بازای هر انتخاب از c_1 و c_2 ، چند جمله‌ای خطی $y = c_1 x + c_2$ در $y'' = 0$ صدق می‌کند، پس در این حالت همه جوابها را بدست آورده‌ایم.

حال فرض می‌کنیم $b \neq 0$ و حالات $b < 0$ و $b > 0$ را بطور جداگانه بررسی می‌کنیم.

مثال ۲. معادله $y'' + by = 0$ که در آن $b < 0$ ، چون $b < 0$ می‌توانیم بنویسیم $b = -k^2$ ، که در آن $k > 0$ ، و معادله دیفرانسیل بشکل

$$y'' = k^2 y$$

درمی‌آید. یک جواب واضح $y = e^{kx}$ و دیگری $y = e^{-kx}$ است. از اینها می‌توان جوابهای دیگری را با تشکیل ترکیباتی خطی بصورت

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx},$$

که در آنها c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند، بدست آورد. بزودی، در قضیه ۶.۸، نشان می‌دهیم که این دستور شامل کلیه جوابها خواهد شد.

مثال ۳. معادله $y'' + by = 0$ که در آن $b > 0$ ، در اینجا می‌توانیم بنویسیم $b = k^2$ ، که در آن $k > 0$ ، و معادله دیفرانسیل بشکل

$$y'' = -k^2 y$$

درخواهد آمد. مجدداً چند جواب را با معاینه بدست می‌آوریم. یک جواب $y = \cos kx$ است و دیگری $y = \sin kx$ می‌باشد. از اینها، با تشکیل ترکیبات خطی

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

که در آنها c_1 و c_2 ثوابت دلخواهی هستند، می‌توانیم جوابهای دیگری بدست آوریم. قضیه ۶.۸ نشان خواهد داد که این دستور شامل کلیه جوابها می‌باشد.

۱۰.۸ تقلیل معادله کلی به حالت خاص $y'' + by = 0$

حل یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت را می‌توان به حل حالات خاصی که هم اکنون مورد بحث بودند تقلیل داد. روشی برای این کار وجود دارد که برای معادلات کلیتر نیز قابل اجرا است. در این روش سه تابع y ، u ، و v در نظر گرفته می‌شوند بطوری که $y = uv$. مشتقگیری نتیجه می‌دهد که

$$y' = uv' + u'v \quad \text{و} \quad y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

حال ترکیب $y'' + ay' + by$ را بر حسب u و v بیان می‌کنیم. خواهیم داشت

$$(۲۵.۸) \quad y'' + ay' + by = uv'' + 2u'v' + u''v + a(uv' + u'v) + buv \\ = (v'' + av' + bv)u + (2v' + av)u' + vu''.$$

اینک v را طوری اختیار می‌کنیم که ضریب u' صفر شود. برای این کار باید $v' = -av/2$ ، در نتیجه می‌توانیم v را مساوی $e^{-ax/2}$ بگیریم. برای این v داریم $v'' = -av'/2 = a^2v/4$ در (۲۵.۸) بصورت

$$v'' + av' + bv = \frac{a^2v}{4} - \frac{a^2v}{2} + bv = \frac{4b - a^2}{4}v$$

درمی‌آید. پس معادله (۲۵.۸) به معادله

$$y'' + ay' + by = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}u\right)v$$

تقلیل خواهد یافت. چون $v = e^{-ax/2}$ تابع v هرگز صفر نمی‌شود، لذا y در معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر u در معادله

$$u'' + \frac{1}{4}(4b - a^2)u = 0$$

صدق نماید. بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۴.۸. فرض کنیم y و u دو تابع باشند بطوری که $y = ue^{-ax/2}$. در اینصورت، بر بازه $(-\infty, +\infty)$ ، y در معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر u در معادله دیفرانسیل

$$u'' + \frac{4b - a^2}{4}u = 0$$

صدق نماید.

این قضیه بررسی معادله $y'' + ay' + by = 0$ را به حالت خاص $y'' + by = 0$ تقلیل می‌دهد. ما جوابهای غیربدیهی این معادله را عرضه کرده‌ایم اما، جز در حالت $b = 0$ ، هنوز نشان نداده‌ایم که کلیه جوابها را یافته‌ایم.

۱۱.۸ قضیه یکتائی برای معادله $y'' + by = 0$

مسئله تعیین کلیه جوابهای معادله $y'' + by = 0$ را می‌توان بیاری قضیه یکتائی زیر حل نمود.

قضیه ۵.۸. فرض کنیم دو تابع f و g بر $(-\infty, +\infty)$ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{A^m}{m!} = \frac{A}{1} \cdot \frac{A}{2} \cdots \frac{A}{k} \cdot \frac{A}{k+1} \cdots \frac{A}{m} \leq \frac{A^k}{k!} \left(\frac{A}{k+1} \right)^{m-k}$$

که در آن $m < k$. هرگاه k را بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از A اختیار کنیم آنگاه $A < k+1$ و آخرین سازه، وقتی $m \rightarrow +\infty$ به 0 میل می‌کند. از اینرو، وقتی $m \rightarrow +\infty$ $A^m/m!$ به 0 میل می‌نماید، در نتیجه نامساوی (۲۶.۸) نشان خواهد داد که بازای هر x در $[-c, c]$ ، $h(x) = 0$ ، اما، چون c دلخواه است، نتیجه می‌شود که بازای هر x حقیقی $h(x) = 0$. این برهان را کامل خواهد کرد.

توجه: قضیه ۵.۸ به ما می‌گوید که دوجواب معادله دیفرانسیل $y'' + by = 0$ که در 0 یک مقدار و یک مشتق دارند باید همه جا باهم مطابقت داشته باشند. انتخاب نقطه 0 اهمیتی ندارد. همین استدلال نشان می‌دهد که اگر 0 را با نقطه دلخواه c عوض کنیم قضیه بازهم برقرار است. کافی است در برهان قبلی از تقریبهای چندجمله‌ای تیلور در c به‌عوض در 0 استفاده کنیم.

۱۲.۸ حل کامل معادله $y'' + by = 0$

قضیه یکتائی به ما توان مشخص کردن کلیه جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' + by = 0$ را می‌بخشد.

قضیه ۶.۸. چنانچه عدد حقیقی b داده شده باشد دو تابع u_1 و u_2 در $(-\infty, +\infty)$ مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

(الف) اگر $b = 0$ قرار می‌دهیم $u_1(x) = 1$ و $u_2(x) = x$ ؛

(ب) اگر $b < 0$ می‌نویسیم $b = -k^2$ و تعریف می‌کنیم $u_1(x) = e^{kx}$ و $u_2(x) = e^{-kx}$ ؛

(پ) اگر $b > 0$ می‌نویسیم $b = k^2$ و تعریف می‌کنیم $u_1(x) = \cos kx$ و $u_2(x) = \sin kx$.

در اینصورت هر جواب معادله دیفرانسیل $y'' + by = 0$ در $(-\infty, \infty)$ بشکل

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \quad (27.8)$$

است که در آن c_1 و c_2 ثابت می‌باشند.

برهان. در بخش ۹.۸ ثابت کردیم که تابع y مذکور در (۲۷.۸)، بازای هر انتخاب از c_1 و c_2 ، یک جواب معادله $y'' + by = 0$ است. حال نشان می‌دهیم که همه جوابها از این شکل برخوردارند. به حالت $b = 0$ در بخش ۹.۸ رسیدگی شد، پس می‌توانیم فرض کنیم $b \neq 0$.

نحوه اثبات چنین است: فرض می‌کنیم $y = f(x)$ جواب دلخواهی از $y'' + by = 0$ باشد. هرگاه بتوان نشان داد که ثابتهای c_1 و c_2 ای هستند که در دو معادله

$$c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) = f(0) \quad \text{و} \quad c_1 u_1'(0) + c_2 u_2'(0) = f'(0) \quad (28.8)$$

صدق می‌کند. آنگاه f و $c_1 u_1 + c_2 u_2$ هر دو جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + by = 0$ خواهند بود که در 0 یک مقدار و یک مشتق دارند. پس قضیهٔ یکتائی نتیجه می‌دهد که $f = c_1 u_1 + c_2 u_2$.

در حالت (ب) داریم $u_1(x) = e^{kx}$ و $u_2(x) = e^{-kx}$ پس $u_1(0) = u_2(0) = 1$ و $u_1'(0) = k$ و $u_2'(0) = -k$. در نتیجه معادلات (۲۸.۸) بصورت $c_1 + c_2 = f(0)$ و $c_1 - c_2 = f'(0)/k$ در خواهند آمد. اینها دارای جواب $c_1 = f(0)/2 + f'(0)/2k$ و $c_2 = f(0)/2 - f'(0)/2k$ می‌باشند.

در حالت (پ) خواهیم داشت $u_1(x) = \cos kx$ و $u_2(x) = \sin kx$ پس $u_1(0) = 1$ و $u_2(0) = 0$ و $u_1'(0) = 0$ و $u_2'(0) = k$ و جوابها $c_1 = f(0)$ و $c_2 = f'(0)/k$ خواهند بود. چون همیشه c_1 و c_2 ای هست که در (۲۸.۸) صدق کنند پس برهان قضیه تمام خواهد بود.

۱۳.۸ حل کامل معادله $y'' + ay' + by = 0$

قضیهٔ ۴.۸ به ما می‌گوید که y در معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر u در معادلهٔ $u'' + (2b - a^2)u/4 = 0$ صدق کند که در آن $y = e^{-ax/2}u$ ، صدق نماید. از قضیهٔ ۶.۸ می‌دانیم که طبیعت هر جواب u به علامت جبری ضریب u مربوط است، یعنی به علامت جبری $a^2 - 4b$ یا علامت جبری $4b - a^2$. ما عدد $a^2 - 4b$ را مبین معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ نامیده و آن را با d نشان می‌دهیم. وقتی قضایای ۴.۸ و ۶.۸ را باهم تلفیق می‌کنیم قضیهٔ زیر را بدست خواهیم آورد.

قضیهٔ ۷.۸. فرض کنیم $d = a^2 - 4b$ مبین معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$y'' + ay' + by = 0$$

باشد. در اینصورت هر جواب این معادله بر $(-\infty, +\infty)$ از شکل

$$y = e^{-ax/2} [c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)] \quad (29.8)$$

برخودار است که در آن c_1 و c_2 ثابت بوده و توابع u_1 و u_2 بر طبق علامت جبری مبین این طور تعیین می‌شوند:

(الف) هرگاه $d = 0$ آنگاه $u_1(x) = 1$ و $u_2(x) = x$

(ب) هرگاه $d > 0$ آنگاه $u_1(x) = e^{kx}$ و $u_2(x) = e^{-kx}$ که در آنجا $k = \sqrt{d}/2$

(پ) هرگاه $d < 0$ آنگاه $u_1(x) = \cos kx$ و $u_2(x) = \sin kx$ که در آنجا

$$k = \sqrt{-d}/2$$

توجه: در حالت (ب)، که مبین d مثبت است، جواب y مذکور در (۲۹.۸) ترکیبی خطی از دو تابع نمائی می‌باشد، یعنی

$$y = e^{-ax/2} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) = c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x}$$

که در آن

$$r_1 = -\frac{a}{\gamma} + k = \frac{-a + \sqrt{d}}{\gamma}, r_2 = -\frac{a}{\gamma} - k = \frac{-a - \sqrt{d}}{\gamma}.$$

دو عدد r_1 و r_2 دارای مجموع $-a/\gamma$ و حاصلضرب $b/\gamma = (a^2 - d)/\gamma^2$ می باشند. پس ریشه های معادله درجه دوم

$$r^2 + ar + b = 0$$

خواهند بود. این را معادله مفسر مربوط به معادله دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = 0$$

می نامند. عدد $d = a^2 - 4b$ را مبین این معادله درجه دوم نیز می خوانند؛ علامت جبری آن سرشت ریشه ها را تعیین خواهد کرد. اگر $d \geq 0$ معادله درجه دوم ریشه های حقیقی دارد که عبارتند از $(-a \pm \sqrt{d})/\gamma$. چنانچه $d < 0$ معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد اما ریشه های مختلط r_1 و r_2 خواهد داشت. می توان تعریف تابع نمائی را طوری تعمیم داد که $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ برای r_1 و r_2 مختلط نیز با معنی باشند. این تعمیم، که در فصل ۹ توصیف شده، بصورتی است که ترکیب خطی (29.8) را نیز می توان بصورت ترکیبی خطی از $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ نوشت که در آن r_1 و r_2 مختلط باشند.

این بخش را با ذکر چند نکته پایان می بریم. چون کلیه جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ از (29.8) بدست می آیند اغلب ترکیب خطی سمت راست آن را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می خوانند. هر جواب که بازای ثوابت خاص c_1 و c_2 بدست آید یک جواب خصوصی نام خواهد داشت.

مثلاً، با اختیار $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ و بعد $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ ، دو جواب خصوصی

$$v_1 = e^{-ax/\gamma} u_1(x), v_2 = e^{-ax/\gamma} u_2(x)$$

را بدست می آوریم. این دو جواب از اهمیت ویژه ای برخوردارند زیرا ترکیبات خطی آنها کلیه جوابها را به ما می دهند. هر جفت جواب با این خاصیت یک پایه برای مجموعه کلیه جوابها نامیده می شود.

هر معادله دیفرانسیل همیشه بیش از یک پایه دارد. مثلاً معادله $y'' = 9y$ دارای پایه $v_1 = e^{3x}$ و $v_2 = e^{-3x}$ است. اما از پایه $w_1 = \cosh 3x$ و $w_2 = \sinh 3x$ نیز برخوردار می باشد. درواقع، چون $e^{3x} = w_1 + w_2$ و $e^{-3x} = w_1 - w_2$ ، هر ترکیب خطی e^{3x} و e^{-3x} یک ترکیب خطی w_1 و w_2 نیز هست. از اینرو جفت w_1 و w_2 پایه دیگری خواهد بود.

می توان نشان داد که هر جفت جواب v_1 و v_2 معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ یک پایه است اگر که نسبت v_2/v_1 ثابت نباشد. با آنکه به این مطلب نیازی نخواهیم داشت ولی آن را در اینجا از اینجهت ذکر نمودیم که در نظریه معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب غیر ثابت اهمیت دارد. برهانی از آن در تمرین

۲۳ بخش ۱۴.۸ مختصراً شرح داده شده است.

۱۴.۸ تمرینات

کلیه جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را بر $(-\infty, +\infty)$ بیابید.

$$\begin{array}{ll} ۱. & y'' - 4y = 0 \\ ۲. & y'' + 4y = 0 \\ ۳. & y'' - 4y' = 0 \\ ۴. & y'' + 4y' = 0 \\ ۵. & y'' - 2y' + 3y = 0 \\ ۶. & y'' + 2y' - 3y = 0 \\ ۷. & y'' - 2y' + 2y = 0 \\ ۸. & y'' - 2y' + 5y = 0 \\ ۹. & y'' + 2y' + y = 0 \\ ۱۰. & y'' - 2y' + y = 0 \end{array}$$

در تمرینات ۱۱ تا ۱۴ آن جواب خصوصی را که در شرائط اولیه داده شده صدق می‌کند بیابید.

۱۱. $y'' + 3y' = 0$ با این شرائط که، وقتی $x = 0$ ، $y = 1$ و $y' = 1$.
۱۲. $y'' + 25y = 0$ با این شرائط که، وقتی $x = 3$ ، $y = -1$ و $y' = 0$.
۱۳. $y'' - 4y' - y = 0$ با این شرائط که، وقتی $x = 1$ ، $y = 2$ و $y' = -1$.
۱۴. $y'' + 4y' + 5y = 0$ با این شرائط که، وقتی $x = 0$ ، $y = 2$ و $y' = y''$.
۱۵. نمودار جواب u ی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 29y = 0$ جواب v ی معادله $y'' + 4y' + 13y = 0$ را در مبدأ قطع می‌کند. دو منحنی در مبدأ دارای یک شیب هستند. u و v را در صورتی تعیین کنید که $u'(\pi/2) = 1$.
۱۶. نمودار جواب u ی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' - 4y = 0$ نمودار جواب v ی معادله $y'' + 4y' - 5y = 0$ را در مبدأ قطع می‌کند. u و v را در صورتی تعیین کنید که دو منحنی دارای یک شیب در مبدأ بوده و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}.$$

۱۷. کلیه مقادیر ثابت k را بیابید که بازای آنها معادله دیفرانسیل $y'' + ky = 0$ جواب غیربدیهی $y = f_k(x)$ را که $f_k(0) = f_k(1) = 0$ داشته باشد. برای هر مقدار قابل قبول k جواب متناظر $y = f_k(x)$ را مشخص کنید. هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی k را در نظر بگیرید.

۱۸. اگر (a, b) نقطه مفروضی در صفحه بوده و m عدد حقیقی معینی باشد ثابت کنید که معادله دیفرانسیل $y'' + k^2y = 0$ فقط یک جواب دارد که نمودار آن از نقطه (a, b) بگذرد و در این نقطه شیب m باشد. حالت $k = 0$ را نیز مورد بحث قرار دهید.

۱۹. (الف) فرض کنید (a_1, b_1) و (a_2, b_2) دو نقطه در صفحه باشند بطوری که $a_1 - a_2 \neq n\pi$ که در آن n عددی صحیح است. ثابت کنید فقط یکی از جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ هست که نمودارش از این دو نقطه می‌گذرد.

(ب) آیا قسمت (الف) هرگز می‌تواند برای وقتی که $a_1 - a_2$ مضربی از π است برقرار شود؟

(پ) قسمت (الف) را در مورد معادله $y'' + k^2 y = 0$ تعمیم دهید. حالت $k = 0$ را نیز بحث کنید.

۲۰. در هر یک از حالات زیر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دومی پیدا کنید که u_2 و u_1 در آن صدق کنند.

$$(الف) \quad u_2(x) = e^{-x}, u_1(x) = e^x$$

$$(ب) \quad u_2(x) = xe^{2x}, u_1(x) = e^{2x}$$

$$(پ) \quad u_2(x) = e^{-x/2} \sin x, u_1(x) = e^{-x/2} \cos x$$

$$(ت) \quad u_2(x) = \sin(2x + 2), u_1(x) = \sin(2x + 1)$$

$$(ث) \quad u_2(x) = \sinh x, u_1(x) = \cosh x$$

(دندسکیبی. اگر دو تابع u_2 و u_1 مفروض باشند تابع W که با

$$W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$$

تعریف می‌شود [بافتخار رونسکی^۱ (۱۸۵۳-۱۷۷۸)] دندسکیبی آنها نامیده می‌شود. در تمرینات زیر به خواص رونسکیبی توجه شده است.

۲۱. (الف) چنانچه رونسکیبی $W(x)$ دو تابع u_2 و u_1 بازای هر x در بازه I صفر باشد ثابت کنید کسر u_2/u_1 بر I ثابت خواهد بود. بعبارت دیگر، هرگاه u_2/u_1 بر I ثابت نباشد آنگاه بازای لا اقل یک c در I ، $W(c) \neq 0$.

(ب) ثابت کنید که مشتق رونسکیبی عبارت است از $W' = u_1u_2'' - u_2u_1''$.

۲۲. فرض کنید W رونسکیبی دو جواب u_2 و u_1 ی معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ باشد که در آن a و b ثابتند.

(الف) ثابت کنید که W در معادله مرتبه اول $W' + aW = 0$ صدق می‌کند، و در نتیجه $W(x) = W(0)e^{-ax}$. این دستور نشان می‌دهد که هرگاه $W(0) \neq 0$ آنگاه بازای هر x ، $W(x) \neq 0$.

(ب) فرض کنید u_1 متحد صفر نباشد. ثابت کنید $W(0) = 0$ اگر و فقط اگر u_2/u_1 ثابت باشد.

۲۳. فرض کنید v_2 و v_1 دو جواب معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ باشند بطوری که v_2/v_1 ثابت نباشد.

(الف) فرض کنید $y = f(x)$ جواب دلخواهی از معادلهٔ دیفرانسیل باشد. با استفاده از خواص رونسکیبی نشان دهید که ثابتهای c_1 و c_2 هستند بطوری که

$$c_1 v_1(0) + c_2 v_2(0) = f(0), c_1 v_1'(0) + c_2 v_2'(0) = f'(0).$$

(ب) ثابت کنید هر جواب بشکل $y = c_1 v_1 + c_2 v_2$ می باشد. بعبارت دیگر، v_1 و v_2 پایه‌ای برای مجموعهٔ همهٔ جوابها تشکیل می دهند.

۱۵۰۸ معادلات خطی مرتبهٔ دوم غیرهمگن با ضرائب ثابت

حال به بحث معادلات غیرهمگن بشکل

$$y'' + ay' + by = R \quad (30.8)$$

می پردازیم که در آنها ضرائب a و b ثابتند ولی طرف راست، یعنی R ، تابع پیوستهٔ دلخواهی بر $(-\infty, +\infty)$ می باشد. می شود بحث را با استفاده از نماد عملگر ساده کرد. برای هر تابع f با مشتقات f' و f'' می توان عملگر L را تعریف کرد که f را به تابع دیگر $L(f)$ که با معادلهٔ

$$L(f) = f'' + af' + bf$$

تعریف می شود تبدیل می کند. با نماد عملگر، معادلهٔ دیفرانسیل (30.8) بشکل ساده تر

$$L(y) = R$$

نوشته خواهد شد.

بآسانی می توان تحقیق کرد که $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ و، برای هر ثابت c ، $L(cy) = cL(y)$. پس برای هر جفت ثابت c_1 و c_2 خواهیم داشت

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2).$$

این را خاصیت خطی عملگر L نام نهاده اند.

حال فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب دلخواه معادلهٔ $L(y) = R$ باشند. چون $L(y_1) = L(y_2) = R$ خاصیت خطی نتیجه می دهد که

$$L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = R - R = 0,$$

پس $y_2 - y_1$ یک جواب معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ است. بنابراین باید داشته باشیم $y_2 - y_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ که در آن جواب عمومی معادلهٔ همگن است، و یا

$$y_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + y_1.$$

این معادله باید برای هر جفت جواب y_1 و y_2 معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ برقرار باشد. لذا اگر بشود یک جواب خصوصی y_1 از معادلهٔ غیرهمگن را بیایم همهٔ جوابها در دستور

$$(۳۱.۸) \quad y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + y_1$$

(که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند) جای خواهند داشت. هرچنین y بوضوح یک جواب $L(y) = R$ است زیرا

$$L(c_1 v_1 + c_2 v_2 + y_1) = L(c_1 v_1 + c_2 v_2) + L(y_1) = 0 + R = R.$$

چون کلیه جوابهای $L(y) = R$ از (۳۱.۸) بدست می آیند ترکیب خطی $c_1 v_1 + c_2 v_2 + y_1$ را جواب عمومی (۳۰.۸) می نامند. بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه ۸.۸. اگر y_1 یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن $L(y) = R$ باشد جواب عمومی آن با افزودن جواب عمومی معادله همگن متناظر $L(y) = 0$ به y_1 بدست خواهد آمد.

قضیه ۷.۸ به ما راه یافتن جواب عمومی معادله همگن $L(y) = 0$ را باز می گوید. این جواب بشکل $y = c_1 v_1 + c_2 v_2$ است که در آن

$$(۳۲.۸) \quad v_1(x) = e^{-ax/2} u_1(x), v_2(x) = e^{-ax/2} u_2(x).$$

توابع u_1 و u_2 توسط مین معادله، بصورتی که در قضیه ۷.۸ توصیف شد، بدست می آیند. حال نشان می دهیم که می توان از v_1 و v_2 استفاده کرد و یک جواب خصوصی y_1 معادله غیرهمگن $L(y) = R$ را ساخت.

این ساختن مستلزم تابعی است چون W که با معادله

$$W(x) = v_1(x) v_2'(x) - v_2(x) v_1'(x)$$

تعریف می شود. این را دونسکیی v_1 و v_2 می خوانند؛ برخی از خواص آن در تمرینات ۲۱ و ۲۲ بخش ۱۴.۸ توصیف شده اند. به این خاصیت که $W(x)$ هرگز صفر نمی شود نیاز خواهیم داشت. این را می توان با روشهایی که در تمرینات مختصراً شرح داده شده اند ثابت کرد یا اینکه مستقیماً آن را برای توابع خاص v_1 و v_2 داده شده در (۳۲.۸) نتیجه گرفت.

قضیه ۹.۸. فرض کنیم v_1 و v_2 جوابهای معادله $L(y) = y'' + ay' + by = 0$ باشند که توسط (۳۲.۸) داده شده اند. همچنین W دونسکیی v_1 و v_2 باشد، دراینصورت معادله غیرهمگن $L(y) = R$ دارای جواب خصوصی y_1 است که با دستور

$$y_1(x) = t_1(x) v_1(x) + t_2(x) v_2(x)$$

داده می شود که در آن

$$(۳۳.۸) \quad t_1(x) = - \int \frac{v_2(x) R(x)}{W(x)} dx, t_2(x) = \int \frac{v_1(x) R(x)}{W(x)} dx.$$

برهان. سعی می‌کنیم توابع t_1 و t_2 را طوری بیابیم که ترکیب $t_2 v_2 + t_1 v_1$ در معادله $L(y_1) = R$ صدق کند. داریم

$$y_1' = t_1 v_1' + t_2 v_2' + (t_1' v_1 + t_2' v_2),$$

$$y_1'' = t_1 v_1'' + t_2 v_2'' + (t_1' v_1' + t_2' v_2') + (t_1'' v_1 + t_2'' v_2).$$

وقتی ترکیب خطی $L(y_1) = y_1'' + a y_1' + b y_1$ را تشکیل می‌دهیم جملات حاوی t_1 و t_2 ، بدلیل روابط $L(v_1) = L(v_2) = 0$ حذف می‌شوند. بقیه جملات رابطه

$$L(y_1) = (t_1' v_1' + t_2' v_2') + (t_1'' v_1 + t_2'' v_2) + a(t_1' v_1 + t_2' v_2)$$

را به ما خواهند داد. می‌خواهیم t_1 و t_2 را چنان انتخاب کنیم که $L(y_1) = R$. اگر t_1 و t_2 بصورتی اختیار شوند که

$$t_1' v_1' + t_2' v_2' = R \text{ و } t_1'' v_1 + t_2'' v_2 = 0$$

معادله فوق برقرار خواهد شد. روابط بالا دو معادله جبری نسبت به t_1' و t_2' هستند. درمیان دستگاه رونسکیبی v_1 و v_2 می‌باشد. چون این درمیان هرگز صفر نیست دستگاه جوابی خواهد داشت که با

$$t_1' = v_1 \frac{R}{W} \text{ و } t_2' = -v_2 \frac{R}{W}$$

داده می‌شوند. با انتگرالگیری از این روابط معادله (۳۳.۸) بدست می‌آید، پس برهان کامل خواهد بود.

گاهی روش فوق برای تعیین جواب y_1 را روش تغییر پادامترها می‌خوانند. این روش اولین بار توسط یوهان برنولی در سال ۱۶۹۷ برای حل معادلات خطی مرتبه اول بکار گرفته شد و سپس در سال ۱۷۷۴ لاگرانژ آن را برای حل معادلات خطی مرتبه دوم بکار برد.

توجه: چون توابع t_1 و t_2 مذکور در قضیه ۹.۸ با انتگرالهای نامعین بیان شده‌اند هر یک از آنها فقط با تقریب یک ثابت جمعپذیر قابل محاسبه‌اند. اگر ثابت c_1 را به t_1 و ثابت c_2 را به t_2 بیفزائیم تابع y_1 را به تابع جدید $y_2 = y_1 + c_1 v_1 + c_2 v_2$ تغییر داده‌ایم. بنابر خاصیت خطی داریم

$$L(y_2) = L(y_1) + L(c_1 v_1 + c_2 v_2) = L(y_1),$$

پس تابع جدید y_2 نیز یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن خواهد بود.

مثال ۱. جواب عمومی معادله $y'' + y = \tan x$ را بر $(-\pi/2, \pi/2)$ پیدا کنید.

حل. توابع v_1 و v_2 معادله (۳۲.۸) با

$$v_1(x) = \cos x, v_2(x) = \sin x$$

داده می‌شوند. رونسکیبی آنها عبارت است از

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

پس معادله (۳۳.۸) نتیجه می‌دهد که

$$t_1(x) = - \int \sin x \tan x dx = \sin x - \log |\sec x + \tan x|$$

و

$$t_2(x) = \int \cos x \tan x dx = \int \sin x dx = -\cos x.$$

ازاینرو یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن عبارت است از

$$\begin{aligned} y_1 &= t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x) \\ &= \sin x \cos x - \cos x \log |\sec x + \tan x| - \sin x \cos x \\ &= -\cos x \log |\sec x + \tan x|. \end{aligned}$$

بنا بر قضیه ۸.۸ جواب عمومی آن چنین خواهد بود:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \log |\sec x + \tan x|.$$

اگرچه قضیه ۹.۸ یک روش کلی را برای تعیین یک جواب خصوصی $L(y) = R$ ارائه می‌دهد اما روشهای خاصی نیز هستند که غالباً در مواردی که تابع R شکل خاص معینی دارد ساده‌تر بکار می‌روند. در بخش بعد روشی را توصیف می‌کنیم که برای حالتی که R یک چندجمله‌ای یا یک چندجمله‌ای ضربدر یک تابع نمائی است قابل اجرا می‌باشد.

۱۶.۸ روشهایی خاص برای تعیین یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن
 $y'' + ay' + by = R$

حالت ۱. طرف راست، یعنی R ، یکت چندجمله‌ای از درجه n است. اگر $b \neq 0$ همیشه می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه n یافت که در معادله صدق کند. ما چندجمله‌ای بشکل

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

با ضرائب نامعلوم را امتحان می‌کنیم. با گذاردن آن در معادله دیفرانسیل $L(y) = R$ و مساوی قرار دادن ضرائب جملات هم‌توان x می‌توان $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ را بترتیب تعیین کرد. این روش با مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال ۱. جواب عمومی معادله $y'' + y = x^3$ را پیدا کنید.

حل. جواب عمومی معادله همگن $y'' + y = 0$ عبارت است از

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

به این باید یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن را اضافه کنیم. چون طرف راست یک چندجمله‌ای درجه سوم بوده و ضریب y ناصفر است سعی می‌کنیم جوابی خصوصی به شکل $y_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ پیدا کنیم. با دوبار مشتقگیری در می‌یابیم که $y_1''(x) = 6Ax + 2B$ معادله دیفرانسیل به رابطه

$$(6Ax + 2B) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3$$

تبدیل می‌شود. با مساوی قرار دادن ضرایب جملات همتوان x خواهیم داشت $A = 1$ ، $B = 0$ ، $C = -6$ ، $D = 0$ ، پس $y_1(x) = x^3 - 6x$ یک جواب خصوصی می‌باشد. لذا جواب عمومی

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x$$

خواهد بود.

ممکن است که مقایسه این روش با روش تغییر پارامترها جالب باشد. معادله (۳۳.۸) نتیجه می‌دهد که

$$t_1(x) = - \int x^3 \sin x \, dx = -(3x^2 - 6) \sin x + (x^3 - 6x) \cos x$$

و

$$t_2(x) = \int x^3 \cos x \, dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x.$$

وقتی ترکیب $t_1 v_1 + t_2 v_2$ را تشکیل می‌دهیم، مثل قبل، جواب خصوصی $y_1(x) = x^3 - 6x$ را بدست می‌آوریم. در اینجا برای استفاده از روش تغییر پارامترها لازم است انتگرالهای $\int x^3 \cos x \, dx$ و $\int x^3 \sin x \, dx$ حساب شوند. اما در روش ضرایب نامعلوم احتیاجی به انتگرالگیری نخواهد بود.

اگر ضریب b صفر باشد معادله $y'' + ay' = R$ نمی‌تواند بوسیله یک چندجمله‌ای درجه n برقرار شود، اما اگر $a \neq 0$ این معادله می‌تواند بازای یک چندجمله‌ای از درجه $n + 1$ برقرار گردد. چنانچه a و b هر دو صفر باشند معادله به شکل $y'' = R$ در می‌آید؛ جواب عمومی آن یک چندجمله‌ای از درجه $n + 2$ است که با دو بار انتگرالگیری بدست خواهد آمد.

حالت ۲. طرف راست بشکل $R(x) = p(x)e^{mx}$ است که در آن p یک چندجمله‌ای از درجه n بوده و m عدد ثابتی می‌باشد.

در این حالت تغییر متغیر $y = u(x)e^{mx}$ معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = R$ را به معادله جدید

$$u'' + (2m + a)u' + (m^2 + am + b)u = p$$

تبدیل می‌کند. این نوع معادله در حالت ۱ بحث شد، پس همیشه دارای یک جواب چندجمله‌ای مانند u_1 خواهد بود. لذا معادله اصلی از جوابی خصوصی بشکل $y_1 = u_1(x)e^{mx}$ برخوردار است که در آن u_1 یک چندجمله‌ای می‌باشد. اگر $m^2 + am + b \neq 0$ درجه u_1 همان درجه p است. چنانچه $m^2 + am + b = 0$ ولی $2m + a \neq 0$ درجه u_1 از درجه p یکی بیشتر می‌باشد. اگر هم $m^2 + am + b = 0$ و هم $2m + a = 0$ درجه u_1 از درجه p دو تا بیشتر خواهد بود.

مثال ۲. یک جواب خصوصی معادله $y'' + y = xe^{3x}$ را بدست آورید.

حل. تغییر متغیر $y = ue^{3x}$ معادله جدید $y'' + 6y' + 10y = x$ را نتیجه می‌دهد. با امتحان $u_1(x) = Ax + B$ جواب خصوصی $y_1(x) = (5x - 3)/50$ بدست می‌آید، پس یک جواب خصوصی معادله اصلی $y_1 = e^{3x}(5x - 3)/50$ خواهد بود.

روش ضرائب نامعلوم را می‌توان در حالتی که $R(x) = p(x)e^{mx} \cos \alpha x$ یا $R(x) = p(x)e^{mx} \sin \alpha x$ بوده که در آن p یک چندجمله‌ای و m و α ثابت‌هایی می‌باشند نیز بکار برد. در هریک از این حالات همیشه یک جواب خصوصی بشکل

$$y_1(x) = e^{mx}[q(x) \cos \alpha x + r(x) \sin \alpha x]$$

وجود دارد که در آن q و r چندجمله‌ایهایی می‌باشند.

۱۷۰۸ تمرینات

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل تمرینات ۱ تا ۱۷ را بیابید. اگر جواب روی تمام محور حقیقی معتبر نبود بازه‌ای را توصیف کنید که جواب روی آن اعتبار داشته باشد.

$$y'' - y = x \quad ۰.۱ \quad y'' - y' = x^2 \quad ۰.۲$$

$$y'' + y' = x^2 + 2x \quad ۰.۳ \quad y'' - 2y' + 3y = x^3 \quad ۰.۴$$

$$y'' - 5y' + 4y = x^2 - 2x + 1 \quad ۰.۵$$

$$y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2 \quad ۰.۶$$

$$y'' - 4y = e^{2x} \cdot 9 \quad y'' + 4y = e^{-2x} \cdot 8$$

$$y'' + y' - 2y = e^x \cdot 9 \quad y'' + y' - 2y = e^{2x} \cdot 10$$

$$y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x} \cdot 11 \quad y'' - 2y' + y = x + 2xe^x \cdot 12$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}/x^2 \cdot 13 \quad y'' + y = \cot^2 x \cdot 14$$

$$y'' - y = 2/(1 + e^x) \cdot 15 \quad y'' + y' - 2y = e^x/(1 + e^x) \cdot 16$$

$$y'' + 6y' + 9y = f(x) \cdot 17 \quad \text{که در آن بازای } 1 \leq x \leq 2, f(x) = 1, \text{ و بازای } x \text{ های دیگر، } f(x) = 0$$

$$y'' - k^2 y = R(x) \cdot 18 \quad \text{اگر } k \text{ ثابت ناصفری باشد نشان دهید که معادله} \\ \text{خصوصی } y_1 \text{ است که با}$$

$$y_1 = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \sinh k(x-t) dt$$

داده می‌شود. جواب عمومی معادله $y'' - 9y = e^{3x}$ را پیدا کنید.

$$y'' + k^2 y = R(x) \cdot 19 \quad \text{اگر } k \text{ ثابت ناصفری باشد نشان دهید که معادله} \\ \text{خصوصی } y_1 \text{ است که با}$$

$$y_1 = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \sin k(x-t) dt$$

داده می‌شود. جواب عمومی معادله $y'' + 9y = \sin 3x$ را بدست آورید.

در هریک از تمرینات ۲۰ تا ۲۵ جواب عمومی را مشخص نمایید.

$$y'' + y = \sin x \cdot 20 \quad y'' + y = \cos x \cdot 21$$

$$y'' + 4y = 3x \cos x \cdot 22 \quad y'' + 4y = 3x \sin x \cdot 23$$

$$y'' - 3y' = 2e^{2x} \sin x \cdot 24 \quad y'' + y = e^{2x} \cos 3x \cdot 25$$

۱۸.۸ چند نمونه از مسائل فیزیکی که به معادلات مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت منجر می‌شوند

مثال ۱. حرکت توافقی ساده. فرض کنیم جسمی مقید است در خطی مستقیم و با شتابی که در جهت نقطه ثابتی از مسیر و متناسب با دوری آن از این نقطه است حرکت کند. هرگاه مبدأ را همان نقطه ثابت گرفته و y را تغییر مکان جسم در لحظه x بدانیم آنگاه شتاب y'' باید برای y های مثبت منفی و بازای y های منفی مثبت باشد. بنابراین می‌توان نوشت $y'' = -k^2 y$ یا

$$y'' + k^2 y = 0,$$

که در آن k^2 ثابت مثبتی می باشد. این را معادلهٔ دیفرانسیل حرکت توافقی ساده می خوانند. این معادله اغلب بعنوان نمونهٔ ریاضی حرکت یک نقطه در یک دستگاه مرتعش نظیر یک سیم یا یک دیافراژم مرتعش بکار می رود. همین معادله در نظریهٔ مدارهای الکتریکی ظاهر می شود که در آنجا معادلهٔ نوسانگر توافقی نام گرفته است. قضیهٔ ۴.۸ به ما می گوید که کلیهٔ جوابها از شکل

$$(۳۴.۸) \quad y = A \sin kx + B \cos kx$$

برخوردارند که در آن A و B ثابتهای دلخواهی می باشند. می توان جوابها را فقط بر حسب سینوس یا کسینوس بیان نمود. مثلاً می شود ثابتهای جدید C و α را این طور معرفی کرد:

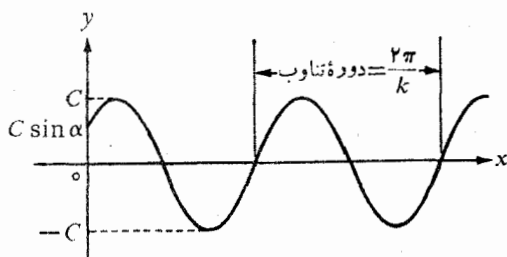
$$\alpha = \arctan \frac{B}{A} \quad \text{و} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

در اینصورت داریم (ر.ک. شکل ۴.۸) $A = C \cos \alpha$ ، $B = C \sin \alpha$ ، و معادلهٔ

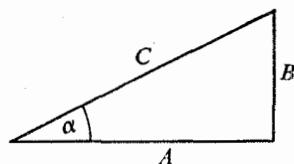
$$y = C \cos \alpha \sin kx + C \sin \alpha \cos kx = C \sin(kx + \alpha)$$

درمی آید.

وقتی جواب را باین صورت بنویسیم ثابتهای C و α تعبیرهای هندسی ساده‌ای پیدا خواهند کرد (ر.ک. شکل ۵.۸). مقادیر اکستریم y ، که بازای ± 1 $\sin(kx + \alpha)$ حاصل می شوند، عبارتند از $\pm C$. وقتی $x = 0$ تغییر مکان اولیه $C \sin \alpha$ است. همینطور که x افزایش می یابد جسم بین مقادیر اکستریم $+C$ و $-C$ با دورهٔ تناوب $2\pi/k$ نوسان خواهد کرد. زاویهٔ $kx + \alpha$ را زاویهٔ فاز و خود α را مقدار اولیهٔ زاویهٔ فاز می نامند.



شکل ۵.۸ حرکت توافقی ساده.



شکل ۴.۸

مثال ۲. ارتعاشات میرا. اگر جسمی که دارای حرکت توافقی ساده است ناگهان تحت تأثیر یک نیروی خارجی متناسب با سرعتش قرار گیرد حرکت جدید معادلهٔ دیفرانسیلی بشکل

$$y'' + 2cy' + k^2y = 0$$

داند که در آن c و k^2 ثابت بوده و $c \neq 0$ و $k > 0$ اگر $c > 0$ نشان می دهیم که

کلیه جوابها، وقتی $x \rightarrow +\infty$ به صفر میل می کنند. در این حالت معادله دیفرانسیل را پایدار می نامند. نیروی خارجی سبب میرانی حرکت می شود. چنانچه $0 < c$ نشان خواهیم داد که قدرمطلق بعضی از جوابها، وقتی $x \rightarrow +\infty$ بدخواه بزرگ خواهند شد. در این حالت است که می گویند معادله ناپایدار می باشد.

چون مبین معادله $d = (2c)^2 - 4k^2 = 4(c^2 - k^2)$ است طبیعت جوابها را اندازه های نسبی c^2 و k^2 تعیین خواهند کرد. سه حالت $d = 0$ ، $d > 0$ و $d < 0$ را می توان این طور تحلیل کرد:

(الف) مبین صفر: $c^2 = k^2$. در این حالت کلیه جوابها بشکل

$$y = e^{-cx}(A + Bx)$$

می باشند. اگر $c > 0$ همه جوابها، وقتی $x \rightarrow +\infty$ به 0 میل می کنند. به این حالت می گویند میرانی بحرانی. چنانچه $B \neq 0$ ، بدلیل وجود سازه خطی $A + Bx$ ، هر جواب فقط یکبار تغییر علامت خواهد داد. مثالی در شکل ۶.۸ (الف) ارائه شده است. اگر $c < 0$ هر جواب غیر بدیهی، وقتی $x \rightarrow +\infty$ به $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

(ب) مبین مثبت: $c^2 > k^2$. بنا بر قضیه ۷.۸ کلیه جوابها از شکل

$$y = e^{-cx}(Ae^{hx} + Be^{-hx}) = Ae^{(h-c)x} + Be^{-(h+c)x}$$

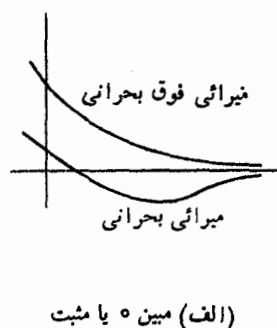
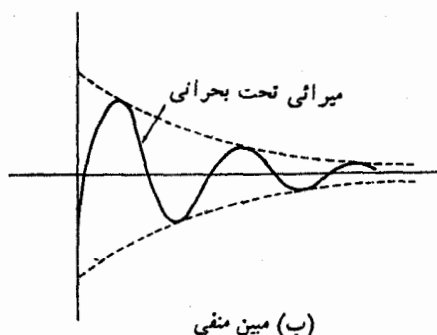
برخورد دارند که در آن $h = (\sqrt{d})/2 = \sqrt{c^2 - k^2}$. چون $h^2 = c^2 - k^2$ داریم $h^2 - c^2 < 0$ ، پس $(h-c)(h+c) < 0$. بنابراین، اعداد $h-c$ و $h+c$ مختلف. علامه خواهند بود. هرگاه $c > 0$ آنگاه $h+c$ مثبت است، پس $h-c$ منفی بوده و در نتیجه، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، هر دو جمله نمائی $e^{(h-c)x}$ و $e^{-(h+c)x}$ به صفر میل می کنند. در این حالت، که به آن میرانی فوق بحرانی می گویند، کلیه جوابها بازای x های بزرگ به 0 میل خواهند کرد. مثالی در شکل ۶.۸ (الف) آورده شده است. هر جواب حداکثر می تواند یکبار تغییر علامت دهد.

هرگاه $c < 0$ آنگاه $h-c$ مثبت ولی $h+c$ منفی است. لذا هر دو جمله نمائی $e^{(h-c)x}$ و $e^{-(h+c)x}$ ، بازای x های بزرگ، به $+\infty$ میل می کنند، پس باز جوابهایی هستند که قدرمطلقهای آنها بدخواه بزرگ می شوند.

(پ) مبین منفی: $c^2 < k^2$. در این حالت کلیه جوابها بصورت

$$y = Ce^{-cx} \sin(hx + \alpha)$$

می باشند که در آن $h = (\sqrt{-d})/2 = \sqrt{k^2 - c^2}$. اگر $c > 0$ هر جواب غیر بدیهی نوسان می کند لکن دامنه نوسان، وقتی $x \rightarrow +\infty$ به 0 نزول خواهد کرد. این حالت را میرانی تحت بحرانی می نامند و در شکل ۶.۸ (ب) نشان داده شده است. چنانچه $c < 0$ کلیه جوابهای غیر بدیهی، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر مثبت و منفی بزرگ دلخواه اختیار خواهند کرد.



شکل ۶.۸ ارتعاشات میرای حاصل از جوابهای $y'' + 2cy' + k^2y = 0$ که در آن $c > 0$ و $c^2 - k^2$ مبین ۴ است.

مثال ۳. مدارهای الکتریکی. اگر در مدار الکتریکی مثال ۵ بخش ۶.۸ یک خازن قرار دهیم معادله دیفرانسیلی که نمونه ریاضی این مدار است عبارت خواهد بود از

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = V(t)$$

که در آن C ثابت مثبتی بنام ظرفیت می باشد. مشتقگیری از این معادله یک معادله خطی مرتبه دوم بشکل

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C} I(t) = V'(t)$$

را بدست می دهد. چنانچه ولتاژ اعمال شده $V(t)$ ثابت باشد طرف راست صفر بوده و معادله بصورت

$$I''(t) + \frac{R}{L} I'(t) + \frac{1}{LC} I(t) = 0$$

درخواهد آمد. این معادله از نوع معادله ای است که در مثال ۲ بررسی شد با این فرق که بجای $2c$ مقدار R/L و بجای k^2 مقدار $1/(LC)$ قرار گرفته است. در این حالت ضریب c مثبت بوده و در نتیجه معادله همیشه پایدار می باشد. بعبارت دیگر، وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، شدت جریان $I(t)$ همواره به ۰ میل خواهد کرد. اصطلاحات مثال ۲ در اینجا نیز بکار می روند. شدت جریان را میرای بحرانی نامند هرگاه مبین صفر باشد ($CR^2 = 4L$)، میرای فوق بحرانی خوانند هرگاه مبین مثبت باشد ($CR^2 > 4L$)، و میرای تحت بحرانی نام می دهند هرگاه مبین منفی باشد ($CR^2 < 4L$).

مثال ۴. حرکت یک موشک با جرم متغیر. موشکی در یک اطاق احتراق با مصرف

مواد سوختی حرکت کرده و مواد سوخته شده از عقب آن خارج می‌گردند. فرض کنیم موشک از حالت سکون شروع به حرکت کرده و در امتداد خطی مستقیم بطور عمودی بالا برود. ارتفاع موشک در لحظه t را با $r(t)$ ، جرمش را (با ضمیمه سوخت) با $m(t)$ ، و سرعت مواد سوخته شده نسبت به موشک را با $c(t)$ نشان می‌دهیم. در صورت عدم نیروهای خارجی معادله

$$(۳۵.۸) \quad m(t)r''(t) = m'(t)c(t)$$

بعنوان نمونه ریاضی برای بحث در این حرکت بکار می‌رود. طرف چپ، یعنی $m(t)r''(t)$ ، مساوی است با حاصلضرب جرم موشک در شتاب آن. طرف راست، یعنی $m'(t)c(t)$ ، نیروی شتاب دهنده موشک است که توسط موتور موشک اعمال می‌شود. در مثالهایی که در اینجا مطرح می‌شوند $m(t)$ و $c(t)$ معلوم هستند یا اینکه می‌توان آنها را بر حسب $r(t)$ و یا مشتقش $r'(t)$ (سرعت موشک) بیان کرد. پس معادله (۳۵.۸) بصورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای تابع مکان r درمی‌آید.

هرگاه نیروهای خارجی، از قبیل نیروی جاذبه، نیز وجود داشته باشند آنگاه، بجای (۳۵.۸)، از معادله

$$(۳۶.۸) \quad m(t)r''(t) = m'(t)c(t) + F(t)$$

استفاده می‌کنیم که در آن $F(t)$ مجموع کلیه نیروهای خارجی است که در لحظه t بر موشک اعمال می‌شوند.

پیش از آنکه به مثال خاصی توجه کنیم مطالبی را ذکر می‌کنیم که می‌توان آنها را بعنوان انگیزه وجودی معادله (۳۵.۸) بحساب آورد. برای این منظور ابتدا موشکی را در نظر می‌گیریم که مواد سوخته شده از آن، مانند گلوله از تفنگ، بطور مقطع خارج شوند. برای مشخص بودن وضع، فاصله زمانی $[t, t+h]$ را در نظر می‌گیریم که در آن h عدد مثبت کوچکی می‌باشد و فرض می‌کنیم مقداری از مواد سوخته شده در لحظه t از موشک خارج شده و در بازه نیمباز $(t, t+h)$ دیگر چیزی از آن خارج نگردد. بر پایه این فرض دستوری را خواهیم داشت که حدش، وقتی $h \rightarrow 0$ ، همان معادله (۳۵.۸) خواهد بود.

موشک در لحظه t درست قبل از اینکه مواد سوخته شده از آن خارج شوند دارای جرم $m(t)$ و سرعت $v(t)$ است. در انتهای فاصله زمانی $[t, t+h]$ موشک دارای جرم $m(t+h)$ و سرعت $v(t+h)$ خواهد بود. جرم مواد سوخته شده برابر $m(t) - m(t+h)$ و سرعت آنها در این فاصله، بدلیل آنکه $c(t)$ سرعت این مواد نسبت به موشک است، مساوی $v(t) + c(t)$ می‌باشد. در لحظه t درست قبل از اینکه مواد سوخته شده خارج شوند موشک بمثابة دستگاهی با اندازه حرکت $m(t)v(t)$ می‌باشد. این دستگاه در لحظه $t+h$ از دو قسمت تشکیل شده است، یکی موشک با اندازه حرکت $m(t+h)v(t+h)$ و دیگری مواد سوخته شده با اندازه حرکت $[v(t) + c(t)][m(t) - m(t+h)]$. قانون بقای اندازه حرکت چنین می‌گوید که اندازه حرکت دستگاه جدید باید مساوی اندازه حرکت دستگاه قدیم باشد. بنابراین داریم

$m(t)v(t) = m(t+h)v(t+h) + [m(t) - m(t+h)][v(t) + c(t)]$,
که از آن خواهیم داشت

$$m(t+h)[v(t+h) - v(t)] = [m(t+h) - m(t)]c(t).$$

چنانچه این را بر h تقسیم کرده و h را به ۰ میل دهیم

$$m(t)v'(t) = m'(t)c(t)$$

را می یابیم که با معادله (۳۵.۸) یکی خواهد بود.

اکنون حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن موشک از حالت سکون شروع به حرکت کرده و با وزن اولیه w پوند (شامل b پوند سوخت) در امتداد خطی راست بطور عمودی بالا می رود. فرض کنیم سوخت بمیزان ثابت k پوند در ثانیه مصرف شود و حاصل احتراق مستقیماً از عقب موشک با سرعت ثابت c فوت بر ثانیه نسبت به آن خارج گردد. همچنین تنها نیروی خارجی وارد بر موشک نیروی جاذبه زمین باشد. می خواهیم بدانیم که موشک در لحظه ای که همه سوختش را مصرف کرده در چه ارتفاعی می باشد.

چون همه سوخت زمانی تمام می شود که $kt = b$ ما تا t به بازه $0 \leq t \leq b/k$ محدود می کنیم. تنها نیروی خارجی وارد بر موشک $-m(t)g$ است، همچنین $c(t) = -c$ پس معادله (۳۶.۸) بشکل

$$m(t)r''(t) = -m'(t)c - m(t)g$$

در خواهد آمد. وزن موشک در لحظه t برابر $w - kt$ و جرم آن $m(t)$ مساوی $(w - kt)g$ است؛ از اینرو خواهیم داشت $m'(t) = -k/g$ و معادله پیشگفته بصورت

$$r''(t) = -\frac{m'(t)}{m(t)}c - g = \frac{kc}{w - kt} - g$$

در می آید. چنانچه از این انتگرال گرفته و از شرط اولیه $r'(0) = 0$ استفاده کنیم در می یابیم که

$$r'(t) = -c \log \frac{w - kt}{w} - gt.$$

با انتگرالگیری مجدد و استفاده از شرط اولیه $r(0) = 0$ رابطه

$$r(t) = \frac{c(w - kt)}{k} \log \frac{w - kt}{w} - \frac{1}{2}gt^2 + ct$$

را بدست خواهیم آورد. کل سوخت وقتی با تمام می رسد که $t = b/k$. در این لحظه ارتفاع موشک برابر با

$$(37.8) \quad r\left(\frac{b}{k}\right) = \frac{c(w - b)}{k} \log \frac{w - b}{w} - \frac{1}{2} \frac{gb^2}{k^2} + \frac{cb}{k}$$

خواهد بود. این دستور وقتی معتبر است که $w < b$. در بعضی موشکها وزن خود آن در مقایسه با وزن سوخت قابل اغماض است، و توجه به حالت حدی $b = w$ جالب خواهد بود. در (۳۷.۸)، بدلیل وجود جمله $\log(w - b)/w$ ، نمیتوان $b = w$ را قرار داد. اما اگر $b \rightarrow w$ اولین جمله (۳۷.۸) بصورت مبهم با حد 0 درمی آید. بنا براین، وقتی $b \rightarrow w$ ، حد سمت راست (۳۷.۸)

$$\lim_{b \rightarrow w} r\left(\frac{b}{k}\right) = -\frac{1}{2} \frac{gw^2}{k^2} + \frac{cw}{k} = -\frac{1}{2} gT^2 + cT$$

خواهد بود که در آن $T = w/k$ زمان لازم برای مصرف شدن تمام w می باشد.

۱۹.۸ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۵ فرض این است که جسمی حرکت توافقی ساده طبق معادله $y = C \sin(kx + \alpha)$ دارد. سرعت جسم مساوی y' تعریف می شود. فرکانس حرکت معکوس دوره تناوب می باشد. ($2\pi/k =$ دوره تناوب؛ $k/2\pi =$ فرکانس). فرکانس نشانگر عده دورهای کامل در واحد زمان است مشروط براینکه $k > 0$.

۱. دامنه نوسان C را در صورتی پیدا کنید که فرکانس حرکت مساوی $1/\pi$ بوده و مقادیر اولیه y و y' (وقتی $x = 0$) بترتیب ۲ و ۴ باشند.

۲. اگر دامنه نوسان ۷ و فرکانس ۱۰ باشد سرعت را وقتی که y صفر است بدست آورید.

۳. نشان دهید که معادله حرکت را می توان بصورت

$$y = A \cos(mx + \beta)$$

نیز نوشت. معادلاتی را که ثابتهای $A, m, \beta, C, k, \alpha$ را بهم مربوط می سازند پیدا کنید.

۴. معادله حرکتی را بیابید که، وقتی $x = 0$ ، $y = 3$ و $y' = 0$ ، و دوره تناوب آن $1/2$ باشد.

۵. دامنه نوسان حرکتی را بیابید که دوره تناوبش 2π بوده و سرعت آن، وقتی $y = y_0$ مساوی $\pm y_0$ باشد.

۶. جسمی دارای حرکت توافقی ساده است. در لحظه $t = 0$ تغییر مکان آن ۱، سرعت آن ۲، و شتابش ۱۲ - می باشد. تغییر مکان و شتاب آن را در لحظه ای که سرعتش $\sqrt{8}$ است بیابید.

۷. بازای عدد مثبتی چون k معادله دیفرانسیل حرکت توافقی ساده $y'' + k^2 y = 0$ جوابهایی به شکل $y = f(x)$ دارد که $f(0) = f(3) = 0$ و بازای هر x در بازه $0 < x < 3$ ، $0 < f(x) < k$ را حساب کرده و کلیه جوابها را بدست آورید.

۸. در یک مدار الکتریکی شدت جریان $I(t)$ در لحظه t از معادله دیفرانسیل

$$I''(t) + I(t) = G(t)$$

تبعیت می‌کند که در آن G یک تابع پله‌ای است که این طور تعریف شده است:

$$G(t) = 1, 0 \leq t \leq 2\pi; \text{ بازای } t \text{ های دیگر } G(t) = 0.$$

جوابی را معین کنید که در شرائط اولیه $I(0) = 0$ و $I'(0) = 1$ صدق کند.

۹. در یک مدار الکتریکی شدت جریان $I(t)$ در لحظه t از معادله دیفرانسیل

$$I''(t) + RI'(t) + I(t) = \sin \omega t$$

تبعیت می‌کند که در آن R و ω ثابت‌های مثبتی می‌باشند. جواب را می‌توان بشکل

$$I(t) = F(t) + A \sin(\omega t + \alpha)$$

و A و α ثابت‌هایی باشند وابسته به R و ω ، و $A > 0$. هرگاه مقداری از ω باشد که

A را ماکزیمم کند آنگاه $\omega/2\pi$ را فرکانس دزناس مدار می‌خوانند.

(الف) کلیه فرکانسهای رزناس را وقتی $R = 1$ پیدا کنید.

(ب) آن مقادیری از R را بیابید که مدار بازای آنها دارای فرکانس رزناس باشد.

۱۰. یک سفینه فضائی بسوی زمین باز می‌گردد. فرض کنید تنها نیروی خارجی وارد بر آن

اثر جاذبه بوده و سفینه در امتداد خطی راست بسوی مرکز زمین پائین می‌آید. اثر جاذبه

تا حدی با پرتاب مستقیم یک موشک بطرف پائین خنثی می‌شود. سوخت موشک

بمیزان ثابت k پوند در ثانیه بمصرف می‌رسد و مواد سوخته شده دارای سرعت ثابت

c فوت بر ثانیه نسبت به موشک می‌باشند. چنانچه سفینه در لحظه $t = 0$ از حال سکون

شروع به حرکت نموده و وزن اولیه آن w پوند باشد برای مسافتی که تا لحظه t پائین

آمده دستوری پیدا نمائید.

۱۱. یک موشک با وزن اولیه w پوند از حالت سکون در فضای آزاد (بدون نیروهای

خارجی) و در امتداد خطی راست شروع به حرکت می‌کند. سوخت بمیزان ثابت k

پوند در ثانیه مصرف می‌شود و حاصل احتراق با سرعت ثابت c فوت بر ثانیه نسبت به

موشک مستقیماً از عقب آن خارج می‌گردد. مسافتی را که تا لحظه t پیموده است بیابید.

۱۲. تمرین ۱۱ را در صورتی حل کنید که سرعت اولیه موشک v بوده و حاصل احتراق با

چنان سرعتی از آن خارج می‌شود که در فضا ثابت می‌ماند.

۲۰.۸ چند تذکر درباره معادلات دیفرانسیل غیر خطی

چون معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرائب ثابت در چنین انواع متعددی از مسائل

علمی ظاهر می‌شوند جای بسی خوشوقتی است که روشهایی اصولی برای حل آنها وجود

دارند. معادلات غیر خطی زیادی نیز بطور طبیعی از مسائل فیزیکی و هندسی ناشی می‌شوند

لکن هیچ نظریه جامعی که قابل قیاس با نظریه مربوط به معادلات خطی باشد در دست نیست.

در مقدمه این فصل از «مجموعه‌ای از شگردها»ی کلاسیک یاد شد که برای پرداختن به بسیاری از حالات خاص معادلات غیرخطی ابداع شده‌اند. این فصل را با بررسی چند تا از این شگردها و بعضی از مسائل که بکمک آنها حل می‌شوند خاتمه می‌دهیم. ما فقط معادلات مرتبه اولی را در نظر می‌گیریم که می‌شود آنها را نسبت به y' حل کرد و بشکل

$$(38.8) \quad y' = f(x, y)$$

در آورده.

یادآور می‌شویم که یک جواب معادله (38.8) بر بازه‌ای چون I تابعی است مانند $y = Y(x)$ که بر I مشتق‌پذیر بوده و در رابطه $Y'(x) = f[x, Y(x)]$ بازای هر x در I صدق می‌کند. در حالت خطی قضیه وجودی - یکتائی را ثابت کردیم که باستاناد آن یک و فقط یک جواب هست که در شرط اولیه داده شده صدق می‌کند. علاوه بر این، برای تعیین این جواب دستور صریحی نیز وجود خواهد داشت.

در حالت کلی وضع باین صورت نخواهد بود. یک معادله غیرخطی ممکن است هیچ جوابی که در شرط اولیه مفروضی صدق کند نداشته باشد یا اینکه بیش از یک جواب واجد آن شرط داشته باشد. مثلاً معادله $y'' - xy' + y + 1 = 0$ با این شرط که، وقتی $x = 0$ ، $y = 0$ جوابی ندارد زیرا فرض جواب داشتن مستلزم آن است که، وقتی $x = 0$ ، $y' = -1$. از طرف دیگر، معادله $y' = 3y^{2/3}$ دو جواب متمایز $Y_1(x) = 0$ و $Y_2(x) = x^3$ دارد که در شرط اولیه $y = 0$ ، وقتی $x = 0$ ، صدق می‌نمایند.

بنابراین، بررسی معادلات غیرخطی، بواسطه امکان عدم وجود و یا عدم یکتائی جوابها، مشکلتر خواهد بود. همچنین، حتی وقتی هم جوابها وجود داشته باشند، ممکن است تعیین صریح آنها بر حسب توابع آشنا میسر نشود. گاهی اوقات می‌توان y' را از معادله دیفرانسیل حذف کرد و به رابطه‌ای بشکل

$$F(x, y) = 0$$

رسید که در آن برخی یا شاید همه جوابها صدق می‌کنند. اگر این معادله را بشود نسبت به y و بر حسب x حل کرد دستور صریحی برای جواب بدست خواهد آمد. اما گاهی این معادله خیلی پیچیده‌تر از آن است که تن به حل نسبت به y بدهد. مثلاً دریکی از بخشهای آتی معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

را بررسی کرده خواهیم دید که هر جواب الزاماً در رابطه

$$(39.8) \quad \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} + C = 0,$$

بازای ثابتی چون C ، صدق می‌کند. سعی در حل این معادله نسبت به y و بر حسب x بی‌فایده است. در چنین حالتی می‌گوئیم رابطه (39.8) یک دستور ضمنی برای جوابها است. اگر

به دستوری ضمنی مانند $F(x, y) = 0$ بر سیم که در آن هیچیک از مشتقات تابع مجهول نیامده باشد معمولاً می‌گوئیم معادله دیفرانسیل «حل» و یا «انتگرال‌گیری» شده است. گاهی این دستور اطلاعات مفیدی را درباره جوابها بروز می‌دهد. از سوی دیگر، خواننده باید بداند که یک چنین رابطه ضمنی ممکن است باندازه خود معادله دیفرانسیل در بررسی خواص جوابها مفید نباشد.

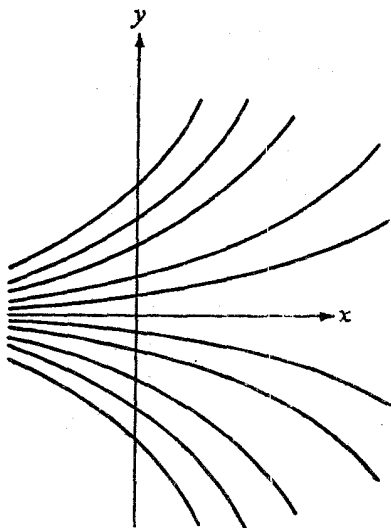
در بخش بعد نشان می‌دهیم که چگونه غالباً می‌توان اطلاعات کیفی مربوط به جوابها را مستقیماً از معادله دیفرانسیل و بدون داشتن شناختی از دستورهای صریح و یا ضمنی برای جوابها کسب نمود.

۲۱.۸ منحنیهای انتگرال و راستاهای میدان

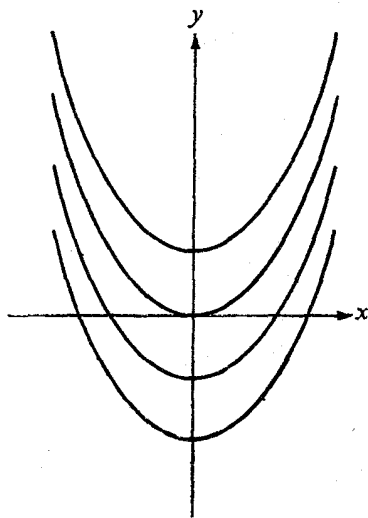
یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، مثلاً $y' = f(x, y)$ ، را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم جوابهایی از آن در یک رابطه ضمنی بشکل

$$F(x, y, C) = 0, \quad (40.8)$$

که در آن C یک ثابت است، صدق کنند. چنانچه دستگاه مختصات قائمی را رسم کرده و کلیه نقاط (x, y) را که مختصاتشان در (۴۰.۸) بازی C ای خاص صدق می‌کنند بکشیم یک منحنی بدست می‌آید که آن را منحنی انتگرال معادله دیفرانسیل می‌نامند. مقادیر مختلف C معمولاً منحنیهای انتگرال متفاوتی را بدست می‌دهند اما همه آنها از خاصیت هندسی



شکل ۸.۸. منحنیهای انتگرال معادله دیفرانسیل $y' = y$.



شکل ۷.۸. منحنیهای انتگرال معادله دیفرانسیل $y' = x$.

مشترکی برخوردارند. معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ شیب y' در هر نقطه (x, y) از منحنی را به مختصات x و y مربوط می‌کند. وقتی C همه مقادیرش را اختیار کند دسته منحنیهای انتگرال حاصل یک خانواده یک پارامتری از منحنیها نامیده خواهد شد.

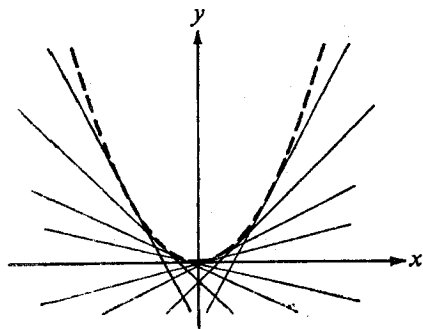
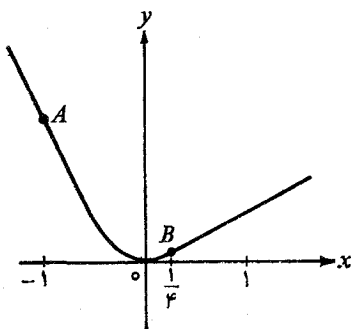
بنوان مثال، وقتی معادله دیفرانسیل $y' = 3$ باشد، با انتگرالگیری خواهیم داشت $y = 3x + C$ و منحنیهای انتگرال خانواده‌ای از خطوط مستقیم را تشکیل می‌دهند که همه از شیب ۳ برخوردارند. ثابت دلخواه C نمایش عرض از مبدأ این خطوط می‌باشد.

چنانچه معادله دیفرانسیل $y' = x$ باشد انتگرالگیری $y = x^2/2 + C$ را نتیجه می‌دهد و منحنیهای انتگرال خانواده‌ای از سهمیها را تشکیل خواهند داد که در شکل ۷.۸ نموده شده‌اند. مجدداً ثابت C به ما می‌گوید که منحنیهای مختلف کجا از محور y می‌گذرند.

شکل ۸.۸ خانواده منحنیهای نمایی $y = Ce^x$ را، که منحنیهای انتگرال معادله دیفرانسیل $y' = y$ می‌باشند، نشان می‌دهد. بار دیگر C نمایش عرض از مبدأ خواهد بود. در این حالت C مساوی شیب منحنی در نقطه تقاطع آن با محور y نیز هست.

یک خانواده از خطوط مستقیم غیرموازی در شکل ۹.۸ نموده شده است. اینها منحنیهای انتگرال معادله دیفرانسیل

$$(41.8) \quad y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$



شکل ۹.۸ منحنیهای انتگرال معادله

شکل ۱۰.۸ یک جواب معادله (۴۱.۸) که

$$\text{دیفرانسیل} \quad y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

عضو خانواده (۴۲.۸) نیست.

می‌باشند، و یک خانواده یک پارامتری از جوابها عبارت است از

$$(42.8) \quad y = Cx - \frac{1}{4} C^2.$$

این خانواده‌ای است که دارای پوش می‌باشد، یعنی یک منحنی با این خاصیت که در هر نقطه‌اش برعضوی از این خانواده مماس است. در اینجا پوش $y = x^2$ بوده و نمودار آن با

۱.۹، و، همکس، هر عضو خانواده برپوش مماس خواهد بود.

خطوط بریده در شکل ۹.۸ نشان داده شده است. پوش یک خانواده از منحنیهای انتگرال خود یک منحنی انتگرال است زیرا شیب و مختصات در یک نقطه پوش شیب و مختصات در آن نقطه بر یکی از منحنیهای انتگرال خانواده می باشند. در این مثال با آسانی می شود مستقیماً تحقیق کرد که $y = x^2$ یک جواب (۴۱.۸) است. توجه داشته باشید که این جواب خصوصی عضوی از خانواده (۴۲.۸) نیست. جوابهای دیگری را که عضو خانواده نباشند می توان از اتصال اعضای خانواده با قسمتهائی از پوش بدست آورد. مثالی در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است. خط مماس در A با اختیار $C = -2$ در (۴۲.۸) و مماس در B با فرض $C = 1/2$ در آن بدست می آید. جواب حاصل، یعنی $y = f(x)$ ، چنین خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{16}, & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

این تابع دارای مشتق بوده و بازای هر x حقیقی در معادله دیفرانسیل (۴۱.۸) صدق می کند. واضح است که بی نهایت مثال مشابه را می شد بهمین نحو ساخت. این مثال نشان می دهد که ارائه کلیه جوابهای ممکنه یک معادله دیفرانسیل ممکن است با آسانی مقدور نباشد. گاهی اوقات می توان معادله دیفرانسیل مرتبه اولی یافت که در آن کلیه اعضای یک خانواده یک پارامتری از منحنیها صدق کنند. این موضوع را با دو مثال روشن می سازیم.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل مرتبه اولی بیابید که در آن جميع دواير بمركز مبدأ صدق کنند.

حل. دایره ای که مرکزش در مبدأ بوده و شعاعش C باشد در معادله $x^2 + y^2 = C^2$ صدق می کند. وقتی C روی همه اعداد مثبت تغییر کند کلیه دواير بمركز مبدأ بدست خواهند آمد. برای یافتن یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول که منحنیهای انتگرال آن این دواير باشند کافی است از معادله دکارتی مشتق بگیریم تا $0 = 2x + 2yy' = 2x + 2y' = 0$ بدست آید. لذا هر یک از این دواير در معادله دیفرانسیل $y' = -x/y$ صدق خواهد کرد.

مثال ۲. برای خانواده کلیه دواير مار بمبدأ که مراکزشان بر محور x قرار دارند معادله دیفرانسیل مرتبه اولی بدست آورید.

حل. چنانچه مرکز دایره ای در $(0, C)$ بوده و از مبدأ بگذرد قضیه فیثاغورس به ما خواهد گفت که هر نقطه (x, y) واقع بر آن در معادله دکارتی $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ صدق می کند که می توان آن را این طور نوشت:

$$(43.8) \quad x^2 + y^2 - 2Cx = 0.$$

برای یافتن معادلهٔ دیفرانسیلی که این دواير منحنیهای انتگرال آن باشند از (۴۳.۸) مشتق می‌گیریم تا $0 = 2C - 2yy' + 2x$ ، یا

$$(44.8) \quad x + yy' = C,$$

بدست آید. چون این معادله حاوی C است فقط توسط دایرهٔ (۴۳.۸) نظیر همین C برقرار می‌شود. برای بدست آوردن معادلهٔ دیفرانسیلی که بازای کلیهٔ منحنیهای (۴۳.۸) برقرار باشد بایستی C را حذف کنیم. می‌توانستیم از (۴۴.۸) مشتق بگیریم تا

$$1 + yy'' + (y')^2 = 0$$

بدست آید. این یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است که در آن کلیهٔ منحنیهای (۴۳.۸) صدق می‌کنند. می‌توانیم C را بین (۴۳.۸) و (۴۴.۸) حذف کرده به یک معادلهٔ مرتبهٔ اول برسیم. با گذاردن $x + yy'$ بجای C در (۴۳.۸) خواهیم داشت

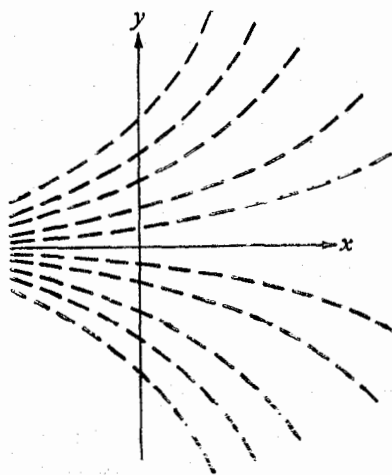
$$x^2 + y^2 - 2x(x + yy') = 0$$

که یک معادلهٔ مرتبهٔ اول است که می‌شود آن را نسبت به y' حل کرد و بصورت

$$y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$$

نوشت.

شکل ۱۱.۸ مبین چیزی است که به آن راستای میدان یک معادلهٔ دیفرانسیل می‌گویند. این چیزی نیست جز دسته‌ای از پاره خطهای کوتاه که به منحنیهای انتگرال مختلف مماسند. مثال خاصی که در شکل ۱۱.۸ نموده شده یک راستای میدان معادلهٔ $y' = y$ خواهد بود. راستای میدان را می‌توان بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل ساخت. نقطه‌ای مانند (a, b) اختیار کرده و عدد $f(a, b)$ را با گذاردن a و b در سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل $y' = f(x, y)$



شکل ۱۱.۸ یک راستای میدان برای معادلهٔ دیفرانسیل $y' = y$.

محاسبه می‌نمائیم. چنانچه یکی از منحنیهای انتگرال از این نقطه بگذرد شیب آن در این نقطه باید مساوی $f(a, b)$ باشد. بنابراین، اگر پاره‌خط کوتاهی رسم کنیم که از (a, b) بگذرد و دارای این شیب باشد، این خط جزئی از یک راستای میدان معادله دیفرانسیل خواهد بود. با رسم چندتا از این پاره‌خطها می‌توان از رفتار عمومی منحنیهای انتگرال تصویر روشنی بدست آورد. گاهی اوقات یک چنین اطلاعات کیفی در مورد جواب ممکن است تمام آن چیزی باشد که مورد حاجت است. توجه داشته باشید که نقاط مختلف $(0, b)$ واقع بر محور y منحنیهای انتگرال متفاوتی بدست می‌دهند. این یک دلیل هندسی است در تأیید اینکه چرا وقتی از یک معادله مرتبه اول انتگرال می‌گیریم منتظر ظهور ثابت دلخواهی می‌باشیم.

۲۲۰۸ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۲ معادله دیفرانسیل مرتبه اولی بیابید که خانواده منحنیهای داده شده منحنیهای انتگرال آن باشند.

$$y = Ce^{-2x} \quad ۲ \quad ۲x + 3y = C \quad ۱$$

$$xy = C \quad ۴ \quad x^2 - y^2 = C \quad ۳$$

$$x^2 + y^2 + 2Cy = 1 \quad ۶ \quad y^2 = Cx \quad ۵$$

$$y^4(x + 2) = C(x - 2) \quad ۸ \quad y = C(x - 1)e^x \quad ۷$$

$$\arctan y + \arcsin x = C \quad ۱۰ \quad y = C \cos x \quad ۹$$

$$۱۱. \text{ کلیه دواير مار بر نقاط } (1, 0) \text{ و } (-1, 0).$$

$$۱۲. \text{ کلیه دواير مار بر نقاط } (1, 1) \text{ و } (-1, -1).$$

در ساختن راستای میدان یک معادله دیفرانسیل گاهی اوقات اگر در ابتدا نقاطی را که در آنها شیب y' مقدار ثابت C را دارد بیابیم سرعت کار بنحو قابل ملاحظه‌ای افزایش خواهد یافت. بازای هر C این نقاط بر یک منحنی قرار دارند که آن را یکشبه می‌نامند. ۱۳ یکشبه‌های متناظر شبیه‌ای ثابت $1/2, 1, 3/2, 2$ را برای معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + y^2$ رسم کنید. بکمک آنها برای این معادله یک راستای میدان بسازید و سعی کنید شکل منحنی انتگرالی را که از مبدأ می‌گذرد مشخص نمائید.

۱۴. نشان دهید که یکشبه‌های معادله دیفرانسیل $y' = x + y$ یک خانواده یک پارامتری از خطوط راست را تشکیل می‌دهند. یکشبه‌های متناظر شبیه‌ای ثابت $0, 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2$ را بکشید. بکمک آنها یک راستای میدان بسازید و منحنی انتگرال مار بر مبدأ را رسم کنید. یکی از منحنیهای انتگرال یک یکشبه نیز هست؛ این منحنی را بیابید.

۱۵. با رسم چندتا یکشبه برای معادله

$$y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

یک راستای میدان بسازید. اگر راستای میدان را بدقت بکشید می‌توانید از شکل آن یک خانوادهٔ یک پارامتری از جوابهای این معادله را بدست آورید.

۲۳.۸ معادلات جدائی‌پذیر مرتبهٔ اول

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول بشکل $y' = f(x, y)$ که طرف راست آن به حاصلضرب دوسازه که یکی فقط تابع x و دیگری فقط تابع y است تجزیه شود یک معادلهٔ جدائی‌پذیر نام دارد. $y' = x^3$ ، $y' = y$ ، $y' = \sin y \log x$ ، $y' = x/\tan y$ ، و غیره نمونه‌هایی از این معادلات هستند. بنابراین هر معادلهٔ جدائی‌پذیر را می‌توان بشکل

$$y' = Q(x) R(y)$$

نوشت که در آن Q و R توابع مفروضی می‌باشند. وقتی $R(y) \neq 0$ می‌توان با تقسیم بر $R(y)$ معادله را بصورت

$$A(y) y' = Q(x)$$

نوشت که در آن $A(y) = 1/R(y)$. قضیهٔ بعدی به ما می‌گوید که چگونه یک دستور ضمنی پیدا کنیم که هر جواب این معادله در آن صدق نماید.

قضیهٔ ۱۰.۸. فرض کنیم $y = Y(x)$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل جدائی‌پذیر

$$(45.8) \quad A(y) y' = Q(x)$$

باشد بطوری که Y' بر بازهٔ باز I پیوسته است. همچنین فرض می‌کنیم Q و تابع مرکب $A \circ Y$ بر I پیوسته باشند. در اینصورت اگر G اولیهٔ دلخواهی از A باشد، یعنی تابعی باشد که $G' = A$ ، جواب Y در دستود ضمنی

$$(46.8) \quad G(y) = \int Q(x) dx + C,$$

بازای ثابتی چون C ، صدق خواهد کرد. بعکس، هرگاه y در (46.8) صدق کند، آنگاه y یک جواب (45.8) خواهد بود.

برهان. چون Y یک جواب (45.8) است باید بازای هر x در I داشته باشیم

$$(47.8) \quad A[Y(x)] Y'(x) = Q(x).$$

چون $G' = A$ این معادله بشکل

$$G'[Y(x)] Y'(x) = Q(x)$$

درخواهد آمد. اما، بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای، طرف چپ مشتق تابع مرکب $G \circ Y$ است. پس $G \circ Y$ یک اولیهٔ Q می‌باشد، یعنی، بازای ثابتی چون C ،

$$(۴۸.۸) \quad G[Y(x)] = \int Q(x) dx + C$$

که همان رابطهٔ (۴۶.۸) خواهد بود. بعکس، اگر $y = Y(x)$ در (۴۶.۸) صدق کند، با مشتقگیری رابطهٔ (۴۷.۸) نتیجه می‌شود که نشان می‌دهد که Y یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۸) می‌باشد.

توجه: دستورضمنی (۴۶.۸) را می‌توان برحسب A نیز بیان کرد. از (۴۷.۸) داریم

$$\int A[Y(x)] Y'(x) dx = \int Q(x) dx + C.$$

اگر در انتگرال سمت چپ جانشانی $y = Y(x)$ ، $dy = Y'(x) dx$ را انجام دهیم معادله بشکل

$$(۴۹.۸) \quad \int A(y) dy = \int Q(x) dx + C$$

درمی‌آید. چون انتگرال نامعین $\int A(y) dy$ نمایش هر اولیه‌ای از A است پس معادلهٔ (۴۹.۸) طریقهٔ دیگر نوشتن (۴۶.۸) خواهد بود.

درعمل، دستور (۴۹.۸) از (۴۵.۸) مستقیماً با یک فرایند مکانیکی بدست می‌آید. باین ترتیب که در معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۸) بجای y' می‌نویسیم dy/dx و بعد dy/dx را بمثابة یک کسر گرفته و رابطهٔ $A(y) dy = Q(x) dx$ را بدست می‌آوریم. حال فقط علامات انتگرال را به دوطرف این معادله ملحق و ثابت C را به طرف راست آن می‌افزاییم تا (۴۹.۸) حاصل شود. این عمل مکانیکی را قضیهٔ ۱۵.۸ توجیه می‌کند. این مثالی است دیگر که مفید بودن نماد لایب‌نیتز را نشان خواهد داد.

مثال. معادلهٔ غیرخطی $xy' + y = y^2$ جدائی‌پذیر است زیرا در صورتی که $y(y-1) \neq 0$ و $x \neq 0$ می‌توان آن را بشکل

$$(۵۰.۸) \quad \frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x}$$

نوشت. واضح است که دو تابع ثابت $y=0$ و $y=1$ جوابهای $xy' + y = y^2$ هستند. بقیهٔ جوابها، در صورت وجود، در (۵۰.۸) صدق می‌کنند و در نتیجه، بنا بر قضیهٔ ۱۵.۸، در

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + K,$$

بازای ثابتی چون K ، نیز صدق خواهند کرد. چون انتگرالده سمت چپ مساوی $1/(y-1) - 1/y$ است پس وقتی انتگرال می گیریم درمی یابیم که

$$\log|y-1| - \log|y| = \log|x| + K.$$

ازاین نتیجه می شود که $|y-1|/|y| = |x|e^K$ یا، بازای مقدار ثابتی چون C ، $(y-1)/y = Cx$. اگر این معادله را نسبت به y حل کنیم دستور صریح

$$(51.8) \quad y = \frac{1}{1-Cx}$$

را بدست خواهیم آورد. قضیه ۱۰.۸ به ما می گوید که این y بازای هر انتخاب C یک جواب است. بنابراین دراین مثال کلیه جوابها مشخص شده اند که عبارتند از توابع ثابت $y=0$ و $y=1$ و همه تابعهائی که با (۵۱.۸) تعریف می شوند. توجه داشته باشید که بازای $C=0$ جواب ثابت $y=1$ حاصل خواهد شد.

۲۴.۸ تمرینات

درتمرینات ۱ تا ۱۲ وجود جوابها را مفروض گرفته ویک دستور ضمنی پیدا کنید که جوابها درآن صدق نمایند.

$$y' = x^2/y^2 \cdot 1 \quad \tan x \cos y = -y' \tan y \cdot 2$$

$$(x+1)y' + y^2 = 0 \cdot 3 \quad y' = (y-1)(y-2) \cdot 4$$

$$y\sqrt{1-x^2}y' = x \cdot 5 \quad (x-1)y' = xy \cdot 6$$

$$(1-x^2)^{1/2}y' + 1 + y^2 = 0 \cdot 7 \quad xy(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0 \cdot 8$$

$$(x^2-4)y' = y \cdot 9 \quad xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \cdot 10$$

$$yy' = e^{x+y} \sin x \cdot 11 \quad xdx + ydy = xy(xdy - ydx) \cdot 12$$

درتمرینات ۱۳ تا ۱۶ توابع f را، که برتمام محور حقیقی پیوسته اند، طوری پیدا کنید که درشرائط داده شده صدق نمایند. درصورت امکان کلیه آنها را پیدا کنید؛ درغیر-اینصورت هرچندتا را که می توانید بدست آورید.

$$f(x) = 2 + \int_1^x f(t) dt \cdot 13$$

$$f(0) = 1, f(x)f'(x) = 5x \cdot 14$$

$$f(0) = 0, f'(x) + 2xe^{f(x)} = 0 \cdot 15$$

$$f^2(x) + [f'(x)]^2 = 1 \cdot 16 \quad f(x) = -1 \text{ توجه: یک جواب است.}$$

۱۷. تابع نامنفی f ، که بر تمام محور حقیقی پیوسته است، این خاصیت را دارد که مجموعهٔ عرضی آن روی یک بازهٔ دلخواه از مساحتی متناسب با طول بازه برخورددار است. f را پیدا کنید.

۱۸. تمرین ۱۷ را در صورتی حل کنید که مساحت با تفاضل مقادیر تابع در نقاط انتهائی بازه متناسب باشد.

۱۹. تمرین ۱۸ را وقتی حل کنید که «تفاضل» با «مجموع» عوض شده باشد.

۲۰. تمرین ۱۸ را زمانی حل کنید که «تفاضل» با «حاصلضرب» عوض شده باشد.

۲۵.۸ معادلات مرتبهٔ اول همگن

حال نوع خاصی از معادلات مرتبهٔ اول، یعنی

$$(52.8) \quad y' = f(x, y),$$

را در نظر می‌گیریم که طرف راستش از خاصیت ویژه‌ای بنام همگنی برخورددار است. این بدان معنی است که بازای هر x و هر y و هر $t \neq 0$

$$(53.8) \quad f(tx, ty) = f(x, y).$$

بعبارت دیگر، تعویض x با tx و y با ty هیچ اثری بر مقدار $f(x, y)$ ندارد. معادلاتی بشکل (۵۲.۸) که این خاصیت را داشته باشند همگن (گاهی اوقات همگن از درجهٔ صفر) نام دارند. نمونه‌هایی از این معادلات در زیر آمده‌اند:

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, y' = \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)^2, y' = \frac{x}{y} \sin \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, y' = \log x - \log y.$$

اگر از (۵۳.۸) با فرض $t = 1/x$ استفاده کنیم معادلهٔ دیفرانسیل (۵۲.۸) بصورت

$$(54.8) \quad y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

درخواهد آمد. وجود کسر y/x درست راست این فکر را پیش می‌آورد که تابع مجهول و جدید v را مساوی y/x تعریف کنیم. در این صورت $y = vx$ ، $y' = v'x + v$ ، و این جانشانی (۵۴.۸) را به

$$x \frac{dv}{dx} = f(1, v) - v \quad \text{یا} \quad v'x + v = f(1, v)$$

بدل می‌سازد. این معادلهٔ آخر یک معادلهٔ جدائی‌پذیر مرتبهٔ اول نسبت به v است. می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ ۱۰.۸ یک دستور ضمنی برای v پیدا کرده و بعد، با گذاردن y/x بجای v ، یک دستور ضمنی برای y بدست آوریم.

مثال. معادله دیفرانسیل $y' = (y - x)/(y + x)$ را حل کنید.

حل. معادله را باین شکل می نویسیم:

$$y' = \frac{y/x - 1}{y/x + 1}.$$

با قرار دادن $v = y/x$ معادله بصورت

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v - 1}{v + 1} - v = -\frac{1 + v^2}{v + 1}$$

درمی آید. چنانچه از قضیه ۱۵.۸ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\int \frac{v}{1 + v^2} dv + \int \frac{1}{1 + v^2} dv = - \int \frac{dx}{x} + C.$$

از انتگرالگیری نتیجه می شود که

$$\frac{1}{2} \log(1 + v^2) + \arctan v = -\log|x| + C.$$

با گذاردن y/x بجای v در آن خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \log x^2 + \arctan \frac{y}{x} = -\log|x| + C$$

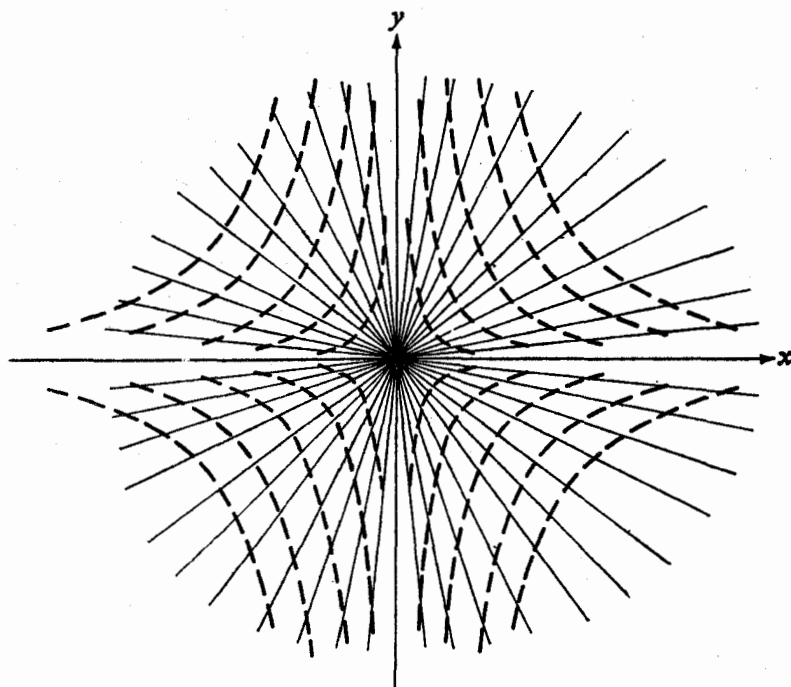
و، چون $\log x^2 = 2 \log|x|$ ، این رابطه بصورت ساده تر

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} = C$$

در خواهد آمد.

جوابهای معادله همگن $y' = f(x, y)$ از چند خاصیت جالب هندسی برخوردارند. قبل از هر چیز بآسانی می توان نشان داد که خطوط مستقیمی که از مبدأ می گذرند یکشبهه های معادله می باشند. یادآوری می کنیم که هر یکشبهه $y' = f(x, y)$ یک منحنی است که شیب y' در طول آن ثابت است. این خاصیت در شکل ۱۲.۸ مجسم شده است. این شکل یک راستای میدان معادله دیفرانسیل $y' = -2y/x$ را نشان می دهد. یکشبهه متناظر با شیب c دارای معادله $-2y/x = c$ یا $y = -cx/2$ است و در نتیجه خطی با شیب $c/2$ خواهد بود که از مبدأ می گذرد. برای اینکه این خاصیت در حالت کلی ثابت شود خطی بشیب m و گذرنده بر مبدأ را در نظر می گیریم. پس، بازای هر (x, y) برای این خط، $y = mx$ ؛ خصوصاً نقطه $(1, m)$ روی این خط قرار دارد. حال، برای سهولت کار، فرض می کنیم از هر نقطه خط $y = mx$ یک منحنی انتگرال می گذرد. شیب منحنی انتگرال ماربر نقطه

(a, b) از این خط برابر است با $f(a, b) = f(a, ma)$. اگر $a \neq 0$ می توان از خاصیت همگنی (۵۳.۸) استفاده کرد و نوشت $f(a, ma) = f(1, m)$. بعبارت دیگر، اگر



شکل ۱۲.۸ یک راستای میدان برای معادله دیفرانسیل $y' = -2y/x$. یکشبهه‌ها خطوط مستقیمی هستند که از مبدأ مختصات می گذرند.

$(a, b) \neq (0, 0)$ ، منحنی انتگرالی که از (a, b) می گذرد با منحنی انتگرال گذرنده بر $(1, m)$ از یک شیب برخوردارند. بنابراین، همانطور که حکم شده بود، خط $y = mx$ یک یکشبهه است. (همچنین می توان نشان داد که اینها تنها یکشبهه‌های یک معادله همگن می باشند.)

این خاصیت یکشبهه‌ها خاصیتی برای منحنیهای انتگرال پیشنهاد می کند که به خاصیت پایائی تحت تبدیلات تشابه معروف است. یادآوری می کنیم که یک تبدیل تشابه مجموعه S را به مجموعه جدید kS می برد که kS با ضرب مختصات هر نقطه S در سازه ثابت $k > 0$ بدست می آید. هر خط ماربر مبدأ تحت یک تبدیل تشابه ثابت می ماند. بنابراین یکشبهه‌های یک معادله همگن تحت یک تبدیل تشابه تغییر نمی کنند، در نتیجه شکل راستای میدان نیز تغییری نخواهد کرد. این مطلب این فکر را تداعی می کند که تبدیلات تشابه منحنیهای انتگرال را به منحنیهای انتگرال می برند. برای اثبات تحلیلی این موضوع فرض می کنیم S یک منحنی انتگرال باشد که با دستور صریحی بشکل

$$(۵۵.۸) \quad y = F(x)$$

توصیف شده است. وقتی می‌گوئیم S یک منحنی انتگرال $y' = f(x, y)$ است مقصود این است که برای هر x موردنظر داریم

$$(۵۶.۸) \quad F'(x) = f(x, F(x)).$$

حال نقطه دلخواه (x, y) را بر kS اختیار می‌کنیم. در اینصورت نقطه $(x/k, y/k)$ بر S قرار دارد و در نتیجه مختصاتش در (۵۵.۸) صدق می‌کند، پس داریم $y/k = F(x/k)$ یا $y = kF(x/k)$. عبارت دیگر، منحنی kS با معادله $y = G(x)$ توصیف می‌شود که در آن $G(x) = kF(x/k)$. توجه کنید که مشتق G عبارت است از

$$G'(x) = kF'\left(\frac{x}{k}\right) \cdot \frac{1}{k} = F'\left(\frac{x}{k}\right).$$

برای اینکه ثابت کنیم kS یک منحنی انتگرال $y' = f(x, y)$ است کافی است نشان دهیم $G'(x) = f(x, G(x))$ یا، عبارت معادل، ثابت کنیم که

$$(۵۷.۸) \quad F'\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(x, kF\left(\frac{x}{k}\right)\right).$$

اما اگر در معادله (۵۶.۸) x را با x/k عوض کنیم و سپس از خاصیت همگنی با فرض $t = k$ استفاده نماییم خواهیم داشت

$$F'\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(\frac{x}{k}, F\left(\frac{x}{k}\right)\right) = f\left(x, kF\left(\frac{x}{k}\right)\right),$$

و این (۵۷.۸) را ثابت خواهد کرد. عبارت دیگر، نشان داده‌ایم که هر وقت S یک منحنی انتگرال باشد kS نیز چنین خواهد بود. یک مثال ساده که در آن این خاصیت کاملاً مشهود است معادله همگن $y' = -x/y$ می‌باشد که منحنیهای انتگرال آن یک خانوادهٔ یک پارامتری از دایره‌های متحدالمرکز با معادله $x^2 + y^2 = C$ را تشکیل می‌دهند.

همچنین می‌توان نشان داد که هرگاه منحنیهای انتگرال یک معادلهٔ مرتبهٔ اول $y' = f(x, y)$ تحت تبدیلات تشابه پایا باشند آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل الزاماً همگن خواهد بود.

۲۶.۸ تمرینات

۱. نشان دهید که جانشانی $y = x/v$ معادلهٔ همگن $y' = f(x, y)$ را به یک معادلهٔ مرتبهٔ اول نسبت به v که جدائی‌پذیر است تبدیل می‌کند. گاهی اوقات این جانشانی منجر به انتگرالهایی می‌شود که محاسبهٔ آنها از انتگرالهایی که با جانشانی $y = xv$ ، آنچنان که در متن مطرح شد، بدست می‌آیند آسانتر است.

از معادلات دیفرانسیل تمرینات ۲ تا ۱۱ انتگرال بگیرد.

$$y' = \frac{-x}{y} \cdot ۲ \quad y' = 1 + \frac{y}{x} \cdot ۳$$

$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy} \cdot ۴ \quad (2y^2 - x^2)y' + 3xy = 0 \cdot ۵$$

$$xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot ۶ \quad x^2y' + xy + 2y^2 = 0 \cdot ۷$$

$$y' = \frac{y(x^2 + xy + y^2)}{x(x^2 + 3xy + y^2)} \cdot ۹ \quad y^2 + (x^2 - xy + y^2)y' = 0 \cdot ۸$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \cdot ۱۰$$

$$x(y + 2x)y' + y(x + 2y) = 0 \cdot ۱۱$$

۲۷.۸ چند مسئله هندسی و فیزیکی که به معادلات مرتبه اول منجر می‌شوند

اینک می‌پردازیم به چند مسئله هندسی و فیزیکی که به معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی منتهی می‌شوند که یا جدائی‌پذیرند و یا همگن.

مسیرهای قائم می‌گویند دومنحنی در یک نقطه یکدیگر را متعامداً قطع می‌کنند اگر که خطوط مماس آنها در این نقطه برهم عمود باشند. یک منحنی که هر عضو خانواده‌ای از منحنیها را متعامداً قطع کند یک مسیر قائم این خانواده نام دارد. شکل ۱۳.۸ چند مثال را نشان می‌دهد. مسائل مربوط به مسیرهای قائم هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردها اهمیت هستند. بعنوان مثال، در نظریه جریان سیالات، دو خانواده متعامد از منحنیها را بترتیب خطوط هم پتانسیل و خطوط سیلان می‌خوانند. اینها، در نظریه حرارت، به خطوط همدمای و خطوط جریان معروفند.

فرض کنیم خانواده‌ای از منحنیها را داده‌اند که در یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مانند

$$y' = f(x, y) \quad (۵۸.۸)$$

صدق می‌کنند. عدد $f(x, y)$ شیب منحنی انتگرالی است که از (x, y) می‌گذرد. شیب هر مسیر قائم ماربر این نقطه قرینه معکوس $f(x, y)$ ، یعنی $1/f(x, y)$ ، می‌باشد، پس مسیرهای قائم در معادله دیفرانسیل

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \quad (۵۹.۸)$$

صدق خواهند کرد. هرگاه (۵۸.۸) جدائی‌پذیر باشد آنگاه (۵۹.۸) نیز جدائی‌پذیر است.

چنانچه (۵۸.۸) همگن باشد (۵۹.۸) نیز چنین خواهد بود.

مثال ۱. مسیرهای قائم خانوادهٔ همهٔ دایرهای ماربر مبدأ را که مراکزشان بر محور x واقعند بیابید.

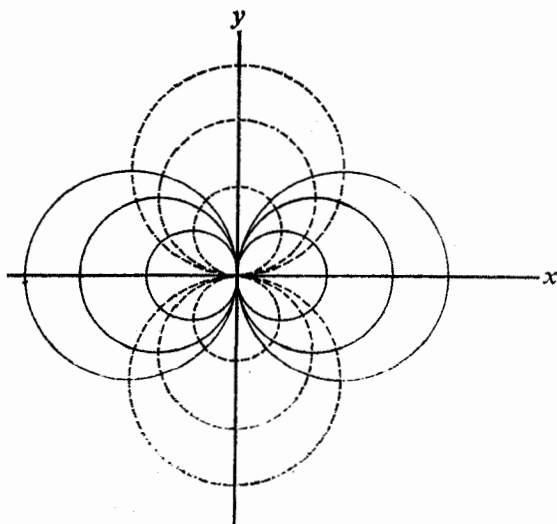
حل. در مثال ۲ در بخش ۲۱.۸ دیدیم که این خانواده با معادلهٔ دکارتی $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$ داده می‌شود و در معادلهٔ دیفرانسیل $y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$ صدق می‌کند. چنانچه طرف راست را با قرینهٔ معکوسش عوض کنیم درخواهیم یافت که مسیرهای قائم در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

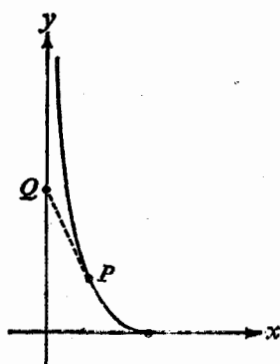
صدق می‌کنند. از این معادلهٔ همگن می‌شود با جانشانی $y = vx$ انتگرال گرفت و حاصل عمل خانوادهٔ منحنیهای انتگرال

$$x^2 + y^2 - 2Cy = 0$$

خواهد بود. این خانواده‌ای است از دایره‌ها که از مبدأ گذشته و مراکزشان بر محور y قرار دارند. مثالهائی در شکل ۱۳.۸ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۳.۸ دایره متعامد.



شکل ۱۴.۸ منحنی کشف‌کننده بمنوان یک منحنی تعقیب. فاصلهٔ P تا Q ثابت است.

مسائل تعقیب. نقطهٔ Q مقید است که در امتداد منحنی مسطح مفروض C_1 حرکت کند. نقطهٔ دیگر P در همان صفحه نقطهٔ Q را «تعقیب» می‌کند. یعنی P طوری حرکت می‌کند

که جهت حرکتش همیشه بطرف Q است. در نتیجه نقطه P منحنی دیگری چون C_1 را می‌پیماید که یک منحنی تعقیب نام دارد. مثالی در شکل ۱۴.۸ آورده شده که در آن C_1 محور y می‌باشد. در یک نمونه از مسائل تعقیب هدف تعیین منحنی C_1 است وقتی که منحنی C_1 معلوم بوده و مقداری اطلاعات اضافی درباره P و Q ، مثلاً رابطه‌ای بین مواضع آنها یا سرعت‌هایشان، داده شده است.

وقتی می‌گوئیم جهت حرکت P همیشه بسوی Q است مقصود این است که خط مماس بر C_1 در P از Q می‌گذرد. بنابراین، اگر (x, y) مختصات قائم P در لحظه‌ای معلوم بوده و (X, Y) مختصات قائم Q در همان لحظه باشند، باید داشته باشیم

$$(۶۰.۸) \quad y' = \frac{Y - y}{X - x}.$$

با اطلاعات اضافی معمولاً قادر خواهیم بود X و Y را توابع معلومی از x و y در نظر بگیریم، که در این صورت معادله (۶۰.۸) به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به y تبدیل خواهد شد. حال به مثال خاصی می‌پردازیم که این معادله در آن جدائی‌پذیر است.

مثال ۲. نقطه Q بر خط راست C_1 حرکت کرده و نقطه P آن را طوری تعقیب می‌کند که فاصله آنها برابر مقدار ثابت $k > 0$ است. اگر در آغاز P بر C_1 نباشد منحنی تعقیب را پیدا نمائید.

حل. C_1 را محور y گرفته و P را در آغاز حرکت در نقطه $(k, 0)$ قرار می‌دهیم. چون فاصله P تا Q مساوی k است باید داشته باشیم $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = k^2$. اما بر C_1 داریم $X = 0$ ، پس خواهیم داشت $Y - y = \sqrt{k^2 - x^2}$ و معادله دیفرانسیل (۶۰.۸) بصورت

$$y' = \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{-x}$$

درمی‌آید. چنانچه از این معادله بکمک جانشانی $x = k \cos t$ و استفاده از این مطلب که، وقتی $x = k$ ، $y = 0$ انتگرال بگیریم رابطه

$$y = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2}$$

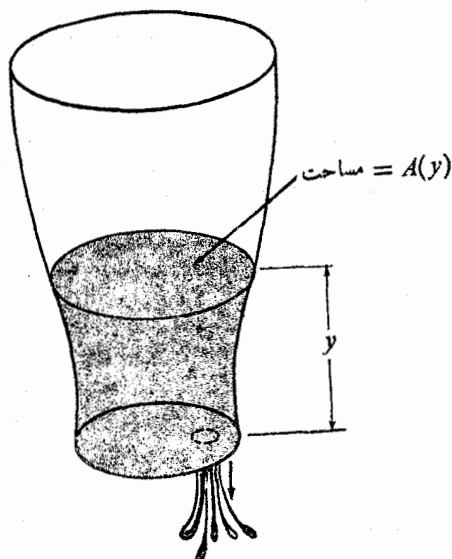
را بدست خواهیم آورد. منحنی تعقیب در این مثال را یک کشاننده می‌نامند؛ این منحنی در شکل ۱۴.۸ نموده شده است.

جریان یک‌مایع از یک سوراخ. فرض می‌کنیم یک بشکه (که لزماً استوانه‌ای نیست) حاوی یک‌مایع به ما داده باشند. مایع از یک سوراخ لبه تیز که در ته آن ایجاد شده خارج

می‌شود. اگر اصطکاکی در بین نبود (و در نتیجه انرژی از بین نمی‌رفت) سرعت فوران مایع برابر $\sqrt{2gy}$ فوت بر ثانیه می‌شد که در آن y ارتفاع سطح مایع بالای سوراخ (بر حسب فوت) می‌باشد. (ر.ک. شکل ۱۵۰۸). هرگاه A_0 مساحت سوراخ (بر حسب فوت مربع) باشد آنگاه $A_0\sqrt{2gy}$ نمایشگر حجم مایع به فوت مکعب است که در هر ثانیه از سوراخ خارج می‌شود. اما، بدلیل اصطکاک، فوران مایع تا حدودی کند شده و میزان مایع خروجی واقعی بیشتر به $cA_0\sqrt{2gy}$ نزدیک است که در آن c عددی است که با آزمایش تعیین می‌شود و ضریب تخلیه نام دارد. برای سوراخهای لب تیز معمولی مقدار c تقریباً مساوی ۰٫۶۰۰ است. با استفاده از این نوع سوراخها و فرض $g = 32$ در می‌یابیم که سرعت فوران برابر $48\sqrt{y}$ فوت بر ثانیه است و در نتیجه میزان حجم مایع خروجی مساوی $48A_0\sqrt{y}$ فوت مکعب بر ثانیه خواهد بود.

فرض کنیم $V(y)$ حجم مایع داخل بشکه در لحظه‌ای باشد که ارتفاع آن برابر y است. هرگاه $A(u)$ مساحت مقطع عرضی بشکه در ارتفاع u باشد آنگاه

$$V(y) = \int_0^y A(u) du$$



شکل ۱۵۰۸ جریان مایع از یک سوراخ.

۱. اگر جسمی بجرم m بطور آزاد از فاصله y سقوط کرده و به سرعت v برسد باید انرژی جنبشی آن $\frac{1}{2}mv^2$ مساوی انرژی پتانسیلش mgy (که لازم برای بردن جسم به ارتفاع y) باشد. با حل این تساوی نسبت به v رابطه $v = \sqrt{2gy}$ بدست خواهد آمد.

که از آن رابطه $dV/dy = A(y)$ بدست می آید. بنا بر بحثی که در بند پیش داشتیم میزان تغییر حجم نسبت به زمان مساوی $dV/dt = -478 A_0 \sqrt{y}$ فوت مکعب در ثانیه است؛ علامت منها از اینجهت آمده که حجم در حال کاهش می باشد. بنا بر قاعده زنجیره ای داریم

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = A(y) \frac{dy}{dt}.$$

اگر این رابطه را با معادله $dV/dt = -478 A_0 \sqrt{y}$ تلفیق کنیم به معادله دیفرانسیل

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -478 A_0 \sqrt{y}$$

خواهیم رسید. این معادله دیفرانسیل جدائی پذیر بعنوان نمونه ریاضی مسائل مربوط به جریان مایع از یک سوراخ بکار می رود. ارتفاع y سطح مایع با معادله ای بشکل

$$(۶۱۰۸) \quad \int \frac{A(y)}{\sqrt{y}} dy = -478 A_0 \int dt + C$$

به زمان t مربوط می شود.

مثال ۳. حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن مساحت مقطع عرضی بشکله ثابت است، مثلاً، بازای هر y ، $A(y) = A$ ، و فرض می کنیم سطح مایع ظرف ده دقیقه (۶۰۰ ثانیه) از ۱۰ فوت به ۹ فوت تنزل کند. این داده ها را می توان با معادله (۶۱۰۸) تلفیق کرد و

$$-\int_{10}^9 \frac{dy}{\sqrt{y}} = k \int_0^{600} dt$$

را بدست آورد که در آن $k = 478 A_0 / A$. با استفاده از این معادله می توانیم k را تعیین کنیم و خواهیم دید که

$$k = \frac{\sqrt{10} - 3}{300} \quad \text{یا} \quad \frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\frac{1}{2}} = 600k$$

حال می توان زمان لازم برای نزول سطح مایع از یک مقدار مفروض به هر مقدار دیگر را حساب کرد. بعنوان مثال، هرگاه سطح مایع در لحظه t_1 مساوی ۷ فوت و در لحظه t_2 برابر ۱ فوت باشد (t_2 و t_1 ، مثلاً، بر حسب دقیقه هستند)، آنگاه باید داشته باشیم

$$-\int_7^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = k \int_{t_1}^{t_2} dt,$$

که از آن نتیجه می شود که

$$t_2 - t_1 = \frac{2(\sqrt{y}-1)}{60k} = 10 \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{10}-3} = \frac{10(\sqrt{y}-1)(\sqrt{10}+3)}{10-9}$$

$$= (10)(1645)(6162) = 1013 \text{ دقیقه}$$

۲۸۰۸ تمرینات متفرقه برای دوره

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۱۰ مسیره‌های قائم خانواده داده شده از منحنیها را پیدا کنید.

$$1. \quad 2x + 3y = C \quad 2. \quad xy = C$$

$$3. \quad x^2 + y^2 + 2Cy = 1 \quad 4. \quad y^2 = Cx$$

$$5. \quad x^2y = C \quad 6. \quad y = Ce^{-2x}$$

$$7. \quad x^2 - y^2 = C \quad 8. \quad y = C \cos x$$

۹. کلیه دوایری که از نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرند.

۱۰. کلیه دوایری که از نقاط $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ می‌گذرند.

۱۱. نقطه Q در امتداد قسمت مثبت محور y بطرف بالا حرکت می‌کند. نقطه P ، که در آغاز

در $(1, 0)$ است، Q را طوری تعقیب می‌کند که فاصله‌اش از محور y مساوی $1/2$

فاصله Q از مبدأ است. معادله دکارتی منحنی تعقیب را بیابید.

۱۲. تمرین ۱۱ را وقتی حل کنید که کسر $1/2$ با عدد مثبت و دلخواه k عوض شده باشد.

۱۳. یک منحنی با معادله دکارتی $y = f(x)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد. خطوط موازی

محورها مختصات که از یک نقطه دلخواه منحنی رسم می‌شوند مستطیلی تشکیل

می‌دهند که دوزلع آن بر محورها قرار دارند. این مستطیل توسط منحنی به دوناچه A

و B تقسیم می‌شود که مساحت یکی n برابر مساحت دیگری است. تابع f را

پیدا کنید.

۱۴. تمرین ۱۳ را در صورتی حل کنید که دوناچه A و B این خاصیت را داشته باشند که

حجم یکی از اجسام حاصل از دوران آنها حول محور x ، n برابر حجم دیگری باشد.

۱۵. نمودار تابع مشتق‌پذیر و نامنفی f از مبدأ و نقطه $(1, 2/\pi)$ می‌گذرد. برای هر $x > 0$

اگر مجموعه عرضی f روی بازه $[0, x]$ حول محور x بچرخد جسمی با حجم

$x^2 f(x)$ بوجود می‌آورد. تابع f را پیدا کنید.

۱۶. تابع مشتق‌پذیر و نامنفی f بر بازه بسته $[0, 1]$ تعریف شده است و $f(1) = 0$.

بازای هر a ، که $0 < a < 1$ ، خط $x = a$ مجموعه عرضی f را به دوناچه با

مساحت‌های A و B تقسیم می‌کند که A مساحت ناحیه سمت چپ است. اگر

$A - B = 2f(a) + 3a + b$ ، که در آن b یک عدد ثابت مستقل از a می‌باشد،

تابع f و ثابت b را پیدا نمایید.

۱۷. نمودار تابع f از دو نقطه $P_0 = (0, 1)$ و $P_1 = (1, 0)$ می‌گذرد. برای هر نقطه

$P = (x, y)$ واقع بر نمودار، منحنی در بالای وتر P_0P_1 قرار گرفته و مساحت $A(x)$

ناحیه محصور بین منحنی و وتر PP مساوی x^3 می باشد. تابع f را مشخص نمایند.
 ۱۸. یک بشکه با اضلاع قائم دارای مقطع عرضی مربع بمساحت ۴ فوت مربع می باشد. آب از سوراخی بمساحت $5/3$ اینچ مربع خارج می شود. اگر سطح اولیه آب ۲ فوت بالای سوراخ باشد زمان لازم برای آنکه سطح آب به اندازه ۱ فوت پائین بیاید را بدست آورید.

۱۹. به تمرین قبل باز می گردیم. اگر آب نیز بمیزان ۱۵۰ اینچ مکعب در ثانیه وارد بشکه شود نشان دهید که سطح آب، بدون توجه به سطح اولیه آن، به مقدار $(25/24)$ فوت بالای سوراخ نزدیک خواهد شد.

۲۰. بشکه ای بشکل مخروط مستدیر قائم است که رأس آن بطرف بالا می باشد. مدت زمانی را که برای خالی شدن مایع داخل بشکه از سوراخی در قاعده آن لازم است بدست آورید. نتیجه خود را برحسب ابعاد مخروط و مساحت A سوراخ بیان نمایند.

۲۱. معادله $y'' - y' + (1-x)y = 0$ دارای جوابی بشکل $y = e^{mx}$ است که در آن m ثابت می باشد. این جواب را بطور صریح مشخص کنید.

۲۲. با تغییر متغیر مناسبی معادله دیفرانسیل $y'' + 6xy' = 0$ را بصورت یک معادله خطی درآورده آن را حل کنید.

۲۳. معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ را با تغییر متغیری بشکل $y = ue^{mx}$ که در آن m ثابت بوده و u تابع مجهول جدیدی است حل نمایند.

۲۴. (الف) تابع مفروض f در این روابط صدق می کند:

$$f(1) = 2; f'(x) = f(1/x), x > 0$$

فرض کنید $y = f(x)$ و نشان دهید که y در یک معادله دیفرانسیل بشکل

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0$$

صدق می کند که در آن a و b ثابت می باشند. a و b را مشخص کنید.

(ب) جوابی را بشکل $f(x) = Cx^n$ بدست آورید.

۲۵. (الف) فرض کنید u یک جواب ناصفر معادله مرتبه دوم

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

باشد. نشان دهید که جانشانی $y = uv$ معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

را به یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به v تبدیل می کند.

(ب) یک جواب ناصفر معادله $y'' + x^2(y' - 4y) = 0$ را حدس زده و، با استفاده از روش قسمت (الف)، آن جوابی از

$$y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 2xe^{-x^3/3}$$

را پیدا کنید که، وقتی $x = 0$ و $y = 0$ و $y' = 4$.

۲۶. در تأسیسات اتمی آژاکس^۱ دانشمندان یک گرم از عنصر جدید رادیواکتیو بنام دتریورم^۲ را در قرنطینه گذاردند. معلوم شد که تحلیل این ماده بمیزانی متناسب با مجذور مقدارش در هر لحظه صورت می‌گیرد. پس از یکسال $1/2$ گرم از آن باقیمانده است.

(الف) برای جرم باقیمانده دتریورم در لحظه t یک معادله دیفرانسیل بسازید و آن را حل کنید.

(ب) ثابت تحلیل را به $1 - \text{سال} \times 1 - \text{گرم محاسبه نمائید.}$

۲۷. در تمرین پیش فرض کنید کلمه مجذور با جذر عوض شده و دیگر داده‌ها ثابت بمانند. نشان دهید که در این حالت ماده در مدت زمان محدودی کاملاً بتحلیل می‌رود و این زمان را بدست آورید.

۲۸. در آغاز تب طلا سکنه کویوت گولچ^۳ در آریزونا 365 نفر بود. از آن به بعد جمعیت هر سال e برابر شده است جز بواسطه میزان بالای مرگ و میرهای «تصادفی» که در هر 100 نفر بالغ بربیک قربانی در روز بوده است. باحل معادله دیفرانسیل مناسبی مقادیر زیر را بعنوان توابعی از زمان بدست آورید:

(الف) جمعیت واقعی کویوت گولچ را پس از گذشت t سال از شروع تب طلا؛

(ب) تعداد کل مرگ و میرهای غیرطبیعی.

۲۹. با چه سرعتی باید یک موشک را به فضا پرتاب کرد تا هرگز به زمین باز نگردد؟ (از تمام نیروها بجز نیروی جاذبه زمین صرف نظر کنید.)

۳۰. فرض کنید $f(x) = y$ آن جواب معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{2y^2 + x}{3y^2 + 5}$$

باشد که در شرط اولیه $f(0) = 0$ صدق می‌کند. (لازم نیست این معادله دیفرانسیل را حل کنید.)

(الف) این معادله دیفرانسیل نشان می‌دهد که $f'(0) = 0$. دراینکه f در 0 ماکزیمم یا مینیمم نسبی دارد یا نه بحث کنید.

(ب) توجه داشته باشید که برای هر $x \geq 0$ و $f'(x) \geq 0$ ، برای هر $x \geq 10/3$ ، $f'(x) \geq 2/3$. دو عدد مثبت a و b را طوری بیابید که برای هر $x \geq 10/3$ ، $f(x) > ax - b$.

(پ) نشان دهید که وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $x/y^2 \rightarrow 0$. استدلال خود را مفصلاً شرح دهید.

(ت) نشان دهید که وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، y/x به حدی متناهی میل خواهد کرد و این حد را مشخص نمایید.

۳۱. فرض کنید تابع f در معادله دیفرانسیل

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$$

بازای هر x حقیقی صدق کند. (حل این معادله دیفرانسیل لازم نیست.)

(الف) اگر f در نقطه $c \neq 0$ اکسترمم داشته باشد نشان دهید که این اکسترمم یک مینیمم است.

(ب) اگر f در 0 اکسترمم داشته باشد آیا این اکسترمم ماکزیمم است یا مینیمم؟ نتیجه‌گیری خود را توجیه کنید.

(پ) چنانچه $f(0) = f'(0) = 0$ کوچکترین عدد ثابت A را بیابید که بازای هر $f(x) \leq Ax^2$ ، $x \geq 0$.

اعداد مختلط

۱.۹ مقدمه تاریخی

معادله درجه دوم $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد حقیقی دارای جواب نیست زیرا هیچ عدد حقیقی که مربعش ۱ - باشد وجود ندارد. برای جوابدار کردن این معادلات نوع جدیدی از اعداد، بنام اعداد مختلط، معرفی شده است. در این فصل کوتاه اعداد مختلط را شرح داده و اهمیت آنها را در حل معادلات جبری و اثرشان را بر حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان خواهیم داد.

در قرن ۱۶م علامت $\sqrt{-1}$ معرفی شد تا برای معادله درجه دوم $x^2 + 1 = 0$ جواب فراهم کند. این علامت، که بعدها آن را با حرف i نشان دادند، بعنوان یک عدد ساختگی یا موهومی بحساب می آمد که می شد با آن مثل یک عدد حقیقی معمولی بطور جبری عمل کرد با این تفاوت که مربعش ۱ - بود. لذا، مثلاً، چندجمله ای درجه دوم $x^2 + 1$ را بصورت $(x - i)(x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$ تجزیه می کردند و جوابهای معادله $x^2 + 1 = 0$ بشکل $x = \pm i$ عرضه می شد و این کاربرد هیچ توجهی به معنی و یا اعتبار این دستورها صورت می گرفت. عباراتی نظیر $2 + 3i$ اعداد مختلط نامیده می شدند و این اعداد، پیش از آنکه بروشی که مقبول انگاره های امروزی است توصیف شوند، قریب به ۳۰۰ سال بطور صوری محض بکار برده می شدند.

در اوائل قرن ۱۹م کارل فردریش گاوس^۱ (۱۸۵۵ - ۱۷۷۷) و ویلیام روان هامیلتون^۲ (۱۸۶۵ - ۱۸۰۵)، مستقل ولی تقریباً همزمان، ایشه تعریف اعداد مختلط را بصورت جفتهای مرتب (a, b) از اعداد حقیقی که خواص ویژه ای داشته باشند مطرح کردند. این فکر امروزه مورد قبول عام است و در بخش بعد توصیف خواهد شد.

۲.۹ تعاریف و خواص میدان

تعریف. اگر a و b اعدادی حقیقی باشند جفت (a, b) را درصورتی یک عدد مختلط نامند که تساوی، جمع، و ضرب این جفتها بصورت زیر تعریف شده باشند:

(الف) تساوی: $(a, b) = (c, d)$ یعنی که $a = c$ و $b = d$ ؛

(ب) مجموع: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ؛

(پ) حاصلضرب: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

تعریف تساوی بهما می‌گوید که جفت (a, b) را باید بعنوان یک جفت مرتب ملحوظ داشت. مثلاً عدد مختلط $(۲, ۳)$ با عدد مختلط $(۳, ۲)$ یکی نیست. اعداد a و b را مؤلفه‌های (a, b) می‌نامند. مؤلفه اول، یعنی a ، را قسمت حقیقی عدد مختلط نیز خوانده‌اند؛ مؤلفه دوم، یعنی b ، قسمت موهومی آن نام دارد.

توجه کنید که علامت $i = \sqrt{-1}$ در هیچ کجای این تعریف ظاهر نمی‌شود. بزودی i را بعنوان یک عدد مختلط خاص معرفی می‌کنیم که از کلیه خواص جبریی که ریاضیدانان قدیم به علامت ساختگی $\sqrt{-1}$ نسبت داده بودند بهره‌مند است. اما، پیش از این کار، خواص اساسی اعمالی را که هم اکنون تعریف شدند مورد بحث قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۹. اعمال جمع و ضرب اعداد مختلط در قوانین تعویضپذیری، شرکتپذیری، و پخشپذیری صدق می‌کنند. یعنی اگر x, y, z اعداد مختلط دلخواهی باشند خواهیم داشت:

قوانین تعویضپذیری: $xy = yx$, $x + y = y + x$ ؛

قوانین شرکتپذیری: $x(yz) = (xy)z$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ ؛

قانون پخشپذیری: $x(y + z) = xy + xz$.

برهان. همه این قوانین مستقیماً از تعریف مجموع و حاصلضرب بآسانی نتیجه می‌شوند. مثلاً برای اثبات قانون شرکتپذیری درمورد ضرب می‌نویسیم $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ ، و توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} x(yz) &= (x_1, x_2)(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1) \\ &= (x_1(y_1z_1 - y_2z_2) - x_2(y_1z_2 + y_2z_1), x_1(y_1z_2 + y_2z_1) \\ &\quad + x_2(y_1z_1 - y_2z_2)) = ((x_1y_1 - x_2y_2)z_1 \\ &\quad - (x_1y_2 + x_2y_1)z_2, (x_1y_2 + x_2y_1)z_1 + (x_1y_1 - x_2y_2)z_2) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)(z_1, z_2) = (xy)z. \end{aligned}$$

قوانین تعویضپذیری و پخشپذیری را می‌توان بهمین نحو اثبات کرد.

قضیه ۱.۹ نشان می‌دهد که مجموعه تمام اعداد مختلط در سه اصل موضوع اول میدان

برای دستگاه اعداد حقیقی، بطوری که دربخش م ۲.۳ داده شده‌اند، صدق می‌کند. اینک نشان می‌دهیم که اصول موضوع ۴، ۵، و ۶ نیز برقرار خواهند بود.

چون بازای هر عدد مختلط (a, b) ، $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ پس عدد مختلط $(0, 0)$ یک عنصرهمانی برای جمع است. این را عدد مختلط صفر می‌نامند. بهمین نحو، عدد مختلط $(1, 0)$ یک عنصرهمانی برای ضرب خواهد بود زیرا، بازای هر (a, b) ،

$$(a, b)(1, 0) = (a, b).$$

لذا، اصل موضوع ۴، با انتخاب $(0, 0)$ بعنوان عنصرهمانی برای جمع و $(1, 0)$ بعنوان عنصرهمانی برای ضرب، برقرار خواهد شد.

برای تصدیق اصل موضوع ۵ کافی است توجه کنیم که

$$(-a, -b) + (a, b) = (0, 0),$$

پس $(-a, -b)$ قرینه (a, b) است. بجای $(-a, -b)$ می‌نویسیم $-(a, b)$. بالاخره نشان می‌دهیم که هر عدد مختلط ناصفر نسبت به عنصرهمانی $(1, 0)$ متقابل دارد. یعنی، اگر $(a, b) \neq (0, 0)$ ، عدد مختلطی مانند (c, d) هست که

$$(a, b)(c, d) = (1, 0).$$

درواقع این معادله با دومعادله

$$ac - bd = 1, ad + bc = 0$$

معادل است که دارای جواب منحصر بفرد

$$(1.9) \quad c = \frac{a}{a^2 + b^2}, d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

می‌باشند. شرط $(a, b) \neq (0, 0)$ تضمین می‌کند که $a^2 + b^2 \neq 0$ ، پس متقابل قابل تعریف خواهد بود. برای متقابل (a, b) می‌نویسیم $(a, b)^{-1}$ یا $1/(a, b)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$(2.9) \quad \frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right), (a, b) \neq (0, 0)$$

بحث بالا نشان می‌دهد که مجموعه همه اعداد مختلط در شش اصل موضوع میدان برای دستگاه اعداد حقیقی صدق می‌کند. لذا کلیه قوانین جبریی که از اصول موضوع میدان بدست آیند درمورد اعداد مختلط نیز برقرار خواهند بود. خصوصاً قضایای م. ۱ تا م. ۱۵. بخش م ۲.۳ برای اعداد مختلط بخوبی اعداد حقیقی معتبرند. قضیه م. ۸ به ما می‌گوید که خارج‌قسمتهای اعداد مختلط وجود دارند. یعنی هرگاه (a, b) و (c, d) دو عدد مختلط بوده و $(a, b) \neq (0, 0)$ آنگاه دقیقاً یک عدد مختلط (x, y) هست که $(a, b)(x, y) = (c, d)$. درواقع داریم $(x, y) = (c, d)(a, b)^{-1}$.

۳.۹ اعداد مختلط بعنوان تعمیمی از اعداد حقیقی

فرض کنیم C مجموعه تمام اعداد مختلط باشد. زیرمجموعه C_0 از C مرکب از کلیه اعداد مختلط بشکل $(a, 0)$ را در نظر می‌گیریم، یعنی C_0 عبارت است از همه اعداد مختلطی که قسمت موهومی آنها صفر است. مجموع یا حاصلضرب دو عضو C_0 دوباره در C_0 است. درواقع داریم

$$(3.9) \quad (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{و} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

این نشان می‌دهد که دو عضو در C_0 را می‌توان فقط با جمع یا ضرب قسمت‌های حقیقی آنها بهم افزود و یا درهم ضرب کرد. یا، بعبارت دیگر، اعداد موجود در C_0 حین جمع و ضرب درست مثل اعداد حقیقی عمل می‌کنند. همین وضع در مورد تفریق و تقسیم صادق است زیرا $(-a, 0) = -(a, 0)$ و، اگر $b \neq 0$ ، $(b, 0)^{-1} = (b^{-1}, 0)$. باین دلیل است که ما معمولاً بین عدد حقیقی x و عدد مختلط $(x, 0)$ که قسمت حقیقی آن x است فرقی قائل نمی‌شویم؛ قبول می‌کنیم که x و $(x, 0)$ با هم یکی باشند و می‌نویسیم $x = (x, 0)$. بخصوص می‌نویسیم $0 = (0, 0)$ ، $1 = (1, 0)$ ، $-1 = (-1, 0)$ ، و مانند اینها. بنابراین می‌توانیم دستگاه اعداد مختلط را بعنوان توسعه‌ای از دستگاه اعداد حقیقی تصور نماییم.

رابطه بین C_0 و دستگاه اعداد حقیقی را می‌توان با روش اندک متفاوتی توصیف کرد. فرض کنیم R مجموعه همه اعداد حقیقی بوده و f تابعی باشد که هر عدد حقیقی x را بروی عدد مختلط $(x, 0)$ بنگارد. یعنی، اگر $x \in R$ ، داشته باشیم

$$f(x) = (x, 0).$$

تابع f که باین صورت تعریف شود قلمرو R و برد C_0 داشته و عناصر متمایز R را بروی عنصرهای متمایز C_0 می‌نگارد. بدلیل این خواص است که می‌گویند f یک تناظر یک به یک بین R و C_0 ایجاد می‌کند. اعمال جمع و ضرب تحت این تناظر حفظ می‌شوند. یعنی داریم

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{و} \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$$

این معادلات صرفاً بیان مجدد روابط (۳.۹) است. چون R در شش اصل موضوع میدان صدق می‌کند C_0 نیز چنین خواهد کرد. دو میدان R و C_0 را یکریخت می‌نامند؛ تابع f که آنها را مطابق فوق بهم ربط می‌دهد یک یکریختی نام دارد. ما، تا آنجا که به اعمال جبری جمع و ضرب مربوط می‌شود، بین میدانهای یکریخت فرقی قائل نخواهیم شد. باین دلیل است که عدد حقیقی x را با عدد مختلط $(x, 0)$ یکی می‌دانیم. دستگاه اعداد مختلط C را یک توسعه دستگاه اعداد حقیقی R می‌نامند زیرا C حاوی زیرمجموعه C_0 است که با R یکریخت می‌باشد.

میدان C_0 را نیز می‌توان طوری مرتب کرد که سه اصل موضوع ترتیب بخش ۴.۳ برای آن برقرار شوند. درواقع کافی است $(x, 0)$ را مثبت بگیریم اگر و فقط اگر $x > 0$.

واضح است که اصول موضوع ۷، ۸، و ۹ برقرارند، پس C یک میدان مرتب خواهد بود. یکریختی f که در بالا وصف شد ترتیب را نیز حفظ می‌کند زیرا عنصرهای مثبت R را بروی عنصرهای مثبت C خواهد نگاشت.

۴.۹ یکۀ موهومی i

اعداد مختلط از خواص جبریی برخوردارند که اعداد حقیقی از آنها بی بهره می‌باشند. مثلاً اینک معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 + 1 = 0$ ، که در میان اعداد حقیقی بی جواب است، را می‌توان با استفاده از اعداد مختلط حل کرد. درواقع عدد مختلط $(0, 1)$ یک جواب است زیرا داریم $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$. عدد مختلط $(0, 1)$ را با i نشان داده و آن را یکۀ موهومی می‌نامند. این عنصر دارای این خاصیت است که مربعش -1 است، یعنی $i^2 = -1$. خواننده می‌تواند با آسانی تحقیق کند که $(-i)^2 = -1$ ، در نتیجه $i = -x$ جواب دیگر معادلهٔ $x^2 + 1 = 0$ خواهد بود.

حال می‌توان ایدهٔ جفت مرتب را به نمادی که ریاضیدانان قدیم بکار می‌بردند ربط داد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تعریف ضرب اعداد مختلط به ما $(b, 0)(0, 1) = (0, b)$ را می‌دهد، و در نتیجه داریم

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

بنابراین، اگر بنویسیم $a = (a, 0)$ ، $b = (b, 0)$ ، و $i = (0, 1)$ ، خواهیم داشت $(a, b) = a + bi$. بعبارت دیگر، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۲.۹. هر عدد مختلط (a, b) را می‌توان بشکل $(a, b) = a + bi$ نوشت.

مزیت این نماد در این است که می‌تواند در عملیات جبری دستورهای که مستلزم جمع و ضرب هستند یارما باشد. مثلاً اگر $a + bi$ را در $c + di$ ضرب کنیم، از قوانین پخشپذیری و شرکتپذیری استفاده کنیم، و i^2 را با -1 عوض نماییم، خواهیم داشت

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

که البته با تعریف ضرب مطابقت دارد. بهمین نحو، برای محاسبهٔ متقابل یک عدد مختلط ناصفر مانند $a + bi$ می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

این نیز با دستور داده شده (۲.۹) مطابقت خواهد داشت. با معرفی اعداد مختلط قدرتی خیلی بیشتر از آنچه برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم ساده

$x^2 + 1 = 0$ لازم است بدست آورده ایم. مثلاً معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را، که در آن a و b و c حقیقی بوده $a \neq 0$ ، در نظر می گیریم. این معادله را می توان با مجذور کامل کردن بصورت

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

نوشت. اگر $4ac - b^2 \leq 0$ معادله دارای ریشه های حقیقی $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ است. چنانچه $4ac - b^2 > 0$ طرف چپ برای هر x حقیقی مثبت بوده و معادله ریشه حقیقی نخواهد داشت. اما در این حالت دو ریشه مختلط وجود دارند که با دستورهای

$$(4.9) \quad r_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ و } r_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

داده می شوند.

در سال ۱۷۹۹ گاوس ثابت کرد که اگر $n \geq 1$ هر معادله چندجمله ای بشکل

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0,$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی دلخواهی بوده و $a_n \neq 0$ ، در میان اعداد مختلط جواب دارد. بعلاوه، حتی اگر ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_n$ مختلط هم باشند یک جواب در دستگاه اعداد مختلط وجود خواهد داشت. این مطلب به قضیه اساسی جبر معروف است. این قضیه نشان می دهد که برای حل معادلات چندجمله ای با ضرایب مختلط لزومی به ساختن اعدادی کلیتر از اعداد مختلط نیست.

۵.۹ تعبیر هندسی. کالبد و شناسه

چون عدد مختلط (x, y) جفت مرتبی از اعداد حقیقی است می توان آن را از نظر هندسی، مطابق شکل ۱.۹، با یک نقطه در صفحه یا با یک سهم و یا یک بردار هندسی از مبدأ تا نقطه (x, y) نمایش داد. در رابطه با این وضع صفحه xy را اغلب صفحه مختلط می نامند. محور x را محور حقیقی و محور y را محور موهومی می خوانند. معمولاً کلمات عدد مختلط و نقطه مترادفاً بکار برده می شوند. لذا بجای آنکه بگوئیم نقطه متناظر عدد مختلط z می گوئیم نقطه z .

اعمال جمع و تفریق اعداد مختلط از تعبیر هندسی ساده ای برخوردارند. هرگاه دو عدد مختلط z_1 و z_2 با سهمانی که مبدأ را بترتیب به z_1 و z_2 وصل می کنند نشان داده شوند آنگاه

۱. برهان قضیه اساسی جبر را می توان تقریباً در هر کتاب نظریه توابع یک متغیر مختلط یافت. بعنوان مثال، ر.ک. یکی از این دو کتاب،

K. Knopp, *Theory of Functions*, Dover Publications, New York, 1945;

E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. I, Blaisdell Publishing Co., 1959.

برهان مقدماتی تر در کتاب زیر آمده است:

O. Schreier and E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

مجموع $z_1 + z_2$ توسط قانون متوازی الاضلاع معین خواهد شد. سهم واصل از مبدأ به $z_1 + z_2$ قطر متوازی الاضلاعی است که بوسیله z_1 ، z_2 و مطابق شکل ۲.۹، مشخص می شود. قطر دیگر مربوط به تفاضل z_1 و z_2 خواهد بود. سهم واصل از z_1 به z_2 با سهم واصل از 0 به $z_2 - z_1$ موازی و هم طول است؛ سهم با جهت مخالف، یعنی از z_2 به z_1 همین رابطه را با $z_1 - z_2$ دارد.

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ می توانیم x و y را با مختصات قطبی بیان کنیم:

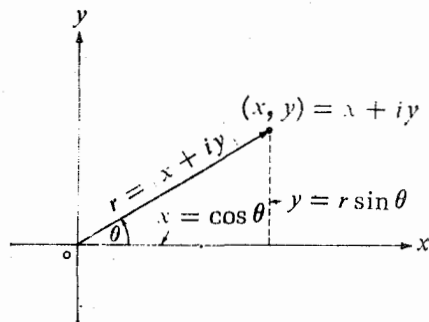
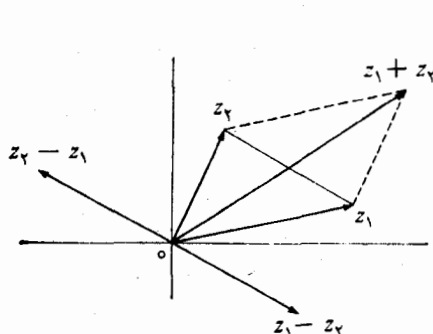
$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

و بدست آوریم که

$$(5.9) \quad x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

عدد مثبت r ، که نمایشگر فاصله (x, y) از مبدأ است، کالبد یا قسده مطلق $x + iy$ نام دارد و با $|x + iy|$ نشان داده می شود. لذا خواهیم داشت

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



شکل ۲.۹ نمایش هندسی جمع و تفریق اعداد مختلط بوسیله قانون متوازی الاضلاع.

شکل ۱.۹ نمایش هندسی عدد مختلط $x + iy$.

زاویه قطبی θ را یک شناسه $x + iy$ می نامند. بجای شناسه می گوئیم یک شناسه زیرا اگر نقطه (x, y) مفروض باشد زاویه θ فقط با تقریب مضارب از 2π معین است. گاهی می خواهیم به یک عدد مختلط شناسه منحصر بفردی نسبت دهیم. این را ممکن است با محدود کردن θ به یک بازه نیم باز بطول 2π انجام داد. معمولاً برای این کار از بازه های $[0, 2\pi)$ و $(-\pi, \pi]$ استفاده می شود. ما بازه $[-\pi, \pi]$ را بکار برده و θ متناظر را شناسه عمده $x + iy$ می نامیم؛ این θ را با $\arg(x + iy)$ نشان خواهیم داد. لذا اگر $x + iy \neq 0$ و $r = |x + iy|$ و $\arg(x + iy)$ را آن θ حقیقی منحصر بفردی تعریف می کنیم که در این شرائط صدق کند:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, -\pi < \theta \leq \pi.$$

ما به عدد مختلط صفر کالبد 0 نسبت می دهیم و قبول می کنیم که از هر عدد حقیقی θ می توان بعنوان

شناسه آن استفاده کرد.

چون قدرمطلق عدد مختلط z صرفاً طول یک پاره خط است جای تعجب نیست که می بینیم این مفهوم از خواص معمولی قدرمطلقهای اعداد حقیقی برخوردار است. برای مثال چنین داریم:

$$\text{اگر } z \neq 0, |z| > 0; |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

از نظر هندسی، قدرمطلق $|z_1 - z_2|$ نمایش فاصله بین نقاط z_1 و z_2 در صفحه مختلط است. نامساوی مثلثی

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

نیز اعتبار دارد. علاوه بر این، دستورهای زیر را در مورد قدرمطلق حاصلضربها و خارج قسمتهای اعداد مختلط خواهیم داشت:

$$(۶.۹) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

و

$$\text{اگر } z_2 \neq 0, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

چنانچه بنویسیم $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ رابطه (۶.۹) فوراً از اتحاد

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

بدست می آید. اگر z_1 را بصورت حاصلضرب

$$z_1 = z_2 \frac{z_1}{z_2}$$

بنویسیم دستور مربوط به $|z_1/z_2|$ از (۶.۹) نتیجه خواهد شد.

اگر $z = x + iy$ مزدوج مختلط z عدد مختلط $\bar{z} = x - iy$ می باشد. از نظر هندسی، $\bar{z}$ نمایش منعکس z نسبت به محور حقیقی است. از تعریف مزدوج نتیجه می شود که

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2, z\bar{z} = |z|^2.$$

تصدیق این خواص بعنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

اگر یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی دارای هیچ ریشه حقیقی نباشد ریشههای مختلط آن، که با (۴.۹) داده می شوند، مزدوج یکدیگرند. بعکس، هرگاه r_1 و r_2 مزدوجهای مختلطی باشند، مثلاً $r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \alpha - i\beta$ که در آنها α و β حقیقی اند، آنگاه r_1 و r_2 ریشههای یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی خواهند بود. در واقع داریم

$$r_1 r_2 = \alpha^2 + \beta^2 \text{ و } r_1 + r_2 = 2\alpha$$

پس

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2,$$

و معادله درجه دوم مورد نظر

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

خواهد بود.

۶.۹ تمرینات

۱. اعداد مختلط زیر را بشکل $a + bi$ درآورید.

$$(الف) (1 + i)^2 \quad (ب) \frac{1}{i}$$

$$(پ) \frac{1}{(1 + i)} \quad (ت) (2 + 3i)(3 - 4i)$$

$$(ث) \frac{(1 + i)}{(1 - 2i)} \quad (ج) i^5 + i^{16}$$

$$(چ) 1 + i + i^2 + i^3 \quad (ح) \frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^{-8})$$

۲. قدرمطلقهای اعداد مختلط زیر را حساب کنید.

$$(الف) 1 + i \quad (ب) 3 + 4i$$

$$(پ) \frac{(1 + i)}{(1 - i)} \quad (ت) 1 + i + i^2$$

$$(ث) i^7 + i^{10} \quad (ج) 2(1 - i) + 3(2 + i)$$

۳. کالبد و شناسه عمده هر یک از اعداد مختلط زیر را محاسبه نمایید.

$$(الف) 2i \quad (ب) -3i$$

$$(پ) -1 \quad (ت) 1$$

$$(ث) -3 + \sqrt{3}i \quad (ج) \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}}$$

$$(چ) (-1 + i)^3 \quad (ح) (-1 - i)^2$$

$$(خ) \frac{1}{(1 + i)^2} \quad (د) \frac{1}{(1 + i)^2}$$

۴. در هر یک از حالات زیر کلیه اعداد حقیقی x و y را معین کنید که در رابطه داده شده صدق می‌کنند.

$$(الف) x + iy = x - iy \quad (ب) x + iy = |x + iy|$$

$$(پ) |x + iy| = |x - iy| \quad (ت) (x + iy)^2 = (x - iy)^2$$

$$(ث) \frac{x + iy}{x - iy} = x - iy \quad (ج) \sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$$

۵. شکلی بکشید که مبین مجموعه کلیه z هایی در صفحه مختلط باشد که در یکی از شرائط زیر صدق می‌کنند.

$$(الف) |z| < 1 \quad (ب) z + \bar{z} = 1$$

$$(پ) z - \bar{z} = i \quad (ت) |z - 1| = |z + 1|$$

$$(ث) |z - i| = |z + i| \quad (ج) z + \bar{z} = |z|^2$$

۶. فرض کنید f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد.

$$(الف) \text{ نشان دهید که بازای هر } z \text{ مختلط } f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که صفرهای غیر حقیقی f (در صورت وجود) باید بصورت جفت‌هایی از اعداد مختلط مزدوج باشند.

۷. ثابت کنید که در دستگاه اعداد مختلط نمی‌توان یک رابطه ترتیبی تعریف کرد که هر سه اصل موضوع ترتیب مذکور در بخش م ۴.۳ برقرار شوند.

[دانهائی: فرض کنید امکان معرفی چنین ترتیبی باشد و سعی کنید مثبت یا منفی بودن یک موهومی i را مشخص نمایید.]

۸. «ترتیب‌مای» زیر را در اعداد مختلط تعریف می‌کنیم: اگر $z = x + iy$ می‌گوئیم z مثبت است اگر و فقط اگر $x > 0$. با این تعریف مثبت بودن، از اصول موضوع ترتیب در بخش م ۴.۳ کدامها برقرارند؟

۹. تمرین ۸ را در صورتی حل کنید که ترتیب‌مای این طور تعریف شده باشد: می‌گوئیم z مثبت است اگر و فقط اگر $|z| > 0$.

۱۰. تمرین ۸ را در صورتی حل کنید که ترتیب‌مای این طور تعریف شده باشد: اگر $z = x + iy$ می‌گوئیم z مثبت است اگر و فقط اگر $x > y$.

۱۱. شکلی بکشید که مبین مجموعه کلیه z های مختلطی باشد که در هر یک از شرائط زیر صدق می‌کنند.

$$(الف) |2z + 3| < 1 \quad (ب) |z + 1| < |z - 1|$$

$$(پ) |z - i| \leq |z + i| \quad (ت) |z| \leq |2z + 1|$$

۱۲. فرض کنید $w = (az + b)/(cz + d)$ که در آن a, b, c, d حقیقی اند. ثابت کنید که

$$w - \bar{w} = (ad - bc)(z - \bar{z})/(cz + d)^2$$

اگر $ad - bc > 0$ ثابت کنید که قسمتهای موهومی z و w هم‌علامت می‌باشند.

۷.۹ تابعهای نمائی مختلط

حال می‌خواهیم تعریف e^z را چنان تعمیم دهیم که وقتی x با هر عدد مختلط z عوض می‌شود e^z دارای معنی باشد. ما یلیم این تعمیم بنحوی صورت‌گیر که قانون نماها، یعنی $e^a e^b = e^{a+b}$

برای کلیه اعداد مختلط a و b معتبر باشد. و البته خواست ما این است که e^z ، وقتی z حقیقی است، با تابع نمائی معمولی مطابقت داشته باشد. برای انجام این تعمیم چند طریقه وجود دارند که همه با هم معادلند. قبل از اینکه تعریف خود برای e^z را بیان کنیم بحث کشفی را پیش می‌کشیم که می‌تواند بعنوان انگیزه این تعریف بشمار آید.

هرگاه بنویسیم $z = x + iy$ آنگاه اگر قانون نماها بخواد برای اعداد مختلط معتبر باشد باید داشته باشیم

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

چون e^x قبلا برای x های حقیقی تعریف شده است پس کار ما این خواهد بود که یک تعریف معقولی برای e^{iy} ، وقتی y حقیقی است، بدست آوریم. گوئیم اگر e^{iy} بخواد یک عدد مختلط باشد می‌توانیم بنویسیم

$$(۷.۹) \quad e^{iy} = A(y) + iB(y)$$

که در آن A و B توابعی حقیقی اند که بایستی تعیین شوند. با فرض مشتقپذیر بودن A و B از دوطرف معادله (۷.۹)، ضمن اینکه i را مثل عددی حقیقی گرفته ایم، مشتق می‌گیریم. در اینصورت خواهیم داشت

$$(۸.۹) \quad ie^{iy} = A'(y) + iB'(y).$$

اگر یکبار دیگر مشتق بگیریم درمی یابیم که

$$-e^{iy} = A''(y) + iB''(y).$$

از مقایسه این معادله با (۷.۹) معلوم می‌شود که A و B باید در معادلات

$$B''(y) = -B(y) \text{ و } A''(y) = -A(y)$$

صدق کنند. بعبارت دیگر، هر یک از توابع A و B یک جواب معادله دیفرانسیل $f'' + f = 0$ است. از فصل ۸ می‌دانیم که این معادله فقط یک جواب با مقادیر اولیه مشخصی برای $f(0)$ و $f'(0)$ دارد. اگر در (۷.۹) و (۸.۹) قرار دهیم $y = 0$ و از این مطلب که $e^0 = 1$ استفاده کنیم درخواهیم یافت که A و B دارای مقادیر اولیه زیرمی‌باشند:

$$A(0) = 1, A'(0) = 0 \text{ و } B(0) = 0, B'(0) = 1$$

بنا بر قضیه یکتائی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت باید داشته باشیم

$$A(y) = \cos y \text{ و } B(y) = \sin y$$

بعبارت دیگر، هرگاه $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ بخواد یک عدد مختلط با خواصی باشد که هم اکنون توصیف شد آنگاه باید داشته باشیم $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. این بحث انگیزه تعریف زیر خواهد بود.

تعریف. اگر $z = x + iy$ عدد مختلط e^z را با معادله

$$(۹.۹) \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

تعریف می‌کنیم.

توجه داشته باشید که وقتی $y = 0$ ، $e^* = e^*$ ؛ پس، وقتی z حقیقی است، این تابع نمائی با تابع نمائی معمولی مطابقت دارد. حال این تعریف را بکار برده و قانون نماها را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۳.۹. اگر a و b اعداد مختلطی باشند داریم

$$e^a e^b = e^{a+b}. \quad (10.9)$$

برهان. با نوشتن $a = x + iy$ و $b = u + iv$ خواهیم داشت

$$e^a = e^x (\cos y + i \sin y), \quad e^b = e^u (\cos v + i \sin v),$$

پس

$$e^a e^b = e^x e^u [\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\cos y \sin v + \sin y \cos v)].$$

حال از دستورهای جمع برای $\cos(y+v)$ و $\sin(y+v)$ و قانون نماها برای تابعهای نمائی حقیقی استفاده کرده و می‌بینیم که معادله پیشگفته بصورت

$$e^a e^b = e^{x+u} [\cos(y+v) + i \sin(y+v)] \quad (11.9)$$

درمی‌آید. چون $a+b = (x+u) + i(y+v)$ پس طرف راست (۱۱.۹) مساوی e^{a+b} می‌باشد. این رابطه (۱۰.۹) را ثابت خواهد کرد.

قضیه ۴.۹. هر عدد مختلط $z \neq 0$ را می‌توان بشکل

$$z = r e^{i\theta} \quad (12.9)$$

دراورد که $r = |z|$ و $\theta = \arg(z) + 2n\pi$ که در آن n هر عدد صحیح می‌باشد. این نمایش را شکل قطبی z می‌خوانند.

برهان. اگر $z = x + iy$ از نمایش درمختصات قطبی (۵.۹) خواهیم داشت

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

که $r = |z|$ و $\theta = \arg(z) + 2n\pi$ که در آن n هر عدد صحیح می‌باشد. اما اگر در رابطه (۹.۹) $x = 0$ و $y = \theta$ را قرار دهیم دستور

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

را خواهیم داشت که (۱۲.۹) را ثابت می‌کند.

نمایش اعداد مختلط بشکل قطبی (۱۲.۹) خصوصاً در رابطه با ضرب و تقسیم اعداد مختلط مفید است. بعنوان مثال، اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ و $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$ خواهیم داشت

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\varphi)}. \quad (13.9)$$

بنابراین، حاصلضرب کالبداء، یعنی $r_1 r_2$ ، مساوی کالبد حاصلضرب $z_1 z_2$ است که با معادله (۶.۹) مطابقت دارد، و مجموع شناسه‌ها، یعنی $\theta + \varphi$ ، یک شناسه قابل قبول برای حاصلضرب $z_1 z_2$ خواهد بود.

وقتی $z = r e^{i\theta}$ چند بار استفاده از (۱۳.۹) دستور

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

را به ما می‌دهد که بازای هر عدد صحیح و نامنفی n معتبر است. اگر z^{-m} را، وقتی m یک عدد صحیح مثبت است، مساوی $(z^{-1})^m$ تعریف کنیم دستور فوق برای اعداد صحیح و منفی n نیز اعتبار خواهد داشت.

بهین نحو داریم

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\varphi}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta - \varphi)},$$

پس کالبد z_1/z_2 برابر r_1/r_2 و تفاضل $\theta - \varphi$ یک شناسه قابل قبول برای z_1/z_2 خواهد بود.

۸.۹ توابع مختلط

تابع f را که مقادیرش اعداد مختلطی باشند یک تابع مختلط می‌گویند. اگر قلمرو f مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد f را یک تابع مختلط از یک متغیر حقیقی می‌خوانند. چنانچه قلمرو آن مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد f یک تابع مختلط از یک متغیر مختلط نام دارد یا، بطور ساده‌تر، آن را تابع یک متغیر مختلط می‌خوانند. یک مثال تابع نمائی است که بازای هر z مختلط با معادله

$$f(z) = e^z$$

تعریف می‌شود. بیشتر توابع مقدماتی آشنا در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مانند تابع نمائی، تابع لگاریتم، و توابع مثلثاتی، را می‌توان به توابعی از یک متغیر مختلط تعمیم داد. (ر.ک. تمرینات ۹ و ۱۰ در بخش ۱۰.۹). در این چهارچوب کلیتر است که غالباً بسیاری از خواص و روابط متقابل جدید آشکار می‌شوند. بعنوان مثال، تابع نمائی مختلط متناوب است. در واقع اگر $z = x + iy$ و n یک عدد صحیح باشد داریم

$$e^{z+2n\pi i} = e^x [\cos(y + 2n\pi) + i \sin(y + 2n\pi)]$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

بنابراین می‌بینیم که $f(z + 2n\pi i) = f(z)$ ، در نتیجه f دارای دوره تناوب $2\pi i$ خواهد بود. این خاصیت تابع نمائی فقط وقتی پدیدار می‌شود که تابع نمائی را بعنوان تابعی از یک متغیر مختلط مورد مطالعه قرار دهیم.

اولین بحث اصولی حساب دیفرانسیل و انتگرال از توابع یک متغیر مختلط توسط

کشی در اوایل قرن ۱۹م انجام گرفت. از آن به بعد این نظریه رفته رفته توسعه یافته و اینک بصورت یکی از مهمترین و جالبترین شاخه‌های ریاضی درآمده است. نظریهٔ مزبور بشکل ابزاری لازم در دست فیزیکدانان و مهندسين است و تقریباً با هر شاخه از ریاضیات محض در ارتباط می‌باشد. این نظریه در اینجا مطرح نمی‌شود. ما فقط مبادی حساب توابع مختلط از یک متغیر حقیقی را مورد بحث قرار خواهیم داد.

فرض می‌کنیم f یک تابع مختلط باشد که بر بازهٔ I از اعداد حقیقی تعریف شده است. مقدار تابعی $f(x)$ ، بازای هر x در I ، یک عدد مختلط است، پس می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

که در آن $u(x)$ و $v(x)$ حقیقی می‌باشند. این معادله دو تابع حقیقی u و v را معین می‌کند که بترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی f نام دارند. معادله را بصورت مختصرتر $f = u + iv$ می‌نویسیم. همانطور که تعریف زیر توصیف کرده، می‌توان مفاهیمی نظیر پیوستگی، مشتقگیری، و انتگرالگیری f را بر حسب مفاهیم متناظرشان برای u و v تعریف کرد.

تعریف. اگر $f = u + iv$ می‌گوئیم f در یک نقطه پیوسته است اگر که هر دو u و v در آن نقطه پیوسته باشند. مشتق f ، در صورت وجود هر دو مشتق $u'(x)$ و $v'(x)$ ، با معادله

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

تعریف می‌شود. بهمین نحو، انتگرال f را با معادله

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

تعریف می‌کنیم و این در زمانی است که هر دو انتگرال سمت وجود داشته باشند.

در پر تو این تعریف نباید ازدیدن اینکه بسیاری از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع مختلط نیز معتبرند تعجب کنیم. مثلاً قواعد مشتقگیری از مجموعه‌ها، حاصلضربها، و خارج قسمتها (قضیه ۱۰۴) در مورد توابع مختلط اعتبار دارند. اولین و دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قضایای ۱۰۵ و ۳۰۵) و همچنین قضیهٔ مشتق صفر (قضیه ۲۰۵) نیز برای توابع مختلط برقرارند. برای دیدن اینکه چگونه این قضایا با آسانی ثابت می‌شوند قضیهٔ مشتق صفر را در نظر می‌گیریم:

هرگاه بازای هر x در بازهٔ بازی چون I ، $f'(x) = 0$ آنگاه f بر I ثابت است.

بوهان. می‌نویسیم $f = u + iv$. چون $f' = u' + iv' = 0$ پس f' بر I باین معنی است که هر دو u' و v' بر I صفرند. از اینرو، بنا بر قضیه ۲۰۵، هر دو u و v بر I ثابت می‌باشند. بنا بر این، f بر I ثابت خواهد بود.

۹.۹ چند مثال از دستورهای مشتگیری و انتگرالگیری

در این بخش یک نمونه مهم از توابع مختلط از یک متغیر حقیقی را مورد بحث قرار می‌دهیم، یعنی تابعی مانند f که بازای هر x حقیقی با معادله

$$f(x) = e^{tx}$$

تعریف می‌شود که در آن t عدد مختلط ثابتی می‌باشد. وقتی t حقیقی باشد مشتق این تابع با دستور $f'(x) = te^{tx}$ داده می‌شود. حال ثابت می‌کنیم که این دستور برای t مختلط نیز اعتبار دارد.

قضیه ۵.۹. هر گاه بازای هر x حقیقی و یک t مختلط ثابت $f(x) = e^{tx}$ آنگاه $f'(x) = te^{tx}$.

برهان. می‌نویسیم $t = \alpha + i\beta$ که در آن α و β حقیقی‌اند. از تعریف تابع نمائی مختلط داریم

$$f(x) = e^{tx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

پس قسمتهای حقیقی و موهومی f چنین خواهند بود:

$$(۱۴.۹) \quad u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{و} \quad v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

این توابع بازای هر x مشتقپذیر هستند و مشتقاتشان با این دستورها داده می‌شوند:

$$u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$v'(x) = \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

چون $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + i\beta e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ &= (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x} = te^{tx}, \end{aligned}$$

و این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیه ۵.۹. نتایج جالبی را دربردارد. مثلاً اگر نماد لایب نیتز برای انتگرالهای نامعین را بپذیریم می‌توانیم قضیه ۵.۹ را، وقتی $t \neq 0$ ، بشکل

$$(۱۵.۹) \quad \int e^{tx} dx = \frac{e^{tx}}{t}$$

بیان نمائیم. چنانچه فرض کنیم $t = \alpha + i\beta$ و قسمتهای حقیقی و موهومی معادله (۱۵.۹) را متحد هم قرار دهیم دستورهای انتگرالگیری

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

را خواهیم داشت که زمانی اعتبار دارند که α و β با هم صفر نباشند.
 نتیجه دیگر قضیه ۵.۹ رابطه‌ای است که بین توابع نمایی مختلط و معادلات دیفرانسیل
 خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت وجود دارد.

قضیه ۶.۹. معادله دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (۱۶.۹)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن a و b ثابت‌هایی حقیقی می‌باشند. قسمت‌های حقیقی و موهومی
 تابع f که بر $(-\infty, +\infty)$ با معادله $f(x) = e^{tx}$ تعریف می‌شود جواب‌های معادله
 دیفرانسیل (۱۶.۹) اند اگر و فقط اگر t یک ریشه معادله مفسر

$$t^2 + at + b = 0$$

باشد.

برهان. قرار می‌دهیم $L(y) = y'' + ay' + by$. چون $f'(x) = te^{tx}$ همچنین
 داریم $f''(x) = t^2 e^{tx}$ ، پس $L(f) = e^{tx}(t^2 + at + b)$. اما e^{tx} هرگز صفر نمی‌شود
 زیرا $e^{tx} e^{-tx} = e^0 = 1$. بنابراین، $L(f) = 0$ اگر و فقط اگر $t^2 + at + b = 0$.
 اما اگر بنویسیم $f = u + iv$ در خواهیم یافت که $L(f) = L(u) + iL(v)$ ، و در نتیجه
 $L(f) = 0$ اگر و فقط اگر هم $L(u) = 0$ و هم $L(v) = 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

توجه: چنانچه $t = \alpha + i\beta$ قسمت‌های حقیقی و موهومی f از (۱۶.۹) بدست
 می‌آیند. اگر معادله مفسر دو ریشه متمایز، حقیقی یا مختلط، داشته باشد ترکیب خطی

$$y = c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خواهد بود. این با نتایجی که در قضیه ۷.۸ حاصل شدند
 مطابقت دارد.

مثالهای دیگری از توابع مختلط در مجموعه تمرینات آتی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

۱۰.۹ تمرینات

۱. هریک از اعداد مختلط زیر را بشکل $a + bi$ در آورید.

(الف) $e^{\pi i/2}$ (ب) $2e^{-\pi i/2}$

(پ) $3e^{\pi i}$ (ت) $-e^{-\pi i}$

(ث) $i + e^{2\pi i}$ (ج) $e^{\pi i/4}$

$$\frac{1 - e^{\pi i/2}}{1 + e^{\pi i/2}} \quad (\text{ح}) \quad e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4} \quad (\text{ج})$$

۲. در هر یک از حالات زیر کلیه x و y های حقیقی را بیابید که در رابطه داده شده صدق می کنند.

$$x + iy = ye^{ix} \quad (\text{ب}) \quad x + iy = xe^{iy} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1+i}{1-i} = xe^{iy} \quad (\text{ت}) \quad e^{x+iy} = -1 \quad (\text{پ})$$

۳. (الف) ثابت کنید که برای هر z مختلط $e^z \neq 0$.

(ب) کلیه z های مختلطی را بیابید که برای آنها $e^z = 1$.

۴. (الف) اگر θ حقیقی باشد نشان دهید که

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

(ب) دستورهای (الف) را بکار برده و این اتحادها را نتیجه بگیرید:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

۵. (الف) قضیه دموآورا را ثابت کنید:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

که برای هر θ حقیقی و هر عدد صحیح و مثبت n معتبر است.

(ب) در قسمت (الف) فرض کنید $n = 3$ و این اتحادهای مثلثاتی را نتیجه بگیرید:

$$\sin 3\theta = 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta, \quad \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta.$$

۶. ثابت کنید هر مجموع مثلثاتی بشکل

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

را می توان بصورت مجموعی از جملات نمائی مختلط بصورت

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

نوشت که در آن، برای $n, 1, 2, \dots$ ، $c_k = (a_k - ib_k)/2$. دستورهای نظیر برای c_{-k} را معین نمایید.

۷. (الف) چنانچه m و n اعداد صحیح باشند ثابت کنید

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases}$$

(ب) قسمت (الف) را بکار برده روابط تعامد برای سینوس و کسینوس را (که در آنها

m و n اعدادی صحیح بوده و $m^2 \neq n^2$ نتیجه بگیرید:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx &= \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = 0;\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi, n \neq 0 \text{ اگر}$$

۸. عدد مختلط $z \neq 0$ داده شده است. بنویسید $z = re^{i\theta}$ که در آن $\theta = \arg(z)$. فرض کنید $z_1 = Re^{i\alpha}$ که در آن $R = r^{1/n}$ و $\alpha = \theta/n$ و قرار دهید $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ که در اینجا n عدد صحیح مثبتی است.

(الف) نشان دهید که $z_1^n = z$ ، یعنی z_1 یک ریشه n م z است.

(ب) نشان دهید که z دقیقاً n ریشه n م متمایز

$$z_1, \varepsilon z_1, \varepsilon^2 z_1, \dots, \varepsilon^{n-1} z_1$$

را دارد و این ریشه‌ها بفواصل مساوی بردایره‌ای بشاع R قرار دارند.

(پ) سه ریشه سوم i را تعیین کنید.

(ت) چهار ریشه چهارم i را معین نمایید.

(ث) چهار ریشه چهارم $-i$ را مشخص گردانید.

۹. می‌توان تعریفهای توابع سینوس و کسینوس را در صفحه مختلط این طور تعمیم داد:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

وقتی z حقیقی است این دستورها با توابع سینوس و کسینوس معمولی مطابقت دارند.

(ر.ک. تمرین ۴.) از این دستورها استفاده کرده خواص سینوس و کسینوس مختلط

آمده در زیر را نتیجه بگیرید. در اینجا u, v ، و z نمایشگر اعداد مختلط هستند و

$$z = x + iy$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad (\text{الف})$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \quad (\text{ب})$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (\text{پ})$$

$$\sin(iy) = i \sinh y, \cos(iy) = \cosh y \quad (\text{ت})$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (\text{ث})$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (\text{ج})$$

۱۰. اگر z یک عدد مختلط ناصفر باشد $\text{Log } z$ ، یعنی لگاریتم مختلط z ، را با معادله

$$\text{Log } z = \log |z| + i \arg(z)$$

تعریف می‌کنیم. وقتی z حقیقی و مثبت باشد این دستور با لگاریتم معمولی مطابقت

می‌کند. از این دستور استفاده کرده خواص لگاریتمهای مختلط آمده در زیر را نتیجه بگیرد.

$$\text{الف) } \operatorname{Log}(i) = \pi i / 2, \operatorname{Log}(-1) = \pi i$$

ب) $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2n\pi i$ که در آن n یک عدد صحیح است.

پ) $\operatorname{Log}(z_1 / z_2) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 + 2n\pi i$ که در آن n یک عدد صحیح است.

$$\text{ت) } e^{\operatorname{Log} z} = z$$

۱۱. اگر w و z اعداد مختلطی باشند و $z \neq 0$ ، z^w را با معادله

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\operatorname{Log} z$ در ترمین ۱۰ تعریف شده است.

الف) $i^i, 1^i, (-1)^i$ را حساب کنید.

ب) ثابت کنید اگر a و b مختلط باشند و $z \neq 0$ ، $z^a z^b = z^{a+b}$.

پ) توجه کنید که معادله

$$(17.9) \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w$$

در حالت $z_1 = z_2 = -1$ و $w = i$ برقرار نیست. چه شرائطی باید برای z_1 و z_2 قائل شد تا معادله (۱۷.۹) برای کلیه w های مختلط برقرار شود؟

در تمرینات ۱۲ تا ۱۵ عملگر خطی L با رابطه $L(y) = y'' + ay' + by$ تعریف شده است که در آن a و b ثابتهای حقیقی می‌باشند.

۱۲. ثابت کنید هرگاه R یک تابع مختلط باشد، مثلاً $R(x) = P(x) + iQ(x)$ ، آنگاه تابع مختلط $f(x) = u(x) + iv(x)$ در معادله دیفرانسیل $L(y) = R(x)$ بر بازه I صدق می‌کند اگر و فقط اگر u و v بر I در معادلات $L(u) = P(x)$ و $L(v) = Q(x)$ صدق نمایند.

۱۳. اگر A مختلط بوده و ω حقیقی باشد ثابت کنید معادله دیفرانسیل $L(y) = Ae^{i\omega x}$ جواب مختلطی به شکل $y = Be^{i\omega x}$ دارد بشرط آنکه $\omega^2 \neq b$ یا $a\omega \neq 0$. عدد مختلط B را بر حسب a, b, A ، و ω بیان نمایید.

۱۴. فرض کنید c حقیقی بوده و $\omega^2 \neq b$. با استفاده از تمرین ۱۳ ثابت کنید که معادله دیفرانسیل $L(y) = c \cos \omega x$ جوابی خصوصی به شکل $y = A \cos(\omega x - \alpha)$ خواهد داشت که در آن

$$\tan \alpha = \frac{a\omega}{b - \omega^2} \text{ و } A = \frac{c}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}}$$

۱۵. فرض کنید c حقیقی بوده و $\omega^2 \neq b$. ثابت کنید که معادله دیفرانسیل $L(y) = c \sin \omega x$ جوابی خصوصی به شکل $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ دارد و A و α را بر حسب a, b, c ، و ω بیان نمایید.

دنباله‌ها، سریهای نامتناهی، انتگرالهای مجازی

۱۰۱۰ پارادکس زنو^۱

موضوع اصلی این فصل تقریباً ۲۴۰۰ سال پیش شکل گرفت و آن زمانی بود که فیلسوف یونانی، زنو، اهل ایلیا^۲ (۴۳۵-۴۹۵ ق.م.)، با بیان چند پارادکس ماهرانه بحرانی در ریاضیات قدیم بوجود آورد. یکی از این پارادکسها را، که غالباً پارادکس مسابقه می‌خوانند، می‌توان باین صورت توصیف کرد:

یک دوندۀ هرگز نمی‌تواند به انتهای مسیر مسابقه برسد زیرا قبل از آنکه همه مسافت را بدود باید نصف آن را پیموده باشد. یعنی، وقتی نیمه اول را دوید، هنوز نیمه دوم را درپیش خواهد داشت. زمانی که نصف نیمه دوم را پیمود هنوز یکچهارم مسافت باقیمانده است. وقتی نصف این یکچهارم را طی کرد یکهشتم باقی مانده است، و بهمین ترتیب تا بی‌نهایت.

البته زنو به یک وضع ایده‌آل اشاره می‌کرد که دونده مثل یک جسم یا نقطه از یک سر پاره خط به سر دیگر آن درحال حرکت است. این پارادکس را می‌توانیم بطریق دیگری تنظیم کنیم. فرض می‌کنیم دونده از نقطه‌ای که در شکل ۱۰۱۰ با علامت ۱ مشخص شده بطرف هدف که نقطه ۰ است شروع به دویدن کند. مواضعی که با $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، و غیره مشخص شده‌اند کسری از مسیر مسابقه را نشان می‌دهند که پس از رسیدن به این نقاط باید پیموده شوند. این کسرها، که هریک نصف قبلی است، کل مسیر را به بی‌نهایت قسمت کوچکتر تقسیم می‌کنند. برای پیمودن هریک از قسمتها به زمان معینی نیاز است و زمان لازم برای پیمودن تمامی مسیر جمع کل این مقادیر خواهد بود. وقتی می‌گوئیم دونده هرگز به هدف نمی‌رسد باین معنی است که او طی زمانی محدود به آن نخواهد رسید؛ یا،

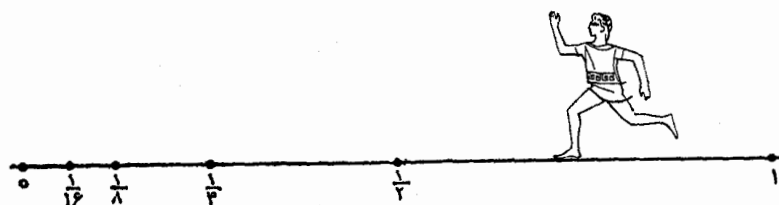
بعبارت دیگر، ممکن نیست که مجموع بی نهایت فاصله زمانی مثبت عددی متناهی باشد. این ادعا ۲۰۰۰ سال بعد از دوره زنو رد شد و آن زمانی بود که نظریه سریهای نامتناهی بوجود آمد. در قرن ۱۷ و ۱۸ ریاضیدانان رفته رفته دریافته اند که می توان مفهوم جمع معمولی را از دسته های متناهی اعداد به دسته های نامتناهی بقسمی تعمیم داد که گاهی اوقات تعدادی نامتناهی عدد مثبت «مجموعی» متناهی داشته باشند. برای آنکه ببینیم این تعمیم چگونه صورت می گیرد و از مشکلاتی که احتمالا بر سر این راه وجود دارند ایده های بدست آوریم پارادکس زنو را با تفصیل بیشتری تجزیه و تحلیل می کنیم.

فرض کنیم دوندۀ فوق الذکر با سرعتی ثابت می دود و برای پیمودن نیمی از مسیر به T دقیقه وقت احتیاج دارد. در یک چهارم بعدی به $T/2$ دقیقه، یک هشتم بعدی $T/4$ دقیقه و، بطور کلی، در بخش بین $1/2^n$ تا $1/2^{n+1}$ به $T/2^n$ دقیقه وقت نیاز خواهد داشت. می توان «مجموع» همه این فواصل زمانی را بطور علامتی با عبارت زیر نشان داد:

$$(1.10) \quad T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots$$

این یک نمونه از آن چیزی است که به سری نامتناهی معروف شده است، و مسئله در اینجا این است که آیا برای نسبت دادن عددی بنام مجموع به این سری راهی معقول وجود دارد یا خیر.

تجربه به ما این حکم را می کند که اگر دونده ای با سرعت ثابت بدود زمان رسیدن به هدف باید دو برابر زمانی باشد که به نقطه وسط می رسد. چون پیمودن نصف مسیر T دقیقه طول می کشد پس برای کل مسیر $2T$ دقیقه وقت لازم خواهد بود. این استدلال قویاً



شکل 1.10 پارادکس مسابقه.

این پیشنهاد را می کند که ما باید «مجموع» $2T$ را به سری (1.10) نسبت دهیم و این انتظار را در ما بوجود می آورد که باید معادله

$$(2.10) \quad T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots = 2T$$

بنوعی «درست» باشد.

نظریه سریهای نامتناهی راه دقیق تعبیر این معادله را به ما باز می گوید. طرز عمل باین ترتیب خواهد بود: ابتدا تعدادی متناهی جمله، مثلاً n تای اول، را بهم می افزاییم و

مجموع آنها را با s_n نشان می‌دهیم. پس خواهیم داشت

$$(۳.۱۵) \quad s_n = T + \frac{T}{۲} + \frac{T}{۴} + \dots + \frac{T}{۲^{n-1}}.$$

این را مجموع جزئی m سری می‌خوانند. حال، با اختیار n بزرگ و بزرگتر، به بررسی رفتار s_n می‌پردازیم. بخصوص سعی می‌کنیم مشخص کنیم که آیا، وقتی n بطور نامحدود افزایش می‌یابد، مجموعهای جزئی s_n به حدی متناهی نزدیک خواهند شد یا خیر.

در این مثال باسانی می‌بینیم که $۲T$ مقدار حدی مجموعهای جزئی است. درواقع اگر چندتا از این مجموعهای جزئی را حساب کنیم درخواهیم یافت که

$$s_1 = T, s_2 = T + \frac{T}{۲} = \frac{۳}{۲}T, s_3 = T + \frac{T}{۲} + \frac{T}{۴} = \frac{۷}{۴}T,$$

$$s_4 = T + \frac{T}{۲} + \frac{T}{۴} + \frac{T}{۸} = \frac{۱۵}{۸}T.$$

حال ملاحظه می‌کنیم که این نتایج را می‌توان باین صورت بیان کرد:

$$s_1 = (2 - 1)T, s_2 = \left(2 - \frac{1}{۲}\right)T, s_3 = \left(2 - \frac{1}{۴}\right)T, s_4 = \left(2 - \frac{1}{۸}\right)T.$$

این موجب می‌شود که دستور کلی زیر را حدس بزنیم:

$$(۴.۱۵) \quad s_n = \left(2 - \frac{1}{۲^{n-1}}\right)T, n, \text{ مثبت و صحیح}$$

صحت دستور (۴.۱۵) را می‌توان باسانی بااستقرا تحقیق کرد. چون وقتی n بطور نامحدود افزایش می‌یابد $۱/۲^{n-1} \rightarrow 0$ این نشان می‌دهد که $s_n \rightarrow ۲T$. بنا براین، معادله (۲.۱۵) زمانی که به این معنی که $۲T$ حد مجموعهای جزئی s_n است تعبیر شود «درست» خواهد بود. این فرایند حدی ظاهراً آن ادعا را که «مجموع بی‌نهایت فاصله زمانی هرگز نمی‌تواند متناهی باشد» بی‌اعتبار می‌سازد.

حال مطالبی را عنوان می‌کنیم که دیدگاه زانو را تا حدود زیادی تأیید می‌کنند. فرض کنید در تحلیل پیشین ما از پارادکس مسابقه یک تغییر کوچک ولی مهم داده باشیم. بجای این انگار که سرعت دونه ثابت است فرض می‌کنیم سرعتش بتدریج چنان کاهش یابد که برای رفتن از ۱ تا $۱/۲$ به T دقیقه، برای رفتن از $۱/۲$ به $۱/۴$ به $T/۲$ دقیقه، برای رفتن از $۱/۴$ به $۱/۸$ به $T/۳$ دقیقه، و، بطورکلی، برای رفتن از $۱/۲^{n-1}$ به $۱/۲^n$ به T/n دقیقه نیاز داشته باشد. حال می‌توان «زمان کل» برای پیمودن مسیر را با سری نامتناهی زیر نمایش داد:

$$(۵.۱۵) \quad T + \frac{T}{۲} + \frac{T}{۳} + \dots + \frac{T}{n} + \dots$$

دراین حالت تجربه فیزیکی ما یک «مجموع» طبیعی ویا واضحی را برای این سری پیشنهاد

نمی‌کند. و در نتیجه برای پرداختن به این مثال بایستی کاملاً به آنالیز ریاضی تکیه نمائیم. مانند قبل عمل کرده و مجموعه‌های جزئی s_n را معرفی می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم

$$(۶.۱۰) \quad s_n = T + \frac{T}{۲} + \frac{T}{۳} + \dots + \frac{T}{n}.$$

هدف ما این است که ببینیم s_n ، بازای مقادیر بزرگ n ، چه وضعی خواهد یافت. بررسی این مجموعه‌های جزئی به سبب سهولت مجموعه‌های (۳.۱۰) نیست زیرا برای ساده کردن عبارت سمت راست (۶.۱۰) دستور ساده‌ای شبیه (۴.۱۰) وجود ندارد. با اینحال اگر s_n را با یک انتگرال مناسب مقایسه کنیم بدست آوردن تخمینی برای اندازه آن آسان خواهد بود.

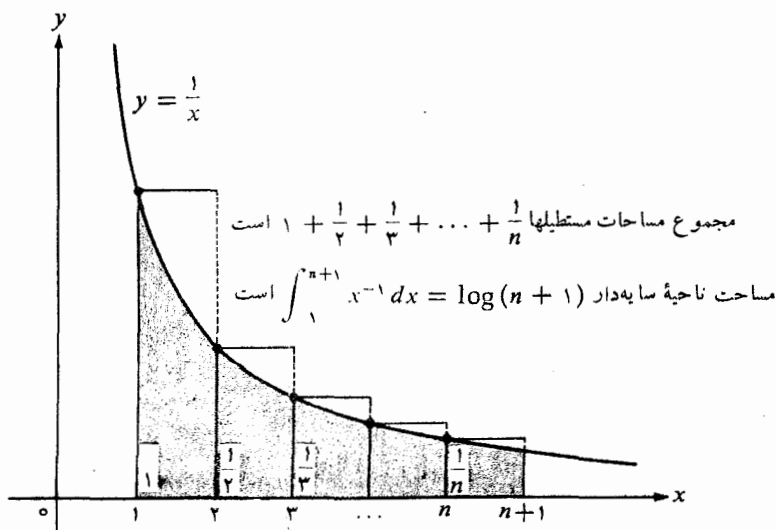
شکل ۲.۱۰ نمودار تابع $f(x) = 1/x$ ($x > 0$) را نشان می‌دهد. (مقیاس در امتداد محور y تغییر کرده است.) مساحت کل مستطیلهائی که در آنجا نموده شده مساوی مجموع

$$(۷.۱۰) \quad 1 + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \dots + \frac{1}{n}$$

است. مساحت ناحیه سایه‌دار برابر $\int_1^{n+1} x^{-1} dx = \log(n+1)$ می‌باشد. چون این مساحت نمی‌تواند از مجموع مساحت مستطیلهای تجاوز کند پس نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$(۸.۱۰) \quad 1 + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \dots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1).$$

با ضرب دو طرف آن در T بدست می‌آوریم که $s_n \geq T \log(n+1)$. عبارت دیگر، اگر سرعت دهنده بشکلی که در بالا توصیف شد کاهش یابد زمان لازم برای رسیدن به



شکل ۲.۱۰ معنی هندسی نامساوی $1 + 1/2 + \dots + 1/n \geq \log(n+1)$

نقطه $1/2^n$ حداقل $T \log(n+1)$ دقیقه خواهد بود. چون $\log(n+1)$ با زیاد شدن n ، بطور نامحدود افزایش می‌یابد پس باید با زانو همصدا شد و نتیجه گرفت که دونه‌د نمی‌تواند در مدت زمانی محدود به هدفش برسد.

نظریه عمومی سریهای نامتناهی میان سریهای مثل (۱.۱۰)، که مجموعه‌های جزئی آنها به یک حد متناهی میل می‌کنند، و سریهای شبیه (۵.۱۰)، که مجموعه‌های جزئی آنها حدی متناهی ندارند، فرق قائل است. سری اول همگرا و سری دوم داگرا نامیده می‌شود. محققین اولیه در این زمینه به مسائل همگرایی یا واگرایی کم توجه و یا اصلاً بی‌توجه بودند. آنها با سریهای نامتناهی طوری برخورد می‌کردند که گویی مجموعه‌های متناهی عادی هستند که پیرو قوانین معمولی جبر می‌باشند، و از این مطالب که این قوانین را نمی‌شود کلاً برای سریهای نامتناهی تعمیم داد غافل بودند. بنا براین وقتی بعداً بعضی از نتایج آنها نادرست از آب درآمدند اسباب تعجب کسی نشد. خوشبختانه بسیاری از پیشازان اولیه، با اینکه قادر به توجیه همه روشهای خود نبودند، معه‌ذا از قوه شهودی و مهارت نامتعارفی برخوردار بودند که مانع از اشتباهکاری زیاد آنها می‌شد. در میان این افراد جلوتر از همه لئونارد اویلر بود که دستورهای زیبایی را یکی پس از دیگری کشف کرد و در عین حال، با استفاده از سریهای نامتناهی بعنوان ایده متحدکننده، بسیاری از شاخه‌های ریاضی نامربوط تا آن زمان را بهم ربط داد. بخش عظیمی از کارهای اویلر که در آزمون تاریخ پذیرفته شده اند فراست قابل توجه او را در تشخیص اینکه چه چیزی از نظر ریاضی درست است نمایان می‌سازند. استفاده همه جانبه از سریهای نامتناهی در اواخر قرن ۱۷م، یعنی تقریباً پنجاه سال قبل از تولد اویلر، و همزمان با پیشرفتهای اولیه حساب انتگرال آغاز شد. در سال ۱۶۶۸ نیکلاس مرکاتورا (۱۶۸۷-۱۶۲۰) و ویلیام برونکر^۲ (۱۶۸۴-۱۶۲۰)، هنگام محاسبه مساحت یک قطعه‌هذلولی، به یک سری نامتناهی برای لگاریتم دست یافتند. چیزی نگذشت که نیوتن سری دوجمله‌ای را کشف کرد. بعداً معلوم شد که این کشف یک واقعه مهم در تاریخ ریاضیات بوده است. یک حالت خاص از سری دوجمله‌ای قضیه امروز آشنای دو-جمله‌ای است که طبق آن

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

که در آن x یک عدد حقیقی دلخواه، n یک عدد صحیح نامنفی، و $\binom{n}{k}$ ضریب دوجمله‌ای می‌باشد. نیوتن دریافت که این دستور را می‌توان از مقادیر صحیح برای نمای n به مقادیر حقیقی برای آن بوسیله تعویض مجموع متناهی سمت راست با یک سری نامتناهی مناسب تعمیم داد، ولی برای این مطلب برهانی عرضه نکرد. درواقع در هر بحث دقیق از سری دوجمله‌ای چند سؤال نسبتاً ظریف از همگرایی مطرح می‌شود که پاسخ گفتن بدانها در زمان نیوتن مقدور نبود.

پس از مرگ اویلر در ۱۷۸۳ دیری نپائید که سیل کشفیات جدید روبه نقصان‌گذارد

و دورهٔ صوری تاریخ سریها بسرآمد. دورهٔ جدید و بحرانی تر در ۱۸۱۲ آغاز شد و آن زمانی بود که گاوس مقالهٔ مشهوری را منتشر کرد که در آن، برای اولین بار در تاریخ، بحثی کامل و دقیق از همگرایی یک سری نامتناهی خاص گنجانده شده بود. چند سال بعد کوشی تعریف تحلیلی مفهوم حد را در رساله اش^۱ (که در ۱۸۲۱ منتشر شد) معرفی کرد و پایه های نظریهٔ جدید همگرایی و واگرایی را بنانهاد. اصول این نظریه در بخشهای آتی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲.۱۰ دنباله ها

کلمات «دنباله» و «سری» در زبان روزمره مترادفند^۲ و آنها را برای بیان توالی اشیاء و یا وقایعی بکار می برند که با ترتیبی آرایش یافته باشند. در ریاضیات این لغات معانی فنی خاصی دارند. لغت «دنباله» را متفقاً بعنوان اصطلاحی می گیرند که یک مجموعه از اشیائی را می رساند که با ترتیبی آراسته شده اند، لکن از لغت «سری» در معنی تا حدودی متفاوت استفاده می شود. مفهوم دنباله در این بخش مورد بحث قرار خواهد گرفت و سری در بخش ۵.۱۰ تعریف خواهد شد.

هرگاه به هر عدد صحیح و مثبت n یک عدد حقیقی یا مختلط a_n مربوط شود آنگاه می گویند مجموعه مرتب

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

یک دنباله نامتناهی را تعریف می کند. نکتهٔ مهم در اینجا این است که هر عضو این مجموعه با یک عدد صحیح بر حسب خورده است بطوری که می توانیم از جملهٔ اول a_1 ، جملهٔ دوم a_2 ، و بطور کلی، جملهٔ n ام a_n سخن بگوئیم. هر جملهٔ a_n دارای تالی a_{n+1} است و در نتیجه جملهٔ «آخر» وجود نخواهد داشت.

متداولترین دنباله ها را می شود با ارائهٔ قاعده یا دستوری برای توصیف جملهٔ n ام ساخت. از اینرو، مثلاً، دستور $a_n = 1/n$ معرف دنباله ای است که پنج جملهٔ اول آن چنین اند:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

گاهی اوقات ممکن است دو یا چند دستور بکار گرفته شوند، مثلاً

$$a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 2n^2.$$

در این حالت چند جملهٔ اول عبارت خواهند بود از

$$1, 2, 1, 8, 1, 18, 1, 32, 1, \dots$$

راه معمول دیگر برای تعریف یک دنباله ارائهٔ مجموعه ای است از دستورالعملها که نحوهٔ

آمدن جملات پس از یک مرحله شروع مشخص را توضیح می‌دهند. مثلاً ممکن است داشته باشیم

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2; a_1 = a_2 = 1$$

این قاعده خاص به دستور بازگشتی معروف شده است و معرف دنباله مشهوری است که جملات آن را اعداد فیبوناچی^۱ می‌نامند. چند جمله اول عبارتند از

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

در هر دنباله نکته مهم این است که تابعی مانند f وجود دارد که بر اعداد صحیح مثبت تعریف شده است بطوری که، بازای هر $n = 1, 2, 3, \dots$ جمله n دنباله می‌باشد. در واقع شاید این مناسبترین راه بیان تعریف دنباله باشد.

تعریف. تابع f را که قلمروش مجموعه همه اعداد صحیح مثبت $1, 2, 3, \dots$ باشد یک دنباله نامتناهی می‌خوانند، مقدار تابعی $f(n)$ جمله n دنباله نام خواهد داشت.

معمولاً برد تابع (یعنی مجموعه مقادیر تابع) را با ترتیب نوشتن جملات نشان می‌دهند، باین صورت:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

برای اختصار، نماد $\{f(n)\}$ را جهت نمایش دنباله‌ای بکار می‌برند که جمله n آن $f(n)$ است. اغلب بستگی به n را با استفاده از زیرنویسها نشان می‌دهیم و بجای $f(n)$ می‌نویسیم a_n, x_n, s_n, u_n ، یا چیزی شبیه به اینها. فرض آن است که کلیه دنباله‌ها در این فصل جملات حقیقی یا مختلط دارند مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

مسئله اصلی مورد نظر ما در اینجا این است که مشخص کنیم آیا، وقتی n بطور نامحدود افزایش می‌یابد، جملات $f(n)$ به یک حد متناهی میل خواهند کرد یا نه. برای بحث در این مسئله باید مفهوم جد را به دنباله‌ها تعمیم دهیم. این کار در تعریف زیر شده است.

تعریف. می‌گوئیم دنباله $\{f(n)\}$ دارای حد L است هرگاه بازای هر عدد مثبت ε عدد مثبت دیگری مثل N (که ممکن است تابع ε باشد) وجود داشته باشد بطوری که

$$|f(n) - L| < \varepsilon, n \geq N$$

در این حالت است که دنباله $\{f(n)\}$ را به L همگرا می‌خوانیم و چنین می‌نویسیم:

$$f(n) \rightarrow L \text{ یا } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L, n \rightarrow \infty$$

دنباله‌ای که همگرا نباشد واگرا نام خواهد داشت.

۱. Fibonacci، که به Leonardo of Pisa نیز معروف است (۱۲۵۰-حدود ۱۱۷۵)، در مسئله‌ای مربوط به زاد و ولد خرگوشها بود که به این دنباله برخورد کرد.

در این تعریف مقادیر تابعی $f(n)$ و حد L ممکن است اعدادی حقیقی یا مختلط باشند. چنانچه f و L مختلط باشند می توانیم آنها را به قسمتهای حقیقی و موهومیان تجزیه کنیم، یعنی بنویسیم $f = u + iv$ و $L = a + ib$. در اینصورت خواهیم داشت

$$f(n) - L = u(n) - a + i[v(n) - b].$$

نامساویهای

$$|v(n) - b| \leq |f(n) - L| \text{ و } |u(n) - a| \leq |f(n) - L|$$

نشان می دهند که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، رابطه $f(n) \rightarrow L$ دو رابطه $u(n) \rightarrow a$ و $v(n) \rightarrow b$ را نتیجه می دهد. بعکس نامساوی

$$|f(n) - L| \leq |u(n) - a| + |v(n) - b|$$

مبین آن است که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، دو رابطه $u(n) \rightarrow a$ و $v(n) \rightarrow b$ رابطه $f(n) \rightarrow L$ را ایجاب خواهند کرد. عبارت دیگر، یک دنباله مختلط f همگرا است اگر و فقط اگر قسمت حقیقی u و قسمت موهومی v هر دو بطور جداگانه همگرا باشند که در این حالت خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} v(n).$$

واضح است که از هرتابعی که بازای کلیه x های حقیقی مثبت تعریف شده باشد می توان با محدود کردن x به مقادیر صحیح یک دنباله بوجود آورد. این مطلب تشابه قوی موجود بین تعریف فوق و تعریفی را که در بخش ۱۴.۷ برای توابع کلیتر داده شده توضیح می دهد. این تشابه به حدود نامتناهی نیز کشیده می شود و ما تعریف علامات

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = -\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$$

را، چنانکه در بخش ۱۵.۷ برای f حقیقی انجام شد، به خواننده محول می کنیم. اگر f مختلط باشد می نویسیم «وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $f(n) \rightarrow \infty$ » در صورتی که $|f(n)| \rightarrow +\infty$. عبارت «دنباله همگرا» فقط به دنباله ای اطلاق می شود که حدش متناهی است. یک دنباله که حدش نامتناهی باشد واگرا نام دارد. البته دنباله های واگرایی هستند که حد نامتناهی ندارند. مثالهایی از اینگونه دنباله ها با دستورهای زیر تعریف می شوند:

$$f(n) = (-1)^n, f(n) = \sin \frac{n\pi}{4}, f(n) = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), f(n) = e^{i n \pi / 2}$$

قواعد اساسی مربوط به حدود مجموعه ها، حاصلضربها، و غیره در مورد حد دنباله های همگرا نیز برقرارند. خواننده نباید در تنظیم این قضایا برای خود با مشکلی مواجه شود. برهان این قضایا شبیه آنهایی هستند که در بخش ۵.۳ داده شده اند.

همگرایی یا واگرایی بسیاری از دنباله ها را می توان با استفاده از خواص توابع آشنا که بازای هر x مثبت تعریف شده اند مشخص کرد. چند نمونه مهم از دنباله های

حقیقی را ذکر می‌کنیم که حدود آنها را می‌شود مستقیماً و یا با استفاده از نتایج فصل ۷ بدست آورد.

$$(9.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0 \text{ اگر}$$

$$(10.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, |x| < 1 \text{ اگر}$$

$$(11.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0, b > 0 \text{ و هر } a > 0 \text{ بازای هر}$$

$$(12.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

$$(13.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \text{ بازای هر } a \text{ حقیقی،}$$

۳.۱۰ دنباله‌های یکنوا از اعداد حقیقی

دنباله $\{f(n)\}$ را صعودی خوانند اگر که

$$f(n) \leq f(n+1), n \geq 1 \text{ بازای هر}$$

این را مختصراً با علامت $\nearrow f(n)$ نشان می‌دهیم. از سوی دیگر، اگر بازای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $f(n) \geq f(n+1)$ ،

دنباله را نزولی نامیده و می‌نویسیم $\searrow f(n)$. دنباله یکنوا خوانده می‌شود اگر که صعودی یا نزولی باشد.

کار با دنباله‌های یکنوا دلچسب است زیرا، بخصوص، همگرایی یا واگرایی آنها آسان تعیین می‌شود. درواقع محک ساده‌ی زیر در اختیار ما قرار دارد.

قضیه ۱.۱۰. یک دنباله یکنوا همگرا است اگر و فقط اگر کراندار باشد.

توجه: دنباله $\{f(n)\}$ را کراندار گویند هرگاه عددی مثبت مانند M باشد بطوری که بازای هر $n, |f(n)| \leq M$. دنباله‌ای که کراندار نباشد بی‌کران نام خواهد داشت.

برهان. واضح است که یک دنباله بی‌کران نمی‌تواند همگرا باشد. بنا براین کافی است ثابت کنیم که یک دنباله یکنوا و کراندار باید همگرا باشد.

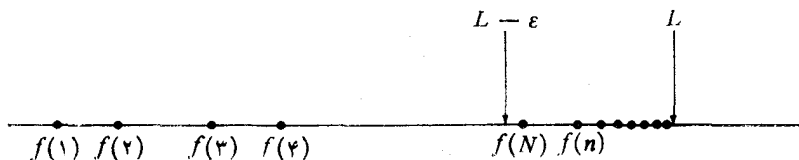
فرض کنیم $\nearrow f(n)$ و L کوچکترین کران بالائی مجموعه مقادیر تابع باشد (چون دنباله کراندار است، بنا بر اصل موضوع ۱۰ دستگاه اعداد حقیقی، کوچکترین کران بالائی خواهد داشت). در اینصورت بازای هر $n, f(n) \leq L$ و ثابت می‌کنیم که دنباله به L همگرا می‌باشد.

عدد مثبت و دلخواه ε را اختیار می‌کنیم. چون $L - \varepsilon$ نمی‌تواند یک کران بالائی

همه اعداد $f(n)$ باشد باید بازای N داشته باشیم $L - \varepsilon < f(N)$. (امکان دارد این N تابع ε باشد.) اگر $n \geq N$ ، بدلیل اینکه $f(n)$ ، خواهیم داشت $f(N) \leq f(n)$. پس، همانطور که در شکل ۳.۱۰ نموده شده، بازای هر $n \geq N$ داریم $L - \varepsilon < f(n) \leq L$. از این نامساویها درمی یابیم که

بازای هر $n \geq N$ ، $0 \leq L - f(n) < \varepsilon$

و این بدان معنی است که، همانطور که حکم شده، دنباله به L همگرا می باشد.



شکل ۳.۱۰ یک دنباله صمدی کراندار به کوچکترین کران بالائی خود همگرا است.

برهان در مورد $f(n)$ بهمین شکل است، حد در این حالت بزرگترین کران پائینی مجموعه مقادیر تابع خواهد بود.

۴.۱۰ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۲۲ دنباله $\{f(n)\}$ مطابق دستور داده تعریف گشته است. در هر حالت، (الف) تعیین کنید که دنباله همگرا است یا واگرا و (ب) حد هریک از دنباله های همگرا را پیدا نمائید. ممکن است در بعضی حالات تعویض عدد صحیح n با عدد حقیقی مثبت و دلخواه x و بررسی تابع حاصل از x با روشهای فصل ۷ یاری دهنده باشد. از دستورهای (۹.۱۰) تا (۱۳.۱۰) که در آخر بخش ۲.۱۰ آمده اند می توانید استفاده کنید.

$$f(n) = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \quad ۲ \quad f(n) = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \quad ۱$$

$$f(n) = \frac{n^2 + 3n - 2}{5n^2} \quad ۴ \quad f(n) = \cos \frac{n\pi}{2} \quad ۳$$

$$f(n) = 1 + (-1)^n \quad ۶ \quad f(n) = \frac{n}{2^n} \quad ۵$$

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad ۸ \quad f(n) = \frac{1 + (-1)^n}{n} \quad ۷$$

$$f(n) = n^{(-1)^n} \quad ۱۰ \quad f(n) = 2^{1/n} \quad ۹$$

$$f(n) = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \quad ۱۲ \quad f(n) = \frac{n^{1/2} \sin(n!)}{n+1} \quad ۱۱$$

$$|a| < 1 \text{ که در آن } f(n) = na^n. ۱۴$$

$$f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. ۱۳$$

$$f(n) = \frac{100000n}{1+n^2}. ۱۶$$

$$a > 1, f(n) = \frac{\log_a n}{n}. ۱۵$$

$$f(n) = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}. ۱۸$$

$$f(n) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n. ۱۷$$

$$f(n) = e^{-\pi i n / 2}. ۲۰$$

$$f(n) = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n}. ۱۹$$

$$f(n) = ne^{-\pi i n / 2}. ۲۲$$

$$f(n) = \frac{1}{n} e^{-\pi i n / 2}. ۲۱$$

هر یک از دنباله‌های $\{a_n\}$ در تمرینات ۲۳ تا ۲۸ همگرا است. از اینرو، بازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیحی مانند N (وابسته به ε) هست بطوری که اگر $n \geq N$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ که در آن $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ در هر حالت مقداری از N را تعیین کنید که برای هر یک از مقادیر زیر از ε مناسب باشد:

$$\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001.$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}. ۲۴$$

$$a_n = \frac{1}{n}. ۲۳$$

$$a_n = \frac{1}{n!}. ۲۶$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. ۲۵$$

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n. ۲۸$$

$$a_n = \frac{2n}{n^2+1}. ۲۷$$

۲۹. ثابت کنید که یک دنباله نمی‌تواند به دو حد مختلف همگرا باشد.

۳۰. فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$.

۳۱. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = cA$ که در آن c یک ثابت است.

۳۲. بکمک تمرینات ۳۰ و ۳۱ ثابت کنید هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = A^2 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

سپس با بکار بردن اتحاد $a_n^2 = (a_n + b_n)^2 - a_n^2 - b_n^2$ ثابت کنید هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

۳۳. اگر α یک عدد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد ضریب دوجمله‌ای $\binom{\alpha}{n}$ مطابق معادله

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

تعریف می‌شود.

(الف) وقتی $\alpha = -1/2$ نشان دهید که

$$\binom{\alpha}{1} = -\frac{1}{2}, \binom{\alpha}{2} = \frac{3}{8}, \binom{\alpha}{3} = -\frac{5}{16}, \binom{\alpha}{4} = \frac{35}{128}, \binom{\alpha}{5} = -\frac{63}{256}.$$

(ب) فرض کنید $a_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$. ثابت کنید $a_{n+1} < a_n$ و $a_n > 0$.
 ۳۴. فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که بر بازه $[0, 1]$ صعودی و کراندار است. دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ را این طور تعریف کنید:

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(الف) ثابت کنید

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - s_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \text{ و } s_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq t_n$$

(ب) ثابت کنید که هر دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ به حد $\int_0^1 f(x) dx$ همگرايند.

(پ) نتیجه متناظر را برای بازه $[a, b]$ بیان و ثابت کنید.

۳۵. با استفاده از تمرین ۳۴ روابط حدی زیر را اثبات کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^r = \frac{1}{r+1} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \log 2 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \log(1 + \sqrt{2}) \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \quad (\text{ث})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2} \quad (\text{ج})$$

۵.۱۵ سریهای نامتناهی

از یک دنباله مفروض از اعداد حقیقی یا مختلط همیشه می‌توانیم، با افزودن جملات متوالی بهم، دنباله جدیدی بسازیم. مثلاً اگر دنباله دارای جملات

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

باشد می‌توانیم «مجموعهای جزئی»

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

و غیره را بتوالی تشکیل دهیم؛ مجموع جزئی s_n مرکب از n جمله اول این طور تعریف می‌شود:

$$(۱۴.۱۵) \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

دنباله $\{s_n\}$ از مجموعهای جزئی را یک سری نامتناهی، یا فقط یک سری، می‌خوانند و آن را با علامات زیر نیز نشان می‌دهند:

$$(۱۵.۱۵) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

مثلاً سری $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ نمایشگر دنباله $\{s_n\}$ است که در آن

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

علامات (۱۵.۱۵) به ما یادآور می‌شوند که دنباله مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ از دنباله $\{a_n\}$ با افزودن جملات متوالی بهم بدست می‌آید. اگر عدد حقیقی یا مختلط S چنان باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

می‌گوئیم سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است و دارای مجموع S می‌باشد و در این حالت می‌نویسیم

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

چنانچه $\{s_n\}$ واگرا باشد می‌گوئیم سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا بوده و از مجموعی برخوردار نیست.

مثال ۱. سری توافقی. در بحثی که از پارادکس زنو داشتیم نشان دادیم که مجموعهای جزئی s_n سری $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ در نامساوی

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \log(n+1)$$

صدق می‌کنند. چون، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\log(n+1) \rightarrow \infty$ ، نیز چنین می‌شود، و در نتیجه سری $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ واگرا خواهد بود. این سری را سری توافقی می‌نامند.

مثال ۲. ما در بحث مربوط به پارادکس زنو به مجموعه‌های جزئی سری

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

نیز برخوردیم که با دستور

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

که باسانی باستقرا ثابت می‌شود، بدست می‌آیند. وقتی $n \rightarrow \infty$ ، این مجموعه‌های جزئی به حد ۲ نزدیک می‌شوند، و در نتیجه سری فوق همگرا بوده و دارای مجموع ۲ خواهد بود. این مطلب را می‌توانیم بصورت

$$(16.10) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

نشان دهیم.

خواننده باید متوجه باشد که در اینجا کلمه «مجموع» بمعنی بسیار خاصی گرفته شده است. مجموع یک سری همگرا با جمع معمولی بدست نمی‌آید بلکه بعنوان حد دنباله مجموعه‌های جزئی خواهد بود. همچنین خواننده باید توجه داشته باشد که، در مورد یک سری همگرا، علامت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ هم سری و هم مجموع آن را، با اینکه دو مفهوم متفاوتی هستند، نشان می‌دهد. مجموع نشانگر یک عدد است و نمی‌تواند همگرا یا واگرا باشد. همینکه تمایز بین یک سری و مجموع آن فهمیده شد استفاده از یک علامت برای نمایش هر دو نباید ابهامی را تولید کند.

همانند حالت نماد جمع‌بندی متناهی، حرف k در علامت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک «زیرنویس ظاهری» است و می‌تواند با هر علامت مناسب دیگری عوض شود. حروف m, n و r معمولاً برای این منظور بکار می‌روند. گاهی مطلوب آن است که جمع‌بندی از $k=0$ یا از $k=2$ و یا از مقدار دیگری برای k شروع شود. از اینرو، مثلاً، سری (16.10) را می‌شد بصورت $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k$ نوشت. بطور کلی، اگر $p \geq 0$ ، علامت $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ بمعنی $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ گرفته می‌شود که در آن $b_k = a_{p+k-1}$. لذا $b_1 = a_p$ ، $b_2 = a_{p+1}$ و مانند اینها. هر جا خطر ابهام نبوده و یا اینکه نقطه شروع بی‌اهمیت باشد بجای $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ می‌نویسیم $\sum a_k$.

باسانی ثابت می‌شود که دوسری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند. فرض کنید قراردادده باشیم

$$s_n = a_1 + \dots + a^n \quad \text{و} \quad t_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+n-1}$$

اگر $p = 0$ خواهیم داشت $t_{n+1} = a_0 + s_n$ ، در نتیجه هرگاه، وقتی $s_n \rightarrow S$ ، $n \rightarrow \infty$ آنگاه $t_n \rightarrow T - a_0$ ، و بعکس هرگاه، وقتی $t_n \rightarrow T$ ، $n \rightarrow \infty$ آنگاه $s_n \rightarrow T - a_0$. بنابراین، وقتی $p = 0$ ، این دوسری هردو همگرا و یا هر دو واگر خواهند بود. همین مطلب برای $p \geq 1$ نیز درست است. برای $p = 1$ داریم $s_n = t_n$ ، و برای $p > 1$ ، خواهیم داشت $t_n = s_{n+p-1} - s_{p-1}$ و مجدداً به این نتیجه می‌رسیم که دنباله‌های $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ هر دو همگرا و یا هر دو واگرا می‌باشند. این مطلب غالباً این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند می‌توان تعدادی متناهی جمله را از اول یک‌سری حذف کرد و یا به اول آن اضافه نمود و این کار بر همگرایی و یا واگرایی آن اثری نخواهد داشت.

۶.۱۰ خاصیت خطی سریهای همگرا

مجموعه‌های متناهی معمولی دارای خواص مهم زیر می‌باشند:

$$(۱۷.۱۰) \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{خاصیت جمعپذیری})$$

و

$$(۱۸.۱۰) \quad \sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{خاصیت همگنی}).$$

قضیه بعد یک تعمیم طبیعی این خواص را برای سریهای نامتناهی همگرا فراهم ساخته و بدین ترتیب بسیاری از عملیات جبری را که در آنها با سریهای همگرا مثل مجموعه‌های متناهی برخورد می‌شود توجیه می‌نماید. خواص جمعپذیری و همگنی را می‌توان در یک خاصیت بنام خطی بودن، که بصورت زیر توصیف می‌شود، گرد آورد.

قضیه ۲.۱۰. فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهای نامتناهی همگرایی با جملات مختلط بوده و α و β ثابتهای مختلطی تصور شوند. در اینصورت سری $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ نیز همگرا است و مجموع آن با معادله

$$(۱۹.۱۰) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

داده می‌شود.

برهان. با استفاده از (۱۷.۱۰) و (۱۸.۱۰) می‌توانیم بنویسیم

$$(۲۰.۱۰) \quad \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k.$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، اولین جمله سمت راست (۲۰.۱۰) به $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ و دومین جمله به $\sum_{k=1}^{\infty} \beta b_k$ میل می‌کند. از اینرو طرف چپ به مجموع آنها میل نموده و این ثابت می‌کند

که سری $\sum (\alpha a_k + \beta b_k)$ به مجموع مذکور در (۱۹.۱۰) همگرا خواهد بود.

قضیه ۲.۱۰ نتیجه جالبی را دربردارد که اغلب در اثبات واگرایی یک سری بکار میرود.

قضیه ۳.۱۰. هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum (a_n + b_n)$ واگرا است.

برهان. چون $\sum a_n$ و $\sum b_n = (a_n + b_n) - a_n$ همگرا است قضیه ۲.۱۰ به ما می گوید که همگرایی $\sum (a_n + b_n)$ همگرایی $\sum b_n$ را ایجاب خواهد کرد. از اینرو $\sum (a_n + b_n)$ در صورت واگرا بودن $\sum b_n$ نمی تواند همگرا باشد.

مثال. سری $\sum (1/k + 1/2^k)$ واگرا است زیرا $\sum 1/k$ واگرا و $\sum 1/2^k$ همگرا می باشد.

چنانچه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو واگرا باشند سری $\sum (a_n + b_n)$ ممکن است همگرا باشد یا نباشد. بعنوان مثال، هرگاه بازای هر n ، $a_n = b_n = 1$ ، آنگاه $\sum (a_n + b_n)$ واگرا است. اما، هرگاه بازای هر n ، $a_n = 1$ و $b_n = -1$ ، آنگاه $\sum (a_n + b_n)$ همگرا خواهد بود.

۷.۱۰ سریهای توی هم دو

خاصیت مهم دیگر مجموعه های متناهی خاصیت توی هم روی است که چنین بیان می شود:

$$(21.10) \quad \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

در تعمیم این خاصیت به سریهای نامتناهی باید آن سریهای $\sum a_n$ را در نظر گرفت که در آنها بتوان هر جمله a_n را بصورت تفاضلی

$$(22.10) \quad a_n = b_n - b_{n+1}$$

نوشت. این سریها به سریهای توی هم دو معروفند و رفتار آنها را قضیه زیر مشخص خواهد کرد.

قضیه ۴.۱۰. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد مختلط باشند بطوری که

$$(23.10) \quad a_n = b_n - b_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

در اینصورت سری $\sum a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله $\{b_n\}$ همگرا باشد و در این حالت خواهیم داشت

$$(24.10) \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{که در آن} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L$$

برهان. فرض کنیم s_n مجموع جزئی $\sum a_n$ باشد. در اینصورت، بواسطه

(۲۱.۱۰)، داریم

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

بنابراین، دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{b_n\}$ یا هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا. بعلاوه هرگاه، وقتی $b_n \rightarrow L$ ، $n \rightarrow \infty$ آنگاه $s_n \rightarrow b_1 - L$ ، و این (۲۴.۱۰) را ثابت خواهد کرد.

توجه: هر سری توی هم‌رو است زیرا اگر ابتدا b_1 را دلخواه اختیار کرده و سپس بازای هر $n \geq 1$ قرار دهیم $b_{n+1} = b_n - s_n$ ، که در آن $s_n = a_1 + \dots + a_n$ همیشه می‌توانیم (۲۴.۱۰) را برقرار سازیم.

مثال ۱. فرض می‌کنیم $a_n = 1/(n^2 + n)$. در اینصورت داریم

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

و در نتیجه (۲۳.۱۰) بازای $b_n = 1/n$ برقرار می‌شود. چون $b_1 = 1$ و $L = 0$ خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

مثال ۲. اگر x یک عدد صحیح منفی نباشد تجزیه

$$\frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)} \right)$$

را بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ خواهیم داشت. بنا براین، طبق خاصیت توی هم‌روی، سری زیر همگرا و دارای مجموع قید شده می‌باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}.$$

مثال ۳. چون $\log[n/(n+1)] = \log n - \log(n+1)$ ، و وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\log n \rightarrow \infty$ پس سری $\sum \log[n/(n+1)]$ واگرا خواهد بود.

توجه: سریهای توی هم‌رو تفاوت مهمی را که میان مجموعه‌های متناهی و سریهای نامتناهی وجود دارد نشان می‌دهند. اگر (۲۱.۱۰) را بصورت باز بنویسیم چنین خواهد شد:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

که صحت آن را می‌توان فقط با برداشتن پرانتزها و عمل حذف تحقیق کرد. حال فرض کنیم همین اعمال را در سری نامتناهی

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

انجام داده باشیم. b_1 را باقی می‌گذاریم، b_2 را حذف می‌کنیم، b_3 را حذف می‌کنیم، و همینطور تا آخر ادامه می‌دهیم. برای هر $n > 1$ در مرحله‌ای b_n را حذف می‌کنیم. پس هر b_n جز b_1 حذف خواهد شد. این نتیجه می‌دهد که مجموع سری b_n است. بنا بر قضیه ۴.۱۰ این نتیجه‌گیری غلط است مگر آنکه $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. این بحث نشان می‌دهد که در یک سری نامتناهی همیشه نمی‌توان، مثل مجموعه‌های متناهی، پراترها را حذف کرد. (همچنین ر.ک. تمرین ۲۴ در بخش ۰.۹۱۰)

۸.۱۰ سری هندسی

از خاصیت توی هم روی مجموعه‌های متناهی می‌توان استفاده کرد و به بررسی نمونه مهمی از سری‌ها موسوم به سری هندسی پرداخت. این سری از جمع متوالی جملات یک تصاعد هندسی بوجود می‌آید و از شکل $\sum x^n$ برخوردار است که در آن جمله x^n می‌توان n عدد ثابت حقیقی یا مختلط x باشد. راحتتر آن است که این سری را با $n = 0$ شروع کنیم با این فرض که جمله آغازی، یعنی x^0 ، مساوی ۱ باشد. فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م این سری باشد، پس

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

اگر $x = 1$ هر جمله سمت راست مساوی یک است و $s_n = n$. در این حالت سری واگرا است زیرا، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $s_n \rightarrow \infty$. چنانچه $x \neq 1$ می‌توان مجموع s_n را ساده کرده و باین صورت نوشت:

$$(1 - x)s_n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) = 1 - x^n$$

باین دلیل که آخرین مجموع توی هم می‌رود. با تقسیم بر $1 - x$ دستور زیر را خواهیم داشت:

$$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

این نشان می‌دهد که رفتار s_n برای مقادیر بزرگ n کاملاً به رفتار x^n بستگی دارد. هرگاه $|x| < 1$ آنگاه، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $x^n \rightarrow 0$ و سری به مجموع $1/(1 - x)$ همگرا خواهد بود.

چون $s_{n+1} - s_n = x^n$ همگرایی $\{s_n\}$ ایجاب می‌کند که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $x^n \rightarrow 0$. بنابراین، اگر $|x| \geq 1$ دنباله $\{s_n\}$ واگرا است زیرا در این حالت x^n به ۰ میل نخواهد کرد. لذا قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۵.۱۰. چنانچه x مختلط بوده و $|x| < 1$ سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ همگرا

است و دارای مجموع $1/(1-x)$ می‌باشد. یعنی که چنین داریم:

$$(۲۵.۱۰) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

چنانچه $|x| \geq 1$ سری واگرا خواهد بود.

سری هندسی با شرط $|x| < 1$ یکی از نمونه‌های نادری است که می‌توان مجموع آن را با یافتن یک دستور ساده برای مجموعه‌های جزیش تعیین کرد. (در بخش ۱.۱۰، در رابطه با پارادکس زنو، به حالت خاصی از آن که $x = 1/2$ برخور داریم.) اهمیت واقعی این سری در این نهفته است که می‌توان از آن بعنوان نقطه شروع تعیین مجموع بسیاری از سریهای جالب دیگر استفاده کرد. مثلاً اگر فرض کنیم $|x| < 1$ و در رابطه (۲۵.۱۰) x را با x^2 عوض نمائیم به این دستور خواهیم رسید:

$$(۲۶.۱۰) \quad 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$$

توجه کنید که این سری حاوی آن جملاتی از (۲۵.۱۰) است که دارای نماهای زوج هستند. برای آنکه مجموع توانهای فرد را بتهائی حساب کنیم فقط کافی است طرفین (۲۶.۱۰) را در x ضرب کنیم تا چنین بدست آید:

$$(۲۷.۱۰) \quad x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1-x^2}, |x| < 1$$

چنانچه در رابطه (۲۵.۱۰) x را با $-x$ عوض کنیم چنین خواهیم داشت:

$$(۲۸.۱۰) \quad 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}, |x| < 1$$

از تعویض x با x^2 در (۲۸.۱۰) می‌بینیم که اگر $|x| < 1$,

$$(۲۹.۱۰) \quad 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

با ضرب طرفین (۲۹.۱۰) در x نتیجه می‌گیریم که اگر $|x| < 1$,

$$(۳۰.۱۰) \quad x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^n x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1+x^2}$$

چنانچه در (۲۶.۱۰) x را با $2x$ عوض کنیم خواهیم داشت

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \dots + 4^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-4x^2}$$

که بازای $|2x| < 1$ ، یا، بعبارت معادل، بازای $|x| < 1/2$ اعتبار دارد. واضح است که می‌توان مثالهای متعدد دیگری را بهمین نحو ساخت.

همه این سریها از شکل خاص

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

برخوردار بوده و به سریهای توانی معروفند. اعداد $a_0, a_1, a_2, \dots$ را، که ممکن است حقیقی یا مختلط باشند، ضرایب سری توانی می نامند. سری هندسی نمونه ای است که در آن کلیه ضرایب یک هستند. اگر x و همه ضرایب حقیقی باشند سری را یک سری توانی حقیقی می نامند. بعدها، وقتی نظریه عمومی سریهای توانی حقیقی مطرح شد، خواهیم دید که مشتقگیری و انتگرالگیری از دوطرف هریک از معادلات (۲۵.۱۰) تا (۳۰.۱۰) مجاز است با این پندار که گوئی طرفهای چپ آنها مجموعه ای متناهی عادی بوده اند. این اعمال به دستورهای جدید و جالب بسیاری منجر می شوند. بعنوان مثال، مشتقگیری از (۲۵.۱۰) نتیجه می دهد که

$$(۳۱.۱۰) \quad 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

درحالی که انتگرالگیری از (۲۸.۱۰) دستور جالب

$$(۳۲.۱۰) \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \\ = \log(1+x)$$

را بیار می آورد که لگاریتم را بصورت یک سری توانی بیان خواهد کرد. این همان کشف مرکاتور و برونکر (۱۶۶۸) است که قبلا ذکر شد. اگرچه هریک از معادلات (۲۵.۱۰) تا (۳۱.۱۰) بازای هر x در بازه $-1 < x < +1$ معتبر است اما معلوم می شود که سری لگاریتمی (۳۲.۱۰) در نقطه انتهائی $x = +1$ نیز اعتبار دارد.

مثال مهم دیگر، که می توان آن را با انتگرالگیری از (۲۹.۱۰) بدست آورد، بسط بصورت سری توانی زیر برای معکوس تانژانت است که توسط جیمز گرگوری (۱۶۷۵-۱۶۳۸) در سال ۱۶۷۱ کشف گردید:

$$(۳۳.۱۰) \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \\ = \arctan x.$$

سری گرگوری بازای هر x مختلط که $|x| < 1$ و نیز برای $x = \pm 1$ همگرا است. وقتی x حقیقی باشد این سری با تابع معکوس تانژانت که در فصل ۶ معرفی شد مطابقت خواهد داشت. می توان از این سری در تعمیم تعریف تابع آرک تانژانت از مقادیر حقیقی x به مقادیر مختلط x که $|x| < 1$ استفاده کرد.

بسیاری از توابع مقدماتی دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظیر سینوس، کسینوس، و تابع نمائی، را نیز می‌شود با سریهای توانی نمایش داد. این مطلب زیاد تعجب‌آور نیست زیرا دستور تیلور به ما می‌گوید که هر تابع که در یکی از همسایگیهای مبدأ مشتق مرتبه $n+1$ داشته باشد را می‌شود به یک چندجمله‌ای تیلور از x و از درجه نایشترا از n تقریب کرد. در مثالهای فوق مجموعه‌های جزئی سریهای توانی دقیقاً چندجمله‌ایهای تیلور هستند. هرگاه تابع f در یکی از همسایگیهای مبدأ از هر مرتبه مشتق داشته باشد آنگاه، بازای هر عدد صحیح n دستور تیلور به معادله‌ای بشکل

$$(۳۴.۱۰) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + E_n(x)$$

تبدیل می‌شود که در آن مجموع متناهی $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ یک چندجمله‌ای تیلور از درجه نایشترا از n بوده و $E_n(x)$ خطای این تقریب خواهد بود. حال اگر در (۳۴.۱۰) x را ثابت گرفته و n را بطور نامحدود افزایش دهیم چندجمله‌ایهای تیلور یک سری توانی، یعنی $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ را بدست می‌دهند که در آن هر ضریب a_k این طور معین خواهد شد:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

هرگاه، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، خطای $E_n(x)$ بازای x به 0 میل کند آنگاه برای این x می‌توان n را در (۳۴.۱۰) به ∞ میل داد تا

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k + \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

حاصل شود. عبارت دیگر، سری توانی مورد بحث به $f(x)$ همگرا می‌باشد. هرگاه x چنان نقطه‌ای باشد که برای آن $E_n(x)$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به 0 میل نکند آنگاه مجموعه‌های جزئی به $f(x)$ نزدیک نخواهند شد. قیود لازم بر f برای تضمین اینکه $E_n(x) \rightarrow 0$ بعداً در بخش ۱۰.۱۱ مطرح خواهند شد.

برای آنکه نظریه عمومی سریهای توانی بر پایه بهتری قرار گیرد به چند سؤال کلی در رابطه با همگرایی و واگرایی سریهای دلخواه می‌پردازیم. در فصل ۱۱ به بحث سریهای توانی بازخواهیم گشت.

۹.۱۰ تمرینات

هریک از سریهای تمرینات ۱ تا ۱۰ یک سری توی همرو، یا هندسی، و یا یک سری مربوط به آنها است که می‌توان مجموعه‌های جزئی آن را ساده کرد. در هر حالت ثابت کنید که سری همگرا بوده و دارای مجموع قید شده است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3.0\bar{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2} \cdot 4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{2} \cdot 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2} \cdot 6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} = 1 \cdot 5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)} = 1 \cdot 8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 \cdot 7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1 \cdot 9$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log[(1+1/n)^n(1+n)]}{(\log n^n)[\log(n+1)^{n+1}]} = \log_2 \sqrt{e} \cdot 10$$

سریهای توانی $\log(1+x)$ و $\arctan x$ دربخش ۸.۱۰ با انجام عملیات گوناگون بروی سری هندسی بدست آمدند. با روشی مشابه وبدون توجه مراحل عمل، دستورهای تمرینات ۱۱ تا ۱۹ را نتیجه بگیرید. همه آنها لاقبل بازای $|x| < 1$ معتبرند. (اثبات نظری آنها دربخش ۸.۱۱ صورت گرفته است.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} \cdot 12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{-x}{(1-x)^2} \cdot 11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3 + 3x^2 + x}{(1-x)^4} \cdot 13$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(1-x)^5} \cdot 14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \cdot 16 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x} \cdot 15$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot 17$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!} x^n = \frac{1}{(1-x)^3} \cdot 18$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4} \cdot 19$$

۲۰. نتایج تمرینات ۱۱ تا ۱۴ بوجود یک دستور کلی بشکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

حکم می‌کنند که در آن $P_k(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه k است که جمله با کمترین درجه آن x و با بیشترین درجه‌اش x^k می‌باشد. این دستور را باستقرا وبدون توجه عملیات صوری که روی سری انجام می‌دهید ثابت کنید.

۲۱. نتایج تمرینات ۱۷ تا ۱۹ دستور کلیتر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

را پیشنهاد می‌کنند که در آن

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!}$$

این دستور را باستقرا وبدون توجه عملیات صوری که روی سری انجام می‌دهید ثابت نمائید.

۲۲. فرض کنید بازای هر x ، $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$. با این فرض که اعمال بر سریهای نامتناهی همچون مجموعه‌های متناهی مجاز هستند مجموع سریهای زیر را پیدا کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \quad (\text{الف}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!} \quad (\text{پ})$$

۲۳. (الف) اگر بازای هر x ، $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ ، با این فرض که اعمال بر این سریها همچون مجموعه‌های متناهی مجاز هستند، نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = (x^2 + x)e^x.$$

(ب) مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/n!$ مساوی ke است که در آن k یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. مقدار k را بیابید. توجه عملیات صوری ضرورتی ندارد.

۲۴. دوسری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ را یکی خوانندهرگاه بازای هر n ، $a_n = b_n$. مثلاً سریهای

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \text{و } 0 + 0 + 0 + \cdots$$

یکی هستند اما سریهای

$$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots \text{و } 1 + 1 + 1 + \cdots$$

چنین نمی‌باشند. درمورد هر جفت سری زیر تعیین کنید که آیا سریها یکی هستند یا خیر.

$$(الف) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \text{و}$$

$$(2-1) - (3-2) + (4-3) - (5-4) + \cdots$$

$$(ب) \quad ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

$$(۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \dots$$

$$(پ) \quad ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

$$۱ + (-۱ + ۱) + (-۱ + ۱) + (-۱ + ۱) + \dots$$

$$(ت) \quad ۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$۱ + \left(۱ - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \dots$$

۲۵. (الف) با استفاده از (۲۶.۱۰) ثابت کنید که

$$۱ + ۰ + x^2 + ۰ + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < ۱$$

توجه کنید که، طبق تعریف مذکور در تمرین ۲۴، این سری وقتی $x \neq ۰$ با سری (۲۶.۱۰) یکی نخواهد بود.

(ب) قضیه ۲.۱۰ را در قسمت (الف) و در مورد (۲۵.۱۰) بکار برده (۲۷.۱۰) را نتیجه بگیرید.

(پ) نشان دهید که وقتی قضیه ۲.۱۰ مستقیماً در مورد (۲۵.۱۰) و (۲۶.۱۰) بکار رود (۲۷.۱۰) نتیجه نخواهد شد. در عوض دستور $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n}) = x/(1 - x^2)$ حاصل می‌شود که بازای $|x| < ۱$ اعتبار دارد.

۱۰.۱۰* تمرینات مربوط به بسطهای اعشاری

در بخش م ۱۵.۳ نمایشهای اعشاری اعداد حقیقی معرفی شدند. در آنجا نشان دادیم که هر عدد حقیقی مثبت یک نمایش اعشاری بشکل

$$x = a_0 + a_1 a_2 a_3 \dots$$

دارد که در آن بازای هر $k \geq 1$ ، $0 \leq a_k \leq 9$ عدد x با نامساویهای

$$(۳۵.۱۰) \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

به ارقام $a_0, a_1, a_2, \dots$ مربوط می‌گردد. چنانچه قراردادیم $s_n = \sum_{k=0}^n a_k / 10^k$ را از طرفین نامساویهای (۳۵.۱۰) کم کنیم خواهیم داشت

$$0 \leq x - s_n < 10^{-n}.$$

این نشان می‌دهد که، وقتی $s_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$ و در نتیجه x از سری همگرای

$$(۳۶.۱۰) \quad x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

بدست می‌آید.

در تمرینات ۱ تا ۵ فرض این است که هریک از بسطهای اعشاری نامتناهی بی‌نهایت بار تکرار می‌شوند. در هر حالت بسط اعشاری را بصورت یک سری نامتناهی درآوردید، مجموع سری را پیدا کنید، و بدینوسیله x را بصورت خارج قسمت دوعدد صحیح بیان نمایید.

$$۱. \quad x = ۰.۴۴۴۴ \dots \quad ۲. \quad x = ۰.۵۱۵۱۵۱۵۱ \dots$$

$$۳. \quad x = ۰.۲۰۲۰۲۰۲۰۲۰ \dots \quad ۴. \quad x = ۰.۱۲۳۱۲۳۱۲۳۱۲۳ \dots$$

$$۵. \quad x = ۰.۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷ \dots$$

۶. ثابت کنید که هر بسط اعشاری مکرر نمایشگر یک عدد گویا است.

۷. هرگاه یک عدد بسطی اعشاری داشته باشد که، مثل $۰.۱۲۵۰۰۰۰ \dots = ۱/۸$ ، به ۰ ختم شود آنگاه می‌توان این عدد را با کسر ۱ از آخرین رقم ناصفر بصورت بسطی نوشت که به ۹ ختم گردد. مثلاً $۰.۱۲۴۹۹۹۹ \dots = ۱/۸$. این مطلب را با استفاده از سریهای نامتناهی ثابت کنید.

نمایش اعشاری (۳۶.۱۰) را می‌توان با تغییر عدد صحیح ۱۰ به هر عدد صحیح دیگر $b > ۱$ تعمیم داد. اگر $x > ۰$ ، a_0 را بزرگترین عدد صحیح موجود در x می‌انگاریم؛ با این فرض که $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ تعریف شده‌اند a_n را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b^k} \leq x.$$

تمرینات زیر مربوط به دنباله اعداد صحیح $a_0, a_1, a_2, \dots$ هستند که مطابق فوق بدست می‌آیند.

۸. نشان دهید که بازای هر $k \geq ۱$ ، $۰ \leq a_k \leq b - ۱$.

۹. یک روش هندسی برای بدست آوردن اعداد $a_0, a_1, a_2, \dots$ شرح دهید.

۱۰. نشان دهید که سری $\sum_{k=0}^{\infty} a_k / b^k$ همگرا بوده و مجموعش x است. این سری بسط اعشاری x را در مقیاس b بدست می‌دهد. حالت‌های خاص مهم، غیر از $b = ۱۰$ عبارتند از مقیاس دوتی، یعنی $b = ۲$ ، و مقیاس دوازدهی، یعنی $b = ۱۲$.

۱۱.۱۰ آزمونهای برای همگرایی

بطور نظری، همگرایی یا واگرایی یک سری خاص $\sum a_n$ این‌طور تعیین می‌شود که با

معاینهٔ مجموعه‌های جزئی s_n می‌بینیم آیا اینها، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به حدی متناهی میل خواهند کرد یا خیر. در چند حالت خاص، مانند سری هندسی، ممکن است مجموعه‌های معرف s_n آنقدر ساده شوند که تعیین رفتار آنها برای n های بزرگ ساده باشد. لکن در اکثر حالات دستور مناسبی برای ساده کردن s_n وجود ندارد و ممکن است اثبات همگرایی یا واگرایی بایک روش سراسر نسبتاً «شکل‌باشد». محققان اولیهٔ این مبحث، بویژه کشی و همعصرانش، به این مشکل پی بردند و چند «آزمون همگرایی» عرضه کردند که در آنها به شناخت مجموعه‌های جزئی بطورصریح احتیاجی نیست. در این فصل چندتا از ساده‌ترین و مفیدترین این آزمونها را مطرح می‌کنیم، اما ابتدا می‌خواهیم چند تذکر کلی را دربارهٔ طبیعت این آزمونها بدهیم.

آزمونهای همگرایی را می‌شود عموماً به سه رسته تقسیم کرد: (یکم) شرطهای کافی؛ (دوم) شرطهای لازم؛ (سوم) شرطهای لازم و کافی. آزمون نوع (یکم) را می‌توان بصورت علامتی این‌طور بیان کرد:

«هرگاه C برقرار باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست»

که در آن C بجای شرط موردنظر نشسته‌است. آزمونهای نوع (دوم) از این‌شکل برخوردارند:

«هرگاه $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه C برقرار خواهد بود»

حال آنکه آزمونهای نوع (سوم) باین صورت نوشته می‌شوند:

« $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر C برقرار باشد»

بزودی خواهیم دید که آزمونهایی از نوع (دوم) هستند که در زمرهٔ آزمونهای (یکم) نمی‌باشند (و بالعکس). اشخاص مبتدی، اغلب در اثر عدم درک تفاوت بین شرط لازم و شرط کافی، این آزمونها را غلط بکار می‌برند. بنابراین خواننده باید سعی کند این تمایز را در عمل و حین استفاده از آزمونی خاص مراعات نماید.

ساده‌ترین آزمون همگرایی یک شرط لازم برای همگرایی را بدست می‌دهد و می‌توان آن را بصورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۶.۱۰. هرگاه سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه جملهٔ n م آن به ۰ میل خواهد کرد، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (37.10)$$

برهان. فرض کنیم $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. در اینصورت $s_n = s_n - s_{n-1}$. وقتی $n \rightarrow \infty$ ، s_n و s_{n-1} هر دو به یک حد میل می‌کنند و در نتیجه $a_n \rightarrow 0$. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

این مثالی است از یک آزمون نوع (دوم) که از نوع (یکم) نمی‌باشد. شرط

(۳۷.۱۰) برای همگرایی کافی نخواهد بود. مثلاً، وقتی $a_n = 1/n$ ، شرط $a_n \rightarrow 0$ برقرار است اما سری $\sum 1/n$ واگرا می‌باشد. فایده واقعی این آزمون در این است که برای واگرایی شرطی کافی در اختیار ما می‌گذارد. یعنی، هرگاه جملات a_n سری $\sum a_n$ به صفر میل نکنند، آنگاه سری مزبور باید واگرا باشد. این حکم منطقاً معادل قضیه ۶.۱۰ خواهد بود.

۱۲.۱۰ آزمونهای مقایسه‌ای برای سریهای با جملات نامنفی

در این بخش توجه ما معطوف سریهایی است که جملات نامنفی دارند، یعنی سریهایی به شکل $\sum a_n$ که در آنها هر $a_n \geq 0$. چون مجموعه‌های جزئی این سریها صعودی هستند می‌توانیم از قضیه ۱.۱۰ استفاده کرده شرط لازم و کافی زیر را برای همگرایی بدست آوریم.

قضیه ۷.۱۰. فرض کنیم بازای هر $n \geq 1$ ، $a_n \geq 0$. در اینصورت سری $\sum a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله مجموعه‌های جزئی آن از بالا کراندار باشد.

هرگاه مجموعه‌های جزئی از بالا به عددی مثل M کراندار باشند آنگاه مجموع سری نمی‌تواند از M تجاوز نماید.

مثال ۱. از قضیه ۷.۱۰ می‌شود برای اثبات همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ استفاده کرد. با استفاده از نامساوی

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

می‌توانیم مجموعه‌های جزئی این سری را از بالا تخمین بزنیم؛ صحت این نامساوی بازای هر $k \geq 1$ واضح است زیرا $k!$ از $k - 1$ سازه تشکیل شده که هر یک ناکثر از ۲ می‌باشد. بنابراین داریم

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

که آخرین سری یک سری هندسی است. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ همگرا بوده و دارای مجموعی نایبتر از ۲ خواهد بود. بعداً خواهیم دید که مجموع این سری $e - 1$ است که در آن e عدد اولر می‌باشد.

همگرایی مثال قبل از طریق مقایسه جملات سری داده شده با جملات یک سری با همگرایی معلوم صورت گرفت. می‌توان این فکر را بیشتر دنبال کرد و به چند آزمون بنام آزمونهای مقایسه‌ای دست یافت.

قضیه ۸.۱۰. آزمون مقایسه‌ای. فرض کنیم بازای هر $n \geq 1$ ، $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$.

هرگاه عدد ثابت و مثبت c وجود داشته باشد بطوری که برای هر n ,

$$a_n \leq cb_n \quad (38.10)$$

آنگاه همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب خواهد کرد.

توجه: حاصل این قضیه را می‌شود این طور هم بیان کرد:

«اگرایی $\sum a_n$ و اگرایی $\sum b_n$ را ایجاب می‌کند.»

این حکم منطقاً معادل قضیه ۸.۱۰ است. وقتی نامساوی (۳۸.۱۰) برقرار باشد می‌گوئیم سری $\sum b_n$ بر سری $\sum a_n$ تسلط داد.

برهان. فرض کنیم $s_n = a_1 + \dots + a_n$ و $t_n = b_1 + \dots + b_n$. در اینصورت (۳۸.۱۰) ایجاب می‌کند که $s_n \leq ct_n$. اگر $\sum b_n$ همگرا باشد مجموعه‌های جزئی آن، مثلاً به M ، کراندار می‌باشند. پس $s_n \leq cM$ و در نتیجه $\sum a_n$ نیز همگرا است زیرا مجموعه‌های جزئی آن به cM کراندارند. این برهان را کامل خواهد کرد.

حذف تعدادی متناهی جمله از اول یک سری هیچ اثری برهمگرایی و یا واگرایی آن ندارد. لذا اگر نامساوی (۳۸.۱۰) فقط برای کلیه n های ناکثر از N معتبر باشد قضیه ۸.۱۰ بازهم بقوت خود باقی خواهد بود.

قضیه ۹.۱۰. آزمودن مقایسه‌ای حدی. فرض کنیم برای هر $n \geq 1$ ، $a_n > 0$ و $b_n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \quad (39.10)$$

در اینصورت $\sum a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر $\sum b_n$ چنین باشد.

برهان. N ی هست که $n \geq N$ نامساویهای $1/2 < a_n/b_n < 3/2$ را ایجاب می‌کند. بنابراین، برای هر $n \geq N$ ، $a_n < 3b_n/2$ و $b_n < 2a_n$ ، و قضیه از دو بار بکار بردن قضیه ۸.۱۰ نتیجه خواهد شد.

توجه داشته باشید که قضیه ۹.۱۰ وقتی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = c$ نیز برقرار است بشرط آنکه $c > 0$ زیرا در اینصورت داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/(cb_n) = 1$ و می‌توانیم $\sum a_n$ را با $\sum (cb_n)$ مقایسه کنیم. اما اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ ، تنها می‌توان این نتیجه را گرفت که همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

تعریف. دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از اعداد مختلط را مجانباً مساوی گویند هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

این رابطه را اغلب بصورت علامتی این‌طور می‌نویسند:

$$a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty \text{ وقتی } (40.10)$$

نماد $a_n \sim b_n$ را می‌خوانند « a_n مجانباً مساوی b_n است»، وهدف رساندن این مطلب است که a_n و b_n بازای n ‌های بزرگ لزوماً یک رفتار را دارند. با استفاده از این اصطلاح می‌توان آزمون مقایسه‌ای حدی را بصورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱۰.۱۰. دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ با جملات مثبت و مجانباً مساوی با هم همگرا و یا باهم واگرا خواهند بود.

مثال ۲. تابع زتای ریمان. درمثال ۱ ازبخش ۷.۱۰ ثابت کردیم که $\sum 1/(n^2 + n)$ یک سری سری توی هم‌رو همگرا است. اگر ازاین بعنوان یک سری مقایسه‌ای استفاده‌کنیم نتیجه می‌شود که $\sum 1/n^2$ همگرا است زیرا، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $1/n^2 \sim 1/(n^2 + n)$. همچنین $\sum 1/n^2$ بر $\sum 1/n^s$ ، بازای $s \geq 2$ ، تسلط دارد، و درنتیجه $\sum 1/n^s$ بازای هر $s \geq 2$ حقیقی همگرا خواهد بود. دربخش بعد ثابت می‌کنیم که این سری بازای هر $s > 1$ نیز همگرا می‌باشد. مجموع آن، که با $\zeta(s)$ (زتا حرف یونانی زتا است) نموده می‌شود، معرف تابع مهمی درآنالیز است که به تابع زتای دیمان شهرت دارد:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1 \text{ اگر}$$

اولر درمورد $\zeta(s)$ دستورهای جالب بسیاری را کشف کرد. او بسویژه دریافت که $\zeta(2) = \pi^2/6$ ، نتیجه‌ای که حصول بدان دراین مرحله آسان نخواهد بود.

مثال ۳. چون $\sum 1/n$ واگرا است پس هر سری با جملات مثبت و مجانباً مساوی $1/n$ باید واگرا باشد. مثلاً این موضوع درمورد دوسری

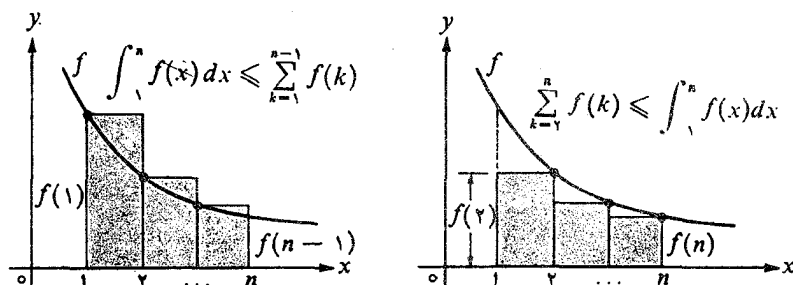
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$$

صادق است. رابطه $\sin(1/n) \sim 1/n$ ازاین مطلب که «وقتی $x \rightarrow 0$ ، $(\sin x)/x \rightarrow 1$ » نتیجه خواهد شد.

۱۳.۱۰ آزمون انتگرال

برای آنکه از آزمونهای مقایسه‌ای بنحومؤثری استفاده شود باید چند نمونه از سریهای رفتار معلوم در دسترس باشند. سری هندسی و تابع زتا بسترای این منظور مفیدند. مثالهای

جدید را می توان خیلی ساده با بکارگیری آزمون انتگرال، که ابتدا توسط کشی در سال ۱۸۳۷ ثابت شد، بدست آورد.



شکل ۴.۱۰ برهان آزمون انتگرال

قضیه ۱۱.۱۰. آزمون انتگرال. فرض کنیم f یک تابع نزولی و مثبت باشد که برای هر x حقیقی ناکمتر از ۱ تعریف شده است. برای هر $n \geq 1$ قرار می دهیم

$$t_n = \int_1^n f(x) dx \quad \text{و} \quad s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

دو اینصورت دنباله های $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ یا هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا.

برهان. از مقایسه f با توابع پله ای مناسب، نظیر آنهایی که در شکل ۴.۱۰ پیشنهاد شده، نامساویهای

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

یا $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$ را بدست می آوریم. چون هر دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ صعودی هستند این نامساویها نشان می دهند که هر دو از بالا کراندارند یا هر دو بی کران. بنابراین، همانطور که حکم شده، هر دو دنباله همگرا و یا هر دو واگرا می باشند.

مثال ۱. بکمک آزمون انتگرال می توان ثابت کرد که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{همگرا است اگر و فقط اگر} \quad s > 1$$

با فرض $f(x) = x^{-s}$ چنین خواهیم داشت:

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}, & s \neq 1 \\ \log n, & s = 1 \end{cases}$$

اگر $s > 1$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $n^{1-s} \rightarrow 0$ و در نتیجه $\{t_n\}$ همگرا است. این، بنا بر آزمون انتگرال، همگرایی سری را برای $s > 1$ ایجاب می‌کند. هرگاه $s \leq 1$ آنگاه $t_n \rightarrow \infty$ و سری واگرا می‌باشد. حالت خاص $s = 1$ (سری هارمونیک) قبلاً در بخش ۵.۱۰ مطرح شد. لایب‌نیتز از واگرایی این سری خبر داشت.

مثال ۲. از همین روش می‌شود استفاده کرد و ثابت نمود که

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \quad \text{همگرا است اگر و فقط اگر } s > 1.$$

(برای احتراز از n که برای آن $\log n$ صفر است مجموع را از $n = 2$ آغاز می‌کنیم.)
انتگرال نظیر در این حالت چنین است:

$$t_n = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s} dx = \begin{cases} \frac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1-s} & \text{اگر } s \neq 1 \\ \log(\log n) - \log(\log 2) & \text{اگر } s = 1 \end{cases}$$

لذا $\{t_n\}$ همگرا است اگر و فقط اگر $s > 1$ ، و در نتیجه، بنا بر آزمون انتگرال، همین وضع در مورد سری مورد بحث صادق خواهد بود.

۱۴.۱۰ تمرینات

همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بیازمائید. در هر حالت دلیلی برای تصمیم خود ذکر نمائید.

- | | | | |
|---|----|---|----|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} \log(2n+1)}{n(n+1)}$ | ۲ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-3)(2n-1)}$ | ۱ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ | ۴ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ | ۳ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ | ۶ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ \sin nx }{n^2}$ | ۵ |
| $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$ | ۸ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ | ۷ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{(n+1)^2 - 1}$ | ۱۰ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ | ۹ |
| $ a_n < 10, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ a_n }{10^n}$ | ۱۲ | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^s}$ | ۱۱ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2(n\pi/3)}{2^n}$ | ۱۴ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ | ۱۳ |

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \quad .16 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx \quad .18 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \quad .17$$

۱۹. فرض کنید f یک تابع صعودی نامنفی باشد که برای هر $x \geq 1$ تعریف شده است. با استفاده از روش برهان آزمون انتگرال نشان دهید که

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

$f(x)$ را مساوی $\log x$ اختیار کرده و این نامساویها را نتیجه بگیرید:

$$(41.10) \quad en^n e^{-n} < n! < e^{n+1} e^{-n}.$$

اینها بزرگی $n!$ را بطور غیردقیق تخمین می‌زنند. از (41.10) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{e^{1/n}}{e} < \frac{(n!)^{1/n}}{n} < \frac{e^{1/n} n^{1/n}}{e}.$$

حال اگر $n \rightarrow \infty$ درخواهیم یافت که

$$\text{وقتی } n \rightarrow \infty, \frac{(n!)^{1/n}}{n} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ یا } \frac{n}{e} \sim (n!)^{1/n}.$$

۱۵.۱۰ آزمون ریشه و آزمون نسبت برای سربهای با جملات نامنفی

کشی، با استفاده از سری هندسی $\sum x^n$ بعنوان یک سری مقایسه‌ای، دو آزمون مفید ارائه داد که به آزمون ریشه و آزمون نسبت معروف شده‌اند.

اگر جملات سری $\sum a_n$ (از مرحله‌ای به بعد) در یک نامساوی بشکل

$$(42.10) \quad 0 < x < 1, \text{ که در آن } 0 \leq a_n \leq x^n$$

صدق کنند با استفاده مستقیم از آزمون مقایسه‌ای (قضیه ۸.۱۰) می‌بینیم که $\sum a_n$ همگرا می‌باشد. نامساویهای (42.10) با نامساویهای

$$(43.10) \quad 0 \leq a_n^{1/n} \leq x$$

معادلند و باین جهت است که این را آزمون ریشه نام داده‌اند.

چنانچه دنباله $\{a_n^{1/n}\}$ همگرا باشد این آزمون را می‌توان بشکل مفیدتری بیان کرد که در آن از x نامی برده نمی‌شود.

قضیه ۱۲.۱۰. آزمون ریشه. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات نامنفی باشد

بطوری که

$$a_n^{1/n} \rightarrow R, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

(الف) اگر $R < 1$ سری همگرا است.

(ب) اگر $R > 1$ سری واگرا است.

(پ) چنانچه $R = 1$ آزمون بی نتیجه خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $R < 1$ و x را طوری اختیار می‌کنیم که $R < x < 1$. پس (۴۳.۱۰) باید بازای هر n ناکثر از N ی برقرار باشد. از اینرو، بنا بر آزمون مقایسه‌ای، $\sum a_n$ همگرا می‌باشد. این (الف) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (ب) ملاحظه می‌کنیم که $R > 1$ ایجاب می‌کند که بازای بی نهایت مقدار برای n ، $a_n > 1$ ، و در نتیجه a_n نمی‌تواند به ۰ میل کند. بنا بر این، طبق قضیه ۶.۱۰ $\sum a_n$ واگرا می‌باشد. این (ب) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (پ) به دو مثال $a_n = 1/n$ و $a_n = 1/n^2$ توجه می‌کنیم. در هر دو حالت $R = 1$ زیرا، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $n^{1/n} \rightarrow 1$ [رک. معادله (۱۲.۱۰)] از بخش [۲.۱۰]، اما $\sum 1/n$ واگرا است در حالی که $\sum 1/n^2$ همگرا می‌باشد.

مثال ۱. آزمون ریشه تعیین همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-n}$ را آسان می‌کند زیرا،

$$a_n^{1/n} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

مثال ۲. با استفاده از آزمون ریشه در مورد $\sum [n/(n+1)]^{n^2}$ می‌بینیم که، بنا بر معادله (۱۳.۱۰) از بخش ۲.۱۰،

$$a_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e}, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

چون $1/e < 1$ سری مورد نظر همگرا خواهد بود.

اگر آزمون مقایسه‌ای را با اندک تفاوتی بکار ببریم آزمون نسبت بدست می‌آید.

قضیه ۱۳.۱۰. آزمون نسبت. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد بطوری که

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

(الف) اگر $L < 1$ سری همگرا است.

(ب) اگر $L > 1$ سری واگرا است.

(پ) چنانچه $L = 1$ آزمون بی نتیجه خواهد بود.

پرهان. فرض کنیم $L < 1$ و x را طوری اختیار می‌کنیم که $L < x < 1$. پس باید N ی باشد که برای هر $n \geq N$ ، $a_{n+1}/a_n < x$. این ایجاب می‌کند که

$$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n}, \quad n \geq N$$

بعبارت دیگر، دنباله $\{a_n/x^n\}$ برای $n \geq N$ نزولی است. بخصوص، وقتی $n \geq N$ باید داشته باشیم $a_n/x^n \leq a_N/x^N$ ، یا، به بیان دیگر،

$$c = \frac{a_N}{x^N} \text{ که در آن } a_n \leq cx^n$$

ازاینرو $\sum a_n$ تحت تسلط سری همگرای $\sum x^n$ است. این (الف) را ثابت خواهد کرد. برای اثبات (ب) کافی است ملاحظه کنیم که $L > 1$ ایجاب می‌کند که برای کلیه n های ناکثر از N ، $a_{n+1} > a_n$ ، و در نتیجه a_n نمی‌تواند به ۰ نزدیک شود. بالاخره (پ) با استفاده از همان مثالهای ذکر شده در قضیه ۱۲.۱۰ ثابت خواهد شد.

تذکر. اگر نسبت آزمونی a_{n+1}/a_n همیشه از ۱ کمتر باشد لازم نیست که حد L نیز از ۱ کمتر بشود. مثلاً سری توافقی، که واگرا است، نسبت آزمونی $n/(n+1)$ را دارد که همواره از ۱ کمتر است ولی حد L مساوی ۱ می‌باشد. از سوی دیگر، برای واگرایی سری کافی است نسبت آزمونی برای همه n های بقدرکافی بزرگ از ۱ بیشتر باشد زیرا برای چنین n هایی داریم $a_{n+1} > a_n$ و a_n نمی‌تواند به ۰ نزدیک گردد.

مثال ۳. همگرایی سری $\sum n!/n^n$ را می‌توان با آزمون نسبت ثابت کرد. نسبت جملات متوالی چنین است:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n}$$

که، بنا بر دستور (۱۳.۱۰) ازبخش ۲.۱۰، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به $1/e$ میل می‌کند. چون $1/e < 1$ پس سری همگرا خواهد بود. بخصوص این ایجاب می‌کند که جمله عمومی سری باید به ۰ میل کند؛ یعنی،

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{وقتی}$$

این را اغلب این‌طور توصیف می‌کنند که می‌گویند n^n ، برای n های بزرگ، از $n!$ «سریعتر رشد می‌کند.» همچنین، با تعمیم طبیعی نماد O ، (۴۴.۱۰) را می‌توانیم باین صورت بنویسیم: وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $n! = o(n^n)$.

توجه: رابطه (۴۴.۱۰) را می‌شود مستقیماً هم ثابت کرد باین صورت که بنویسیم

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{k}{n} \cdot \frac{k+1}{n} \cdots \frac{n}{n}$$

که در آن اگر n زوج باشد $k = n/2$ و، اگر n فرد باشد، $k = (n-1)/2$. چنانچه $n \geq 2$ حاصلضرب k سازه اول سمت راست از $(1/2)^k$ تجاوز نمی‌کند و هر یک از سازه‌های باقیمانده از ۱ بیشتر نیست. چون، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $(1/2)^k \rightarrow 0$ این (۴۴.۱۰) را ثابت خواهد کرد. رابطه (۴۴.۱۰) را می‌توان از (۴۱.۱۰) نیز نتیجه گرفت.

خواننده باید درک کند که آزمون ریشه و نسبت هر دو در واقع حالات خاصی از آزمون مقایسه‌ای هستند. در هر دو آزمون، وقتی حالت (الف) برقرار باشد، همگرایی از این مطلب نتیجه می‌شود که سری مورد بحث تحت تسلط سری هندسی مناسبی چون $\sum x^n$ می‌باشد. فایده این آزمون‌ها در عمل این است که به اطلاعات روشنی از یک سری مقایسه‌ای خاص $\sum x^n$ احتیاجی نیست. با استفاده از آزمون مقایسه‌ای بطرق دیگر می‌توان آزمونهای همگرایی دیگری را نیز نتیجه گرفت. دو نمونه مهم، که به آزمون «آب» و آزمون گاوس مشهورند، در تمرینات ۱۶ و ۱۷ بخش ۱۶.۱۰ توصیف شده‌اند. این آزمون‌ها، وقتی آزمون نسبت از کار می‌افتد، اغلب یاری دهنده خواهند بود.

۱۶.۱۰ تمرینات

همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بیازمائید و برای تصمیم خود در هر مورد دلیل بیاورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n} \cdot 2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \cdot 4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \cdot 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}} \cdot 6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \cdot 5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n \cdot 8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/n}} \cdot 7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2} \right) \cdot 10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \cdot 9$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n} \cdot 12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!} \cdot 11$$

$$.۱۳ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \quad .۱۴ \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n |\sin nx|, r > 0$$

۱۵. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند بطوری که برای هر $n \geq N$ ، $a_n > 0$ و $b_n > 0$ و قرار دهید $c_n = b_n - b_{n+1} a_{n+1}/a_n$. ثابت کنید:

(الف) هرگاه ثابت مثبتی مانند r باشد که برای هر $n \geq N$ ، $c_n \geq r > 0$ ، آنگاه $\sum a_n$ همگرا است [داهنمائی: نشان دهید که $\sum_{k=N}^n a_k \leq a_N b_N / r$]
(ب) هرگاه برای $n \geq N$ ، $c_n \leq 0$ و $1/b_n \leq 0$ ، آنگاه $\sum a_n$ واگرا است [داهنمائی: نشان دهید که $\sum a_n$ بر $1/b_n$ تسلط دارد].

۱۶. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد. آزمون دآب را ثابت کنید: هرگاه اعدادی مثل $r > 0$ و $N \geq 1$ باشند بطوری که

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}, n \geq N$$

آنگاه $\sum a_n$ همگرا است. اگر

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}, n \geq N$$

سری $\sum a_n$ واگرا خواهد بود. [داهنمائی: از تمرین ۱۵ با فرض $b_{n+1} = n$ استفاده کنید.]

۱۷. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد. آزمون گاوس را ثابت کنید: هرگاه اعدادی مانند $N \geq 1$ ، $s > 1$ و $M > 0$ باشند بطوری که

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^s}, n \geq N$$

که در آن برای هر n ، $|f(n)| \leq M$ ، آنگاه $\sum a_n$ اگر $A > 1$ همگرا و اگر $A \leq 1$ واگرا می باشد. [داهنمائی: چنانچه $A \neq 1$ از تمرین ۱۶ استفاده کنید. اگر $A = 1$ تمرین ۱۵ را با فرض $b_{n+1} = n \log n$ بکار ببرید.]

۱۸. با استفاده از آزمون گاوس (در تمرین ۱۷) ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^k$$

برای $k > 2$ همگرا و برای $k \leq 2$ واگرا است. آزمون نسبت در این مثال عاجز است.

تا کنون بیشتر به سریهای با جملات نامنفی توجه داشته ایم. حال می خواهیم نظر خود را

معطوف سریهای سازیم که جملاتشان مثبت یا منفی هستند. ساده‌ترین مثالها وقتی ظاهر می‌شوند که علامت جملات متناوباً تغییر می‌کند. اینها را سریهای متناوب می‌نامند و دارای شکل

$$(۴۵.۱۰) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \\ = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

هستند که در آنها هر $a_n > 0$.

بسیاری از محققان اولیه از چند سری متناوب خبر داشتند. ما قبلاً سری لگاریتمی

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

را ذکر کرده‌ایم. همانطور که بعداً ثابت خواهیم کرد این سری برای $1 < x \leq 1$ — همگرا بوده و مجموعش $\log(1+x)$ است. این سری برای x مثبت متناوب است. بخصوص، وقتی $x=1$ ، دستور

$$(۴۶.۱۰) \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

را خواهیم داشت که به ما می‌گوید که مجموع سری توافقی متناوب برابر $\log 2$ می‌باشد. به این نتیجه از آن جهت که سری توافقی $\sum 1/n$ واگرا است توجه خاصی مبذول می‌شود. یک دستور که با (۴۶.۱۰) خیلی ارتباط دارد دستور جالب

$$(۴۷.۱۰) \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

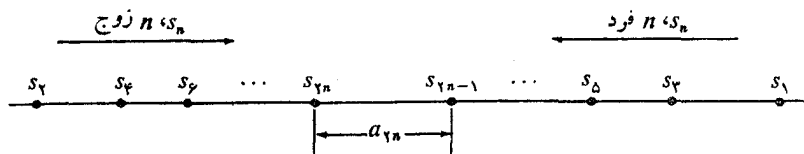
است که در سال ۱۶۷۱ توسط جیمز گرگوری کشف شد. لایب نیز این نتیجه را مجدداً در سال ۱۶۷۳، هنگامی که سرگرم محاسبه مساحت یک قرص مستدیریکه بود، بدست آورد. سریهای (۴۶.۱۰) و (۴۷.۱۰) هر دوسریهای متناوب بشکل (۴۵.۱۰) هستند که در آنها دنباله $\{a_n\}$ به صفر نزول می‌کند. در سال ۱۷۰۵ لایب نیز متوجه شد که این خاصیت ساده a_n همگرایی هر سری متناوب را ایجاب خواهد کرد.

قضیه ۱۴.۱۰. قاعده لایب نیز. هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی با حد ۰ باشد آنگاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ همگرا است، چنانچه K مجموع این سری و s_n مجموع جزئی m آن باشد نامساویهای زیر را نیز خواهیم داشت:

$$(۴۸.۱۰) \quad 0 < (-1)^n (s - s_n) < a_{n+1}, \quad n \geq 1$$

نامساویهای (۴۸.۱۰) روش مفیدی را برای تخمین خطای حاصل از تقریب K به هر مجموع جزئی s_n بدست می‌دهد. اولین نامساوی به ما می‌گوید که خطا، یعنی $s - s_n$ ،

دارای علامت n (۱-) است که همان علامت اولین جمله بحساب نیامده، یعنی a_{n+1} (۱-)، خواهد بود. نامساوی دوم این طور می گوید که قدرمطلق این خطا از قدرمطلق اولین جمله صرف نظر شده کمتر است.



شکل ۵.۱۰. برهان قاعده لایب نیتز برای سریهای متناوب.

برهان. اثبات قاعده لایب نیتز کاملاً ساده بوده و در شکل ۵.۱۰ منعکس شده است. مجموعه‌های جزئی s_{2n} (مرکب از تعدادی زوج جمله) یک دنباله صعودی را می سازند زیرا $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. به همین نحو، مجموعه‌های جزئی s_{2n-1} یک دنباله نزولی را تشکیل می دهند. هر دو دنباله ازپائین به s_4 و از بالا به s_1 کراندارند. بنابراین، هر دنباله $\{s_{2n}\}$ و $\{s_{2n-1}\}$ ، بعلت یکنوا و کراندار بودن، به حدی همگرا خواهد بود، مثلاً $s_{2n} \rightarrow S'$ و $s_{2n-1} \rightarrow S''$. اما $S' = S''$ زیرا

$$\begin{aligned} S' - S'' &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_{2n}) = 0. \end{aligned}$$

چنانچه این حد مشترک S باشد واضح است که سری همگرا بوده و دارای مجموع S خواهد بود.

برای بدست آوردن نامساویهای (۴۸.۱۰) این طور استدلال می کنیم: گوئیم چون s_{2n} و s_{2n-1} در نتیجه داریم:

$$S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1} < s_{2n} < s_{2n+2} \leq S, n \geq 1$$

بازای هر $n \geq 1$

ازاینرو نامساویهای

$$0 < S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

و

$$0 < s_{2n-1} - S \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$$

را خواهیم داشت که، اگر با هم گرفته شوند، (۴۸.۱۰) را نتیجه خواهند داد. این برهان را تمام می کند.

مثال ۱. چون، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $1/n \rightarrow 0$ پس همگرایی سری توافقی متناوب $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ یک نتیجه فوری قاعده لایب نیتز خواهد بود. مجموع این سری در مثال ۴ در زیر حساب شده است.

مثال ۲. سری متناوب $\sum (-1)^n (\log n)/n$ همگرا است. برای اثبات آن توسط قاعده لایب‌نیتز باید نشان دهیم که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $(\log n)/n \rightarrow 0$ و $(\log n)/n$ نزولی است. اولین حکم از معادله (۱۱.۱۰) در بخش ۲۰.۱۰ نتیجه می‌شود. برای اثبات حکم دوم توجه می‌کنیم که تابع

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

دارای مشتق $f'(x) = (1 - \log x)/x^2$ است. وقتی $x > e$ این مشتق منفی است و f نزولی خواهد بود. بخصوص، برای $n \geq 3$ ، $f(n+1) < f(n)$.

مثال ۳. یک رابطه حدی مهم را می‌توان بعنوان نتیجه‌ای از قاعده لایب‌نیتز بدست آورد. فرض می‌کنیم

$$a_1 = 1, a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}, \dots,$$

که، در حالت کلی،

$$a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \text{ و } a_{2n-1} = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

با آسانی می‌شود تحقیق کرد که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $a_n \rightarrow 0$ و a_n پس سری $\sum (-1)^{n-1} a_n$ همگرا خواهد بود. مجموع این سری را با C و مجموع جزئی n م آن را با s_n می‌نمایانیم. مجموع جزئی $(2n-1)$ م را می‌توان باین صورت بیان کرد:

$$\begin{aligned} s_{2n-1} &= 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n. \end{aligned}$$

چون، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $s_{2n-1} \rightarrow C$ دستور حدی زیر را خواهیم داشت:

$$(49.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = C.$$

عدد C که با این حد تعریف می‌شود ثابت اویلر نام دارد (گاهی اوقات آن را با γ نشان می‌دهند). این عدد، مانند π و e ، در بسیاری از دستورهای تحلیلی ظاهر می‌شود. مقدار آن، که تا ده رقم اعشار درست است، برابر 0.5772156649 می‌باشد. یک مسئله جالب، که تا این لحظه بی‌جواب مانده، این است که آیا ثابت اویلر گویا است یا گنگ. می‌توان رابطه (49.10) را باین صورت هم بیان کرد:

$$(50.10) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + C + o(1), n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

از این نتیجه می شود که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $(1 + 1/2 + \dots + 1/n)/\log n \rightarrow 1$ ، پس مجموعه های جزئی سری توافقی مجانباً مساوی $\log n$ خواهند بود. یعنی داریم:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n, n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

رابطه (۵۰.۱۰) نه تنها واگرایی سری توافقی را توضیح می دهد بلکه ما را عملاً از میزان رشد مجموعه های جزئی آن نیز با خبر می سازد. در مثال بعدی از این رابطه استفاده کرده ثابت می کنیم مجموع سری توافقی متناوب مساوی $\log 2$ است.

مثال ۴. فرض می کنیم $s_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1}/k$ می دانیم که، وقتی $m \rightarrow \infty$ ، s_m به حدی میل می کند، و حال ثابت می کنیم این حد برابر $\log 2$ می باشد. وقتی m زوج است، مثلاً $m = 2n$ ، می توان جملات مثبت و منفی را از یکدیگر جدا کرد و نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} s_{2n}' &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

با اعمال (۵۰.۱۰) در مورد هر مجموع سمت راست خواهیم داشت

$s_{2n} = (\log 2n + C + o(1)) - (\log n + C + o(1)) = \log 2 + o(1)$ ، پس، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $s_{2n} \rightarrow \log 2$ ، این ثابت می کند که مجموع سری توافقی متناوب برابر $\log 2$ می باشد.

۱۸.۱۰ همگرایی شروط و همگرایی مطلق

با آنکه سری توافقی متناوب $\sum (-1)^{n-1}/n$ همگرا است اما سربیی که از تعویض هر جمله این سری با قدرمطلقش بدست می آید واگرا خواهد بود. این نشان می دهد که همگرایی $\sum a_n$ ، در حالت کلی، همگرایی $\sum |a_n|$ را ایجاب نمی کند. از سوی دیگر قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۵.۱۵. فرض کنیم $\sum |a_n|$ همگرا باشد. در اینصورت $\sum a_n$ نیز همگرا بوده و خواهیم داشت

$$(\Delta 1.10) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

برهان. ابتدا فرض می کنیم a_n ها حقیقی باشند. قرار می دهیم $b_n = a_n + |a_n|$ ، ثابت می کنیم $\sum b_n$ همگرا است. در اینصورت (بنابر قضیه ۲.۱۰) نتیجه می شود که $\sum a_n$

باین علت که $a_n = b_n - |a_n|$ همگرا خواهد بود.

چون b_n مساوی ۰ یا $|a_n|$ است خواهیم داشت $2|a_n| \leq b_n \leq 0$ ، و در نتیجه $\sum |a_n|$ بر $\sum b_n$ تسلط دارد. بنابراین، $\sum b_n$ همگرا بوده و این، همانطور که قبلاً ذکر شد، همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب خواهد کرد.

حال فرض می‌کنیم a_n ها مختلط باشند، مثلاً $a_n = u_n + iv_n$ که در آن u_n و v_n حقیقی اند. چون $|u_n| \leq |a_n|$ همگرایی $\sum |a_n|$ همگرایی $\sum |u_n|$ را ایجاب می‌کند و این بنوبه خود، بدلیل حقیقی بودن u_n ها، سبب همگرایی $\sum u_n$ می‌گردد. بهمین نحو $\sum v_n$ همگرا می‌شود. بنا بر خاصیت خطی در سریها، سری $\sum (u_n + iv_n)$ همگرا خواهد بود. برای اثبات (۵۱.۱۵) توجه می‌کنیم که $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$ و سپس n را به ∞ میل می‌دهیم.

تعریف. سری $\sum a_n$ را بطور مطلق همگرا می‌نامند اگر که $\sum |a_n|$ همگرا باشد. آن را بطور مشروط همگرا خوانند در صورتی که $\sum a_n$ همگرا ولی $\sum |a_n|$ اگر باشد.

هرگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ بطور مطلق همگرا فرض شوند آنگاه سری $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ نیز بازای هر انتخاب α و β چنین است. این مطلب فوراً از این نامساویها نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^M |\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha| \sum_{n=1}^M |a_n| + |\beta| \sum_{n=1}^M |b_n| \leq |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |\beta| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|,$$

که نشان می‌دهند که مجموعه‌های جزئی $\sum |\alpha a_n + \beta b_n|$ کراندار می‌باشند.

۱۹.۱۵ آزمونهای همگرایی دی‌ریکله و آبل

آزمونهای همگرایی بخشهای پیشتر را، که مربوط به سریهای با جملات نامنفی بودند، می‌توان برای آزمودن همگرایی مطلق سریهای با جملات مختلط دلخواه نیز بکار برد. در این بخش دو آزمون را مطرح خواهیم کرد که غالباً در تعین همگرایی یک سری که احتمالاً بطور مطلق همگرا نیست مفید هستند. در هر دو آزمون از یک اتحاد جبری استفاده می‌شود که بافتخار ریاضیدان نروژی، نیلز هنریک آبل^۲ (۱۸۲۹-۱۸۵۲)، به دستور جمع‌بندی جزئی آبل شهرت یافته است. دستور آبل با دستور انتگرالگیری بطریقه جزء به جزء شباهت دارد و می‌توان آن را مطابق زیر توصیف کرد.

قضیه ۱۹.۱۵. دستور جمع‌بندی جزئی آبل. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد مختلط

باشند و

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

در اینصورت اتحاد

$$(۵۲.۱۰) \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1})$$

را خواهیم داشت.

برهان. هرگاه تعریف کنیم $A_0 = 0$ آنگاه برای هر $n = 1, 2, \dots$

$$a_k = A_k - A_{k-1} \quad \text{پس داریم}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}$$

که به ما (۵۲.۱۰) را خواهد داد.

اگر در (۵۲.۱۰) n را به ∞ میل دهیم خواهیم دید که سری $\sum a_k b_k$ همگرا است اگر که سری $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ و دنباله $\{A_n b_{n+1}\}$ هر دو همگرا باشند. دو آزمون بعدی شرایط کافی برای این همگرایی آنها را بدست خواهند داد.

قضیه ۱۷.۱۰. آزمون دیریکله. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات مختلط باشد که دنباله حاصل از مجموعهای جزئی آن کراندار است. همچنین $\{b_n\}$ را یک دنباله نزولی تصور کنید که به ۰ همگرا می باشد. در اینصورت سری $\sum a_n b_n$ همگرا خواهد بود.

برهان. با استفاده از نمادهای قضیه ۱۶.۱۰ معلوم می شود که $M > 0$ هست که برای هر n ، $|A_n| \leq M$. بنابراین، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $A_n b_{n+1} \rightarrow 0$. برای اثبات همگرایی $\sum a_n b_n$ کافی است نشان دهیم که سری $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ همگرا می باشد. چون b_n نامساوی

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M (b_k - b_{k+1})$$

را خواهیم داشت. اما سری $\sum (b_k - b_{k+1})$ یک سری توی هم رو همگرا است که بر

$$\sum A_k (b_k - b_{k+1})$$

تسلط دارد. این همگرایی مطلق و، در نتیجه، همگرایی $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ را ایجاب خواهد کرد.

قضیه ۱۸.۱۰. آزمون آبل. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری همگرا با جملات مختلط بوده و $\{b_n\}$ یک دنباله همگرایی یکنوا با جملات حقیقی باشد. در اینصورت سری $\sum a_n b_n$ همگرا

برهان. مجدداً از نمادهای قضیه ۱۶.۱۰ استفاده می‌کنیم. همگرایی $\sum a_n$ همگرایی دنباله $\{A_n\}$ و، در نتیجه، دنباله $\{A_n b_{n+1}\}$ را ایجاب می‌کند. همچنین $\{A_n\}$ یک دنباله کراندار است. بقیه برهان شبیه برهان آزمون دیریکله می‌باشد.

برای آنکه آزمون دیریکله بطرز مؤثری بکار رود چند سری با مجموعه‌های جزئی کراندار مورد نیاز است. البته هرسری همگرا این خاصیت را دارد. یک مثال مهم از سریهای واگرا با مجموعه‌های جزئی کراندار سری هندسی $\sum x^n$ است که در آن x یک عدد مختلط است که $|x| = 1$ ولی $x \neq 1$. قضیه بعدی یک کران بالائی را برای مجموعه‌های جزئی این سری به ما می‌دهد. وقتی $|x| = 1$ می‌توانیم بنویسیم $x = e^{i\theta}$ که در آن θ حقیقی است و قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۹.۱۰. برای هر θ حقیقی که مضرب صحیحی از π نباشد اتحاد

$$(۵۳.۱۰) \quad \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} e^{i(n+1)\theta}$$

را داریم که از آن به تخمین

$$(۵۴.۱۰) \quad \left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin \theta|}$$

می‌سیم.

برهان. اگر $x \neq 1$ مجموعه‌های جزئی سری هندسی عبارتند از

$$\sum_{k=1}^n x^k = x \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

چنانچه در این دستور بنویسیم $x = e^{i\theta}$ که در آن θ حقیقی ولی مضرب صحیحی از π نباشد خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} e^{i(n+1)\theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} e^{i(n+1)\theta}.$$

این (۵۳.۱۰) را ثابت می‌کند. برای آنکه (۵۴.۱۰) را نتیجه بگیریم کافی است توجه کنیم که $|e^{i(n+1)\theta}| = 1$ و $|\sin n\theta| \leq 1$.

چند مثال. فرض می‌کنیم $\{b_n\}$ یک دنباله نزولی از اعداد حقیقی و دارای حد ۰ باشد. با فرض $a_n = x^n$ در آزمون دیریکله که در آن x مختلط است، $|x| = 1$ و $x \neq 1$ در می‌یابیم که سری

$$(۵۵.۱۰) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

همگرا می باشد. توجه داشته باشید که قاعده لایب نیتز برای سریهای متناوب صرفاً حالت خاصی است که در آن $x = -1$. چنانچه بنویسیم $x = e^{i\theta}$ ، که در آن θ حقیقی ولی مضرب صحیحی از 2π نباشد، وبه قسمتهای حقیقی وموهومی (55.10) توجه کنیم نتیجه خواهیم گرفت که دوسری مثلثاتی

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta$$

همگرا هستند. در حالت خاص، وقتی $b_n = n^{-\alpha}$ که در آن $\alpha > 0$ ، سریهای همگرای زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^{\alpha}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^{\alpha}}.$$

وقتی $\alpha > 1$ این سریها، بدلیل آنکه تحت تسلط $\sum n^{-\alpha}$ هستند، بطورمطلق همگرا خواهند بود.

۲۰.۱۰ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۳۲ همگرایی یا واگرایی سریهای داده شده را معین کنید. در حالت همگرایی مشخص نمایید که آیا سری بطورمطلق همگرا است یا بطورمشروط.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \\ 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^5} & 4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^3 \\ 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{7^n} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \\ 7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \\ 9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(e^n + e^{-n})} \\ 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log^2(n+1)} & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+1/n)} \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad .14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{r\gamma}}{(n+1)!} \quad .13$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(n \sin \frac{1}{n} \right) \quad .16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\log n) \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad .18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n \sin \frac{1}{n} \right) \quad .17$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{2n+1} \quad .19$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\log n) \right) \quad .20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\log n} \right) \quad .22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{|\sin n|} \right) \quad .21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \quad .24$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)} \quad .23$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{n^{1/2}}{2^n} \right) \quad .26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^s} \quad .25$$

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{اگر } n \text{ مربع باشد،} \\ 1/n^2, & \text{در غیر این صورت،} \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ که در آن} \quad .27$$

$$a_n = \begin{cases} 1/n^2, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ -1/n, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ که در آن} \quad .28$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n} \quad .30$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{r/2} \quad .29$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n \sin(1/n)}{n} \quad .32$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n} \right) \quad .31$$

در هر یک از تمرینات ۳۳ تا ۴۴ مجموعه همه‌ی zهای مختلطی را بیابید که سری بازای آنها همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{rn}}{n!} \quad .34$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n \quad .33$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \quad .36$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \quad .35$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt[n]{n}} \log \frac{2n+1}{n} \quad ۳۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} \quad ۳۷$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+2)!} \quad ۴۰ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\Delta n+1}\right)^{n^2} |z|^{1/n} \quad ۳۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+3)^n}{n \log(n+1)} \quad ۴۲ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n} \quad ۴۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n \quad ۴۴ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n}{2n-1} \quad ۴۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|z|^2)^n} \quad ۴۶ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n \quad ۴۵$$

در تمرینات ۳۷ و ۴۸ مجموعه‌های حقیقی را که بازای آنها سری داده شده همگرا است مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2} \quad ۴۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sin^{2n} x}{n} \quad ۴۷$$

در تمرینات ۴۹ تا ۵۲ سریها با جملات حقیقی فرض شده‌اند.

۴۹. اگر $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد ثابت کنید $\sum 1/a_n$ واگرا است.

۵۰. اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد ثابت کنید $\sum a_n^2$ نیز چنین است. مثال نقضی بیاورید که در آن $\sum a_n^2$ همگرا ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد.

۵۱. سری همگرای $\sum a_n$ داده شده که در آن هر a_n نامنفی می‌باشد. ثابت کنید $\sum \sqrt[n]{a_n} n^{-p}$ همگرا است اگر که $p > 1/2$. برای حالت $p = 1/2$ مثال نقض بیاورید.

۵۲. احکام زیر را اثبات و یا رد کنید:

(الف) هرگاه $\sum a_n$ بطورمطلق همگرا باشد آنگاه $\sum a_n^2 / (1 + a_n^2)$ نیز چنین است؛

(ب) هرگاه $\sum a_n$ بطورمطلق همگرا بوده و هیچیک از a_n ها ۱- نباشد آنگاه $\sum a_n / (1 + a_n)$ بطورمطلق همگرا خواهد بود.

۲۱.۱۰۰ تجدید آرایش در سریها

ترتیب جملات در یک مجموع متناهی را می‌توان بدون گذاردن اثری بر مجموع آن تغییر داد. در سال ۱۸۳۳ کشی کشف حیرت‌آوری کرد و آن این بود که این مطلب در مورد یک سری نامتناهی همیشه درست نیست. برای مثال، سری توافقی متناوب

$$(۵۶.۱۰) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log 2$$

را در نظر می‌گیریم. همگرایی این سری به مجموع $\log 2$ در بخش ۱۷.۱۰ نشان داده شد. اگر جملات این سری را آرایش مجدد دهیم باین ترتیب که متناوباً پس از دو جمله مثبت یک جمله منفی بیاید سری جدیدی خواهیم داشت که می‌توان آن را باین صورت نشان داد:

$$(۵۷.۱۰) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

هر جمله سری توافقی متناوب درست یکبار در این تجدید آرایش ظاهر می‌شود و بالعکس. اما باسانی می‌توانیم ثابت کنیم که این سری جدید مجموعی بزرگتر از $\log 2$ دارد. برای این کار بصورت زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنیم t_n مجموع جزئی n (۵۷.۱۰) باشد. اگر n مضربی از ۳ باشد، مثلاً $n = 3m$ ، مجموع جزئی t_{3m} حاوی $2m$ جمله مثبت و m جمله منفی است و باین صورت خواهد بود:

$$\begin{aligned} t_{3m} &= \sum_{k=1}^{3m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{3m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{3m} \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{3m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \end{aligned}$$

در هر یک از سه مجموع آخر از رابطه مجانبی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + C + o(1), \quad n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

تا بدست آید که

$$\begin{aligned} t_{3m} &= (\log 3m + C + o(1)) - \frac{1}{2}(\log 3m + C + o(1)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\log m + C + o(1)) = \frac{3}{2} \log 2 + o(1). \end{aligned}$$

لذا، وقتی $m \rightarrow \infty$ ، $t_{3m} \rightarrow (3 \log 2)/2$. اما $t_{3m+1} = t_{3m} + 1/(3m+1)$ و $t_{3m-1} = t_{3m} - 1/(3m)$ پس، وقتی $m \rightarrow \infty$ ، t_{3m-1} و t_{3m+1} همان حد t_{3m} را خواهند داشت. بنابراین، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، مجموع جزئی t_n دارای حد $(3 \log 2)/2$ می‌باشد، پس مجموع سری (۵۷.۱۰) برابر $(3 \log 2)/2$ خواهد بود.

مثال قبل نشان می‌دهد که ممکن است تجدید آرایش جملات یک سری همگرا مجموع آن را تغییر دهد. حال ثابت می‌کنیم که این فقط وقتی رخ می‌دهد که سری مفروض بطور مشروط همگرا باشد. یعنی تجدید آرایش یک سری بطور مطلق همگرا بر مجموع آن اثری نخواهد

داشت. قبل از اثبات این مطلب، بطور دقیقتر توضیح می‌دهیم که منظور ما از تجدید آرایش چیست.

تعریف. فرض کنیم $P = \{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد. همچنین f تابعی باشد که قلمرو و بردش P بوده و از این خاصیت برخوردار است:

$$m \neq n \text{ ایجاب می‌کند که } f(m) \neq f(n).$$

چنین f ی را یک جایگشت P ، یا یک نگاشت یک به یک از P بروی خودش، می‌نامند. هرگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دوسری باشند بطوری که بازای جایگشتی چون f و هر $n \geq 1$ داشته باشیم

$$b_n = a_{f(n)}$$

آنگاه سری $\sum b_n$ را یک تجدید آرایش $\sum a_n$ می‌خوانند.

مثال. اگر $\sum a_n$ سری توافقی متناوب $(\sum a_n)$ و $\sum b_n$ سری $(\sum b_n)$ باشد خواهیم داشت $b_n = a_{f(n)}$ که در آن f جایگشتی است که با دستورهای

$$f(3n+1) = 4n+1, f(3n+2) = 4n+3, f(3n+3) = 2n+2$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۲۰.۱۰. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری بطور مطلق همگرا و دارای مجموع S باشد. در این صورت هر تجدید آرایش $\sum a_n$ نیز بطور مطلق همگرا بوده و مجموعش S خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $\sum b_n$ یک تجدید آرایش باشد، مثلاً $b_n = a_{f(n)}$. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $\sum b_n$ بطور مطلق همگرا است زیرا $\sum |b_n|$ یک سری با جملات نامنفی است که مجموعهای جزئی آن از بالا به $\sum |a_n|$ کراندارند.

برای اثبات اینکه $\sum b_n$ نیز مجموعش S است می‌نویسیم

$$S^* = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, A_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|, A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

حال گوئیم، وقتی $n \rightarrow \infty$ و $A_n \rightarrow S$ و $A_n^* \rightarrow S^*$. بنا بر این، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، عددی مانند N هست بطوری که

$$|A_N - S| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |A_N^* - S^*| < \frac{\varepsilon}{2}$$

برای این N می‌توانیم M را طوری اختیار کنیم که

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{f(1), f(2), \dots, f(M)\}.$$

این عمل امکان پذیر است زیرا برد f حاوی کلیه اعداد صحیح مثبت می‌باشد. اگر $n \geq M$ داریم

$$\begin{aligned}
 (58.10) \quad |B_n - S| &= |B_n - A_N + A_N - S| \leq |B_n - A_N| + |A_N - S| \\
 &\leq |B_n - A_N| + \frac{\varepsilon}{\gamma}.
 \end{aligned}$$

اما همچنین داریم

$$|B_n - A_N| = \left| \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{k=1}^N a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^N a_{f(k)} - \sum_{k=1}^N a_k \right|.$$

جملات $a_1, \dots, a_N$ در تفریق حذف می‌شوند، پس خواهیم داشت

$$|B_n - A_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots = |A_N^* - S^*| < \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

از تلفیق این با (58.10) می‌بینیم که بازای هر $n \geq M$ ، یعنی، وقتی $B_n \rightarrow S, n \rightarrow \infty$. این ثابت می‌کند که سری تجدید آرایش یافته $\sum b_n$ دارای مجموع S می‌باشد.

در قضیه ۲۰.۱۰ فرض همگرایی مطلق ضروری است. ریمان کشف کرد که همیشه می‌توان یک سری بطور مشروط همگرا با جملات حقیقی را طوری تجدید آرایش کرد که سری حاصل به هر مجموع از پیش معین شده همگرا باشد. استدلال ریمان مبتنی بر خاصیت ویژه‌ای است که سریهای بطور مشروط همگرا با جملات حقیقی دارا می‌باشند. یک چنین سری $\sum a_n$ بی‌نهایت جمله مثبت و بی‌نهایت جمله منفی دارد. دو سری جدید $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ را که فقط از جملات مثبت و فقط از جملات منفی حاصل می‌شوند در نظر می‌گیریم. دقیقتر بگوئیم، a_n^+ و a_n^- را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$(59.10) \quad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}.$$

هرگاه a_n مثبت باشد آنگاه $a_n^+ = a_n$ و $a_n^- = 0$ ؛ هرگاه a_n منفی باشد آنگاه $a_n^- = a_n$ و $a_n^+ = 0$. دوسری جدید $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ با سری داده شده $\sum a_n$ بصورت زیر مربوط می‌شوند.

قضیه ۲۱.۱۰. اگر سری $\sum a_n$ با جملات حقیقی مفروض باشد a_n^+ و a_n^- با (59.10) تعریف می‌کنیم.

(الف) چنانچه $\sum a_n$ بطور مشروط همگرا باشد هم $\sum a_n^+$ و اگر است و هم $\sum a_n^-$.

(ب) اگر $\sum a_n$ بطور مطلق همگرا باشد $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ هر دو همگرا بوده و

خواهیم داشت

$$(60.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

برهان. برای اثبات قسمت (الف) توجه می‌کنیم که $\sum a_n/2$ همگرا و $\sum |a_n|/2$

واگرا است. پس، بنا بر خاصیت خطی (قضیه ۳۰.۱۰)، $\sum a_n^+$ همگرا و $\sum a_n^-$ واگرا می باشند. برای اثبات قسمت (ب) ملاحظه می کنیم که $\sum |a_n|/2$ و $\sum a_n/2$ هر دو همگرا هستند، پس، بنا بر خاصیت خطی (قضیه ۲۰.۱۰)، هر دو $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ همگرا می باشند. چون $a_n = a_n^+ + a_n^-$ رابطه (۶۰.۱۰) را نیز بدست خواهیم آورد.

حال می توان قضیه تجدید آرایش ریمان را باسانی ثابت کرد.

قضیه ۲۲.۱۰. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری بطور مشروط همگرای با جملات حقیقی بوده و S عدد حقیقی معلومی باشد. در این صورت تجدید آدایشی از $\sum a_n$ مانند $\sum b_n$ هست که به مجموع S همگرا می باشد.

پوهان. a_n^+ و a_n^- را از روی (۵۹.۱۰) تعریف می کنیم. چون $\sum a_n$ بطور مشروط همگرا است پس سریهای $\sum a_n^+$ و $\sum a_n^-$ هر دو واگرا می باشند. $\sum a_n$ را بصورت زیر آرایش مجدد می کنیم: درست آنقدر از جمله های مثبت a_n^+ اختیار می کنیم که مجموع آنها از S بیشتر نشود. چنانچه p_1 جمله مثبت لازم باشد خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^q a_n \leq S, q < p_1 \text{ اما, } \sum_{n=1}^{p_1} a_n > S$$

این کار همیشه امکان دارد زیرا مجموعهای جزئی $\sum a_n^+$ به $+\infty$ میل می کنند. به این مجموع درست آنقدر جمله منفی a_n^- ، مثلاً n_1 تا، می افزاییم که حاصل از S کمتر باشد. این نیز ممکن است زیرا مجموعهای جزئی a_n^- به $-\infty$ میل می نمایند. پس چنین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^m a_n^- \geq S, m < n_1 \text{ اما, } \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^- < S$$

حال این عمل را تکرار می کنیم، درست آنقدر جمله مثبت جدید می افزاییم که مجموع را از S بیشتر کنند و بعد درست آنقدر جمله منفی اضافه می کنیم که مجموع از S کمتر گردد. اگر به این کار ادامه دهیم به تجدید آرایش $\sum b_n$ دست می یابیم. تفاوت هر مجموع جزئی $\sum b_n$ با S حداکثر در یک جمله a_n^+ یا a_n^- است. اما، بدلیل همگرا بودن $\sum a_n$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $a_n \rightarrow 0$ ، پس مجموعهای جزئی $\sum b_n$ به S میل خواهند کرد. این ثابت می کند که، طبق حکم، سری تجدید آرایش یافته $\sum b_n$ همگرا است و دارای مجموع S می باشد.

۲۲.۱۰ تمرینات متفرقه برای دوره

۱. (الف) فرض کنید $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ را $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ را حساب کنید.

(ب) فرض کنید $a_n = (n+1)^c - n^c$ که در آن c حقیقی است. c هائی را تعیین کنید که دنباله $\{a_n\}$ بازای آنها همگرا است و آنهائی را معین نمایید که درازای آنها

واگزامی باشد. در حالت همگرایی حد دنباله را محاسبه نمایید. بخاطر داشته باشید که c می‌تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد.

۲. (الف) اگر $0 < x < 1$ ثابت کنید، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $(1 + x^n)^{1/n}$ به یک حد نزدیک می‌شود و این حد را محاسبه نمایید.

(ب) اگر $a > 0$ و $b > 0$ مفروض باشند $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ را حساب کنید.

۳. دنباله $\{a_n\}$ بطور بازگشتی برحسب a_1 و a_2 با این دستور تعریف شده است:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, n \geq 2$$

(الف) با فرض همگرا بودن $\{a_n\}$ حد دنباله را برحسب a_1 و a_2 محاسبه کنید. حاصل میانگین حسابی و زنندار a_1 و a_2 خواهد بود.

(ب) ثابت کنید که دنباله $\{a_n\}$ بازای هر انتخابی از a_1 و a_2 همگرا است. می‌توانید a_1 را از a_2 کمتر بگیرید. [دانه‌نمایی: به $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n+1}\}$ جداگانه توجه کنید].

۴. دنباله $\{x_n\}$ با دستور بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$$

ثابت کنید که این دنباله همگرا است و حد آن را بیابید.

۵. دنباله $\{x_n\}$ با دستور بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$x_0 = 1, x_1 = 1, \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$$

ثابت کنید که این دنباله همگرا است و حد آن را پیدا کنید.

۶. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند بطوری که بازای هر n ,

$$e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$$

(الف) نشان دهید که $a_n > 0$ نامساوی $b_n > 0$ را ایجاب می‌کند.

(ب) اگر بازای هر n ، $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد نشان دهید که $\sum (b_n/a_n)$ همگرا است.

در تمرینات ۷ تا ۱۱ همگرایی سری داده شده را بیازمائید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) \quad ۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n) \quad ۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}} \quad ۱۰ \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \quad ۹$$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ که در آن اگر n فرد باشد $a_n = 1/n$ و اگر n زوج باشد، $a_n = 1/n^2$

۱۲. نشان دهید که سری نامتناهی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n^a + 1} - \sqrt{n^a})$$

بازای $a > 2$ همگرا و درازای $a = 2$ و اگر a است.

۱۳. $a_n > 0$ بازای هر n داده شده است. برای هر یک از احکام زیر یا دلیل بیاورید یا مثال نقض.

(الف) هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است.

(ب) هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ همگرا خواهد بود.

۱۴. کلیه c های حقیقی را که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^c / (3n)!$ بازای آنها همگرا است پیدا کنید.

۱۵. کلیه اعداد صحیح $a \geq 1$ را که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^2 / (an)!$ بازای آنها همگرا است بدست آورید.

۱۶. فرض کنید $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ اعداد صحیح مثبتی باشند که در نمایش اعشاری آنها رقم ۰ ظاهر نمی شود. مثلاً

$$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 9, \dots, n_4 = 11, n_5 = 19, \dots, n_6 = 21, n_7 = 1$$

و مانند اینها. نشان دهید که سری متقابلهای این اعداد، یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ همگرا است و از مجموعی کمتر از ۹۰ برخوردار است. [دانهائی: سری را به تسلط $(9/10)^n$ در آورید.]

۱۷. چنانچه a عدد حقیقی دلخواهی باشد قرار دهید $s_n(a) = 1^a + 2^a + \dots + n^a$ حد زیر را تعیین نمایید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(a+1)}{ns_n(a)}.$$

(a را هم مثبت هم منفی و هم ۰ در نظر بگیرید.)

۱۸. (الف) اگر p و q اعداد صحیح ثابتی باشند و $1 \leq q \leq p$ نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=qn}^{pn} \frac{1}{k} = \log \frac{p}{q}.$$

(ب) سری زیر یک تجدید آرایش سری توافقی متناوب است که در آن، متناوباً، پس از سه جمله مثبت دو جمله منفی می آیند:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \dots$$

نشان دهید که این سری همگرا است و دارای مجموع $(\log 3/2)/2 + \log 2$ می باشد. [دانهائی: مجموع جزئی s_n را در نظر بگیرید و از قسمت (الف) استفاده نمایید.]

(پ) سری توافقی متناوب را باین ترتیب تجدید آرایش کنید که، متناوباً، پس از p

جمله مثبت q جمله منفی بنویسید. بعد، با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که این سری تجذید آرایش یافته همگرا است و مجموعی برابر $\log(p/q) + (1/2)\log 2$ دارد.

۲۳.۱۰ انتگرالهای مجازی

مفهوم انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ را در فصل ۱ با این قید که تابع f بر یک بازه متناهی $[a, b]$ تعریف شده و کراندار است معرفی کردیم. می‌توان دامنه نظریه انتگرالگیری را با زدودن این قیود وسعت داد.

برای شروع کار می‌توان رفتار $\int_a^b f(x) dx$ را، وقتی $b \rightarrow +\infty$ ، بررسی کرد. این عمل به مفهوم انتگرال نامتناهی (که انتگرال مجازی نوع اول نیز خوانده می‌شود) منجر می‌گردد که آن را با علامت $\int_a^\infty f(x) dx$ نشان می‌دهند. یک تعمیم دیگر این طور بدست می‌آید که بازه $[a, b]$ را متناهی گرفته و f را در یک یا چند نقطه بی‌کران فرض کنیم. این انتگرالهای جدید را (که با فرایند حدی مناسبی بدست می‌آیند) انتگرالهای مجازی نوع دوم می‌نامند. برای آنکه انتگرالهای فصل ۱ از انتگرالهای مجازی متمایز باشند دسته اول را غالباً انتگرالهای «حقیقی» می‌خوانند.

بسیاری از توابع مهم در آنالیز به شکل انتگرالهای مجازی نوع اول یا دوم ظاهر می‌شوند و بررسی مشروح آنها عموماً در درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته صورت خواهد گرفت. ما در اینجا صرفاً به ابتدائی‌ترین جنبه‌های این نظریه توجه داریم. در واقع به بیان چند تعریف و قضیه و به ذکر مثالهایی اکتفا خواهیم کرد.

بزودی معلوم می‌شود که میان تعاریف مربوط به انتگرالهای مجازی و تعاریف مربوط به سریهای نامتناهی شباهت زیادی وجود دارد. بنابراین، این مطلب که بسیاری از قضایای مقدماتی سریها مشابه سرراستی برای انتگرالهای مجازی دارند تعجب‌آور نخواهد بود. چنانچه انتگرال حقیقی $\int_a^b f(x) dx$ بازای هر $b \geq a$ وجود داشته باشد می‌توانیم تابع جدید I را این طور تعریف کنیم:

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx, \quad b \geq a$$

تابع I که باین صورت تعریف شود یک انتگرال نامتناهی، یا یک انتگرال مجازی نوع اول، نام داشته و با علامت $\int_a^\infty f(x) dx$ نموده می‌شود. انتگرال را همگرا می‌خوانند اگر که حد

$$(۶۱.۱۰) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

وجود داشته و متناهی باشد. در غیر این صورت انتگرال $\int_a^\infty f(x) dx$ واگرا نام خواهد داشت. چنانچه حد (۶۱.۱۰) موجود و مساوی A باشد عدد A را مقدار انتگرال نامیده و می‌نویسیم

$$\int_a^\infty f(x) dx = A.$$

این تعریفها با تعاریفی که در مورد سریهای نامتناهی داده شد مشابهند. مقادیر تابعی $I(b)$ نقش «مجموعهای جزئی» را ایفا می‌کنند و می‌توان آنها را «انتگرالهای جزئی» نامید. توجه داشته باشید که علامت $\int_a^\infty f(x) dx$ هم برای انتگرال و هم برای مقدار انتگرال (وقتی انتگرال همگرا است) بکار رفته است. (این مطلب را بنا تذکرات اواخر بخش ۵.۱۰ مقایسه کنید.)

مثال ۱. انتگرال مجازی $\int_1^\infty x^{-s} dx$ برای $s > 1$ همگرا و برای $s \leq 1$ واگرا است. برای اثبات این مطلب توجه می‌کنیم که

$$I(b) = \int_1^b x^{-s} dx = \begin{cases} \frac{b^{1-s} - 1}{1-s}, & s \neq 1 \\ \log b, & s = 1 \end{cases}$$

بنابراین، $I(b)$ به حدی متناهی میل می‌کند اگر و فقط اگر $s > 1$ ، که در این حالت حد موردنظر چنین خواهد بود:

$$\int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}.$$

رفتار این انتگرال شبیه رفتار سری مربوط به تابع زتا، یعنی $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال $\int_0^\infty \sin x dx$ واگرا است چونکه

$$I(b) = \int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$$

و این، وقتی $b \rightarrow +\infty$ ، به حدی میل نخواهد کرد.

انتگرالهای نامتناهی بشکل $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ بهمین نحو تعریف می‌شوند. همچنین، اگر برای c هر دو انتگرال $\int_c^\infty f(x) dx$ و $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ همگرا باشند، می‌گوئیم که انتگرال $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ همگرا است و مقدارش مساوی مجموع زیر تعریف می‌شود:

$$(۶۲.۱۰) \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx.$$

(بآسانی می‌توان نشان داد که انتخاب c خالی از اهمیت است.) انتگرال $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ را واگرا خوانند هرگاه لااقل یکی از انتگرالهای سمت راست (۶۲.۱۰) واگرا باشد.

مثال ۳. انتگرال $\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} dx$ برای $a > 0$ همگرا است زیرا برای $b > 0$ چنین داریم:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} dx = \int_0^b e^{-ax} dx = \frac{e^{-ab} - 1}{-a} \rightarrow \frac{1}{a}, \quad b \rightarrow \infty$$

پس انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} dx$ همگرا بوده و مقدارش برابر $1/a$ است. همچنین، اگر $b > 0$ خواهیم داشت

$$\int_{-b}^0 e^{-a|x|} dx = \int_{-b}^0 e^{ax} dx = - \int_b^0 e^{-at} dt = \int_0^b e^{-at} dt.$$

بنابراین، $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} dx$ نیز همگرا است و مقدارش مساوی $1/a$ می‌باشد. در نتیجه داریم $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} dx = 2/a$. بهر حال توجه داشته باشید که انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} dx$ بدلیل واگرا بودن $\int_{-\infty}^0 e^{-ax} dx$ ، واگرا می‌باشد.

مثل حالت سریها، برای انتگرالهای مجازی آزمونهای همگرایی گوناگونی در اختیار ما هستند. ساده‌ترین اینها مربوط به انتگرالهایی می‌شوند که انتگرالده آنها مثبت است.

قضیه ۲۳.۱۰. فرض کنیم انتگرال حقیقی $\int_a^b f(x) dx$ بازای هر $b \geq a$ وجود داشته و، بازای هر $x \geq a$ ، $f(x) \geq 0$. در اینصورت $\int_a^{\infty} f(x) dx$ همگرا است اگر و فقط اگر عدد ثابتی مثل $M > 0$ باشد بطوری که

$$\int_a^b f(x) dx \leq M, \quad b \geq a$$

این قضیه اساس آزمونهای مقایسه‌ای زیر خواهد بود.

قضیه ۲۴.۱۰. فرض کنیم انتگرال حقیقی $\int_a^b f(x) dx$ بازای هر $b \geq a$ وجود داشته و، بازای هر $x \geq a$ ، $0 \leq f(x) \leq g(x)$ و $\int_a^{\infty} g(x) dx$ همگرا باشد. در اینصورت $\int_a^{\infty} f(x) dx$ نیز همگرا است و

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

توجه: می‌گوئیم انتگرال $\int_a^{\infty} g(x) dx$ بر انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ تسلط دارد.

قضیه ۲۵.۱۰. آزمون مقایسه‌ای حدی. فرض کنیم هر دو انتگرال حقیقی $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b g(x) dx$ بازای هر $b \geq a$ وجود داشته باشند بطوری که بازای هر $x \geq a$ ، $f(x) \geq 0$ و $g(x) > 0$ هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad c \neq 0 \quad (۶۳.۱۰)$$

آنگاه هر دو انتگرال $\int_a^{\infty} f(x) dx$ و $\int_a^{\infty} g(x) dx$ یا همگرا هستند یا واگرا.

توجه: اگر حد ذکر شده در (۶۳.۱۰) صفر باشد فقط می‌توانیم این را نتیجه بگیریم

که همگرایی $\int_a^\infty g(x) dx$ همگرایی $\int_a^\infty f(x) dx$ را ایجاب می‌کند.

برهانهای قضایای ۲۳.۱۰ تا ۲۵.۱۰ مشابه اثبات نتایج متناظری است که برای سریها وجود دارند و بعنوان تمرین باقی می‌ماند.

تمرین ۴. انتگرال $\int_1^\infty e^{-x} x^s dx$ بازای هر s حقیقی همگرا است. این را می‌شود از مقایسه انتگرال با $\int_1^\infty x^{-2} dx$ نتیجه گرفت زیرا،

$$\frac{e^{-x} x^s}{x^{-2}} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty \text{ وقتی}$$

انتگرالهای مجازی نوع دوم را می‌توان این طور معرفی کرد: فرض کنیم f بر بازه نیمباز $(a, b]$ تعریف شده و انتگرال $\int_x^b f(t) dt$ بازای هر x صادق در $a < x \leq b$ وجود داشته باشد. تابع جدید I را مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(x) = \int_x^b f(t) dt, a < x \leq b \text{ اگر}$$

تابع I که باین صورت تعریف شود یک انتگرال مجازی نوع دوم نام داشته و با علامت $\int_{a+}^b f(t) dt$ نموده می‌شود. می‌گویند انتگرال همگرا است در صورتی که حد

$$\lim_{x \rightarrow a+} I(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t) dt \quad (۶۴.۱۰)$$

وجود داشته و متناهی باشد. در غیر این صورت انتگرال $\int_{a+}^b f(t) dt$ داگرا خوانده می‌شود. اگر حد (۶۴.۱۰) وجود داشته و برابر A باشد عدد A را مقدار انتگرال نامیده می‌نویسیم.

$$\int_{a+}^b f(t) dt = A.$$

مثال ۵. فرض می‌کنیم اگر $t > 0$, $f(t) = t^{-s}$. چنانچه $b > 0$ و $x > 0$ خواهیم داشت:

$$I(x) = \int_x^b t^{-s} dt = \begin{cases} \frac{b^{1-s} - x^{1-s}}{1-s}, & s \neq 1 \\ \log b - \log x, & s = 1 \end{cases}$$

وقتی $x \rightarrow 0+$, $I(x)$ به یک حد متناهی میل می‌کند اگر و فقط اگر $s < 1$. پس انتگرال $\int_{a+}^b t^{-s} dt$ بازای $s < 1$ همگرا است و، بازای $s \geq 1$ واگرا می‌باشد. این مثال را می‌شود بطریقه دیگری نیز بررسی کرد. اگر از جانشانی $1/u$, $t = 1/u$, $dt = -u^{-2} du$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\int_x^b t^{-s} dt = \int_{1/b}^{1/x} u^{s-2} du.$$

وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، $1/x \rightarrow +\infty$ ، و در نتیجه $\int_{1/b}^{\infty} u^{s-2} du = \int_0^b t^{-s} dt$ مشروط بر اینکه انتگرال آخری همگرا باشد. این انتگرال، طبق مثال ۱، همگرا است اگر و فقط اگر $-1 < s-2 < 1$ ، که بمعنی $1 < s$ می‌باشد.

مثال قبل حقیقت هندسی قابل توجهی را آشکار می‌سازد. تابع f را که با معادله $f(x) = x^{-2/3}$ ($0 < x \leq 1$) تعریف شده در نظر می‌گیریم. انتگرال $\int_0^1 f(x) dx$ همگرا است ولی انتگرال $\int_0^1 \pi f^2(x) dx$ واگرا می‌باشد. این بزبان هندسی یعنی که مجموعه عرضی f مساحتی متناهی دارد ولی حجم جسم حاصل از دوران این مجموعه حول محور x نامتناهی خواهد بود.

انتگرالهای مجازی بشکل $\int_{a+}^{b-} f(t) dt$ بنحومشابه تعریف می‌شوند. اگر هر دو انتگرال $\int_{a+}^c f(t) dt$ و $\int_c^{b-} f(t) dt$ همگرا باشند می‌نویسیم

$$\int_{a+}^{b-} f(t) dt = \int_{a+}^c f(t) dt + \int_c^{b-} f(t) dt.$$

توجه: بعضی از مؤلفان هر جا که ما نوشته‌ایم $\int_{a+}^{b-}$ می‌نویسند $\int_a^b$.

این تعریف را می‌توان (بنحوی روشن) به هر تعداد متناهی مجموعه‌ده تعمیم داد. بعنوان مثال، اگر f در دو نقطه درونی $c < d$ از بازه $[a, b]$ تعریف نشده باشد می‌گوئیم انتگرال مجازی $\int_a^b f(t) dt$ همگرا و دارای مقدار

$$\int_a^{c-} f(t) dt + \int_{c+}^d f(t) dt + \int_d^{b+} f(t) dt$$

است مشروط بر اینکه هریک از این انتگرالها همگرا باشد. بعلاوه می‌توان ترکیبات «مختلطی» چون $\int_{a+}^b f(t) dt + \int_b^{\infty} f(t) dt$ ، که ما آن را بصورت $\int_{a+}^{\infty} f(t) dt$ می‌نویسیم، یا ترکیبات مختلطی مثل

$$\left(\int_a^{b-} f(t) dt + \int_{b+}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt \right)$$

که ما آن را فقط می‌نویسیم $\int_a^{\infty} f(t) dt$ ، نیز در نظر گرفت.

مثال ۶. تابع گاما. اگر $s > 0$ انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ همگرا خواهد بود این انتگرال باید بعنوان یک مجموع، یعنی

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad (65.10)$$

تعبیر شود. بنابراین مثال ۴، انتگرال دوم بازای هر s حقیقی همگرا است. برای آزمودن انتگرال اول قرار می‌دهیم $t = 1/u$ و ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_x^1 e^{-t} t^{s-1} dt = \int_1^{1/x} e^{-1/u} u^{-s-1} du.$$

اما از مقایسه با انتگرال $\int_1^\infty u^{-s-1} du$ معلوم می‌شود که انتگرال $\int_1^\infty e^{-1/u} u^{-s-1} du$ بازای $s > 0$ همگرا است. پس انتگرال $\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt$ بازای $s > 0$ همگرا خواهد بود. وقتی $s > 0$ مجموع (۶۵.۱۰) را با $\Gamma(s)$ نشان می‌دهند. تابع Γ که باین ترتیب تعریف می‌شود تابع گاما نام دارد که اولین بار در ۱۷۲۹ توسط اوپلر معرفی شد. این تابع خاصیت جالبی دارد باین معنی که بازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، $\Gamma(n+1) = n!$ (برای مشاهده خلاصه‌ای از برهان آن ر.ک. تمرین ۱۹ در بخش ۲۴.۱۰).

آزمونهای همگرایی داده شده در قضایای ۲۳.۱۰ تا ۲۵.۱۰ مشابه‌های سرراستی برای انتگرالهای مجازی نوع دوم دارند. خواننده می‌تواند این آزمونها را بدون هیچ مشکلی برای خود تنظیم نماید.

۲۴.۱۰ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۱۰ همگرایی انتگرال مجازی را بیازمائید.

۱. $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$. ۱
۲. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$. ۲
۳. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$. ۳
۴. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$. ۴
۵. $\int_{0+}^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. ۵
۶. $\int_{0+}^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$. ۶
۷. $\int_{0+}^1 \frac{\log x}{1-x} dx$. ۷
۸. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x} dx$. ۸
۹. $\int_{0+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \log x}$. ۹
۱۰. $\int_1^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$. ۱۰

۱۱. انتگرال

$$\int_1^\infty \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

بازای یک C حقیقی همگرا است. C را تعیین و انتگرال را حساب کنید.

۱۲. انتگرال

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2C} - \frac{C}{x+1} \right) dx$$

بازای یک C حقیقی همگرا است. C را تعیین و انتگرال را حساب کنید.

۱۳. انتگرال

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{1+2x^2}} - \frac{C}{x+1} \right) dx$$

بازای یک C حقیقی همگرا است. C را معین و انتگرال را محاسبه نمایید.

۱۴. مقادیر a و b را طوری بیابید که

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right) dx = 1.$$

۱۵. حد زیر بازای چه مقادیری از ثوابت a و b موجود و مساوی یک است؟

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-p}^p \frac{x^2 + ax^2 + bx}{x^2 + x + 1} dx.$$

۱۶. (الف) ثابت کنید که

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^h \sin x \, dx = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\int_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^1 \frac{dx}{x} \right) = 0$$

(ب) آیا انتگرالهای مجازی زیر همگرا هستند یا که واگرا؟

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} ; \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx.$$

۱۷. (الف) ثابت کنید انتگرال $\int_0^1 + [(\sin x)/x] \, dx$ همگرا است.

(ب) ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 [(\cos t)/t^2] \, dt = 1$

(پ) آیا انتگرال $\int_0^1 + [(\cos t)/t^2] \, dt$ همگرا است یا واگرا؟

۱۸. (الف) اگر f بازای هر $x \geq 1$ نزولی بوده و، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ،

$f(x) \rightarrow 0$ ثابت کنید انتگرال $\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ و سری $\sum f(n)$ یا هر دو همگرا هستند

یا هر دو واگرا. [دانهائی؛ برهان آزمون انتگرال را بیاد بیاورید.]

(ب) f غیریکنوائی مثال بزنید که برای آن سری $\sum f(n)$ همگرا بوده و انتگرال

$\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ واگرا باشد.

۱۹. فرض کنید اگر $s > 0$ ، $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt$ (تابع گاما). با استفاده از انتگرالگیری

بطریقه جزء به جزء نشان دهید که $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. سپس باستقرا ثابت کنید که

اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد $\Gamma(n+1) = n!$

هر یک از تمرینات ۲۰ تا ۲۵ حاوی حکمی، نه الزاماً درست، دربارهٔ تابعی است مانند f که بازای هر $x \geq 1$ تعریف شده است. در هر یک از این تمرینات n نشانگر یک عدد صحیح مثبت است و I_n انتگرال $\int_1^n f(x) dx$ را نشان می‌دهد که وجودش همیشه فرض شده است. برای هر یک از این احکام یا برهانی ارائه دهید یا یک مثال نقض.

۲۰. هرگاه f نزولی بوده و $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ موجود باشد آنگاه انتگرال $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا است.

۲۱. هرگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = A$ آنگاه $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا است و مقدارش A می‌باشد.

۲۲. هرگاه دنبالهٔ $\{I_n\}$ همگرا باشد آنگاه انتگرال $\int_1^\infty f(x) dx$ نیز چنین است.

۲۳. هرگاه f مثبت بوده و $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = A$ آنگاه $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا است و مقدارش A می‌باشد.

۲۴. فرض کنید $f'(x)$ بازای هر $x \geq 1$ وجود داشته و عدد ثابتی مانند $M > 0$ باشد

بطوری که بازای هر $x \geq 1$ ، $|f'(x)| \leq M$. هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = A$ آنگاه

انتگرال $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا است و مقدارش A خواهد بود.

۲۵. هرگاه $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

دنباله‌ها و سریهای توابع

۱۰۱۱ همگرایی نقطه به نقطه دنباله‌های توابع

در فصل ۱۰ دنباله‌هایی مطرح شدند که جملات آنها حقیقی و یا مختلط بودند. حال می‌خواهیم به دنباله‌هایی چون $\{f_n\}$ پردازیم که جملاتشان توابعی حقیقی و یا مختلط هستند که بر خط حقیقی یا در صفحه مختلط دارای یک قلمرو مشترک می‌باشند. برای هر x در این قلمرو می‌توان دنباله دیگر $\{f_n(x)\}$ از اعداد را که جملات آن مقادیر تابعی متناظر هستند تشکیل داد. فرض کنیم S مجموعه x هایی باشد که این دنباله برای آنها همگرا است. تابع f که بر S این‌طور تعریف شده است:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in S \text{ اگر}$$

تابع حد دنباله $\{f_n\}$ نام دارد و می‌گوئیم دنباله $\{f_n\}$ بر مجموعه S نقطه به نقطه به f همگرا می‌باشد.

بررسی چنین دنباله‌هایی عمدتاً در سؤال زیر خلاصه می‌شود: اگر هر یک از جملات دنباله $\{f_n\}$ دارای خاصیتی، نظر پیوستگی، مشتق‌پذیری، یا انتگرال‌پذیری، باشد تا چه حد این خاصیت به تابع حدسرایت می‌کند؟ بعنوان مثال، اگر هر f_n در نقطه x پیوسته باشد آیا تابع حد f نیز در x پیوسته است؟ مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب در حالت کلی درست نیست.

مثال ۱. دنباله‌ای از توابع پیوسته با تابع حد ناپیوسته. فرض می‌کنیم اگر $0 \leq x \leq 1$ ، $f_n(x) = x^n$. نمودارهای تعدادی از جملات در شکل ۱۰۱۱ نشان داده شده‌اند. دنباله $\{f_n\}$ بر بازه بسته $[0, 1]$ نقطه به نقطه همگرا است و تابع حد آن f با دستور زیر مشخص می‌شود:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

توجه کنید که تابع حد f در ۱ ناپیوسته است درحالی که هر جمله دنباله در تمام بازه $[0, 1]$ پیوسته می باشد.

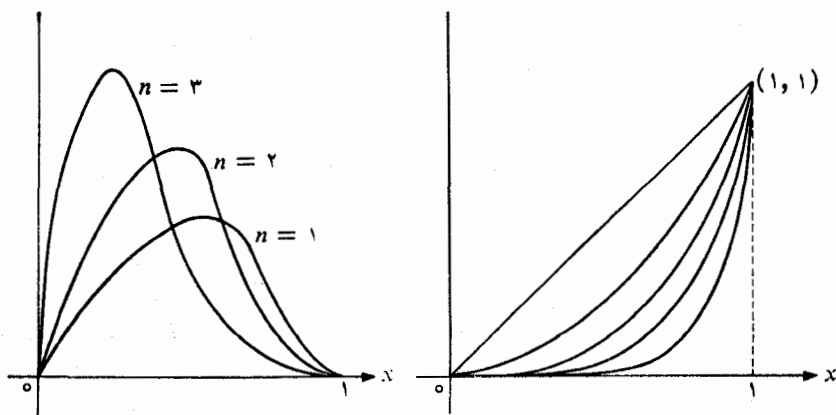
مثال ۲. دنباله ای که برای آن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

بازای $0 \leq x \leq 1$ قرار می دهیم $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$. دراین مثال دنباله $\{f_n\}$ به تابع حد f ، که همه جا در بازه بسته $[0, 1]$ صفر است، نقطه به نقطه همگرا می باشد. چندجمله این دنباله در شکل ۲.۱۱ نموده شده اند. انتگرال f_n روی بازه $[0, 1]$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n \int_0^1 x(1-x^2)^n dx \\ &= -\frac{n}{2} \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1/2$ ولی $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$. عبارت دیگر، حد انتگرالها مساوی انتگرال حد نیست. این مثال نشان می دهد که دو عمل «حدگیری» و «انتگرالگیری» همیشه قابل تعویض نمی باشند. (همچنین، ر.ک. تمرینات



شکل ۲.۱۱ دنباله ای از توابع که در آن

$f_n \rightarrow 0$ بر بازه $[0, 1]$ ولی، وقتی

$$\int_0^1 f_n \rightarrow 1/2, n \rightarrow \infty$$

شکل ۱.۱۱ دنباله ای از توابع پیوسته

با تابع حد ناپیوسته.

۱۷ و ۱۸ در بخش ۰۷۰۱۱)

جرج استوکس^۱ (۱۸۱۹-۱۹۰۳)، فیلیپ سیدل^۲ (۱۸۹۶-۱۸۲۶)، و کارل وایراشتراس نخستین کسانی بودند که به لزوم شرطهای اضافی برای توجیه تعویض این اعمال پی بردند. در سال ۱۸۴۸ استوکس و سیدل (مستقلاً و تقریباً همزمان) مفهومی را معرفی کردند که اینک به همگرایی یکشکل مشهور است، و نشان دادند که برای دنباله‌های بطور-یکشکل همگرا می‌توان اعمال حدگیری و انتگرالگیری را باهم عوض کرد. بعداً وایراشتراس نشان داد که این مفهوم در آنالیز پیشرفته دارای اهمیت بسیار است. این مفهوم را در بخش بعد معرفی کرده و ارتباط آن را با پیوستگی و انتگرالگیری نشان خواهیم داد.

۲.۱۱ همگرایی یکشکل دنباله‌های توانی

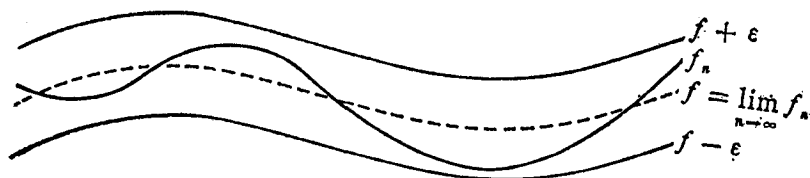
فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد که بر مجموعه S به تابع حد f نقطه به نقطه همگرا است. این، بنا بر تعریف حد، باین معنی است که برای هر x در S و هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مثل N ، وابسته به x و ε ، وجود دارد بطوری که هر وقت $n \geq N$ ، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. هرگاه برای کلیه نقاط x در S یک N تکافو کند آنگاه همگرایی را بر S یکشکل می‌نامند. یعنی تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف. گوئیم دنباله $\{f_n\}$ از توابع بر مجموعه S بطور یکشکل به f همگرا است اگر که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مثل N (فقط تابع ε) باشد بطوری که اگر $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in S,$$

این مطلب را با علامات اینطور می‌نویسیم:

$$f \rightarrow f_n \text{ بطور یکشکل بر } S.$$



شکل ۳.۱۱ معنی هندسی همگرایی یکشکل. اگر $n \geq N$ تمامی نمودار

هر f_n در فاصله ε از نمودار تابع حد f قرار می‌گیرد.

وقتی f_n ها حقیقی باشند تعبیر هندسی ساده‌ای برای همگرایی یکشکل وجود دارد.

نامساوی $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ با دو نامساوی

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

معادل است. هرگاه این نامساویها برای هر $n \geq N$ و هر x در S برقرار باشند آنگاه،

همانطور که شکل ۳.۱۱ نشان داده، تمامی نمودار f_n روی S در نواری بعرض ۲۴ که بطور-
متقارن حول نمودار f رسم شود قرار خواهد گرفت.

۳.۱۱ همگرایی یکشکل پیوستگی

اکنون ثابت می‌کنیم که همگرایی یکشکل پیوستگی را از تک تک جملات دنباله $\{f_n\}$ به تابع حد f انتقال می‌دهد.

قضیه ۱۰.۱۱. فرض کنیم $f_n \rightarrow f$ بطوریکشکل بر بازه S . هرگاه هر f_n در نقطه p از S پیوسته باشد آنگاه تابع حد f نیز در p پیوسته است.

برهان. نشان می‌دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی مانند $N(p)$ وجود دارد بطوری که هر وقت $S \cap N(p) \ni x$ ، $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد عدد صحیحی مثل N هست بطوری که اگر $n \geq N$

$$\text{بازای هر } x \text{ در } S, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

چون f_N در p پیوسته است پس یک همسایگی مانند $N(p)$ وجود دارد بطوری که

$$\text{بازای هر } x \text{ در } S \cap N(p), \left| f_N(x) - f_N(p) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

بنابراین، بازای هر x در $S \cap N(p)$ داریم

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)|. \end{aligned}$$

از آنجا که هر جمله سمت راست از $\varepsilon/3$ کمتر است خواهیم داشت $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ و این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیه پیشین کاربرد مهمی در سریهای نامتناهی از توابع دارد. هرگاه مقادیر تابعی $f_n(x)$ مجموعه‌های جزئی توابعی دیگر باشند، مثلاً

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x),$$

و $f_n \rightarrow f$ نقطه به نقطه بر S آنگاه بازای هر x در S خواهیم داشت

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

در این حالت گوئیم سری $\sum u_k$ به تابع مجموع f نقطه به نقطه همگرا می‌باشد. اگر

$f \rightarrow f_n$ بطوریکه شکل بر S می‌گوئیم سری $\sum u_k$ بطوریکه شکل به f همگرا است. هرگاه هر جمله u_k در نقطه p از S پیوسته باشد آنگاه هر مجموع جزئی f_n نیز در p پیوسته است، پس از قضیه ۱.۱۱ نتیجه زیر بدست خواهد آمد.

قضیه ۲.۱۱. هرگاه سری $\sum u_k$ از توابع بر مجموعه S به تابع مجموع f بطوریکه شکل همگرا باشد و هر جمله u_k در نقطه p از S پیوسته فرض شود آنگاه f نیز در p پیوسته خواهد بود.

توجه: این نتیجه را می‌توان با علامات این طور هم نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow p} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow p} u_k(x).$$

این مطلب را باین صورت توصیف می‌کنیم که می‌گوئیم در یک سری بطوریکه شکل همگرا می‌توان جای علامات حدگیری و جمع‌بندی را با هم عوض کرد، یا اینکه می‌گوئیم می‌شود از آن جمله به جمله حد گرفت.

۴.۱۱ همگرایی یک شکل و انتگرالگیری

قضیه بعدی نشان می‌دهد که همگرایی یک شکل اجازه تعویض علامت انتگرالگیری را با علامت حدگیری به ما خواهد داد.

قضیه ۳.۱۱. فرض کنیم $f \rightarrow f_n$ بطوریکه شکل بر بازه $[a, b]$ و هر f_n در $[a, b]$ پیوسته می‌گیریم. دنباله جدید $\{g_n\}$ را این طور تعریف می‌کنیم:

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad x \in [a, b] \text{ اگر}$$

و قرار می‌دهیم

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

ددا اینصورت $g_n \rightarrow g$ بطوریکه شکل بر $[a, b]$. با علامات چنین خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

برهان. اثبات بسیار ساده است. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد عدد صحیحی چون N هست بطوری که اگر $n \geq N$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad t \in [a, b]$$

لذا اگر $x \in [a, b]$ و $n \geq N$ خواهیم داشت

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x [f_n(t) - f(t)] dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \\ < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon,$$

پس $g_n \rightarrow g$ بطور یکشکل بر $[a, b]$.

بعنوان یک نتیجه، متناظر این قضیه را نیز برای سربهای نامتناهی خواهیم داشت.

قضیه ۴.۱۱. فرض کنیم سری $\sum u_k$ از توابع بر بازه $[a, b]$ ، که هر u_k برای n بسازه پیوسته است، به تابع مجموع f بطور یکشکل همگرا باشد. اگر $x \in [a, b]$ تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt$$

دراینصورت $g_n \rightarrow g$ بطور یکشکل بر $[a, b]$ ، بعبادت دیگر، خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(t) dt$$

یا

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t) dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) dt.$$

برهان. قضیه ۳.۱۱ را درمورد دنبالهٔ مجموعه‌های جزئی $\{f_n\}$ ، که از

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)$$

بدست می‌آیند، بکار برده و توجه می‌کنیم که $\int_a^x f_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt$

قضیه ۴.۱۱ را اغلب این‌طور توصیف می‌کنند که می‌گویند از یک سری بطور-یکشکل همگرا می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

۵.۱۱ یک شرط کافی برای همگرایی یکشکل

وایراشتراس برای نشان دادن همگرایی یکشکل بعضی ازسریها آزمون مفیدی را ارائه داد. این آزمون زمانی قابل استفاده است که بتوان سری داده شده را به تسلط یک سری همگرا از ثابتهای مثبت درآورد.

قضیه ۵.۱۱. آزمون M وایراشتراس. سری $\sum u_n$ از توابع که بر مجموعه S به تابع f نقطه به نقطه همگرا می‌باشد مفروض است. هرگاه یک سری همگرا از دنباله‌های مثبت مانند $\sum M_n$ وجود داشته باشد بطوری که

$$0 \leq |u_n(x)| \leq M_n, \text{ در } S, \text{ و هر } n \geq 1 \text{ برای } x$$

آنگاه سری $\sum u_n$ بر S بطور یکشکل همگرا خواهد بود.

برهان. آزمون مقایسه‌ای نشان می‌دهد که سری $\sum u_n(x)$ برای x در S بطور مطلق همگرا است. برای x در S داریم

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

چون سری $\sum M_k$ همگرا است پس برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N هست بطوری که $n \geq N$ نامساوی

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

را ایجاب می‌کند. این نشان می‌دهد که

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| < \varepsilon, \text{ در } S, \text{ و هر } n \geq N \text{ برای } x$$

بنابراین، سری $\sum u_n$ بر S بطور یکشکل به f همگرا خواهد بود.

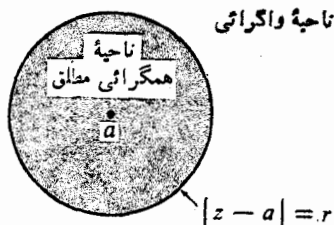
مشتقگیری جمله به جمله از یک سری دلخواه توابع حتی از انتگرالگیری جمله به - جمله نیز کمتر نوید بخش است. بعنوان مثال، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$ برای هر x حقیقی، بدلیل تحت تسلط $\sum 1/n^2$ بودن، همگرا است. بعلاوه، همگرایی بر تمام محور حقیقی یکشکل می‌باشد. اما سری حاصل از مشتقگیری جمله به جمله $\sum (\cos nx)/n$ است که برای $x = 0$ واگرا خواهد بود. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است مشتقگیری جمله به جمله همگرایی را، حتی وقتی هم که سری اصلی بطور یکشکل همگرا است، از بین ببرد. بنابراین، مسئله تعویض اعمال جمع‌بندی و مشتقگیری عموماً از مسئله جابجایی اعمال جمع‌بندی و انتگرالگیری جدیتر تلقی می‌شود. این مثال از این جهت ذکر شد که خواننده دریابد که اعمال آشنا با مجموعه‌های متناهی همیشه در مورد سریهای نامتناهی، حتی وقتی هم که سری مورد نظر بطور یکشکل همگرا است، قابل اجرا نمی‌باشد. اینک می‌پردازیم به سریهای خاصی از توابع، بنام سریهای توانی، که از بسیاری جهات می‌توان آنها را همچون مجموعه‌های متناهی بحساب آورد.

۶.۱۱ سریهای توانی. دایره همگرایی

یک سری نامتناهی بشکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots$$

را یک سری توانی برحسب $z-a$ می نامند. اعداد z, a ، و ضرایب a_n مختلط هستند. به هر سری توانی دایره ای مربوط می شود، بنام دایره همگرایی، که سری بازای هر z داخل این دایره بطور مطلق همگرا است و بازای هر z خارج آن واگرا می باشد. مرکز دایره در a است و شعاع آن r شعاع همگرایی نامیده می شود. (ر.ک. شکل ۴.۱۱). در حالات اکستریم، این دایره ممکن است به یک نقطه a بدل شود، که در این حالت $r=0$ ، یا اینکه از تمام صفحه مختلط تشکیل یابد، که در این حالت می گوئیم $r=+\infty$ وجود دایره



شکل ۴.۱۱. دایره همگرایی یک سری توانی.

همگرایی در قضیه ۷.۱۱ نشان داده شده است.

رفتار سری در نقاط کرانه ای دایره قابل پیش بینی نیست. مثلاً نشان می دهند که یک سری ممکن است در هیچ نقطه، در چند نقطه، و یا در همه نقاط کرانه ای همگرا باشد. در بسیاری از سریهای توانی که در عمل پیش می آیند می توان شعاع همگرایی را، مانند مثالهای زیر، با استفاده از آزمون نسبت یا آزمون ریشه تعیین کرد.

مثال ۱. برای یافتن شعاع همگرایی سری توانی $\sum z^n/n!$ آزمون نسبت را بکار می بریم. اگر $z \neq 0$ نسبت جملات متوالی دارای این قدر مطلق است:

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

چون این نسبت، وقتی $n \rightarrow \infty$ به ۰ میل می کند نتیجه می شود که سری بازای کلیه z های مختلط ناصفر بطور مطلق همگرا است. این سری بازای $z=0$ نیز همگرا است، پس شعاع همگرایی $+\infty$ خواهد بود.

چون جمله عمومی یک سری همگرا باید به ۰ میل کند پس از مثال پیش ثابت می‌شود که بازای هر z مختلط

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n!} = 0.$$

یعنی، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $n!$ از توان n هر عدد مختلط و ثابت z «سرعتتر رشد می‌کند».

مثال ۲. برای آزمودن سری $\sum n^2 3^n z^n$ آزمون ریشه را بکار می‌بریم. چون

$$n^{1/n} = (n^{1/n})^2, \quad n^{2/n} = (n^{1/n})^2, \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty, \quad n^{1/n} \rightarrow 1$$

پس خواهیم داشت:

$$\text{وقتی } n \rightarrow \infty, \quad (n^2 3^n |z|^n)^{1/n} = 3 |z| n^{2/n} \rightarrow 3 |z|$$

از اینرو سری بازای $|z| < 1/3$ بطورمطلق همگرا و برای $|z| > 1/3$ واگرا می‌باشد. شعاع همگرایی مساوی $1/3$ است. این سری توانی خاص در نقطه کرانه‌ای واگرا است زیرا که اگر $|z| = 1/3$ قدرمطلق جمله عمومی مساوی n^2 خواهد بود.

مثال ۳. در هریک از سریهای $\sum z^n/n$ و $\sum z^n/n^2$ آزمون نسبت نشان می‌دهد که شعاع همگرایی یک است. اولین سری در نقطه کرانه‌ای $z = 1$ واگرا و لی در بقیه نقاط کرانه‌ای همگرا است (ر.ک. بخش ۱۹.۱۰). سری دوم در هر نقطه کرانه‌ای، بدلیل تحت تسلط $\sum 1/n^2$ بودن، همگرا خواهد بود.

این بخش را با اثبات اینکه هر سری توانی دایره همگرایی دارد پایان می‌بریم. این برهان بر قضیه زیر استوار خواهد بود.

قضیه ۶.۱۱. فرض کنیم سری توانی $\sum a_n x^n$ بازای $z \neq 0$ خاص، مثلا $z_1 = z$ همگرا باشد، در اینصورت

(الف) سری بازای هر z که $|z| < |z_1|$ بطورمطلق همگرا است؛

(ب) سری بر هر قرص مستدیر مبرکز ۰ و شعاع $|z_1| < R$ بطور یکشکل همگرا می‌باشد.

برهان. چون $\sum a_n z_1^n$ همگرا است پس، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، جمله عمومی آن به ۰ میل می‌کند. بخصوص، از مرحله‌ای به بعد، مثلا بازای $n \geq N$ ، خواهیم داشت $|a_n z_1^n| < 1$. فرض کنیم S قرص مستدیری بشعاع R باشد بطوری که $0 < R < |z_1|$ و اگر $z \in S$ و $n \geq N$ داریم $|z| \leq R$ و

$$t = \left| \frac{R}{z_1} \right| \quad \text{که در آن} \quad |a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq \left| \frac{R}{z_1} \right|^n = t^n$$

چون $0 < t < 1$ سری $\sum a_n z^n$ به تسلط سری هندسی همگرای $\sum t^n$ در می آید. طبق آزمون M و ایراشتراس، سری $\sum a_n z^n$ بطوریکشکل بر S همگرا می شود. این (ب) را ثابت خواهد کرد. این استدلال همچنین نشان می دهد که سری $\sum a_n z^n$ بازای هر z در S بطورمطلق همگرا است. اما، چون هر z که $|z| < |z_1|$ در قرص مستدیری مانند S با شعاع $|z_1| < R$ قرار می گیرد، این استدلال قسمت (الف) را نیز ثابت خواهد کرد.

قضیه ۷.۱۱. وجود دایره همگرایی. فرض کنیم سری توانی $\sum a_n z^n$ بازای حداقل یک $z \neq 0$ ، مثلاً $z = z_1$ همگرا باشد و بازای لااقل یک z ، مثلاً $z = z_2$ واگرا گردد. در اینصورت عدد حقیقی مثبتی مانند r هست بطوری که اگر $|z| < r$ سری بطورمطلق همگرا است و اگر $|z| > r$ این سری واگرا خواهد بود.

برهان. فرض کنیم A مجموعه همه اعداد مثبت $|z|$ باشد که سری توانی $\sum a_n z^n$ بازای آنها همگرا است. مجموعه A تهی نیست زیرا، بنا به فرض، حاوی $|z_1|$ می باشد. همچنین (بخاطر قضیه ۶.۱۱) هیچ عددی در A نمی تواند از $|z_2|$ بیشتر شود. پس $|z_2|$ یک کران بالائی برای A خواهد بود. چون A مجموعه ای ناتهی از اعداد مثبت و از بالا کراندار است پس کوچکترین کران بالائی دارد که آن را با r نشان می دهیم. واضح است که $r > 0$ چونکه $|z_1| \geq r$. بنا برتعریف r هیچ عددی در A نمی تواند از آن بزرگتر باشد. ازاینرو سری بازای $|z| > r$ واگرا خواهد بود. اما بآسانی ثابت می شود که سری بازای $|z| < r$ بطورمطلق همگرا است. اگر $|z| < r$ عدد مثبتی مانند x در A هست که $|z| < x < r$. بنا برقضیه ۶.۱۱ سری $\sum a_n z^n$ بطورمطلق همگرا می شود. این برهان را کامل خواهد کرد.

البته قضیه متناظری برای سریهای توانی برحسب $z - a$ وجود دارد که می توان آن را، با استفاده از تغییرمتغیر $Z = z - a$ ، از حالتی که هم اکنون مورد بحث بود نتیجه گرفت. همانطور که شکل ۴.۱۱ نشان می دهد مرکز دایره همگرایی a خواهد بود.

۷.۱۱ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۶ شعاع همگرایی r سری توانی داده شده را تعیین کنید. در تمرینات ۱ تا ۱۰ چنانچه r متناهی بود همگرایی سری را در نقاط کرانه ای بیازمائید.

$$\begin{array}{ll} ۱. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} & ۲. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)2^n} \\ ۳. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)2^n} & ۴. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{2n} \\ ۵. \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] z^n & ۶. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n} \end{array}$$

$$0 < a < 1, \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \cdot ۸ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{n^2 + 1} \cdot ۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} z^n}{n} \cdot ۱۰ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n \cdot ۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^2 z^n \cdot ۱۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} z^n \cdot ۱۲$$

$$a > 0, \sum_{n=0}^{\infty} (\sinh an) z^n \cdot ۱۴ \quad a > 0, \sum_{n=0}^{\infty} (\sin an) z^n \cdot ۱۳$$

$$b > 0, a > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) z^n \cdot ۱۶ \quad b > 0, a > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n} \cdot ۱۵$$

۱۷. اگر برای $n = 1, 2, \dots$ $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ و x حقیقی باشد نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

این مثال نشان می‌دهد که همیشه نمی‌توان اعمال انتگرالگیری و حدگیری را با هم عوض کرد.

۱۸. فرض کنید $f_n(x) = (\sin nx)/n$ و برای هر x حقیقی ثابت،

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) \neq f'(0).$$

این مثال مبین آن است که همیشه تعویض اعمال مشتقگیری و حدگیری با یکدیگر امکان‌پذیر نیست.

۱۹. نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$ برای هر x حقیقی همگرا است و مجموع آن را با $f(x)$ نشان دهید. ثابت کنید که f بر $[0, \pi]$ پیوسته است و، با استفاده از قضیه ۴.۱۱، ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

۲۰. معلوم شده است که

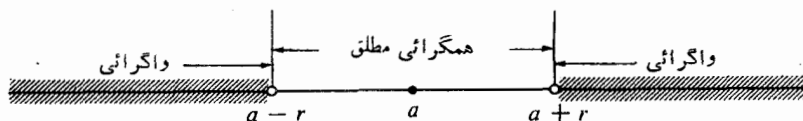
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \text{ اگر}$$

از این دستور قضیه ۴.۱۱ استفاده کرده دستورهای زیر را نتیجه بگیرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{الف})$$

۸.۱۱ خواص توابعی که با سریهای توانی حقیقی نمایش داده می‌شوند

در این بخش نظر خود را معطوف سریهای توانی حقیقی می‌کنیم، یعنی سریهایی بشکل $\sum a_n (z-a)^n$ که در آنجا a ، و ضرایب a_n همه اعدادی حقیقی می‌باشند. همچنین بجای z می‌نویسیم x . درون دایره همگرایی محور حقیقی را در بازه‌ای چون $(a-r, a+r)$ ، که بطور متقارن حول a قرار دارد، قطع می‌کند؛ این را بازه همگرایی سری توانی حقیقی $\sum a_n (x-a)^n$ می‌خوانیم. عدد r شعاع همگرایی نامیده خواهد شد. (ر.ک. شکل ۵.۱۱)



شکل ۵.۱۱ بازه همگرایی یک سری توانی حقیقی.

هر سری توانی حقیقی معرف تابع مجموعی است که مقدار آن در هر x از بازه همگرایی این طور بدست می‌آید:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

می‌گوئیم این سری تابع f را در بازه همگرایی نمایش می‌دهد و آن را بسط f بصورت سری توانی حول a می‌نامند.

در اینجا دو مسئله اساسی درباره بسط بصورت سری توانی هست که نظر ما را جلب می‌کنند:

- (۱) اگر یک سری داده شده باشد خواص تابع مجموع f چیست؟
- (۲) چنانچه تابع f داده شده باشد آیا می‌توان f را بصورت یک سری توانی نمایش داد یا نه.

خواهیم دید که فقط بعضی از توابع نسبتاً خاص دارای بسط بصورت سری توانی هستند. معهوده این توابع شامل اغلب مثالهایی که در عمل ظاهر می‌شوند هست، و در نتیجه بررسی آنها اهمیت زیادی خواهد داشت. حال به بررسی مسئله (۱) می‌پردازیم. قضیه ۶.۱۱ به ما می‌گوید که سری توانی بازای هر x در بازه باز $(a-r, a+r)$ بطور مطلق همگرا و بر هر زیر بازه بسته $[a-R, a+R]$ ، که $0 < R < r$ ، بطور یکشکل همگرا است. چون هر جمله سری توانی بر تمام محور حقیقی پیوسته است از قضیه

۲.۱۱ معلوم می‌شود که تابع مجموع f بر هر زیر بازه بسته $[a - R, a + R]$ ، و در نتیجه بر بازه باز $(a - r, a + r)$ ، پیوسته می‌باشد. همچنین قضیه ۴.۱۱ به ما می‌گوید که می‌توان از سری توانی بر هر زیر بازه بسته $[a - R, a + R]$ جمله به جمله انتگرال گرفت. این خواص تابعهای قابل نمایش بصورت سریهای توانی در قضیه زیر بطور صوری بیان شده‌اند.

قضیه ۸.۱۱. فرض کنیم تابع f بصورت سری توانی

$$(۱.۱۱) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

دربازه باز $(a - r, a + r)$ نمایش داده شده باشد. در اینصورت f بر این بازه پیوسته است و می‌توان انتگرال آن را روی هر زیر بازه بسته با جمله به جمله انتگرالگیری از سری حساب کرد. بخصوص، بازای هر x در $(a - r, a + r)$ خواهیم داشت

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t - a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - a)^{n+1}.$$

قضیه ۸.۱۱ همچنین نشان می‌دهد که شعاع همگرایی سری انتگرالگیری شده حداقل مساوی شعاع همگرایی سری اصلی است. عتقرب ثابت می‌کنیم که هردو سری دقیقاً از یک شعاع همگرایی برخوردارند. ابتدا نشان می‌دهیم که از سری توانی می‌شود در بازه همگرایی آن جمله به جمله مشتق گرفت.

قضیه ۹.۱۱. فرض کنیم f در بازه همگرایی $(a - r, a + r)$ بصورت سری توانی (۱.۱۱) نمایش داده شده باشد. در اینصورت

(الف) سری مشتقگیری شده $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$ نیز دارای شعاع همگرایی r است؛

(ب) $f'(x)$ بازای هر x در بازه همگرایی وجود داشته و با

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$$

داده می‌شود.

برهان. برای تسهیل در امر اثبات فرض می‌کنیم $a = 0$. ابتدا ثابت می‌کنیم که سری مشتقگیری شده در بازه $(-r, r)$ بطور مطلق همگرا است. عدد دلخواه $0 < x < r$ را اختیار کرده و فرض می‌کنیم h کوچکترین عدد مثبتی باشد که $0 < x < x + h < r$. در اینصورت هریک از سریهای مربوط به $f(x)$ و $f(x + h)$ بطور مطلق همگرا می‌باشد. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$(۲.۱۱) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

سری سمت راست، باین علت که یک ترکیب خطی از سریهای بطورمطلق همگرا است، بطورمطلق همگرا خواهد بود. حال با استفاده از قضیه مقدار میانگین می نویسیم

$$(x+h)^n - x^n = hnc_n^{n-1}$$

که در آن $x < c_n < x+h$ پس سری (۲.۱۱) با سری

$$(۳.۱۱) \quad \sum_{n=1}^{\infty} na_n c_n^{n-1}$$

یکی می باشد. در نتیجه باید بطورمطلق همگرا باشد زیرا سری مذکور در معادله (۲.۱۱) چنین است. سری (۳.۱۱) دیگر یک سری توانی نیست اما بررسی توانی $\sum na_n x^{n-1}$ تسلط دارد، پس این سری اخیر باید برای این x بطورمطلق همگرا باشد. این ثابت می کند که شعاع همگرایی سری مشتگیری شده $\sum na_n x^{n-1}$ لااقل با اندازه r هست. از سوی دیگر، شعاع همگرایی سری مشتگیری شده، بدلیل تسلطش بررسی اصلی $\sum a_n x^n$ نمی تواند از r بزرگتر باشد. این قسمت (الف) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات قسمت (ب) فرض می کنیم g تابع مجموع سری مشتگیری شده باشد، یعنی

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

با اعمال قضیه ۸.۱۱ درمورد g می توانیم درباره همگرایی جمله به جمله انتگرال بگیریم تا

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

حاصل شود. چون g پیوسته است اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما می گوید که برای هر x درباره همگرایی $f'(x)$ وجود داشته و مساوی $g(x)$ می باشد. این (ب) را ثابت خواهد کرد.

توجه: چون هر سری توانی $\sum a_n (x-a)^n$ را می توان بسا مشتگیری از سری انتگرالگیری شده اش، یعنی $\sum a_n (x-a)^{n+1}/(n+1)$ بدست آورد پس طبق قضیه ۹.۱۱ این دوسری هردو یک شعاع همگرایی خواهند داشت.

قضایای ۸.۱۱ و ۹.۱۱ عملیات صوری بخش ۸.۱۰ را توجیه می کنند؛ در آن بخش با جمله به جمله مشتگیری و انتگرالگیری از سریهای هندسی بسطهای گوناگونی بصورت سری توانی بدست آمد. بخصوص این قضایا صحت بسطهای

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \text{ و } \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

را بازای هر x در بازه $1 < x < 1$ - به ثبوت می‌رسانند.

یک نتیجه دیگر قضیه ۹.۱۱ این است که تابع مجموع یک سری توانی از هر مرتبه‌ای مشتق دارد و این مشتقات با چند بار مشتقگیری جمله به جمله از سری توانی بدست می‌آیند. اگر $f(x) = \sum a_n (x - a)^n$ و از این k بار مشتق گرفته و بعد در آن $x = a$ را قرار دهیم خواهیم داشت $f^{(k)}(a) = k! a_k$ پس ضریب k ام a_k با دستور زیر داده می‌شود:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = 1, 2, 3, \dots \text{ بازای}$$

چنانچه $f^{(0)}(a)$ را بمعنی $f(a)$ بگیریم این دستور برای $k = 0$ هم برقرار می‌شود. از- اینرو بسط f بصورت سری توانی از شکل

$$(۴.۱۱) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

برخوردار است. این خاصیت را می‌توان بعنوان قضیه یکتائی برای بسطهای بصورت سری توانی بیان کرد.

قضیه ۱۰.۱۱. هرگاه دوسری توانی $\sum a_n (x - a)^n$ و $\sum b_n (x - a)^n$ در یکی از همسایگیهای نقطه a یک تابع مجموع f داشته باشند آنگاه دو سری جمله به جمله برابرند؛ در واقع، بازای هر $n \geq 0$ $a_n = b_n = f^{(n)}(a)/n!$

معادله (۴.۱۱) همچنین نشان می‌دهد که مجموعه‌های جزئی یک سری توانی چیزی جز چندجمله‌ایهای تیلور تابع مجموع در a نیستند. بعبارت دیگر، هرگاه تابع f در بازه $(a - r, a + r)$ قابل نمایش بصورت یک سری توانی باشد آنگاه دنباله چندجمله‌ایهای تیلور $\{T_n f(x; a)\}$ تولید شده بوسیله f در a در این بازه به تابع مجموع f نقطه به- نقطه همگرا است. بعلاوه، همگرایی در هر زیر بازه بسته بازه همگرایی یکشکل خواهد بود.

۹.۱۱ سری تیلور تولیدشده بوسیله یک تابع

حال به دومین مسئله‌ای می‌پردازیم که در آغاز بخش پیش مطرح شد. یعنی به این مسئله که اگر تابع f داده شده باشد آیا f در بازه بازای حول نقطه a بسط بصورت سری توانی دارد یا خیر.

از آنچه هم‌اکنون ثابت شد معلوم می‌شود که این تابع باید لزوماً در بازه بازای حول a از هر مرتبه مشتق داشته و ضرائب بسط بصورت سری توانی آن از معادله (۴.۱۱) بدست آیند. اکنون فرض می‌کنیم با تابعی چون f که در بازه بازای حول a از هر مرتبه مشتق دارد شروع کرده باشیم. یک چنین تابع را در این بازه بی‌نهایت بار مشتقپذیر می‌نامیم. در-

اینصورت بتحقیق می توان سری توانی

$$(5.11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

را تشکیل داد. این را سری تیلور تولید شده بوسیله f در a می نامند. حال این دو سؤال را مطرح می کنیم: آیا این سری در هر x غیر از a همگرا است؟ اگر چنین است آیا مجموع آن $f(x)$ خواهد بود؟ باکمال تعجب می بینیم که، در حالت کلی، جواب هر دو سؤال «منفی» است. یک سری ممکن است بازای $x \neq a$ همگرا باشد یا که نباشد و، در صورت همگرایی، مجموع آن ممکن است مساوی $f(x)$ باشد یا نباشد. یک مثال که در آن سری به مجموعی غیر از $f(x)$ همگرا است در تمرین ۲۴ از بخش ۱۳.۱۱ داده شده است. یک شرط لازم و کافی برای پاسخ مثبت دادن به هر دو سؤال را می توان با استفاده از دستور تیلور با باقیمانده، که بسطی متناهی بشکل

$$(6.11) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x)$$

است، بدست آورد. مجموع متناهی چندجمله ای تیلور از درجه n است که بوسیله f در a تولید می شود و $E_n(x)$ خطای حاصل از تقریب f به این چندجمله ای تیلور خواهد بود. اگر در (۶.۱۱) n را به ∞ میل دهیم خواهیم دید که سری توانی (۵.۱۱) به $f(x)$ همگرا است اگر و فقط اگر جمله خطا به ۰ میل کند. در بخش بعد یک شرط کافی مفید برای میل کردن جمله خطا به ۰ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱۰.۱۱ شرطی کافی برای همگرایی یک سری تیلور

در قضیه ۶.۷ ثابت کردیم که جمله خطا در دستور تیلور را می توان در هر بازه حول a که در آن $f^{(n+1)}$ پیوسته باشد بصورت انتگرال

$$(7.11) \quad E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

بیان کرد. بنابراین، اگر f بی نهایت بار مشتقپذیر باشد، ما همواره این نمایش خطا را خواهیم داشت، در نتیجه سری تیلور به $f(x)$ همگرا است اگر و فقط اگر این انتگرال وقتی $n \rightarrow \infty$ به ۰ میل کند.

این انتگرال را می توان با یک تغییر متغیر بشکلی که کمی مفیدتر باشد درآورد.

می نویسیم

$$t = x + (a-x)u, \quad dt = -(x-a)du$$

و توجه می کنیم که، وقتی t از a تا x تغییر می کند، u از ۱ تا ۰ تغییر می نماید. بنابراین، انتگرال مذکور در (۷.۱۱) چنین خواهد شد:

$$(۸.۱۱) \quad E_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (a-x)u] du.$$

با استفاده از جمله خطا باین صورت می‌توان شرط کافی زیر را برای همگرایی یک سری تیلور نتیجه گرفت.

قضیه ۱۱.۱۱. فرض کنیم f در بازه $I = (a-r, a+r)$ بی‌نهایت بار مشتقپذیر بوده و عدد ثابت و مثبتی چون A وجود داشته باشد بطوری که

$$(۹.۱۱) \quad |f^{(n)}(x)| \leq A^n, \quad I \text{ در } x \text{ در } n = 1, 2, 3, \dots \text{ بازای}$$

در اینصورت سری تیلور تولید شده بوسیله f در a ، بازای هر x در I ، به $f(x)$ همگرا خواهد بود.

پرهان. با استفاده از نامساوی (۹.۱۱) در دستور انتگرالی (۸.۱۱) تخمین زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |E_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} A^{n+1} \int_0^1 u^n du = \frac{|x-a|^{n+1} A^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{B^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

که در آن $B = A|x-a|$. اما، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $B^n/n!$ بازای هر B به ۰ میل می‌کند، در نتیجه، بازای هر x در I ، $E_n(x) \rightarrow 0$.

۱۱.۱۱ بسطهای بصورت سری توانی برای توابع نمایی و مثلثاتی

توابع سینوس و کسینوس و کلیه مشتقات آنها روی تمامی محور حقیقی به عدد یک‌کراندارند. بنابراین، اگر $f(x) = \sin x$ یا $f(x) = \cos x$ ، نامساوی (۹.۱۱) بازای $A = 1$ برقرار است و بسطهای زیر بصورت سری توانی را خواهیم داشت:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

که بازای هر x حقیقی اعتبار دارند. برای تابع نمایی، یعنی $f(x) = e^x$ ، بازای هر x داریم $f^{(n)}(x) = e^x$ ، پس در هر بازه متناهی $(-r, r)$ خواهیم داشت $e^r \leq e^x \leq e^r$. بنابراین، (۹.۱۱) بازای $A = e^r$ برقرار خواهد بود. چون r دلخواه است این نشان می‌دهد که بسط زیر بصورت سری توانی بازای هر x حقیقی معتبر خواهد بود:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

بسطهای قبلی سینوس و کسینوس بصورت سری توانی را می شود بعنوان نقطه شروع یک بحث کاملاً تحلیلی از توابع مثلثاتی گرفت. اگر از این سریها بعنوان تعادیف سینوس و کسینوس استفاده کنیم می توانیم کلیه خواص جبری و تحلیلی آشنای توابع مثلثاتی را فقط از این سریها نتیجه بگیریم. مثلاً از سریهای فوق دستورهایی زیر فوراً نتیجه می شوند:

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x, D \sin x = \cos x, D \cos x = -\sin x.$$

می توان دستورهایی جمع را با روش ساده زیر بدست آورد: فرض می کنیم u و v توابع جدیدی باشند که با معادلات زیر تعریف می شوند:

$$u(x) = \sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a,$$

$$v(x) = \cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a,$$

که در آنها a یک عدد حقیقی ثابت است، و قرار می دهیم $f(x) = [u(x)]^2 + [v(x)]^2$ و قرار می دهیم $u'(x) = v(x)$ و $v'(x) = -u(x)$ و در نتیجه، بازای هر x ، $f'(x) = 0$ بنا بر این f ثابت خواهد بود، چون $f(0) = 0$ ، باید بازای هر x داشته باشیم $f(x) = 0$. این ایجاب می کند که بازای هر x ، $u(x) = v(x) = 0$ یا، عبارت دیگر،

$$\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a,$$

$$\cos(x+a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a.$$

می توان عدد π را بعنوان کوچکترین عدد مثبت x که $\sin x = 0$ معرفی کرد (می شود نشان داد که چنین x وجود دارد) و سپس ثابت نمود که سینوس و کسینوس متناوب بوده و دارای دوره تناوب 2π هستند، و همچنین $\sin(\pi/2) = 1$ و $\cos(\pi/2) = 0$. جزئیات اثبات، که در اینجا عرضه نخواهد شد، را می توان در کتاب نظریه و کاربرد سریهای نامتناهی^۱ بقلم کنوپ یافت.

۱۲.۱۱* قضیه برنشتاین

قضیه ۱۱.۱۱ نشان می دهد که اگر رشد مشتق f از توان n عدد مثبتی سریعتر نباشد سری تیلور تابع f همگرا خواهد بود. یک شرط کافی دیگر برای همگرایی بوسیله ریاضیدان روسی سرگئی برنشتاین^۲ (۱۸۸۵ -) تنظیم شده است.

قضیه ۱۲.۱۱. قضیه برنشتاین. فرض کنیم f و کلیه مشتقات آن بر بازه بسته $[0, r]$

1. K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, New York: Hafner, 1951.
2. Sergei N. Bernstein

نامنفی باشند. یعنی، بازای هر x در $[0, r]$ در $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f^{(n)}(x) \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0$$

در اینصورت، اگر $0 \leq x < r$ سری تیلور

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

به $f(x)$ همگرا خواهد بود.

پرهان. قضیه بازای $x = 0$ بدیهی است، بنا براین فرض می‌کنیم $0 < x < r$. از دستور تیلور با باقیمانده استفاده کرده می‌نویسیم

$$(10.11) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x).$$

ثابت می‌کنیم که جمله خطا در نامساویهای

$$(11.11) \quad 0 \leq E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r)$$

صدق می‌کند. این بنوبه خود نشان می‌دهد که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $E_n(x) \rightarrow 0$ زیرا کسر $(x/r)^{n+1}$ وقتی $0 < x < r$ ، به 0 میل می‌نماید.

برای اثبات (11.11) از شکل انتگرالی خطا بصورتی که در معادله (8.11) داده شده بازای $a = 0$ استفاده می‌کنیم:

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu) du.$$

این دستور بازای هر x در بازه بسته $[0, r]$ معتبر است. اگر $x \neq 0$ قرار می‌دهیم

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu) du.$$

تابع $f^{(n+1)}$ در بازه $[0, r]$ ، بدلیل نامنفی بودن مشتقش، صعودی است. بنا براین، اگر $0 \leq u \leq 1$ خواهیم داشت

$$f^{(n+1)}(x - xu) = f^{(n+1)}[x(1 - u)] \leq f^{(n+1)}[r(1 - u)],$$

که ایجاب می‌کند که اگر $0 < x \leq r$ ، $F_n(x) \leq F_n(r)$. بعبارت دیگر، خواهیم داشت $E_n(x)/x^{n+1} \leq E_n(r)/r^{n+1}$ یا

$$(12.11) \quad E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} E_n(r).$$

با قراردادن $x = r$ در معادله (10.11) می‌بینیم که چون هر جمله مجموع نامنفی است پس

$E_n(r) \leq f(r)$ با استفاده از این در (۱۲.۱۱) نامساویهای (۱۱.۱۱) حاصل می‌شوند که، بنوبه خود، برهان را تمام خواهند کرد.

۱۳.۱۱ تمرینات

برای هر یک از سریهای توانی تمرینات ۱ تا ۱۰ مجموعه کلیه x های حقیقی را بیابید که سری بازای آنها همگرا است و مجموع سری را نیز محاسبه نمایید. هرجا که مناسب دیدید می‌توانید از بسطهای صورت سری توانی که قبلا در کتاب آمده‌اند استفاده کنید.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} \cdot 2. & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \cdot 1. \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n \cdot 4. & \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \cdot 3. \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} \cdot 6. & \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n \cdot 5. \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \cdot 8. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \cdot 7. \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!} \cdot 10. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!} \cdot 9. \end{aligned}$$

هر یک از توابع تمرینات ۱۱ تا ۲۱ دارای نمایش بصورت سری توانی بر حسب توانهای x است. با فرض وجود این بسط تحقیق کنید که ضرائب از شکل داده شده برخوردارند و نشان دهید که سری بازای مقادیر مشخص شده برای x همگرا می‌باشد. هرجا که مناسب دیدید می‌توانید از بسطهایی که قبلا در کتاب آمده‌اند استفاده نمایید.

$$a > 0, a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n \cdot 11. \quad (\text{بازای هر } x).$$

$$[a^x = e^{x \log a} : \text{داهمنائی}].$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 12. \quad (\text{بازای هر } x).$$

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \cdot 13. \quad (\text{بازای هر } x).$$

$$[\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x : \text{داهمنائی}].$$

$$\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \cdot 14. \quad (|x| < 2).$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad ۱۵.$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad ۱۶.$$

$$(|x| < 1) \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ۱۷.$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n \quad ۱۸.$$

[داهنمایی: $0.3x/(1+x-2x^2) = 1/(1-x) - 1/(1+2x)$]

$$(|x| < 1) \frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n \quad ۱۹.$$

$$(|x| < 1) \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi(n+1)}{3} x^n \quad ۲۰.$$

[داهنمایی: $0.3x^2 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$]

$$(|x| < 1) \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n \quad ۲۱.$$

۲۲. ضریب a_{98} را در بسط بصورت سری توانی $\sin(2x + \pi/4) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مشخص کنید.

۲۳. فرض کنید $f(x) = (2+x^2)^{5/2}$. ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_4$ دسری تیلور تولید شده بوسیله f در 0 را معین نماید.

۲۴. فرض کنید اگر $x \neq 0$, $f(x) = e^{-1/x^2}$ و قرار دهید $f(0) = 0$.

(الف) نشان دهید که f همهجا برمحور حقیقی از هر مرتبه مشتق دارد.

(ب) نشان دهید که بازای هر $n \geq 1$, $f^{(n)}(0) = 0$. این مثال نشان می‌دهد که سری تیلور تولید شده بوسیله f حول نقطه 0 همهجا برمحور حقیقی همگرا است ولی فقط در مبدأ f را نمایش می‌دهد.

۱۴.۱۱ سریهای توانی و معادلات دیفرانسیل

گاهی که همه روشها از کار می‌افتند سریهای توانی ما را در یافتن جوابهای معادلات دیفرانسیل یاری خواهند داد. بحث اصولی استفاده از سریهای توانی در نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی در جلد دو آمده است. ما در اینجا با یک مثال چند مفهوم و چند روش مربوطه را شرح می‌دهیم.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(13.11) \quad (1 - x^2)y'' = -2y$$

را در نظر می گیریم. فرض کنیم جوابی مثل $y = f(x)$ وجود دارد که می توان آن را در یکی از همسایگیهای مبدأ بصورت یک سری توانی مانند

$$(14.11) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

نمایش داد. ابتدا ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots$ را معین می کنیم. یک طریقه برای انجام این کار چنین است: اگر از (۱۴.۱۱) دوبار مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

با ضرب آن در $1 - x^2$ در می یابیم که

$$\begin{aligned} (15.11) \quad (1 - x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n] x^n. \end{aligned}$$

با گذاردن سریهای (۱۴.۱۱) و (۱۵.۱۱) در معادله دیفرانسیل به معادله ای شامل دو سری توانی دست می یابیم که در یکی از همسایگیهای مبدأ برقرار است. طبق قضیه یکنائی، این سریهای توانی باید جمله به جمله مساوی باشند. بنا براین می توان ضرایب x^n را متحد هم قرار داده و رابطه

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n = -2 a_n$$

یا، معادل آن،

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - n - 2}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{n-2}{n+2} a_n$$

را بدست آورد. این رابطه به ما قدرت تعیین $a_2, a_3, a_4, \dots$ را متوالیاً و برحسب a_0 می بخشد. بهمین نحوی توانیم $a_3, a_4, a_5, \dots$ را برحسب a_1 معین کنیم. درمورد ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$a_2 = -a_0, a_4 = 0, a_6 = 0, a_8 = a_0, a_{10} = 0, \dots = 0.$$

ضرایب با زیرنویسهای فرد عبارتند از

$$a_3 = \frac{1-2}{1+2} a_1 = \frac{-1}{3} a_1, a_5 = \frac{3-2}{3+2} a_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{3} a_1,$$

$$a_7 = \frac{5-2}{5+2} a_5 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{3} a_1 = \frac{-1}{7 \cdot 5} a_1$$

و، بطور کلی،

$$a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n+1} a_{2n-1} = \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} \cdot \frac{2n-7}{2n-3} \dots$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{3} a_1.$$

رابطه فوق پس از حذف سازه‌های مشترک بصورت

$$a_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} a_1$$

خلاصه می‌شود. بنابراین، سری مربوط به y را می‌توان این طور نوشت:

$$y = a_0(1 - x^2) - a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}.$$

از آزمون-نسبت می‌شود برای تحقیق در همگرایی این سری بازای $|x| < 1$ استفاده کرد. اعمالی که هم‌اکنون انجام شد نشان می‌دهند که این سری، ضمن اینکه a_1 و a_0 در آن ثابتهای دلخواهی هستند، عملاً در معادله دیفرانسیل (۱۳.۱۱) صدق می‌کند. خواننده باید توجه کند که در این مثال خاص چندجمله‌ایبی که در a_0 ضرب شده خود جواب (۱۳.۱۱) است و سریبی که در a_1 ضرب گشته جوابی دیگر خواهد بود.

روشی که هم‌اکنون شرح داده شد روش ضرائب نامعلوم نام دارد. طریقه دیگر تعیین این ضرائب استفاده از دستور زیر است:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad y = f(x) \text{ اگر}$$

گاهی اوقات می‌توان مشتقات مراتب بالاتر y را در مبدأ مستقیماً از معادله دیفرانسیل حساب کرد. مثلاً با گذاردن $x = 0$ در (۱۳.۱۱) فوراً نتیجه می‌شود که

$$f'''(0) = -2f(0) = -2a_0,$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -a_0.$$

برای یافتن مشتقات بالاتر، از معادله دیفرانسیل مشتق می‌گیریم تا

$$(1 - x^2)y''' - 2xy'' = -2y' \quad (16.11)$$

بدست آید. با گذاردن $x = 0$ در آن می بینیم که $f'''(0) = -2f'(0) = -2a_1$ و در نتیجه $a_3 = f'''(0)/3! = -a_1/3$ به معادله

$$(1 - x^2)y^{(4)} - 4xy''' = 0$$

منجر می شود. این، وقتی $x = 0$ ، $f^{(4)}(0) = 0$ را بدست می دهد، و در نتیجه $a_4 \neq 0$ از تکرار مجدد این عمل درمی یابیم که

$$(1 - x^2)y^{(5)} - 6xy^{(4)} - 4y''' = 0,$$

$$f^{(5)}(0) = 4f'''(0) = -8a_1, a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{a_1}{15}.$$

واضح است که این فرایند را می توان بتعداد مطلوب تکرار کرد.

۱۵.۱۱ سری دوجمله ای

می توان از دانش خود درباره معادلات دیفرانسیل برای تعیین مجموعه های برخی از سریهای توانی نیز استفاده کرد. برای مثال، قضیه وجودی-یکتائی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول را بکار برده بسط سری دوجمله ای

$$(17.11) \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

را، که درباره $|x| < 1$ معتبر است، ثابت می کنیم. در اینجا نمای α یک عدد حقیقی دلخواه است و $\binom{\alpha}{n}$ ضریب دوجمله ای است که با

$$(18.11) \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

تعریف می شود. وقتی α عددی صحیح و نامنفی باشد کلیه ضرایب $\binom{\alpha}{n}$ جز تعدادی متناهی صفرند و سری به یک چندجمله ای از درجه α تقلیل می یابد که همان قضیه آشنای دوجمله ای خواهد بود. برای اثبات (۱۷.۱۱) برای هر α حقیقی دلخواه، ابتدا با استفاده از آزمون نسبت درمی یابیم که سری درباره $1 < x < -1$ بطور مطلق همگرا است. حال تابع f را با معادله زیر تعریف می کنیم:

$$(19.11) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

آنگاه نشان می دهیم که f یک جواب معادله دیفرانسیل خطی

$$(20.11) \quad y' - \frac{\alpha}{x+1} y = 0$$

با شرط اولیه $f(0) = 1$ است. قضیه ۳.۸ به ما می گوید که این معادله دیفرانسیل در هر

بازه‌ای که حاوی نقطه $x = -1$ نباشد فقط یک جواب با شرط $y = 1$ در نقطه $x = 0$ دارد. چون $y = (1+x)^{\alpha}$ چنین جوابی است نتیجه می‌شود که، اگر $-1 < x < 1$ ، $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

بنابراین، برای اثبات (۱۷.۱۱) کافی است نشان دهیم که f در معادله دیفرانسیل (۲۰.۱۱) صدق می‌کند. برای این کار به خاصیت زیر از ضرائب دو جمله‌ای نیارمندیم:

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} = (\alpha - n) \binom{\alpha}{n}.$$

این خاصیت، که نتیجه فوری تعریف (۱۸.۱۱) است، برای هر α حقیقی و هر عدد صحیح $n \geq 0$ برقرار می‌باشد و می‌توان آن را بشکل زیر نیز نوشت:

$$(21.11) \quad (n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha}{n}.$$

مشتقگیری از (۱۹.۱۱) نتیجه می‌دهد که

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n,$$

که از آن، بخاطر رابطه (۲۱.۱۱)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right\} x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \alpha f(x). \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که f در معادله دیفرانسیل (۲۰.۱۱) صدق می‌کند و این، بنوبه خود، (۱۷.۱۱) را ثابت خواهد کرد.

۱۶.۱۱ تمرینات

۱. معادله دیفرانسیل $y'' - 2xy' + 6y = 0$ دارای جواب بصورت سری توانی $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با شرایط اولیه $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$ است. از روش ضرائب نامعلوم استفاده کرده یک دستور بازگشتی که a_{n+2} را به a_n مربوط می‌کند بدست آورید. a_n را بازاری هر n صریحاً مشخص کرده و مجموع سری را پیدا کنید.
۲. تمرین ۱ را در مورد معادله دیفرانسیل $y'' - 2xy' + 12y = 0$ و شرایط اولیه $f(0) = 2$ و $f'(0) = 0$ حل نمائید.

در هر یک از تمرینات ۳ تا ۹ برای تعریف تابع f از سری توانی استفاده شده است. در هر مورد بازه همگرایی را مشخص کرده و نشان دهید که f در معادله دیفرانسیل داده شده صدق می‌کند. در تمرینات ۶ تا ۹ معادله دیفرانسیل را حل کرده و بدینوسیله مجموع سری را بدست آورید.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = y; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} \quad ۳$$

$$xy'' + y' - y = 0; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \quad ۴$$

$$y'' = x^a y + b; f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} \quad ۵$$

(a و b را پیدا کنید.)

$$y' = 2xy; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad ۶$$

$$y' = x + y; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ۷$$

$$y'' + 4y = 0; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \quad ۸$$

$$y'' = 9(y - x); f(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ۹$$

۱۰. توابع J_0 و J_1 را که با سریهای

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}, \quad J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

تعریف می‌شوند بترتیب توابع بسل^۱ نوع اول و از مرتبه‌های صفر و یک می‌نامند. این تابعها در بسیاری از مسائل ریاضیات محض و کاربردها ظاهر می‌شوند. نشان دهید که

(الف) هر دو سری بازای هر x حقیقی همگرا هستند؛ (ب) $J_0'(x) = -J_1(x)$

(پ) $j_1(x) = j_1'(x)$ که در آن $j_0(x) = xJ_0(x)$ و $j_1(x) = xJ_1(x)$

۱۱. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

معادله بسل نامیده می‌شود. نشان دهید J_0 و J_1 (که در تمرین ۱۰ تعریف شده‌اند) بترتیب، وقتی $n = 0$ و $n = 1$ ، جواب این معادله هستند.

در هر یک از تمرینات ۱۲، ۱۳، و ۱۴ فرض کنید معادله دیفرانسیل داده شده جوابی بصورت سری توانی دارد و اولین چهار جمله ناصفر آن را بیابید.

$$۱۲. y' = x^2 + y^2, x = 0, y = 1$$

$$۱۳. y' = 1 + xy^2 \text{ با این شرط که وقتی } x = 0, y = 0.$$

$$۱۴. y' = x + y^2 \text{ با این شرط که وقتی } x = 0, y = 0.$$

در تمرینات ۱۵، ۱۶، و ۱۷ فرض کنید معادله دیفرانسیل داده شده جوابی بصورت سری توانی $y = \sum a_n x^n$ دارد و ضریب a_n را مشخص نمایید.

$$۱۵. y' = \alpha y \quad ۱۶. y'' = xy \quad ۱۷. y'' + xy' + y = 0.$$

۱۸. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ که در آن $a_0 = 1$ و بقیه ضرایب از اتحاد

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \{2a_n + (n+1)a_{n+1}\} x^n$$

بدست می‌آید. a_1, a_2, a_3 را حساب کرده و مجموع سری مربوط به $f(x)$ را پیدا نمایید.

۱۹. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ که در آن ضرایب a_n از رابطه

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+2) x^n$$

بدست می‌آیند. a_0, a_1, a_2 و $f(\pi)$ را محاسبه کنید.

۲۰. (الف) نشان دهید که شش جمله اول سری دوجمله‌ای مربوط به $(1-x)^{-1/2}$ عبارتند از

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \frac{63}{256}x^5.$$

(ب) فرض کنید a_n جمله n م این سری بازای $x = 1/50$ بوده و r_n باقیمانده پس از n جمله باشد؛ یعنی، بازای $n \geq 0$

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

نشان دهید که $0 < r_n < a_n/49$.

[دانهائی: نشان دهید که $a_{n+1} < a_n/50$ را به تسلط سری هندسی مناسبی درآورید.]

(پ) اتحاد

$$\sqrt{2} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2}$$

را ثابت کنید و، با استفاده از آن، $\sqrt{2}$ را تا ده رقم اعشار محاسبه نمایید.

[دانهائی: از قسمتهای (الف) و (ب)، درحالی که درطول محاسبات دوازده رقم اعشار بکار می‌برید و خطاهای گرد شده را در نظر می‌گیرید، استفاده نمایید.]

۲۱. (الف) نشان دهید که

$$\sqrt{3} = \frac{1732}{1000} \left(1 - \frac{176}{30000000} \right)^{-1/2}$$

(ب) مثل تمرین ۲۰ عمل کرده $\sqrt{3}$ را تا پانزده رقم اعشار محاسبه نمایید.

۲۲. از سری دوجمله‌ای مربوط به $(1 - x^2)^{-1/2}$ انتگرال گرفته و بدینوسیله بسط بصورت سری توانی

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

را بدست آورید.

۱۰۱۲ مقدمه تاریخی

در فصول گذشته بسیاری از مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و استفاده از آنها در حل معدودی مسئله نسبتاً ساده هندسی و فیزیکی نشان داده شد. سایر کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال احتیاج به شناختی از هندسه تحلیلی دارد که از آنچه تا کنون گفته‌ایم عمیقتر باشد، و از اینروست که ما اینک به بررسی مشروحتری از چند ایده اساسی هندسی خواهیم پرداخت.

همانطور که قبلاً در این کتاب ذکر شد حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی در طول تاریخ تکامل خود بسیار بهم مربوط بوده‌اند. هرکشف جدید در یکی سبب اصلاحی در دیگری می‌شد. مسئله رسم خطوط مماس بر منحنیها به پیدایش مشتق انجامید؛ مساحت به انتگرال ختم شد؛ و مشتقات جزئی برای بررسی سطوح خمیده در فضا ابداع گردیدند. همزمان با این تحولات پیشرفتهائی نیز در مکانیک و فیزیک ریاضی صورت گرفت. در سال ۱۷۸۸ لاگرانژ اثر برجسته خود یعنی مکانیک تحلیلی^۱ را منتشر ساخت که قابلیت انعطاف زیاد و قدرت فوق‌العاده روشهای تحلیلی را در بررسی مکانیک نشان می‌داد. بعداً، در قرن ۱۹، ریاضیدان ایرلندی ویلیام روان هامیلتون (۱۸۰۵-۱۸۶۵) نظریه کوترنیوهای خویش را معرفی کرد که روشی است جدید و دیدگاهی است نو که در فهم جبر و فیزیک کمک شایانی نمود. بعدها مهمترین ویژگیهای آنالیز کوترنیون و هندسه دکارتی، بواسطه کوششهای گیبس^۲ (۱۸۳۹-۱۹۰۳) و هویساید^۳ (۱۸۵۰-۱۹۲۵)، درهم آمیختند و مبحث نوی بنام جبر برداری بوجود آمد. بزودی معلوم شد که بردارها ابزارهای ایده‌آلی برای بیان و ساده‌سازی بسیاری از ایده‌های مهم در هندسه و فیزیک هستند. در این فصل قصد ما بحث

در مبانی جبر برداری است. کاربردهای آن در هندسهٔ تحلیلی در فصل ۱۳ داده می‌شوند. در فصل ۱۴ جبر برداری با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال درهم آمیخته و کاربردهائی از آن در هندسه و مکانیک داده خواهند شد.

برای معرفی جبر برداری اصولاً سه روش مختلف وجود دارد: روش هندسی، روش تحلیلی، و روش اصل موضوعی. در روش هندسی، بردارها با پاره خطهای جهتدار، یا سهمها، نموده می‌شوند. اعمال جبری بر بردارها، نظیر جمع، تفریق، و ضرب در اعداد حقیقی، با روشهای هندسی تعریف و بررسی می‌گردند.

در روش تحلیلی، بردارها و اعمال برداری کلاً برحسب اعدادی بنام مؤلفه توصیف می‌شوند. سپس خواص اعمال برداری از خواص نظیرشان در اعداد استنتاج می‌شوند. توصیف تحلیلی بردارها از توصیف هندسیشان با معرفی یک دستگاه مختصات ناشی خواهند شد.

در روش اصل موضوعی هیچ کوششی در وصف سرشت یک بردار و یا اعمال جبری مربوط به آنها صورت نمی‌گیرد. در عوض بردارها و اعمال برداری مفاهیم تعریف نشده‌ای فرض می‌شوند که از آنها هیچ چیز نمی‌دانیم جز اینکه در مجموعهٔ معینی از اصول موضوع صدق می‌کنند. یک چنین دستگاه جبری، با انضمام چند اصل موضوع مناسب، یک فضای خطی یا یک فضای برداری خطی نام دارد. در تمام شاخه‌های ریاضیات نمونه‌هایی از فضاهای خطی ظاهر می‌شوند و ما در فصل ۱۵ به بسیاری از آنها خواهیم پرداخت. جبر پاره-خطهای جهتدار و جبر بردارهای توصیف شده با مؤلفه‌ها صرفاً دو مثال از فضاهای خطی می‌باشند.

مطالعهٔ جبر برداری از دیدگاه اصل موضوعی شاید از نظر ریاضی مناسبترین روش باشد زیرا که از این طریق بردارها فارغ از دستگاههای مختصات و آزاد از هر نمایش هندسی خاص توصیف می‌شوند. این بررسی در فصل ۱۵ بتفصیل صورت خواهد گرفت. در این فصل ما روش تحلیلی را پیش گرفته و همچنین از پاره خطهای جهتدار برای تعبیر هندسی بسیاری از نتایج استفاده می‌نمائیم. هر جا که مقدور بود برهانها را با روشهای فارغ از مختصات عرضه خواهیم کرد. بنابراین، این فصل وسایل آشنائی ما را با نمونه‌های واقعی و مهم فضاهای برداری فراهم کرده و زمینه را نیز برای بحث مجردتر فصل ۱۵ آماده خواهد ساخت.

۲۰۱۲ فضای برداری و تائیه‌ها از اعداد حقیقی

فکر استفاده از یک عدد برای تعیین یک نقطه روی یک خط بر یونانیان باستان معلوم بود. در سال ۱۶۳۷ دکارت این ایده را گسترش داد و جفت (a_1, a_2) از اعداد را برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه و سه تائی (a_1, a_2, a_3) از اعداد را برای تعیین نقطه‌ای در فضا بکار برد. در قرن ۱۹ ریاضیدانانی چون کیلی^۱ (۱۸۹۵-۱۸۲۱) و گراسمان^۲ (۱۸۷۷-۱۸۰۹) دریافتند که لازم نیست به سه عدد قناعت شود. می‌توان چهار تائی (a_1, a_2, a_3, a_4)

از اعداد ویا، بطور کلیتر، n تائی

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

از اعداد حقیقی را بازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ نیز در نظر گرفت. یک چنین n تائی را یک نقطه n بعدی یا یک بردار n بعدی و اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ را مختصات و یا مؤلفه‌های بردار می‌نامند. دسته همه بردارهای n بعدی را فضای برداری n تائیها، و یا مختصراً فضای n بعدی، می‌خوانند. ما این فضا را با V_n نشان خواهیم داد.

خواننده ممکن است در این مرحله بپرسد که دلیل توجه ما به فضاهای با بعد بیش از ۳ چیست. یک جواب آن است که بسیاری از مسائل مربوط به تعداد زیادی از معادلات همزمان را می‌توان با معرفی بردارها در یک فضای n بعدی مناسب و گذاردن یک معادله برداری بجای همه این معادلات آسانتر بتحلیل برد. مزیت دیگرش این است که بسیاری از خواص مشترک فضاهای یک بعدی، دوبعدی، سه بعدی، و غیره، یعنی خواصی که از بعد فضا مستقل هستند، را می‌شود یکجا مورد بررسی قرار داد. این با روال کار در ریاضیات نوین که از توسعه روشهای جامع برای پرداختن به مسائل بصورت کلی جانبداری می‌کند هماهنگی دارد.

مناسفانه اشکال هندسی، که در نمایش انگیزه و تجسم مفاهیم برداری در حالت n مساوی ۱، ۲، و ۳ کمک بزرگی هستند، برای $n > 3$ وجود ندارند؛ بنابراین، بررسی جبر برداری در فضاهای با ابعاد بالاتر باید کاملاً با ابزارهای تحلیلی صورت گیرد. در این فصل معمولاً بردارها را با حروف بزرگ $A, B, C, \dots$ و مؤلفه‌ها را با حروف کوچک $a, b, c, \dots$ نشان خواهیم داد. مثلاً می‌نویسیم

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

برای تبدیل V_n به یک دستگاه جبری، تساوی بردارها و دو عمل جبری جمع و ضرب در اسکالر را معرفی می‌کنیم. لغت «اسکالر» در اینجا مترادف «عدد حقیقی» بکار رفته است.

تعریف. دو بردار A و B در V_n مساوی نامند هرگاه مؤلفه‌هایشان یکی باشند. یعنی، اگر $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ معادله برداری $A = B$ دقیقاً بمعنی n معادله اسکالر

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

خواهد بود. مجموع $A + B$ مساوی برداری تعریف می‌شود که از جمع مؤلفه‌های متناظر بدست می‌آید:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

اگر c یک اسکالر باشد cA و یا Ac برداری تعریف می‌کنیم که از ضرب هر مؤلفه A در c حاصل می‌شود:

$$cA = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n).$$

از این تعریف بآسانی می توان خواص زیر را برای اعمال فوق ثابت کرد.

قضیه ۱۰۱۲. جمع برداری تعویضپذیر است:

$$A + B = B + A$$

و شرکتپذیر است:

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

ضرب در اسکالرها شرکتپذیر است:

$$c(dA) = (cd)A$$

و در دو قانون پخشپذیری

$$(c + d)A = cA + dA \quad c(A + B) = cA + cB$$

صدق می کند.

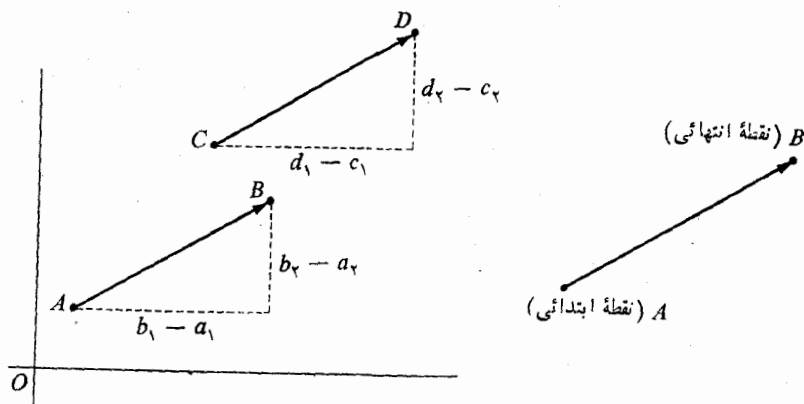
این خواص فوراً از تعریف نتیجه می شوند و بعنوان تمرین به خواننده واگذار می گردند.

برداری که تمام مؤلفه های آن ۰ است برداد صفر نام داشته و با O نموده می شود. این بردار این خاصیت را دارد که با A ، $A + O = A$. بعبارت دیگر، O یک عنصر همانی برای جمع برداری است. بردار $A(-1)$ با A — نیز نموده شده و قرینه A نامیده خواهد شد. همچنین بجای $A + (-B)$ می نویسیم $A - B$ و این را تفاضل A و B می خوانیم. معادله $(A + B) - B = A$ نشان می دهد که تفریق عکس جمع است. توجه کنید که $0A = A$ و $1A = A$.

ممکن است خواننده متوجه شباهت بین بردارها در فضای دوبعدی و اعداد مختلط شده باشد. هر دو بصورت جفتهای مرتبی از اعداد حقیقی تعریف شده و دقیقاً به یک روش با هم جمع می گردند. بنا بر این، تا آنجا که به جمع مربوط شود، اعداد مختلط و بردارهای دوبعدی از حیث جبری غیر قابل تمیزند. اختلاف آنها وقتی ظاهر می شود که ضرب را معرفی می کنیم. ضرب اعداد مختلط به دستگاه اعداد مختلط، همانند اعداد حقیقی، خواص میدان را می بخشد. می توان نشان داد (اگرچه اثبات مشکل است) که، بجز برای $n=1$ و $n=2$ ، معرفی ضربی در V_n که همه خواص میدان را داشته باشد مقدور نیست. اما در V_n می شود ضربهای خاصی را تعریف کرد که در کلیه خواص میدان صدق نمی کنند. مثلاً، در بخش ۵.۱۲، ضرب نقطه ای در بردار در V_n را بحث خواهیم کرد. حاصل این ضرب یک اسکالر است نه یک بردار. یک ضرب دیگر، بنام ضرب خارجی، در بخش ۹.۱۳ مورد بحث قرار گرفته است. این ضرب فقط در فضای V_3 انجام پذیر است. حاصل این ضرب همیشه یک بردار است لیکن ضرب خارجی تعویضپذیر نخواهد بود.

۳.۱۲ تعبیر هندسی برای $n \leq 3$

با آنکه تعاریف فوق کاملاً از هندسه جدا هستند اما بردارها و اعمال برداری تعبیر هندسی جالبی در فضاهای با بعد ۳ یا کمتر دارند. ما با رسم شکل این مفاهیم را در فضای دوبعدی نشان داده و از خواننده می‌خواهیم تا متناظر اینها را در فضاهای سه بعدی و یک بعدی برای خویش مجسم نماید.



شکل ۲.۱۲ $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ هم‌ارزند زیرا

$$B - A = D - C.$$

شکل ۱.۱۲ بردار هندسی

$\vec{AB}$ از A به B .

جفتی از نقاط A و B را یک بردار هندسی نامند اگر که یکی از آنها، مثلاً A ، نقطه ابتدائی و دیگری، یعنی B ، نقطه انتهائی یا نوک خوانده شود. ما یک بردار هندسی را بصورت یک سهم از A به B ، مثل شکل ۱.۱۲، مجسم کرده و آن را با علامت $\vec{AB}$ نشان خواهیم داد.

بردارهای هندسی بویژه برای نمایش بعضی از کمیات فیزیکی، نظیر نیرو، تغییر مکان، سرعت، و شتاب، که هم اندازه و هم جهت دارند، مناسبند. طول سهم اندازه بردار و نوک سهم جهت لازم را نشان خواهد داد.

فرض کنید یک دستگاه مختصات بمبدأ O داشته باشیم. شکل ۲.۱۲ دوبردار هندسی

$\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ را نشان می‌دهد که $B - A = D - C$. این، برحسب مؤلفه‌ها، باین معنی است که داریم

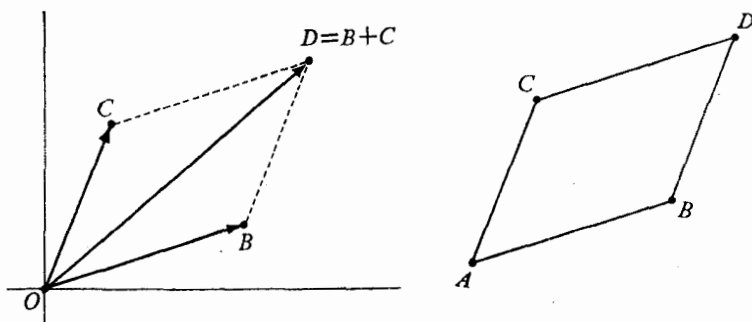
$$b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \text{ و } b_1 - a_1 = d_1 - c_1$$

با مقایسه مثلثهای همنهشت در شکل ۲.۱۲ می‌بینیم که دو سهم $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ دارای یک طولند، با هم موازیند، و از یک جهت برخوردار می‌باشند. ما چنین بردارهای هندسی را هم‌ارز

می‌نامیم. یعنی می‌گوئیم $\vec{AB}$ هم‌ارز $\vec{CD}$ است هرگاه

$$B - A = D - C. \quad (۱.۱۲)$$

توجه کنید که چهار نقطه A, B, C, D رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند. (ر.ک. شکل ۳.۱۲). معادله (۱.۱۲) را می‌توان بشکل $A + D = B + C$ نیز نوشت که به ما می‌گوید که رئوس متقابل متوازی‌الاضلاع دارای یک مجموع می‌باشند. بخصوص، اگر یکی از رأسها، مثلاً A ، مثل شکل ۴.۱۲، مبدأ O باشد، بردار هندسی از O به رأس متقابل D مجموع برداری $D = B + C$ خواهد بود. این مطلب را باین صورت توصیف می‌کنند که می‌گویند جمع برداری از نظر هندسی نظیر جمع بردارهای هندسی طبق قانون متوازی‌الاضلاع است. اهمیت بردارها در فیزیک از این مطلب قابل توجه ناشی می‌گردد که بسیاری از کمیات فیزیکی (نظیر نیرو، سرعت، و شتاب) طبق قانون متوازی‌الاضلاع باهم ترکیب می‌شوند.

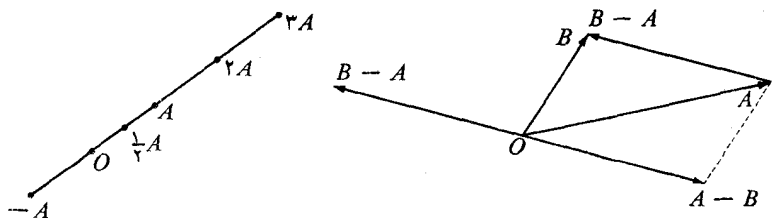


شکل ۳.۱۲ رئوس متقابل یک متوازی‌الاضلاع شکل ۴.۱۲ جمع برداری پوسیله قانون دارای یک مجموعند: $A + D = B + C$. متوازی‌الاضلاع تعبیر هندسی شده است.

برای ساده بودن نمادها، یک نقطه در V_n (وقتی $n \leq 3$) و بردار هندسی واصل از مبدأ به این نقطه را بایک علامت‌شان می‌دهیم. مثلاً A را بجای $\vec{OA}$ ، B را بجای $\vec{OB}$ ، و مانند اینها، خواهیم نوشت. گاهی اوقات A را بجای هر بردار هندسی که هم‌ارز $\vec{OA}$ باشد نیز می‌نویسیم. بعنوان مثال، شکل ۵.۱۲ معنی هندسی تفریق برداری را نشان می‌دهد. هر دو بردار هندسی با $B - A$ نموده شده‌اند لکن این بردارهای هندسی هم‌ارز هستند. اینها دارای یک اندازه و یک جهت خواهند بود.

شکل ۶.۱۲ معنی هندسی ضرب در اسکارها را نشان می‌دهد. اگر $B = cA$ طول بردار هندسی B ، $|c|$ برابر طول A است، و با A در صورت مثبت بودن c همجهت و در حالت منفی بودن c مختلف‌الجهت می‌باشد.

تعبیر هندسی بردارها در V_n (بازای $n \leq 3$) راهی را برای تعریف توازی در یک فضای n بعدی کلی می‌گشاید.



شکل ۵.۱۲ معنی هندسی تفریق بردارها. شکل ۶.۱۲ ضرب بردارها در اسکالر.

تعریف. دو بردار A و B در V_n را همجهت نمانند هرگاه بازای اسکالر مثبتی چون c ، $B = cA$ و مختلف‌الجهت خوانند هرگاه بازای c منفی $B = cA$ آنها را موازی گویند هرگاه بازای c ناصفر $B = cA$.

توجه کنید که این تعریف هر بردار را با خودش همجهت می‌کند - خاصیتی که بیقین خواستار آن هستیم. همچنین دقت کنید که این تعریف خواص زیر را به بردار صفر نسبت می‌دهد: بردار صفر تنها برداری است که با قرینهٔ خویش همجهت است، و در نتیجه تنها برداری است که با خود مختلف‌الجهت می‌باشد. بردار صفر تنها بردار موازی با بردار صفر خواهد بود.

۴.۱۲ تمرینات

۱. فرض کنید $A = (1, 3, 6)$ ، $B = (4, -3, 3)$ ، و $C = (2, 1, 5)$ سه بردار در V_3 باشند. مؤلفه‌های هر یک از این بردارها را مشخص کنید: (الف) $A + B$ ؛ (ب) $A - B$ ؛ (پ) $A + B - C$ ؛ (ت) $7A - 2B - 3C$ ؛ (ث) $2A + B - 3C$.

۲. بردارهای هندسی از مبدأ به نقاط $A = (2, 1)$ و $B = (1, 3)$ را بکشید. روی همین شکل بردار هندسی از مبدأ به نقطهٔ $C = A + tB$ را بازای هر یک از این t ها رسم نمائید: $t = 1/3$ ؛ $t = 1/2$ ؛ $t = 3/4$ ؛ $t = 1$ ؛ $t = 2$ ؛ $t = -1$ ؛ $t = -2$.

۳. تمرین ۲ را در صورتی که $C = tA + B$ حل کنید.

۴. فرض کنید $A = (2, 1)$ ، $B = (1, 3)$ ، و $C = xA + yB$ که در آن x و y اسکالر هستند. (الف) بردار هندسی از مبدأ به C را بازای هر جفت از مقادیر x و y زیر بکشید:

$x = 2$ ؛ $y = 2/3$ ؛ $x = 1/3$ ؛ $y = 3/4$ ؛ $x = 1/4$ ؛ $x = y = 1/2$ ؛ $y = 2$ ؛ $x = -1$ ؛ $y = 3/2$ ؛ $x = -1/2$ ؛ $y = -2$ ؛ $x = 3$ ؛ $y = -1$.

(ب) فکری کنید مجموعهٔ نقاط C ، وقتی x و y کلیهٔ اعداد حقیقی را که $x + y = 1$ می‌گیرند، چیست؟ (فقط این مجموعه را حدس زده و مکان هندسی را روی شکل نشان

دهید. اثبات لازم نیست.)

(پ) مجموعه تمام نقاط C را حدس بزنید که از تغییر x و y روی بازه‌های

$0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ مستقل بدست می‌آیند، و این مجموعه را رسم نمایید.

(ت) فکر می‌کنید مجموعه تمام نقاط C ، وقتی x در بازه $0 \leq x \leq 1$ تغییر کرده و

y کلیه اعداد حقیقی را بخود می‌گیرد، چیست؟

(ث) فکر می‌کنید این مجموعه اگر x و y کلیه اعداد حقیقی را بگیرند چیست؟

۵. فرض کنید $A = (2, 1)$ و $B = (1, 3)$. نشان دهید که هر بردار $C = (c_1, c_2)$

در V_2 را می‌توان بشکل $C = xA + yB$ درآورد. x و y را برحسب c_1 و c_2

بیان دارید.

۶. فرض کنید $A = (1, 1, 1)$ ، $B = (0, 1, 1)$ و $C = (1, 1, 0)$ سه بردار

در V_3 بوده و $D = xA + yB + zC$ که در آن x ، y ، z اسکالر هستند.

(الف) مؤلفه‌های D را مشخص کنید.

(ب) اگر $D = O$ ثابت کنید $x = y = z = 0$.

(پ) x و y و z را طوری بیابید که $D = (1, 2, 3)$.

۷. فرض کنید $A = (1, 1, 1)$ ، $B = (0, 1, 1)$ و $C = (2, 1, 1)$ سه بردار در

V_3 بوده و $D = xA + yB + zC$ که در آن x ، y ، z اسکالر هستند.

(الف) مؤلفه‌های D را معین نمایید.

(ب) x و y و z را که همه صفر نیستند طوری بیابید که $D = O$.

(پ) ثابت کنید هیچ انتخابی از x و y و z رابطه $D = (1, 2, 3)$ را برقرار نمی‌سازد.

۸. فرض کنید $A = (1, 1, 1, 0)$ ، $B = (0, 1, 1, 1)$ و $C = (1, 1, 0, 0)$ سه بردار در

V_4 بوده و $D = xA + yB + zC$ که در آن x ، y ، z اسکالر هستند.

(الف) مؤلفه‌های D را مشخص کنید.

(ب) اگر $D = O$ ثابت کنید $x = y = z = 0$.

(پ) x و y و z را طوری بیابید که $D = (1, 5, 3, 4)$.

(ت) ثابت کنید هیچ انتخابی از x و y و z رابطه $D = (1, 2, 3, 4)$ را برقرار

نخواهد ساخت.

۹. ثابت کنید در V_n دو بردار موازی یک بردار با هم موازیند.

۱۰. اگر چهار بردار ناصفر A ، B ، C ، و D در V_n چنان باشند که $C = A + B$ با

D موازی باشد ثابت کنید C با D موازی است اگر فقط اگر B با D موازی باشد.

۱۱. (الف) برای بردارهای در V_n خواص جمع و ضرب در اسکالرها را که در قضیه

۱۰.۱۲ ذکر شده ثابت کنید.

(ب) با رسم بردارهای هندسی در صفحه، معنی هندسی دو قانون پخشپذیری

$$c(A + B) = cA + cB \text{ و } (c + d)A = cA + dA$$

را مجسم نمایید.

۱۲. اگر چهارضلعی $OABC$ در V_3 متوازی الاضلاعی با دو رأس متقابل A و C باشد ثابت کنید که $A + (C - A)/2 = B/2$. از این معادله چه قضیه هندسی را می‌توانید درباره متوازی الاضلاعها نتیجه بگیرید؟

۵.۱۲ ضرب نقطه‌ای

حال نوع جدیدی از ضرب، بنام ضرب نقطه‌ای یا ضرب اسکالر دوبردار در V_n را معرفی می‌کنیم.

تعریف. اگر $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ دوبردار در V^n باشند حاصلضرب نقطه‌ای آنها با $A \cdot B$ نموده شده و با معادله

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

تعریف می‌گردد.

بنابراین، برای محاسبه $A \cdot B$ ، مؤلفه‌های نظیر A و B را درهم ضرب کرده و بعد کلیه حاصلضربها را بهم می‌افزائیم. این ضرب خواص جبری زیر را خواهد داشت.

قضیه ۲۰۱۲. برای هر سه بردار A و B و C در V_n و هر اسکالر c خواص زیر را داریم:

- (الف) $A \cdot B = B \cdot A$ (قانون تبویضپذیری)؛
- (ب) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (قانون پخشپذیری)؛
- (پ) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$ (همگنی)؛
- (ت) اگر $A \neq 0$ ، $A \cdot A > 0$ (مثبت بودن)؛
- (ث) اگر $A = 0$ ، $A \cdot A = 0$.

برهان. سه خاصیت اول نتایج ساده تعریفند و بعنوان تمرین باقی می‌مانند. برای اثبات دو رابطه اخیر از رابطه $A \cdot A = \sum a_k^2$ استفاده می‌کنیم. چون هر جمله نامنفی است مجموع نامنفی خواهد بود. بعلاوه، مجموع صفر است اگر و فقط اگر هر جمله در آن صفر باشد، و این فقط وقتی می‌تواند رخ دهد که $A = 0$.

ضرب نقطه‌ای تعبیر هندسی جالبی دارد که در بخش ۹.۱۲ توصیف خواهد شد. اما قبل از بحث درباره آن نامساوی مهمی را در مورد ضربهای نقطه‌ای ذکر می‌کنیم که درجبر برداری از اساس کار است.

قضیه ۳۰۱۲. نامساوی کنی-شوارتز. اگر A و B بردارهایی در V_n باشند خواهیم داشت

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B). \quad (2.12)$$

بعلاوه، در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر یکی از بردارها مضرب اسکالری از

دیگری باشد.

برهان. اگر هرطرف (۲.۱۲) را برحسب مؤلفه‌ها بیان کنیم خواهیم داشت

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

این نامساوی است که پیشتر در قضیه ۴۱.م ثابت شد.

ما برای (۲.۱۲) برهان دیگری عرضه می‌کنیم که در آن از مؤلفه‌ها استفاده‌ای نمی‌شود. این برهان برهان جالبی است زیرا نشان می‌دهد که نامساوی کشی - شوارتز نتیجه‌ای است از پنج خاصیت ضرب نقطه‌ای مذکور در قضیه ۲۰.۱۲ و به تعریف خاصی که در بدست آوردن این خواص از آن استفاده شد بستگی ندارد.

برای ارائه این برهان ابتدا می‌بینیم که (۲.۱۲) وقتی A یا B بردار صفر باشد بدیهی است. بنابراین می‌توانیم هردوی A و B را نامصفر بگیریم. فرض می‌کنیم $C = xA - yB$ که در آن $x = B \cdot B$ و $y = A \cdot B$. خواص (ت) و (ث) ایجاب می‌کنند که $C \cdot C \geq 0$. اگر این را برحسب x و y نقل کنیم (۲.۱۲) را نتیجه خواهد داد. برای بیان $C \cdot C$ برحسب x و y از خواص (الف)، (ب)، و (پ) استفاده می‌کنیم تا نتیجه شود که

$$C \cdot C = (xA - yB) \cdot (xA - yB) = x^2(A \cdot A) - 2xy(A \cdot B) + y^2(B \cdot B).$$

با استفاده از تعاریف x و y و نامساوی $C \cdot C \geq 0$ خواهیم داشت

$$(B \cdot B)^2(A \cdot A) - 2(A \cdot B)^2(B \cdot B) + (A \cdot B)^2(B \cdot B) \geq 0.$$

چون $B \neq 0$ خاصیت (ت) ایجاب می‌کند که $B \cdot B > 0$ ، پس می‌توان با تقسیم نامساوی فوق بر $(B \cdot B)$ نامساوی

$$(B \cdot B)(A \cdot A) - (A \cdot B)^2 \geq 0$$

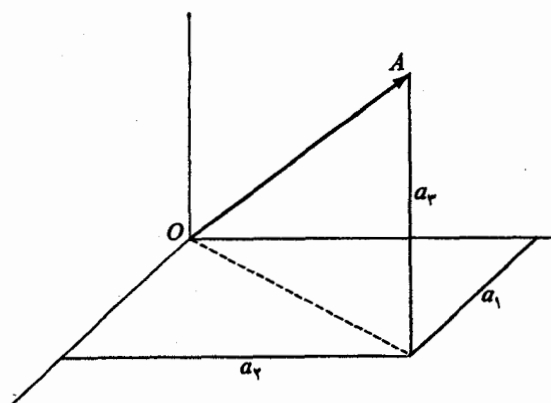
را نتیجه گرفت که همان رابطه (۲.۱۲) است. این برهان همچنین نشان می‌دهد که تساوی در (۲.۱۲) برقرار است اگر و فقط اگر $C = 0$. اما $C = 0$ اگر و فقط اگر $xA = yB$. این معادله، بنوبه خود، برقرار است اگر و فقط اگر یکی از بردارها مضرب اسکالری از دیگری باشد.

نامساوی کشی - شوارتز در تبیین خواص طول یا نرم یک بردار (که ما اینک به آن می‌پردازیم) کاربردهای مهمی دارد.

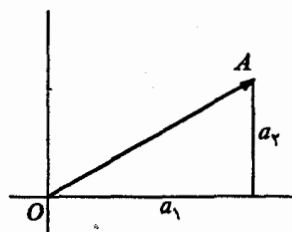
۶.۱۲ طول یا نرم یک بردار

در شکل ۷.۱۲ یک بردار هندسی در صفحه از مبدأ به نقطه $A = (a_1, a_2)$ نشان داده شده است. از قضیه فیثاغورس می‌دانیم که طول A با دستور زیر داده می‌شود:

$$A \text{ طول} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$



شکل ۸.۱۲ در V_p طول A برابر
 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ می باشد.



شکل ۷.۱۲ در V_p طول A مساوی
 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ است.

شکل ۸.۱۲ این وضع را در فضای سه بعدی نشان می دهد. اگر قضیه فیثاغورس را دوبار بکار ببریم درمی یابیم که طول بردار هندسی A در فضای سه بعدی عبارت است از

$$A \text{ طول} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

توجه کنید که طول A در هر حالت مساوی $(A.A)^{1/2}$ ، یعنی جذر حاصلضرب نقطه ای A در خودش، خواهد بود. این دستور برای معرفی مفهوم طول در فضای n بعدی راهی پیشنهاد می کند.

تعریف. اگر A یک بردار در V_n باشد طول یا نرم آن با $\|A\|$ نموده شده و بوسیله معادله

$$\|A\| = (A.A)^{1/2}$$

تعریف می شود.

خواص اساسی ضرب نقطه ای به خواص متناظری برای نرمها منجر می شوند.

قضیه ۴.۱۲. چنانچه A یک بردار در V_n بوده و c یک اسکالر باشد خواص زیر را خواهیم داشت:

(الف) اگر $A \neq 0$ ، $\|A\| > 0$ (مثبت بودن)؛

(ب) اگر $A = 0$ ، $\|A\| = 0$ ؛

$$(پ) \|cA\| = \|c\| \|A\| \text{ (همگنی).}$$

پوهان. خواص (الف) و (ب) فوراً از خاصیت‌های (ت) و (ث) قضیه ۲۰۱۲ نتیجه می‌شوند. برای اثبات (پ) از خاصیت همگنی ضربهای نقطه‌ای استفاده کرده بدست می‌آوریم که

$$\|cA\| = (cA \cdot cA)^{1/2} = (c^2 A \cdot A)^{1/2} = (c^2)^{1/2} (A \cdot A)^{1/2} = \|c\| \|A\|.$$

نامساوی کشی - شوارتز را می‌توان برحسب نرمها نیز باین صورت بیان کرد:

$$(۳۰۱۲) \quad (A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2.$$

با جذر مثبت گرفتن از هرطرف می‌توان نامساوی کشی - شوارتز را بشکل معادلش

$$(۴۰۱۲) \quad |A \cdot B| \leq \|A\| \|B\|$$

نیز نوشت. حال با استفاده از نامساوی کشی - شوارتز نامساوی مثلثی را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۵۰۱۲. نامساوی مثلثی. اگر A و B بردارهایی در V_n باشند داریم

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

بعلاوه، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $A = O$ یا $B = O$ و یا، بازی‌های مثبت، $B = cA$.

پرهان. برای اجتناب از جذرگرفتن، نامساوی مثلثی را بشکل معادلش

$$(۵۰۱۲) \quad \|A + B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$$

می‌نویسیم. طرف چپ (۵۰۱۲) برابر است با

$$\|A + B\|^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2$$

حال آنکه طرف راست آن مساوی

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\| \|B\| + \|B\|^2$$

خواهد بود. از مقایسه این دو دستور می‌بینیم که (۵۰۱۲) برقرار است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$(۶۰۱۲) \quad A \cdot B \leq \|A\| \|B\|.$$

اما $A \cdot B \leq \|A\| \|B\|$ پس (۶۰۱۲) از نامساوی کشی - شوارتز، بصورتی که در (۴۰۱۲) بیان شده، بدست می‌آید. این ثابت می‌کند که نامساوی مثلثی نتیجه‌ای از نامساوی کشی - شوارتز می‌باشد.

عکس حکم فوق نیز درست است. یعنی هرگاه نامساوی مثلثی برقرار باشد آنگاه (۶۰۱۲) برای A و A - نیز برقرار بوده که از اینها (۳۰۱۲) نتیجه خواهد شد. هرگاه در

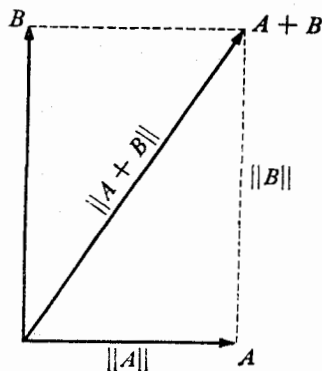
(۵.۱۲) تساوی برقرار شود آنگاه $\|A\| \|B\| = A \cdot B$. بنابراین، برای یک اسکالر c ، $B = cA$. در نتیجه $\|A\|^2 = c \|A\|^2$ و $\|A\| \|B\| = |c| \|A\|^2$. این، در صورتی که $A \neq 0$ ، ایجاب خواهد کرد که $c = |c| \geq 0$. هرگاه $B \neq 0$ آنگاه $B = cA$ که در آن $c > 0$.

در شکل ۹.۱۲ نامساوی مثلثی بصورت هندسی نشان داده شده است. این نامساوی می‌گوید که طول یک ضلع مثلث از مجموع طولهای دو ضلع دیگر بیشتر نیست.

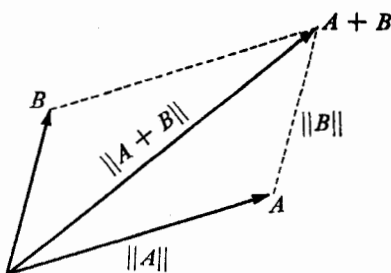
۷.۱۲ تعامد بردارها

در حین اثبات نامساوی مثلثی (قضیه ۵.۱۲) به دستور

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B, \quad (7.12)$$



شکل ۱۰.۱۲ دوبردار عمود برهم در اتحاد فیثاغورس صدق می‌کنند؛
 $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$.



شکل ۹.۱۲ معنی هندسی نامساوی مثلثی، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

که برای هر دو بردار A و B در V_n معتبر است، رسیدیم. شکل ۱۰.۱۲ دوبردار هندسی عمود برهم را در صفحه نشان می‌دهد. این بردارها مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازند که طول ساقهای آن $\|A\|$ و $\|B\|$ بوده و وترش بطول $\|A + B\|$ می‌باشد. قضیه فیثاغورس می‌گوید که

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2.$$

از مقایسه این رابطه با (۷.۱۲) می‌بینیم که $A \cdot B = 0$. بعبارت دیگر، حاصلضرب نقطه‌ای دوبردار عمود برهم در صفحه صفر است. این خاصیت انگیزه تعریف تعامد بردارها در V_n خواهد بود.

تعریف. دو بردار A و B در V_n را عمود برهم و یا متعامد خوانند اگر که $A \cdot B = 0$.

معادله (۷.۱۲) نشان می‌دهد که دو بردار A و B در V_n متعامدند اگر و فقط اگر $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$. این را اتحاد فیثاغورس در V_n می‌نامند.

۸.۱۲ تمرینات

۱. فرض کنید $A = (۱, ۲, ۳, ۴)$ و $B = (-۱, ۲, -۳, ۰)$ و $C = (۰, ۱, ۰, ۱)$ سه بردار در V_4 باشند. هریک از حاصلضربهای نقطه‌ای زیر را حساب کنید: (الف) $A \cdot B$ ؛ (ب) $B \cdot C$ ؛ (پ) $A \cdot C$ ؛ (ت) $A \cdot (B + C)$ ؛ (ث) $(A - B) \cdot C$.

۲. سه بردار $A = (۲, ۴, -۷)$ و $B = (۲, ۶, ۳)$ و $C = (۳, ۴, -۵)$ مفروضند. در هر مورد زیر فقط یک طریق می‌توان با درج پراکنش به عبارت معنی داد. پراکنشها را بگذارید و اعمال داده شده را انجام دهید.

(الف) $A \cdot BC$ ؛ (ب) $A \cdot B + C$ ؛ (پ) $A + B \cdot C$ ؛ (ت) $AB \cdot C$ ؛ (ث) $A/B \cdot C$.

۳. حکم زیر را در مورد بردارها در V_n ثابت و یا رد کنید: هرگاه $A \cdot B = A \cdot C$ و $A \neq 0$ آنگاه $B = C$.

۴. حکم زیر را در مورد بردارها در V_n ثابت و یا رد کنید: هرگاه بازای هر B ، $A \cdot B = 0$ آنگاه $A = 0$.

۵. اگر $A = (۲, ۱, -۱)$ و $B = (۱, -۱, ۲)$ بردار ناصفر C را در V_3 طوری پیدا کنید که $A \cdot C = B \cdot C = 0$.

۶. اگر $A = (۱, -۲, ۳)$ و $B = (۳, ۱, ۲)$ اسکالرهایی x و y را طوری بیابید که $C = xA + yB$ یک بردار ناصفر بوده و $C \cdot B = 0$.

۷. اگر $A = (۲, -۱, ۲)$ و $B = (۱, ۲, -۲)$ دو بردار C و D را در V_3 چنان بیابید که در همه این شرطها صدق کنند: $A = C + D$ ، $B \cdot D = 0$ ، و C با B موازی باشد.

۸. اگر $A = (۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ و $B = (۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵)$ دو بردار C و D را در V_5 طوری بیابید که در کلیه این شرطها صدق کنند: $D \cdot A = 0$ ، $B = C + ۲D$ ، و C با A موازی باشد.

۹. فرض کنید $A = (۲, -۱, ۵)$ و $B = (-۱, -۲, ۳)$ و $C = (۱, -۱, ۱)$ سه بردار در V_3 باشند. نرم هریک از بردارهای زیر را حساب کنید:

(الف) $A + B$ ؛ (ب) $A - B$ ؛ (پ) $A + B - C$ ؛ (ت) $A - B + C$.

۱۰. در مورد هر A ی زیر، بردار B را در V_3 طوری بیابید که $B \cdot A = 0$ و $\|B\| = \|A\|$.

(الف) $A = (۱, ۱)$ ؛ (ب) $A = (۱, -۱)$ ؛ (پ) $A = (۲, -۳)$ ؛ (ت) $A = (a, b)$.

۱۱. فرض کنید $A = (1, -2, 3)$ و $B = (3, 1, 2)$ دو بردار در V_3 باشند. در هر حالت بردار C را بطول ۱ چنان بیابید که با بردار داده شده موازی باشد:

(الف) $A + B$ ؛ (ب) $A - B$ ؛ (پ) $A + 2B$ ؛ (ت) $A - 2B$ ؛ (ث) $2A - B$.

۱۲. فرض کنید $A = (4, 1, -3)$ ، $B = (1, 2, 2)$ ، $C = (1, 2, -2)$ ، $D = (2, 1, 2)$ و $E = (2, -2, -1)$ بردارهایی در V_3 باشند. کلیه جفتهای متعامد را مشخص نمایید.

۱۳. کلیه بردارهای V_3 را که بر A عمود و با آن همطول هستند در صورتی پیدا کنید که
(الف) $A = (1, 2)$ ؛ (ب) $A = (1, -2)$ ؛ (پ) $A = (2, -1)$ ؛ (ت) $A = (-2, 1)$.

۱۴. اگر $A = (2, -1, 1)$ و $B = (3, -4, -4)$ نقطه C را در فضای سه بعدی طوری بیابید که A و B و C رئوس یک مثلث قائم الزاویه باشند.

۱۵. اگر $A = (1, -1, 2)$ و $B = (2, 1, -1)$ بردار ناصفر C را در V_3 طوری بیابید که بر A و B عمود باشد.

۱۶. فرض کنید $A = (1, 2)$ و $B = (3, 4)$ دو بردار در V_2 باشند. بردارهای P و Q در V_2 را طوری بیابید که $A = P + Q$ ، P با B موازی، و Q بر B عمود باشد.

۱۷. تمرین ۱۶ را در صورتی حل کنید که بردارها در V_4 بوده و $A = (1, 2, 3, 4)$ و $B = (1, 1, 1, 1)$.

۱۸. بردارهای $A = (2, -1, 1)$ ، $B = (1, 2, -1)$ و $C = (1, 1, -2)$ در V_3 داده شده اند. کلیه بردارهای D بشکل $xB + yC$ را که بر A عمود بوده و طولشان یک باشد پیدا کنید.

۱۹. ثابت کنید که برای هر دو بردار A و B در V_n اتحاد

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B$$

را داریم، و در نتیجه $A \cdot B = 0$ اگر و فقط اگر $\|A + B\| = \|A - B\|$. این در تعییر هندسی اش در V_2 چنین می گوید که اقطار یک متوازی الاضلاع همطولند اگر و فقط اگر که متوازی الاضلاع مستطیل باشد.

۲۰. ثابت کنید بازای هر دو بردار A و B در V_n داریم

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2.$$

از این اتحاد کدام قضیه هندسی را می توان درباره اضلاع و اقطار یک متوازی الاضلاع نتیجه گرفت؟

۲۱. قضیه زیر در هندسه به یک اتحاد برداری مستلزم سه بردار A و B و C اشاره می کند. اتحاد را حدس زده و برقراری آن را برای بردارهای در V_n ثابت نمایید. باین ترتیب برای این قضیه برهانی بروش برداری فراهم خواهد شد.

«مجموع مربعات اضلاع هر چهار ضلعی از مجموع مجذورات اقطار آن باندازه چهار برابر مربع طول پاره خطی که اوساط اقطار را بهم وصل می کند بیشتر است.»

۲۲. بردار A در V_n طولش α است. بردار B در V_n این خاصیت را دارد که، بازای هر جفت اسکالر x و y ، بردارهای $xA + yB$ و $9xB - 4yA$ متعامد می باشند. طول B و طول $2A + 3B$ را حساب کنید.

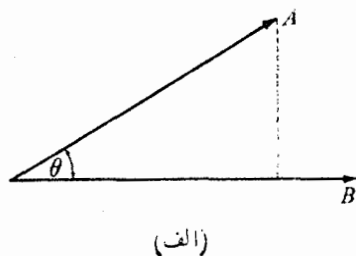
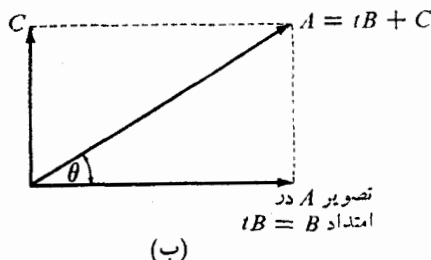
۲۳. دو بردار $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ و $B = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$ در V_5 داده شده اند. دو بردار C و D را طوری تعیین کنید که در این سه شرط صدق کنند: C موازی A باشد، D و A متعامد باشند، و $B = C + D$.

۲۴. اگر دو بردار غیر متعامد A و B در V_n مفروض باشند ثابت کنید بردارهایی چون C و D در V_n هستند که در سه شرط تمرین ۲۳ صدق می کنند و C و D را بر حسب A و B بیان نمایید.

۲۵. هر یک از احکام زیر را که مربوط به بردارها در V_n است اثبات و یا رد کنید:
(الف) هرگاه A و B متعامد باشند آنگاه بازای هر x حقیقی $\|A + xB\| \geq \|A\|$ ؛
(ب) هرگاه بازای هر x حقیقی $\|A + xB\| \geq \|A\|$ آنگاه A و B متعامد خواهند بود.

۹.۱۲ تصویرها. زاویه بین بردارها در فضای n بعدی

حاصلضرب نقطه ای دو بردار در V_n تعبیر هندسی جالبی دارد. شکل ۱۱.۱۲ (الف) دو بردار هندسی ناصفر A و B را که با هم زاویه θ می سازند نشان می دهد. در این مثال داریم $0 < \theta < \pi/2$. شکل ۱۱.۱۲ (ب) همین بردار A و دو بردار عمود برهمی را که مجموعشان A است نشان داده است. یکی از اینها، یعنی tB ، مضرب اسکالری از B است که تصویر A در امتداد B نام دارد. در این مثال t مثبت است زیرا $0 < \theta < \pi/2$.



شکل ۱۱.۱۲ بردار tB تصویر A در امتداد B است.

با استفاده از حاصلضربهای نقطه ای می توان t را بر حسب A و B بیان کرد. ابتدا می نویسیم $A = tB + C$ و بعد، با ضرب نقطه ای هر طرف در B ، نتیجه می گیریم که

$$tB \cdot B + C \cdot B = A \cdot B.$$

اما، چون C بر B عمود رسم شده، $C \cdot B = 0$. بنابراین $tB \cdot B = A \cdot B$ پس خواهیم داشت

$$(۸.۱۲) \quad t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}$$

از سوی دیگر، بین اسکالر t و زاویه θ رابطه ساده‌ای برقرار است. از شکل ۱۱.۱۲ (ب) داریم

$$\cos \theta = \frac{\|tB\|}{\|A\|} = \frac{t\|B\|}{\|A\|}.$$

با بکاربردن (۸.۱۲) در این دستور درمی‌یابیم که

$$(۹.۱۲) \quad \cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}$$

یا

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta.$$

بعبارت دیگر، حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار ناصفر A و B در V_n مساوی حاصلضرب سه‌عدد است: طول A ، طول B ، و کسینوس زاویه بین A و B .

معادله (۹.۱۲) برای تعریف مفهوم زاویه در V_n راهی پیشنهاد می‌کند. نامساوی کشی - شوارتز، بصورت (۴.۱۲)، نشان می‌دهد که، بازای هر دو بردار ناصفر در V_n ، قدرمطلق کسر سمت راست (۹.۱۲) از ۱ بیشتر نیست. بعبارت دیگر، داریم

$$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \leq 1.$$

بنابراین دقیقاً یک θ حقیقی در بازه $0 \leq \theta \leq \pi$ هست که در (۹.۱۲) صدق می‌کند. ما زاویه بین A و B را مساوی همین θ تعریف می‌کنیم. مطالب فوق در تعریف زیر خلاصه شده‌اند.

تعریف. فرض کنیم A و B دو بردار در V_n بوده و $B \neq 0$. بردار tB که در آن

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B},$$

تصویر A در امتداد B نام دارد. اگر A و B هر دو ناصفر باشند زاویه θ بین A و B با معادله

$$\theta = \arccos \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}$$

تعریف می‌شود.

توجه: تابع آرک کسینوس زاویه θ را به بازه $0 \leq \theta \leq \pi$ محدود می‌کند. همچنین توجه کنید که، وقتی $0 = A \cdot B$ ، $\theta = \pi/2$.

۱۰.۱۲ بردارهای یک‌مختصات

در فصل ۹ دیدیم که هر عدد مختلط (a, b) را می‌شود بصورت $a + bi$ نوشت که در آن i عدد مختلط $(0, 1)$ است. بهمین نحو، هر بردار (a, b) در V_2 را می‌توان بشکل

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

بیان کرد. دو بردار $(1, 0)$ و $(0, 1)$ که در مؤلفه‌های a و b ضرب شده‌اند بردارهای یک‌مختصات نام دارند. حال نظیر این مفهوم را در V_n تعریف می‌کنیم.

تعریف. در V_n بردار n $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ، $E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ، $E_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$ ، $\dots$ ، $E_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ بردارهای یک‌مختصات می‌نامند. شرط این است که مؤلفه k ام E_k مساوی ۱ و بقیه مؤلفه‌ها ۰ باشند.

نام «برداریکه» از این مطلب ناشی شده که هر بردار E_k طولش یک است. توجه کنید که این بردارها دوبدو متعامدند، یعنی حاصلضرب نقطه‌ای هر دو بردار متمایز صفر می‌باشد:

$$E_k \cdot E_j = 0, \quad k \neq j$$

قضیه ۱۰.۱۲. هر بردار $X = (x_1, \dots, x_n)$ در V_n می‌توان بشکل

$$X = x_1 E_1 + \dots + x_n E_n = \sum_{k=1}^n x_k E_k$$

نوشت. بعلاوه، این نمایش منحصر بفرد است، یعنی هرگاه

$$X = \sum_{k=1}^n y_k E_k \quad X = \sum_{k=1}^n x_k E_k$$

آنگاه، بازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، $x_k = y_k$.

برهان. قسمت اول فوراً از تعریف جمع و ضرب در اسکالرها نتیجه می‌شود. خاصیت یکتائی نیز از تعریف تساوی بردارها بدست خواهد آمد.

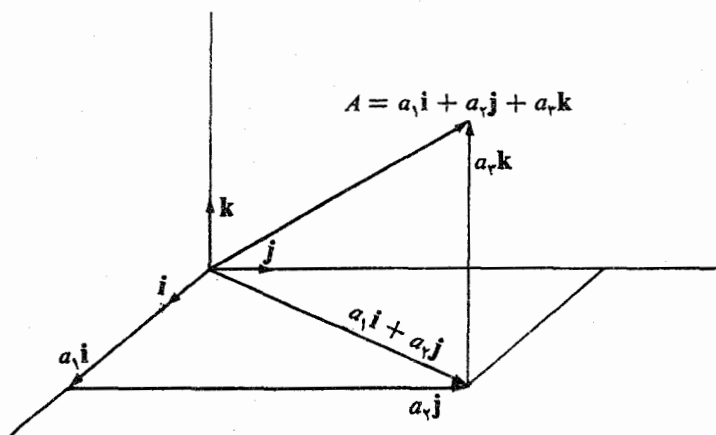
یک مجموعه از نوع $\sum c_i A_i$ یک ترکیب خطی از بردارهای $A_1, \dots, A_n$ نامیده

می‌شود. قضیه ۶.۱۲ به ما می‌گوید که هر بردار در V_n را می‌توان بصورت ترکیبی خطی از بردارهای یک‌مختصات نوشت. این را می‌شود این طور توصیف کرد که بگوئیم بردارهای یک‌مختصات $E_1, \dots, E_n$ فضای V_n را می‌پیمایند، همچنین می‌گوئیم که آنها V_n را بطور منحصربفرد می‌پیمایند زیرا هر نمایشی از یک بردار بصورت ترکیبی خطی از $E_1, \dots, E_n$ منحصر بفرد است. دسته‌هایی از بردارها بجز $E_1, \dots, E_n$ نیز هستند که V_n را بطور منحصربفرد می‌پیمایند، و ما در بخش ۱۲.۱۲ به بررسی این دسته‌ها خواهیم پرداخت.

در V_3 بردارهای یک‌مختصات E_1 و E_2 را اغلب بترتیب با $\hat{i}$ و $\hat{j}$ سیاه نشان می‌دهند. در V_3 نیز علامات $\hat{i}, \hat{j}$ و $\hat{k}$ بعوض E_1, E_2, E_3 و E_3 بکار می‌روند. گاهی اوقات یک خط یا یک سهم روی علامت می‌گذارند، مثلا $\vec{i}$ یا $\vec{i}$. معنی هندسی قضیه ۶.۱۲ در شکل ۱۲.۱۲ برای $n = 3$ مجسم شده است.

هنگامی که بردارها بصورت ترکیبی خطی از بردارهای یک‌مختصات بیان شده باشند می‌توان اعمال جبری مربوط به آنها را روی مجموعه‌های $\sum x_k E_k$ طبق قواعد معمولی جبر انجام داد. مؤلفه‌های مختلف را می‌شود در هر مرحله از محاسبه، با جمع ضرائب بردارهای یک‌مختصات، تشخیص داد. بعنوان مثال، برای جمع دو بردار، مثلا $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ می‌نویسیم

$$A = \sum_{k=1}^n a_k E_k, \quad B = \sum_{k=1}^n b_k E_k,$$



شکل ۱۲.۱۲ بردار A در V_3 بصورت ترکیبی خطی از $\hat{i}, \hat{j}$ و $\hat{k}$ بیان شده است.

و با استفاده از خاصیت خطی مجموعه‌های متناهی خواهیم داشت

$$A + B = \sum_{k=1}^n a_k E_k + \sum_{k=1}^n b_k E_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) E_k.$$

ضریب E_k در طرف راست مساوی مؤلفه k ام مجموع $A + B$ خواهد بود.

۱۱.۱۲ تمرینات

۱. اگر $A = (1, 2, 3)$ و $B = (1, 2, 2)$ تصویر A را در امتداد B معین کنید.
۲. اگر $A = (4, 3, 2, 1)$ و $B = (1, 1, 1, 1)$ تصویر A را در امتداد B مشخص نمائید.
۳. (الف) فرض کنید $A = (6, 3, -2)$ ، a ، b ، و c بترتیب زوایای بین A و بردارهای یکجه مختصات i ، j ، و k باشند. $\cos a$ ، $\cos b$ ، و $\cos c$ را محاسبه نمائید. اینها را کسینوسهای هادی A می نامند.
- (ب) کلیه بردارها در V_3 را که طولشان یک بوده و با A موازی می باشند پیدا کنید.
۴. ثابت کنید زاویه بین دو بردار $A = (1, 2, 1)$ و $B = (2, 1, -1)$ دوبرابر زاویه بین $C = (1, 4, 1)$ و $D = (2, 5, 5)$ است.
۵. از روشهای برداری استفاده کرده کسینوسهای زوایای مثلثی را در فضای سه بعدی پیدا کنید که رئوسش نقاط $(1, -1, 1)$ ، $(2, -1, 5)$ ، $(1, -3, -5)$ ، و $(3, -4, -4)$ می باشند.
۶. سه بردار A و B و C در V_3 از همه این خواص برخوردارند:

$$\|A\| = \|C\| = 5, \|B\| = 1, \|A - B + C\| = \|A + B + C\|.$$
 اگر زاویه بین A و B مساوی $\pi/8$ باشد زاویه بین B و C را پیدا کنید.
۷. سه بردار ناصفر A و B و C در V_n مفروضند. فرض کنید زاویه بین A و C مساوی زاویه بین B و C باشد. ثابت کنید C بر بردار $\|B\|A - \|A\|B$ عمود است.
۸. فرض کنید θ زاویه بین دو بردار $A = (1, 1, \dots, 1)$ و $B = (1, 2, \dots, n)$ در V_n باشد. مقدار حدی θ را، وقتی $n \rightarrow \infty$ بیابید.
۹. تمرین ۸ را در صورتی حل کنید که

$$B = (1, 3, 5, \dots, 2n-1) \text{ و } A = (2, 4, 6, \dots, 2n)$$
۱۰. بردارهای $A = (\cos \theta, -\sin \theta)$ و $B = (\sin \theta, \cos \theta)$ در V_2 داده شده اند. (الف) ثابت کنید A و B بردارهای متعامدی بطول یک هستند. شکلی بکشید که A و B را وقتی $\theta = \pi/6$ نشان دهد.
- (ب) کلیه بردارهای (x, y) در V_2 را که $(x, y) = xA + yB$ پیدا کنید. کلیه مقادیر ممکن θ را در نظر بگیرید.
۱۱. با استفاده از روشهای برداری ثابت کنید اقطار یک لوزی برهم عمودند.
۱۲. با تشکیل حاصلضرب نقطه ای دو بردار $(\cos a, \sin a)$ و $(\cos b, \sin b)$ اتحاد

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
 مثلثاتی را نتیجه بگیرید.

۱۳. اگر θ زاویه بین دو بردار ناصفر A و B در V_n باشد ثابت کنید که

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos\theta.$$

تعبیر هندسی این رابطه در K_p قانون کسینوسها در مثلثات است.

۱۴. فرض کنید حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ را بجای $A \cdot B = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ بصورت

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$$

تعریف کرده باشیم. با این تعریف کدام خواص قضیه ۲.۱۲ برقرارند؟ آیا با این تعریف نامساوی کشی - شوارتز برقرار می‌ماند؟

۱۵. فرض کنید در V_p حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار $A = (a_1, a_p)$ و $B = (b_1, b_p)$ را با دستور

$$A \cdot B = 2a_1 b_1 + a_p b_p + a_1 b_p + a_p b_1$$

تعریف کنیم. ثابت کنید با این تعریف ضرب نقطه‌ای کلیه خواص مذکور در قضیه ۲.۱۲ برقرارند. آیا نامساوی کشی - شوارتز هنوز هم معتبر است؟

۱۶. تمرین ۱۵ را در صورتی حل کنید که حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار $A = (a_1, a_p, a_p)$ و $B = (b_1, b_p, b_p)$ در V_p با دستور

$$A \cdot B = 2a_1 b_1 + a_p b_p + a_p b_p + a_1 b_p + a_p b_1$$

تعریف شده باشد.

۱۷. فرض کنید نرم بردار $A = (a_1, \dots, a_n)$ بجای $(A \cdot A)^{1/2}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$\|A\| = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

(الف) ثابت کنید این تعریف نرم از کلیه خواص مذکور در قضایای ۴.۱۲ و ۵.۱۲ برخوردار است.

(ب) از این تعریف در V_p استفاده کرده مجموعه همه نقاط (x, y) با نرم یک را با شکل نشان دهید.

(پ) چنانچه از تعریف

$$\|A\| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|$$

استفاده کنیم کدام خواص قضایای ۴.۱۲ و ۵.۱۲ برقرار خواهند ماند؟

۱۸. فرض کنید نرم بردار $A = (a_1, \dots, a_n)$ با دستور

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|,$$

که در آن علامت سمت راست بمعنی ماکزیمم n عدد $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$ است، تعریف می‌شد.

(الف) با این تعریف کدام خواص قضایای ۴.۱۲ و ۵.۱۲ برقرارند؟

(ب) از این تعریف نرم در V_n استفاده کرده مجموعه همه نقاط (x, y) با نرم یک را با شکل نشان دهید.

۱۹. اگر $A = (a_1, \dots, a_n)$ برداری در V_n باشد دو نرم را باین ترتیب تعریف کنید:

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \text{و} \quad \|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

ثابت کنید $\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$. این نامساویها را در صفحه تعبیرهندسی نمائید.

۲۰. اگر A و B دو نقطه در فضای n بعدی باشند فاصله A تا B با $d(A, B)$ نموده شده و با معادله $d(A, B) = \|A - B\|$ تعریف می‌شود. ثابت کنید که فاصله از این خواص برخوردار است:

$$d(A, B) = d(B, A) \quad (\text{الف})$$

$$d(A, B) = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad A = B \quad (\text{ب})$$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad (\text{پ})$$

۱۲.۱۲ پیمای خطی یک مجموعه متناهی از بردارها

فرض کنیم $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ یک مجموعه ناتهی مرکب از k بردار در V_n باشد که در آن k ، یعنی تعداد بردارها، از بعد فضا، یعنی n ، کوچکتر یا مساوی و یا بزرگتر است. هرگاه بتوان بردار X در V_n را بصورت ترکیبی خطی از $A_1, \dots, A_k$ ، مثلاً بشکل

$$X = \sum_{i=1}^k c_i A_i,$$

نوشت آنگاه مجموعه S را پیمای بردار X می‌خوانند.

تعریف. مجموعه کلیه بردارهایی که بوسیله S پیموده می‌شود را پیمای خطی S نامیده و با $L(S)$ نشان می‌دهند.

بعبارت دیگر، پیمای خطی S چیزی جز مجموعه همه ترکیبات خطی ممکن از بردارهای S نیست. توجه کنید که هر ترکیب خطی از بردارهای در $L(S)$ دوباره در $L(S)$ است. چنانچه $L(S) = V_n$ می‌گوئیم S تمام فضای V_n را می‌پیماید.

مثال ۱. فرض می‌کنیم $S = \{A_1\}$ در اینصورت $L(S)$ از کلیه مضارب اسکالر A_1 تشکیل شده است.

مثال ۲. هر مجموعه مانند $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ بردار صفر را می‌پیماید زیرا $O = 0A_1 + \dots + 0A_k$. این نمایش را، که در آن کلیه ضرایب $c_1, \dots, c_k$ صفرند، نمایش بدیهی بردار صفر می‌نامند. اما ممکن است ترکیبات خطی غیر بدیهی هم O را نمایش دهند. بعنوان مثال، فرض می‌کنیم یکی از بردارها در S مضرب اسکالری از دیگری باشد، مثلاً $A_4 = 2A_1$. در اینصورت نمایشهای غیر بدیهی بسیاری از O خواهیم داشت، از جمله

$$O = 2tA_1 - tA_4 + 0A_2 + \dots + 0A_k$$

که در آن t اسکالر ناصفر دلخواهی می‌باشد. ما مخصوصاً به آن S هائی توجه داریم که بردارها را فقط بیک طریق می‌پیمایند.

تعریف. گوئیم مجموعه $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ از بردارها در V_n بطورمنحصربفرد X را می‌پیماید هرگاه S بردار X را پیموده و

$$X = \sum_{i=1}^k d_i A_i \text{ و } X = \sum_{i=1}^k c_i A_i \quad (10.12)$$

در دو مجموع آمده در (۱۰.۱۲) فرض این است که بردارهای $A_1, \dots, A_k$ بهمین ترتیب نوشته می‌شوند. همچنین استلزام (۱۰.۱۲) برای یک ترتیب ثابت ولی دلخواه از بردارهای $A_1, \dots, A_k$ صادق می‌باشد.

قضیه ۷.۱۳. مجموعه S هر بردار واقع در $L(S)$ را بطورمنحصربفرد می‌پیماید اگر و فقط اگر S بردار صفر را بطورمنحصربفرد پیماید.

برهان. هرگاه S هر بردار در $L(S)$ را بطورمنحصربفرد پیماید آنگاه مسلماً O را نیز بطورمنحصربفرد خواهد پیمود. برای اثبات عکس این مطلب فرض می‌کنیم S بردار O را بطورمنحصربفرد پیماید و بردار دلخواه X را در $L(S)$ اختیار می‌کنیم. فرض کنیم S بردار X را بدوطریق پیماید، مثلاً

$$X = \sum_{i=1}^k d_i A_i \text{ و } X = \sum_{i=1}^k c_i A_i$$

با تفریق این روابط می‌بینیم که $O = \sum_{i=1}^k (c_i - d_i) A_i$. اما چون S بردار O را بطورمنحصربفرد می‌پیماید باید بازای هر i داشته باشیم $c_i - d_i = 0$ پس S بردار X را بطورمنحصربفرد خواهد پیمود.

۱۳.۱۲ استقلال خطی

قضیه ۷.۱۲ اهمیت مجموعه‌هائی را می‌رساند که بردار صفر را بطور منحصر بفرد می‌پیمایند. این مجموعه‌ها با نامی خاص از بقیه متمایز می‌شوند.

تعریف. مجموعه $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ که بردار صفر را بطور منحصر بفرد می‌پیماید یک مجموعه مستقل خطی از بردارها نام دارد. در غیر این صورت S وابسته خطی خوانده خواهد شد.

بعبارت دیگر، استقلال باین معنا است که S بردار O را فقط با نمایش بدیهی می‌پیماید:

$$\sum_{i=1}^k c_i A_i = O$$

ایجاب می‌کند که کلیه c_i ها صفرند؛

و وابستگی یعنی که S بردار O را بطریقی غیر بدیهی خواهد پیمود. یعنی بازای انتخابی از اسکالرهائی $c_1, \dots, c_k$ چنین داریم:

$$\sum_{i=1}^k c_i A_i = O$$

ولی همه c_i ها صفر نیستند.

با آنکه وابستگی و استقلال جزو خواص مجموعه‌هائی از بردارها هستند لکن از این اصطلاحات در مورد خود بردارها نیز استفاده می‌شود. بعنوان مثال، بردارهای یک مجموعه مستقل خطی را اغلب بردارهای مستقل خطی می‌خوانند. همچنین قبول می‌کنیم که مجموعه تهی را مستقل خطی بنامیم.

مثالهای زیر معانی وابستگی و استقلال را بیشتر روشن می‌کنند.

مثال ۱. هرگاه زیرمجموعه T از مجموعه S وابسته باشد آنگاه S خود وابسته است زیرا هرگاه T بردار O را بطور غیر بدیهی پیماید آنگاه S نیز چنین خواهد کرد. این منطقاً معادل این حکم است که هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خود مستقل می‌باشد.

مثال ۲. n بردار یک مجموعه مختصات $E_1, \dots, E_n$ در V_n بردار O را بطور منحصر بفرد می‌پیمایند، در نتیجه مستقل خطی خواهند بود.

مثال ۳. هر مجموعه حاوی بردار صفر وابسته است. مثلاً، اگر $A_1 = O$ ، نمایش غیر بدیهی $O = 1A_1 + 0A_2 + \dots + 0A_k$ را خواهیم داشت.

مثال ۴. مجموعه $S = \{i, j, i+j\}$ از بردارها در V_2 ، بدلیل داشتن نمایش

غیر بدیهی

$$O = i + j + (-1)(i + j)$$

برای بردار صفر، وابسته خطی است. در این مثال زیر مجموعه $\{i, j\} = T$ مستقل خطی خواهد بود. سومین بردار، یعنی $i + j$ ، در پیمای خطی T قرار دارد. قضیه بعدی نشان می‌دهد که اگر i و j را با هر بردار در پیمای خطی T در نظر بگیریم مجموعه وابسته‌ای بدست خواهیم آورد.

قضیه ۸.۱۲. فرض کنیم $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ یک مجموعه مستقل خطی از k بردار در V_n بوده و $L(S)$ پیمای خطی آن باشد. در اینصورت هر مجموعه از $k + 1$ بردار در $L(S)$ وابسته خطی خواهد بود.

برهان. اثبات باستقرا بر k ، یعنی تعداد بردارها در S ، صورت می‌گیرد. ابتدا فرض می‌کنیم $k = 1$. در اینصورت، بنا به فرض، S از یک بردار، مثلاً A_1 ، تشکیل شده است که، چون S مستقل است، $A_1 \neq O$. حال دو بردار متمایز B_1 و B_2 را در $L(S)$ اختیار می‌کنیم. پس هر کدام مضرب اسکالری از A_1 است؛ مثلاً $B_1 = c_1 A_1$ و $B_2 = c_2 A_1$ که در آنها c_1 و c_2 هر دو صفر نیستند. با ضرب B_1 در c_2 و B_2 در c_1 و تفریقشان از هم در می‌یابیم که

$$c_2 B_1 - c_1 B_2 = O.$$

چون این یک نمایش غیربدیهی O است پس B_1 و B_2 وابسته خواهند بود. این قضیه را در حالت $k = 1$ ثابت می‌کند.

حال فرض می‌کنیم قضیه برای $k - 1$ درست بوده و ثابت می‌کنیم بازای k نیز چنین است. مجموعه دلخواهی از $k + 1$ بردار در $L(S)$ ، مثلاً $T = \{B_1, B_2, \dots, B_{k+1}\}$ را اختیار می‌نمائیم. می‌خواهیم ثابت کنیم T وابسته خطی است. چون هر B_i در $L(S)$ است می‌توان بازای هر $k + 1$ و $k, \dots, 2, 1$ نوشت

$$(11.12) \quad B_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} A_j.$$

ما کلیه اسکالرها a_{i1} را که در A_1 ضرب شده‌اند معاینه کرده و، بر حسب اینکه همه این اسکالرها صفرند یا نه، برهان را به دو حالت تقسیم می‌نمائیم.

حالت ۱. بازای هر $i = 1, 2, \dots, k + 1$ ، $a_{i1} = 0$. در این حالت مجموع ذکر شده در (۱۱.۱۲) شامل A_1 نیست، پس هر B_i در T در پیمای خطی مجموعه $\{A_2, \dots, A_k\} = S'$ قرار دارد. اما S' مستقل خطی بوده و از $k - 1$ بردار تشکیل شده است. بنا به فرض استقرا قضیه برای $k - 1$ درست است، پس مجموعه T وابسته می‌باشد. این قضیه را در حالت ۱ ثابت می‌کند.

حالت ۲. همه a_{i1} ها صفر نیستند. فرض می‌کنیم $a_{11} \neq 0$. (برای این کار، در صورت

لزوم، می توان B ها را دوباره شماره گذاری کرد. با اختیار $i = 1$ در معادله (۱۱.۱۲) و ضرب دو طرف آن در c_i ، که $c_i = a_{i1}/a_{11}$ ، خواهیم داشت

$$c_i B_1 = a_{i1} A_1 + \sum_{j=2}^k c_i a_{1j} A_j.$$

از این رابطه معادله (۱۱.۱۲) را کسر می کنیم تا

$$c_i B_1 - B_i = \sum_{j=2}^k (c_i a_{1j} - a_{ij}) A_j$$

بازای $i = 2, \dots, k+1$ بدست آید. این معادله هریک از k بردار $c_i B_1 - B_i$ را بصورت یک ترکیب خطی از $k-1$ بردار مستقل خطی $A_2, \dots, A_k$ بیان می کند. بنا به فرض استقرا باید k بردار $c_i B_1 - B_i$ وابسته باشند. از اینرو بازای انتخابی از اسکالرهایی $t_2, \dots, t_{k+1}$ که همه صفر نیستند خواهیم داشت

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i B_1 - B_i) = 0,$$

که از آن نتیجه می گیریم که

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i \right) B_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i B_i = 0.$$

اما این یک ترکیب خطی غیربدیهی از $B_1, \dots, B_{k+1}$ است که بردار صفر را نمایش می دهد، پس بردارهای $B_1, \dots, B_{k+1}$ باید وابسته باشند. این برهان را تمام خواهد کرد.

اینک نشان می دهیم که مفهوم تعامد با مفهوم استقلال خطی ارتباط نزدیکی دارد.

تعریف. مجموعه $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ از بردارها در V_n را در صورتی یک مجموعه متعامد می نامند که بازای $i \neq j$ ، $A_i \cdot A_j = 0$ ، بعبارت دیگر، هر دو بردار متمایز در یک مجموعه متعامد برهم عمودند.

قضیه ۹.۱۲. هر مجموعه متعامد $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ از بردارهای ناصفر در V_n مستقل خطی است. بعلاوه، هرگاه S بردار X را پیماید، مثلاً

$$(12.12) \quad X = \sum_{i=1}^k c_i A_i,$$

آنگاه ضریبهای اسکالر $c_1, \dots, c_k$ با دستورهایی زیر داده می شوند:

$$(13.12) \quad c_j = \frac{X \cdot A_j}{A_j \cdot A_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k \text{ بازای}$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم S مستقل خطی است. فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^k c_i A_i = 0$. با ضرب نقطه‌ای هر طرف در A_1 و استفاده از این مطلب که برای هر $i, i \neq 1, A_i \cdot A_1 = 0, c_1(A_1 \cdot A_1) = 0$ ، چون $A_1 \neq 0$ ، $c_1 = 0$ پس اگر این استدلال را برای A_j عوض A_1 تکرار کنیم درمی‌یابیم که هر c_j صفر است. بنابراین، S بردار 0 را بطور منحصربه‌فرد می‌پیماید، در نتیجه S مستقل خطی خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم S بردار X را طبق معادله (۱۲.۱۲) پیماید. اگر، مانند فوق، ضرب نقطه‌ای X را با A_j بگیریم $X \cdot A_j = c_j(A_j \cdot A_j)$ را بدست می‌آوریم که از آن (۱۳.۱۲) را خواهیم داشت.

اگر همه بردارهای $A_1, \dots, A_k$ در قضیه ۹.۱۲ دارای نرم ۱ باشند دستور مربوط به ضرائب بصورت

$$c_j = X \cdot A_j$$

ساده می‌شود. یک مجموعه متعامد از بردارها مثل $\{A_1, \dots, A_k\}$ که در آن نرم هر بردار ۱ باشد یک مجموعه متعامدیکه خوانده خواهد شد. مجموعه بردارهای یک مختصات $E_1, \dots, E_n$ مثالی است از یک مجموعه متعامدیکه.

۱۴.۱۲ پایه‌ها

طبیعی است که مجموعه‌هایی از بردارها را مطالعه کنیم که هر بردار در V_n را بطور منحصربه‌فرد می‌پیمایند. هر چنین مجموعه‌ای را یک پایه برای V_n می‌نامند.

تعریف. مجموعه $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ از بردارها در V_n را یک پایه برای V_n نامند اگر که S هر بردار در V_n را بطور منحصربه‌فرد پیماید. هرگاه، علاوه بر این، S متعامد هم باشد آنگاه S یک پایه متعامد نام خواهد داشت.

بنابراین، هر پایه مجموعه‌ای است مستقل خطی که تمام فضای V_n را می‌پیماید. مجموعه بردارهای یک مختصات مثالی است از یک پایه. این پایه خاص یک پایه متعامد هم هست. حال ثابت می‌کنیم که همه پایه‌ها از یک تعداد عنصر برخوردارند.

قضیه ۱۵.۱۲. در یک فضای برداری مفروض V_n پایه‌ها دارای خواص زیرند:

(الف) هر پایه دقیقاً n بردار دارد؛

(ب) هر مجموعه از بردارهای مستقل خطی زیر مجموعه‌ای است از یک پایه؛

(پ) هر مجموعه از n بردار مستقل خطی یک پایه خواهد بود.

برهان. بردارهای یک مختصات $E_1, \dots, E_n$ یک پایه برای V_n را تشکیل

می‌دهند. اگر ثابت کنیم که هر دو پایه حاوی یک تعداد بردارند (الف) بدست آمده‌است. فرض کنیم S و T دو پایه باشند بطوری که S دارای k بردار و T دارای r بردار است. هرگاه $k > r$ آنگاه، چون $L(S) = V_n$ ، T حاوی لااقل $k + 1$ بردار است. از اینرو، بنا به قضیه ۸.۱۲، T باید وابسته خطی باشد که با فرض پایه بودن T متعارض دارد. این یعنی که نمی‌توانیم $k > r$ را داشته باشیم، پس باید داشته باشیم $k \leq r$. اگر همین استدلال را پس از تمویض S و T با هم بکنیم درخواهیم یافت که $k \leq r$. پس $k = r$ ، در نتیجه قسمت (الف) ثابت شده است.

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها در V_n باشد. هرگاه $L(S) = V_n$ آنگاه S یک پایه خواهد بود. در غیر اینصورت برداری چون X در V_n هست که در $L(S)$ نمی‌باشد. این بردار را به S اضافه کرده و مجموعه جدید $S' = \{A_1, \dots, A_k, X\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر این مجموعه وابسته می‌بود اسکالرهای $c_1, \dots, c_{k+1}$ وجود می‌داشتند که همه صفر نبوده و

$$\sum_{i=1}^k c_i A_i + c_{k+1} X = 0.$$

اما چون $A_1, \dots, A_k$ مستقل هستند پس $c_{k+1} \neq 0$. لذا می‌شد این معادله را نسبت به X حل کرده و $X \in L(S)$ را نتیجه گرفت که با نبودن X در $L(S)$ متناقض است. بنابراین، مجموعه S' مستقل خطی است و لسی حاوی $k + 1$ بردار می‌باشد. هرگاه $L(S') = V_n$ آنگاه S' یک پایه است و، چون S زیرمجموعه S' است، قسمت (ب) ثابت خواهد شد. اگر S' یک پایه نباشد می‌توان استدلال مربوط به S را برای S' کرده و مجموعه جدید S'' را که حاوی $k + 2$ بردار و مستقل خطی است بدست آورد. هرگاه S'' یک پایه باشد آنگاه قسمت (ب) ثابت شده است. در غیر اینصورت عمل را ادامه خواهیم داد. با این کار باید در چند مرحله به پایه‌ای برسیم والا، مآلاً، مجموعه مستقلی مرکب از $n + 1$ بردار را بدست می‌آوریم که ناقض قضیه ۸.۱۲ خواهد بود. بنابراین، قسمت (ب) ثابت می‌شود. بالاخره، برای اثبات (پ) از (الف) و (ب) استفاده می‌کنیم. فرض کنیم S یک مجموعه مستقل خطی مرکب از n بردار باشد. بنا بر قسمت (ب) S زیرمجموعه‌ای از یک پایه، مثلاً B ، است. اما، بنا بر (الف)، پایه B دقیقاً n عنصر دارد، در نتیجه $S = B$.

۱۵.۱۲ تمرینات

۱. فرض کنید i و j بردارهای یک‌گانه مختصات در V_p باشند. در هر حالت اسکالرهای x و y را طوری بیابید که $x(i - j) + y(i + j)$ مساوی بردار زیر در آن حالت باشد:

$$(الف) i; (ب) j; (پ) 3i - 5j; (ت) 7i + 5j.$$

۲. اگر $A = (1, 2)$ و $B = (2, -2)$ و $C = (2, -3)$ سه بردار در V_p باشند اسکالرهای x و y را طوری بیابید که $C = xA + yB$. چند جفت از این x و y ها وجود دارند؟

۳. اگر $A = (2, -1, 1)$ و $B = (1, 2, -1)$ و $C = (2, -11, 7)$ سه بردار در V_3 باشند، اسکالرهای x و y را چنان بیابید که $C = xA + yB$.

۴. ثابت کنید تمرین ۳ درحالتی که C بردار $(2, 11, 7)$ باشد جواب ندارد.

۵. فرض کنید A و B دو بردار ناصفر در V_n باشند.

(الف) اگر A و B موازی باشند ثابت کنید A و B وابسته خطی هستند.

(ب) اگر A و B موازی نباشند ثابت کنید A و B مستقل خطی می باشند.

۶. اگر (a, b) و (c, d) دو بردار در V_2 باشند ثابت کنید که اینها مستقل خطی اند اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$.

۷. کلیهٔ همای حقیقی را بیابید که بازای آنها دو بردار

$$(1 - t, 1 + t) \text{ و } (1 + t, 1 - t)$$

در V_2 مستقل خطی باشند.

۸. فرض کنید i, j, k بردارهای یکهٔ مختصات در V_3 باشند. ثابت کنید چهار بردار i, j, k و $i + j + k$ وابستهٔ خطی اند و لی همرسه تا از آنها مستقل خطی خواهند بود.

۹. فرض کنید i و j بردارهای یکهٔ مختصات در V_2 بوده و $S = \{i, i + j\}$.

(الف) ثابت کنید S مستقل خطی است.

(ب) ثابت کنید j درپسای خطی S جا دارد.

(پ) $3i - 2j$ را بصورت یک ترکیب خطی از i و j درآورید.

(ت) ثابت کنید که $L(S) = V_2$.

۱۰. سه بردار $A = i$ و $B = i + j$ و $C = i + j + 2k$ را در V_3 در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید مجموعهٔ $\{A, B, C\}$ مستقل خطی است.

(ب) هریک از i و j و k را بصورت ترکیبی خطی از A و B و C بیان دارید.

(پ) $2i - 3j + 5k$ را بصورت ترکیبی خطی از A و B و C درآورید.

(ت) ثابت کنید $\{A, B, C\}$ یک پایه برای V_3 است.

۱۱. فرض کنید $A = (1, 2)$ و $B = (2, -3)$ و $C = (2, -3)$ و $D = (1, -2)$ چهار بردار در V_2 باشند. کلیهٔ زیرمجموعه های ناتهی $\{A, B, C, D\}$ را که مستقل خطی هستند نشان دهید.

۱۲. فرض کنید $A = (1, 1, 1, 0)$ و $B = (0, 1, 1, 1)$ و $C = (1, 1, 0, 0)$ سه بردار در V_4 باشند.

(الف) معین کنید که آیا A و B و C وابستهٔ خطی هستند یا مستقل خطی.

(ب) بردار ناصفر D را چنان بیابید که A و B و C و D وابسته باشند.

(پ) بردار E را طوری بیابید که A و B و C و E مستقل باشند.

(ت) پس از انتخاب E در قسمت (پ)، بردار $X = (1, 2, 3, 4)$ را بصورت یک ترکیب خطی از A و B و C و E بنویسید.

۱۳. (الف) ثابت کنید که سه بردار زیر در V_3 مستقل خطی هستند:

$$(V_3, 1, 0), (1, V_3, 1), (0, 1, V_3).$$

(ب) ثابت کنید که این سه بردار وابسته می باشند:

$$(V_2, 1, 0), (1, V_2, 1), (0, 1, V_2).$$

(پ) کلیه‌های حقیقی را بیابید که بازای آنها سه بردار زیر در V_3 وابسته باشند:

$$(t, 1, 0), (1, t, 1), (0, 1, t).$$

۱۴. مجموعه‌های زیر از بردارها در V_4 را در نظر بگیرید. در هر حالت آن زیرمجموعه مستقل خطی را که حاوی بیشترین بردار است پیدا کنید.

$$(الف) \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\}$$

$$(ب) \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, -1, -1, 1), (1, -1, -1, -1)\}.$$

$$(پ) \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

۱۵. سه بردار مستقل خطی A و B و C در V_n مفروضند. هر یک از احکام زیر را اثبات و یا رد کنید.

$$(الف) A + C, B + C, A + B \text{ مستقل خطی هستند.}$$

$$(ب) A - B, B + C, A + C \text{ مستقل خطی هستند.}$$

۱۶. (الف) ثابت کنید مجموعه S مرکب از سه بردار در V_3 یک پایه برای V_3 است اگر و فقط اگر پیمای خطی آن $L(S)$ حاوی سه برداریکه مختصات i, j, k باشد.

(ب) تعمیم قسمت (الف) را برای V_n بیان و اثبات کنید.

۱۷. دو پایه برای V_3 بیابید که حاوی دو بردار $(1, 1, 1)$ و $(0, 1, 1)$ باشند.

۱۸. دو پایه برای V_4 بیابید که فقط در دو بردار $(1, 1, 1, 1)$ و $(0, 1, 1, 1)$ مشترک باشند.

۱۹. مجموعه‌های زیر از بردارها در V_3 را در نظر بگیرید:

$$S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1)\}, T = \{(2, 1, 0), (2, 0, -2)\}, U = \{(1, 2, 3), (1, 3, 5)\}.$$

(الف) ثابت کنید که $L(T) \subseteq L(S)$.

(ب) کلیه روابط شمولی را که بین مجموعه‌های $L(S)$ ، $L(T)$ و $L(U)$ برقرارند مشخص نمایید.

۲۰. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه متناهی از بردارها در فضای برداری V_n بوده و $L(A)$ و $L(B)$ پیمایهای خطی آنها باشند. هریک از احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) هرگاه $A \subseteq B$ آنگاه $L(A) \subseteq L(B)$.

(ب) $L(A \cap B) \subseteq L(A) \cap L(B)$.

(پ) مثالی بیاورید که در آن $L(A \cap B) \neq L(A) \cap L(B)$.

۱۶.۱۲ فضای برداری $V_n(C)$ از n تائیهای مختلط

در بخش ۲۰.۱۲ بود که فضای برداری V_n مساوی دسته تمام n تائیهای اعداد حقیقی معرفی شد. همچنین تساوی، جمع برداری، و ضرب در اسکالرها بر حسب مؤلفه‌ها این طور تعریف شدند: هرگاه $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ آنگاه

$$A = B \text{ یعنی بازای هر } i = 1, 2, \dots, n \text{ } a_i = b_i$$

$$A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n); cA = (ca_1, \dots, ca_n).$$

اگر در این روابط کلیه اسکالرهای a_i, b_i و c با اعداد مختلط عوض شوند دستگاه جبری جدید را فضای برداری مختلط نامیده و با $V_n(C)$ نشان می‌دهند. در اینجا C را از اینجهت بکار می‌بریم که یادآور مختلط بودن اسکالرها باشد.

چون اعداد مختلط همان خواصی از میدان را دارند که اعداد حقیقی دارا می‌باشند پس کلیه قضایای مربوط به فضای برداری حقیقی V_n که در آنها فقط از خواص میدانی اعداد حقیقی استفاده می‌شود در مورد $V_n(C)$ نیز معتبرند البته مشروط بر اینکه همه اسکالرها مختلط باشند. مخصوصاً آن قضایائی در این فصل که فقط به جمع برداری و ضرب در اسکالرها مربوط می‌شوند نیز برای $V_n(C)$ اعتبار خواهند داشت.

این تعمیم بصرف خود تعمیم صورت نگرفته است. فضاهای برداری مختلط بطور طبیعی در نظریه معادلات دیفرانسیل خطی و مکانیک کوانتم جدید ظاهر می‌شوند، و از اینرو مطالعه آنها از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. خوشبختانه بسیاری از قضایای مربوط به فضای برداری حقیقی V_n بدون تغییر در حالت $V_n(C)$ برقرارند. لکن در قضایای مستلزم ضربهای نقطه‌ای باید تغییرات اندکی داده شود. در اثبات دراینکه حاصلضرب نقطه‌ای $A \cdot A$ یک بردار ناصفر در خودش مثبت است از این مطلب استفاده کردیم که مجموع مربعات اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. چون مجموع مربعات اعداد مختلط می‌تواند منفی باشد، چنانچه بخواهیم خاصیت مثبت بودن حفظ شود باید تعریف $A \cdot B$ را تغییر دهیم. در $V_n(C)$ تعریف زیر را برای ضرب نقطه‌ای بکار خواهیم برد.

تعریف. اگر $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ دو بردار در $V_n(C)$ باشند حاصلضرب نقطه‌ای $A \cdot B$ را با دستور

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\bar{b}_k$ مزدوج مختلط b_k می‌باشد.

توجه کنید که این تعریف با تعریفی که قبلاً برای V_n دادیم مطابقت دارد زیرا، وقتی $b_k = \bar{b}_k$ است، در اینجا خواص اساسی ضرب نقطه‌ای، نظیر آنهایی که در قضیه نقطه ۲.۱۲ آمده، شکل زیر را بخود خواهند گرفت.

قضیه ۱۱.۱۳. بازای کلیه بردارهای A و B و C در $V_n(C)$ و هر اسکالر مختلط c داریم

$$A \cdot B = \overline{B \cdot A} \quad (\text{الف})$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{ب})$$

$$c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (\bar{c}B) \quad (\text{پ})$$

$$A \cdot A \geq 0, A \neq 0 \quad (\text{ت})$$

$$A \cdot A = 0, A = 0 \quad (\text{ث})$$

همه این خواص نتایج ساده تعریفند و اثبات آنها بعنوان تمرین باقی می‌مانند. خواننده باید توجه کند که در خاصیت (الف) تزویج با تغییر ترتیب سازه‌ها صورت می‌گیرد. همچنین در خاصیت (پ) مزدوج ضرب اسکالر ظاهر می‌شود و آن وقتی است که اسکالر c از یک طرف به طرف دیگر می‌رود.

نامساوی کشی - شوارتز در اینجا بشکل

$$|A \cdot B|^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B) \quad (۱۴.۱۲)$$

درمی‌آید. اثبات آن مشابه برهان قضیه ۳.۱۲ است. بردار $C = xA - yB$ را در نظر می‌گیریم که در آن $x = B \cdot B$ و $y = A \cdot B$ و $C \cdot C$ را محاسبه می‌کنیم. نامساوی $C \cdot C \geq 0$ به (۱۴.۱۲) منجر خواهد شد. جزئیات کار بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

چون حاصلضرب نقطه‌ای یک بردار در خودش نامنفی است می‌توان نرم یک بردار در $V_n(C)$ را با دستور معمولی

$$\|A\| = (A \cdot A)^{1/2}$$

تعریف کرد. خواص اساسی نرم‌ها، که در قضیه ۴.۱۲ ذکر شد، بدون تغییر برای $V_n(C)$ نیز صادق هستند. همچنین نامساوی مثلثی $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ نیز در $V_n(C)$ برقرار است.

تعامد بردارها در $V_n(C)$ با رابطه $A \cdot B = 0$ تعریف می‌شود. همانند حالت حقیقی، دو بردار A و B در $V_n(C)$ وقتی متعامدند که در اتحاد فیثاغورس

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$

صدق کنند.

مفاهیم پیمای خطی، استقلال خطی، وابستگی خطی، و پایه برای $V_n(C)$ درست مثل حالت حقیقی تعریف می‌شوند. همچنین قضایای ۷.۱۲ تا ۱۰.۱۲ و برهان آنها همه بدون تغییر برای $V_n(C)$ برقرار خواهند بود.

۱۷.۱۲ تمرینات

۱. فرض کنید $A = (1, i)$ و $B = (i, -i)$ و $C = (2i, 1)$ سه بردار در $V_2(C)$ باشند. هریک از حاصلضربهای نقطه‌ای زیر را حساب کنید:

(الف) $A \cdot B$ ؛ (ب) $B \cdot A$ ؛ (پ) $(iA) \cdot B$ ؛ (ت) $A \cdot (iB)$ ؛ (ث) $(iA) \cdot (iB)$ ؛ (ج) $B \cdot C$ ؛ (ح) $A \cdot C$ ؛ (خ) $(B + C) \cdot A$ ؛ (د) $(A - iB) \cdot (A + iB)$

۲. اگر $A = (2, 1, -i)$ و $B = (i, -1, 2i)$ بردار ناصفر C در $V_3(C)$ را طوری بیابید که هم بر A و هم بر B عمود باشد.

۳. ثابت کنید اتحاد

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + A \cdot B + \overline{A \cdot B}$$

بازای هر دو بردار A و B در $V_n(C)$ برقرار است.

۴. ثابت کنید اتحاد

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 2(A \cdot B + \overline{A \cdot B})$$

بازای هر دو بردار A و B در $V_n(C)$ برقرار است.

۵. ثابت کنید اتحاد

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$$

بازای هر دو بردار A و B در $V_n(C)$ برقرار است.

۶. (الف) ثابت کنید مجموع $\overline{A \cdot B} + A \cdot B$ بازای هر دو بردار A و B در $V_n(C)$ حقیقی است.

(ب) اگر A و B بردارهای ناصفری در $V_n(C)$ باشند ثابت کنید

$$-2 \leq \frac{A \cdot B + \overline{A \cdot B}}{\|A\| \|B\|} \leq 2.$$

۷. زاویه θ بین دو بردار ناصفر A و B در $V_n(C)$ را با معادله

$$\theta = \arccos \frac{\frac{1}{2}(A \cdot B + \overline{A \cdot B})}{\|A\| \|B\|}$$

تعریف می‌کنیم. نامساوی تمرین ۶ نشان می‌دهد که همواره θ منحصر بفردی در بازه

بسته $\theta \leq \pi$ هست که در این معادله صدق می‌کند. ثابت کنید

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos\theta.$$

۸. از تعریف مذکور در تمرین ۷ استفاده کرده زاویه بین دو بردار $A = (1, 0, i, i, i)$ و $B = (i, i, i, 0, i)$ در $V_5(C)$ را حساب کنید.

۹. (الف) ثابت کنید که سه بردار زیر یک پایه برای $V_3(C)$ تشکیل می‌دهند:

$$A = (1, 0, 0), B = (0, i, 0), C = (1, 1, i).$$

(ب) بردار $(i, 2i, 5, 2 - i)$ را بصورت ترکیبی خطی از A و B و C بیان دارید.

۱۰. ثابت کنید پایه تشکیل شده از بردارهای یک‌مختصات $E_1, \dots, E_n$ در V_n یک پایه برای $V_n(C)$ نیز هست.

کاربردهای جبر برداری در هندسه تحلیلی

مقدمه ۱۰۱۳

در این فصل کاربردهای جبر برداری در بررسی خطوط، صفحات، و مقاطع مخروطی مطرح می‌شوند. در فصل ۱۴ جبر برداری با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال ترکیب شده و کاربردهای دیگری از آن در مطالعهٔ منحنیها و چند مسئلهٔ مکانیک داده خواهند شد.

مطالعهٔ هندسه بعنوان یک دستگاه استنتاجی، آنطور که حدود ۳۵۰ سال قبل از میلاد اقلیدس می‌پنداشت، با مجموعه‌ای از اصول موضوع یا اصول مسلم، که توصیف‌کنندهٔ خواص نقاط و خطوطند، آغاز می‌شود. مفاهیم «نقطه» و «خط» بعنوان مفهومی اولیه اختیار شده و بدون تعریف باقی می‌مانند. سایر مفاهیم بر حسب نقاط و خطوط تعریف می‌شوند و قضا یا بطور-اصولی از اصلهای موضوع نتیجه خواهند شد. اقلیدس ده اصل موضوع برگزید و سعی کرد کلیهٔ قضایای خود را از آنها نتیجه بگیرد. بعدها ثابت شد که این اصول موضوع برای نظریهٔ او کافی نیستند. مثلاً اقلیدس در اثبات اولین قضیهٔ خود فرضی ضمنی در مورد تقاطع دو دایره می‌کند که از اصول موضوع او بدست نمی‌آید. از آن زمان تاکنون مجموعه‌های دیگری از اصول موضوع تنظیم شده‌اند که کلیهٔ قضایای اقلیدس را نتیجه می‌دهند. معروفترین آنها مجموعه‌ای است که توسط ریاضیدان آلمانی، دیوید هیلبرت^۱ (۱۸۶۲-۱۹۴۳)، در کتاب اینک قدیمی‌اش بنام مبانی هندسه^۲، که در ۱۸۹۹ انتشار یافت، عرضه شده است. گفته می‌شود این کتاب، که در طول حیات هیلبرت هفت بار به آلمانی تجدید چاپ شد، سرآغاز ریاضیات مجرد قرن بیستم بوده است.

هیلبرت بحث خود از هندسه مسطحه را با این پنج مفهوم تعریف نشده آغاز می‌کند:

1. David Hilbert

2. Grundlagen der Geometrie

The Foundations of Geometry, Open Court Publishing Co., 1947.

این کتاب به انگلیسی نیز ترجمه شده است؛

نقطه، خط، پُر (وابطه‌ای که بین یک نقطه و یک خط برقرار می‌شود)، بین (وابطه‌ای میان یک نقطه و جفتی از نقاط)، و همنهشتی (وابطه‌ای میان جفت‌هایی از نقاط). اوسپس با نزده اصل موضوع ارائه می‌دهد که از آنها تمام هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی را بدست می‌آورد. بحث او در هندسهٔ فضائی بر بیست و یک اصل موضوع استوار است که شش مفهوم تعریف نشده را دربردارند.

روش کار در هندسهٔ تحلیلی بنوعی متفاوت است. در اینجا ما مفهومی چون نقطه، خط، پُر، بین، و غیره را تعریف می‌کنیم منتها این کار را بر حسب اعداد حقیقی، که بدون تعریف بسا قی می‌مانند، انجام می‌دهیم. نهاد ریاضی حاصل را یک نمونهٔ تحلیلی هندسهٔ اقلیدسی می‌نامند. در این نمونه از خواص اعداد حقیقی برای رسیدن به اصول موضوع هیلبرت استفاده می‌شود. در اینجا ما به توصیف کلیهٔ اصول هیلبرت نخواهیم پرداخت. در عوض فقط نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مفاهیم اولیه را بر حسب اعداد تعریف کرد و چند برهان برای نشان دادن روشهای هندسهٔ تحلیلی ارائه خواهیم داد.

۲۰۱۳ خطوط در فضای n بعدی

در این بخش با استفاده از اعداد حقیقی مفاهیم نقطه، خط، و پُر را تعریف می‌کنیم. تعاریف طوری تنظیم شده‌اند که، ضمن معنی‌دار بودن آنها در هر فضای n بعدی ($n \geq 1$)، با افکار شهودی ما دربارهٔ هندسهٔ اقلیدسی سه بعدی نیز مطابقت دارند.

یک نقطه چیزی جز یک بردار در V_n نیست، یعنی n تائی مرتبی است از اعداد حقیقی؛ ما از کلمات «نقطه» و «بردار» بجای هم استفاده خواهیم کرد. فضای برداری V_n یک نمونهٔ تحلیلی فضای اقلیدسی n بعدی یا فقط فضای n بعدی اقلیدسی نامیده می‌شود. برای تعریف «خط» از اعمال جبری جمع و ضرب در اسکالرها در V_n استفاده خواهیم کرد.

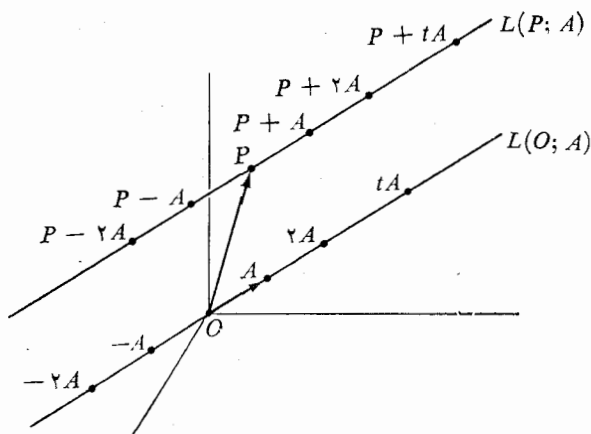
تعریف. فرض کنیم نقطهٔ P و بردار ناصفر A داده شده باشند. مجموعهٔ کلیهٔ نقاط بشکل $P + tA$ ، که در آن t تمام اعداد حقیقی را می‌گیرد، خط ماد بر P موازی A نامیده می‌شود. این خط را با $L(P; A)$ نشان داده می‌نویسیم

$$L(P; A) = \{P + tA \mid t \text{ حقیقی است}\}$$

و یا، بطور خلاصه‌تر، $L(P; A) = \{P + tA\}$. می‌گوئیم نقطهٔ Q بر خط $L(P; A)$ واقع است (قرارداد) هرگاه $Q \in L(P; A)$.

در علامت $L(P; A)$ نقطهٔ P که اول نوشته شده بر خط قرار دارد زیرا متناظر $t = 0$ است. نقطهٔ دوم، یعنی A ، را یک بردارهای برای خط می‌نامند. خط $L(O; A)$ مار بر مبدأ O پیمای خطی A است؛ این خط از کلیهٔ مضارب اسکالر A تشکیل شده است. خط مار بر P موازی A با افزودن P به هر بردار در پیمای خطی A حاصل خواهد شد.

شکل ۱۰۱۳ تعبیر هندسی این تعریف را در V_3 نشان می‌دهد. هر نقطه $P + tA$ را می‌توان نوک یک بردار هندسی که از مبدأ رسم شده تصور کرد. وقتی t کلیه اعداد حقیقی را بخود می‌گیرد نقطه نظیر $P + tA$ خط مار بر P موازی بردار A را رسم خواهد نمود. شکل ۱۰۱۳ نقاط متناظر چند مقدار از t را که بر خطوط $L(P; A)$ و $L(O; A)$ واقعند نشان می‌دهد.



شکل ۱۰۱۳ خط $L(P; A)$ مار بر P موازی A و رابطه هندسی آن با خط $L(O; A)$ مار بر O موازی A .

۳.۱۳ چند خاصیت ساده خطوط مستقیم

ابتدا نشان می‌دهیم که بردار هادی A در تعریف $L(P; A)$ را می‌توان با هر بردار موازی A عوض کرد. (یادآور می‌شویم که دو بردار A و B را وقتی موازی گویند که بازای اسکالر ناصفری چون c ، $A = cB$).

قضیه ۱۰۱۳. دو خط $L(P; A)$ و $L(F; B)$ مار بر یک نقطه P مساویند اگر و فقط اگر بردارهای هادی A و B موازی باشند.

پروهان. ابتدا فرض می‌کنیم $L(P; A) = L(P; B)$. نقطه‌ای بر $L(P; A)$ غیر از P ، مثلاً $P + A$ ، را اختیار می‌کنیم. این نقطه بر $L(P; B)$ نیز واقع است، پس، بازای اسکالری چون c ، $P + A = P + cB$. در نتیجه داریم $A = cB$ و، چون $A \neq O$ ، $c \neq 0$. لذا A و B موازی خواهند بود.

حال عکس این را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم A و B موازی باشند، مثلاً، بازای $c \neq 0$ ، $A = cB$. هرگاه Q بر $L(P; A)$ واقع باشد آنگاه داریم

$$Q = P + tA = P + t(cB) = P + (ct)B,$$

در نتیجه Q بر $L(P; B)$ قرار خواهد داشت. بنا براین $L(P; A) \subseteq L(P; B)$. بهمین نحو $L(P; B) \subseteq L(P; A)$ پس $L(P; A) = L(P; B)$.

اینک نشان می‌دهیم که نقطه P در تعریف $L(P; A)$ را می‌شود با هر نقطه دیگر Q واقع بر همان خط عوض کرد.

قضیه ۲۰۱۳. دو خط $L(P; A)$ و $L(Q; A)$ دارای یک بردار هادی A مساویند اگر و فقط اگر Q بر $L(P; A)$ واقع باشد.

برهان. فرض کنیم $L(P; A) = L(Q; A)$. چون Q بر $L(Q; A)$ قرار دارد بر $L(P; A)$ نیز واقع است. برای اثبات عکس فرض می‌کنیم Q بر $L(P; A)$ واقع باشد، مثلاً $Q = P + cA$. می‌خواهیم ثابت کنیم $L(P; A) = L(Q; A)$. گوئیم هرگاه $X \in L(P; A)$ آنگاه بازای t ای $X = P + tA$ اما $X = Q - cA$ ، پس

$$X = Q - cA + tA = Q + (t - c)A,$$

و در نتیجه X نیز بر $L(Q; A)$ قرار دارد. بنابراین $L(Q; A) \subseteq L(P; A)$. بهمین نحو درمی‌یابیم که $L(Q; A) \subseteq L(P; A)$ ، پس دو خط مساوی خواهند بود.

یکی از اصول معروف اقلیدس اصل توازی است که منطقاً معادل آن است که بگوئیم «از هر نقطه داده شده یک و فقط یک خط بموازات خطی مفروض می‌گذرد.» این خاصیت را بعنوان نتیجه ساده‌ای از قضیه ۱۰۱۳ بدست می‌آوریم. ابتدا به تعریف توازی خطوط نیاز خواهیم داشت.

تعریف. دو خط $L(P; A)$ و $L(Q; B)$ موازی نامند هرگاه بردارهای هادی آنها A و B موازی باشند.

قضیه ۳۰۱۳. هرگاه خط L و نقطه Q غیر واقع بر آن مفروض باشند آنگاه یک و فقط یک خط مانند L' حاوی Q هست که با L موازی است.

برهان. فرض کنیم بردارهای خط مفروض A باشد. خط $L' = L(Q; A)$ را در نظر می‌گیریم. این خط حاوی Q و موازی L است. قضیه ۱۰۱۳ به ما می‌گوید که این تنها خطی است که این دو خاصیت را دارد.

توجه: مدتها بود که ریاضیدانان فکر می‌کردند اصل توازی را می‌شود از اصول دیگر اقلیدس نتیجه گرفت، اما همه تلاشها برای اثبات این مطلب به شکست منتهی شد. بعدها در

اوائل قرن ۱۹م، ریاضیدانانی چون کارل گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷)، بویوئی (۱۸۶۰-۱۸۰۲)، ولباچفسکی^۲ (۱۸۵۶-۱۷۹۳) متقاعد شدند که اصل توازی را نمی‌شود از سایر اصول نتیجه گرفت و به ابداع هندسه‌های غیر اقلیدسی پرداختند، یعنی هندسه‌هایی که اصل توازی در آنها برقرار نیست. کار این افراد ریاضیدانان و علمای دیگر را واداشت تا دیدگاههای خود را در باب «حقایق پذیرفته شده» وسعت داده و اصول دیگری را که قرن‌ها مقدس بودند مورد تردید قرار دهند.

همچنین باسانی می‌توان خواص زیر را برای خطوط، که اقلیدس آنها را بصورت اصل بیان کرد، نتیجه گرفت.

قضیه ۴.۱۳. دو نقطه متمایز یک خط را مشخص می‌کنند. یعنی، اگر $P \neq Q$ ، یک و فقط یک خط هست که هم حاوی P باشد و هم حاوی Q . این خط را می‌توان بصورت مجموعه $\{P + t(Q - P)\}$ توصیف کرد.

برهان. فرض کنیم L خط مار بر P موازی $Q - P$ باشد، یعنی

$$L = L(P; Q - P) = \{P + t(Q - P)\}.$$

این خط شامل هم P و هم Q است (با فرض $t = 0$ ، P ، با فرض $t = 1$ ، Q را خواهیم داشت). حال فرض می‌کنیم L' خطی دلخواه حاوی P و Q باشد. ثابت می‌کنیم $L' = L$. گوئیم چون L' شامل P است بازای A ی غیر از O داریم $L' = L(P; A)$. اما L' حاوی Q نیز هست، پس، بازای یک c ، $P + cA = Q$. لذا خواهیم داشت $Q - P = cA$. چون $Q \neq P$ ، $c \neq 0$. بنابراین $Q - P$ موازی A است، پس، بنا بر قضیه ۴.۱۳، خواهیم داشت

$$L' = L(P; A) = L(P; Q - P) = L.$$

مثال. قضیه ۴.۱۳. آزمون ساده‌ای را برای واقع بودن Q برخط مفروض $L(P; A)$ نشان می‌دهد. این قضیه به ما می‌گوید که Q بر $L(P; A)$ واقع است اگر و فقط اگر $Q - P$ موازی A باشد. مثلاً خط $L(P; A)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $P = (1, 2, 3)$ و $A = (2, -1, 5)$. برای آنکه بفهمیم نقطه $Q = (1, 1, 4)$ بر این خط واقع است یا نه، $Q - P = (0, -1, 1)$ را بررسی می‌کنیم. چون $Q - P$ مضرب اسکالری از A نیست پس نقطه Q بر این خط واقع نمی‌باشد. از طرف دیگر، اگر $Q = (5, 0, 13)$ ، درمی‌یابیم که $Q - P = (4, -2, 10) = 2A$ ، پس این Q برخط قرار خواهد داشت.

وابستگی خطی دوبردار در V_n را می‌توان ب زبان هندسی بیان کرد.

قضیه ۵.۱۳. دوبردار A و B در V_n وابسته خطی اند اگر و فقط اگر هردو بر یک خط ماربر مبدأ قرار داشته باشند.

برهان. چنانچه A یا B صفر باشد قضیه خود بخود برقرار است. هرگاه هردو ناصفر باشند آنگاه A و B وابسته اند اگر و فقط اگر بازای اسکالری چون t ، $B = tA$. اما $B = tA$ اگر و فقط اگر B برخط ماربر مبدأ موازی A قرار داشته باشد.

۴.۱۳ خطوط و توابع برداری

مفهوم خط را می توان به مفهوم تابع مرتبط ساخت. تناظری که هر t حقیقی را به بردار $P + tA$ واقع برخط $L(P; A)$ مربوط کند تابعی است که قلمرو آن مجموعه اعداد حقیقی و بردش خط $L(P; A)$ می باشد. هرگاه این تابع را با علامت X نشان دهیم آنگاه مقدار تابعی $X(t)$ در t با معادله

$$X(t) = P + tA \quad (۱.۱۳)$$

داده می شود. این تابع را یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی می نامیم. دیدگاه تابع دیدگاه مهمی است زیرا، همانطور که در فصل ۱۴ خواهیم دید، این دیدگاه برای توصیف منحنیهای فضائی کلیتر نیز روشی طبیعی بدست می دهد.

اغلب در معادله (۱.۱۳) اسکالر t را یک پارامتر و خود معادله را یک معادله پارامتری برداری یا فقط یک معادله برداری خط می خوانند. گاهی شایسته است که خط بصورت مسیر یک جسم متحرک گرفته شود، که در این حالت پارامتر t زمان و بردار $X(t)$ بردار مکان نام خواهد داشت.

توجه کنید که دو نقطه $X(a)$ و $X(b)$ برخط مفروض $L(P; A)$ مساویند اگر و فقط اگر داشته باشیم $P + aA = P + bA$ یا $(a - b)A = O$. چون $A \neq O$ این رابطه آخر برقرار است اگر و فقط اگر $a = b$. از اینرو مقادیر متمایز پارامتر t نقاط متفاوتی برخط را خواهند داد.

حال بر یک خط مفروض سه نقطه متمایز $X(a)$ ، $X(b)$ ، و $X(c)$ را، که $a > b$ ، در نظر می گیریم. می گوئیم $X(c)$ بین $X(a)$ و $X(b)$ قرار دارد (واقع است) اگر که c بین a و b قرار داشته باشد، یعنی $a < c < b$.

همنهشتی را می توان برحسب نرمها تعریف کرد. جفتی از نقاط P و Q را همنهشت جفت دیگر P' و Q' نامند هرگاه $\|P - Q\| = \|P' - Q'\|$. نرم $\|P - Q\|$ فاصله بین P و Q نیز نامیده می شود.

در اینجا تعریف مفاهیم نقطه، خط، برا، بین، و همنهشتی در نمونه تحلیلی ما از فضای n بعدی اقلیدسی پایان می رسد. این بخش را با چند تذکر دیگر درباره معادلات پارامتری خطوط در فضای سه بعدی خاتمه می دهیم.

اگر خطی از دو نقطه متمایز P و Q بگذرد می توان از $Q - P$ بجای بردار هادی

A در معادله (۱.۱۳) استفاده کرد؛ پس معادله برداری خط بشکل

$$X(t) = tQ + (1 - t)P \text{ یا } X(t) = P + t(Q - P)$$

درمی آید.

معادلات برداری را می توان بر حسب مؤلفه ها نیز بیان کرد. بعنوان مثال، اگر بنویسیم

$$X(t) = (x, y, z), A = (a, b, c), P = (p, q, r)$$

معادله (۱.۱۳) با سه معادله اسکالر

$$(2.13) \quad x = p + ta, y = q + tb, z = r + tc$$

معادل خواهد بود. این معادلات را معادلات پارامتری اسکالر یا فقط معادلات پارامتری خط نام داده اند؛ اینها در محاسبات متضمن مؤلفه ها مفیدند. معادله برداری برای بررسی خواص عمومی خطوط ساده تر و طبیعی تر خواهد بود.

چنانچه کلیه بردارها در فضای دوبعدی باشند فقط دو معادله پارامتری اول (۲.۱۳) لازم می شوند. در این حالت می توان t را از دو معادله پارامتری حذف کرده رابطه

$$(3.13) \quad b(x - p) - a(y - q) = 0$$

را بدست آورد که معادله دکارتی خط نام دارد. اگر $a \neq 0$ این معادله را می توان بشکل نقطه نما - شیب نمای

$$y - q = \frac{b}{a}(x - p)$$

نوشت. نقطه (p, q) برخط واقع است و عدد b/a شیب خط خواهد بود. معادله دکارتی (۳.۱۳) را می توان بر حسب حاصلضربهای نقطه ای نیز نوشت. اگر قرار دهیم

$$P = (p, q), X = (x, y), N = (b, -a)$$

معادله (۳.۱۳) بصورت

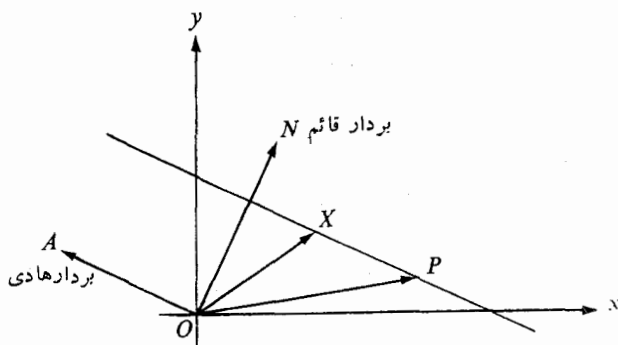
$$X \cdot N = P \cdot N \text{ یا } (X - P) \cdot N = 0$$

در خواهد آمد. بردار N بر بردار هادی A ، باین دلیل که

$$N \cdot A = ba - ab = 0,$$

عمود است؛ N را بردار قائم برخط می خوانند. این خط از کلیه نقاطی چون X تشکیل شده که در رابطه $(X - P) \cdot N = 0$ صدق می کنند.

معنی هندسی این رابطه در شکل ۲.۱۳ نشان داده شده است. نقاط P و X برخط واقعند و بردار قائم N بر $X - P$ عمود خواهد بود. از شکل مزبور معلوم می شود که، درین کلیه نقاط X واقع برخط، کمترین طول $\|X\|$ وقتی است که X تصویر P در امتداد N باشد. حال برای این مطلب برهانی جبری می آوریم.



شکل ۲.۱۳ خطی مارپ در صفحه xy با بردار قائم N . هر نقطه X واقع بر این خط در $(X - P) \cdot N = 0$ صدق می‌کند.

قضیه ۶.۱۳. فرض کنیم خط L در V_3 از کلیه نقاط X تشکیل شده که در

$$X \cdot N = P \cdot N$$

صدق می‌کنند که در آن P بر خط واقع بوده و N بردار ناصفری قائم بر آن باشد. قرار می‌دهیم

$$d = \frac{|P \cdot N|}{\|N\|}.$$

در اینصورت هر X واقع بر L طولش $\|X\| \geq d$ خواهد بود. بعلاوه، $\|X\| = d$ اگر و فقط اگر X تصویر P در امتداد N باشد:

$$t = \frac{P \cdot N}{N \cdot N} \quad \text{که در آن } X = tN$$

برهان. اگر $X \in L$ داریم $X \cdot N = P \cdot N$. بنابر نامساوی کوشی - شوارتز خواهیم داشت

$$|P \cdot N| = |X \cdot N| \leq \|X\| \|N\|$$

که $d = \|X\| \geq |P \cdot N| / \|N\| = d$ را ایجاب خواهد کرد. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر بازای اسکالری چون t ، $X = tN$ ، که در این حالت $P \cdot N = X \cdot N = tN \cdot N$ پس $t = P \cdot N / N \cdot N$ این برهان را تمام خواهد کرد.

بهین نحوی توان ثابت کرد که هرگاه نقطه مفروض Q در V_3 بر خط L واقع نباشد آنگاه، بازای کلیه X های واقع بر L ، کمترین مقدار $\|X - Q\|$ برابر

$$\|(P - Q) \cdot N\| / \|N\|$$

است و این زمانی رخ می‌دهد که $X - Q$ تصویر $P - Q$ در امتداد بردار قائم N

باشد. عدد

$$\frac{|(P - Q) \cdot N|}{\|N\|}$$

را فاصله نقطه Q تا خط L می نامند. خواننده باید این مفاهیم را در شکلی شبیه شکل ۲.۱۳ بطورهندسی نشان دهد.

۵.۱۳ تمرینات

۱. خط L در V_3 حاوی دو نقطه $P = (-3, 1)$ و $Q = (1, 1)$ است. معین کنید از نقاط زیر کدامها بر L واقعند:
(الف) $(0, 0)$ ؛ (ب) $(0, 1)$ ؛ (پ) $(1, 2)$ ؛ (ت) $(2, 1)$ ؛ (ث) $(-2, 1)$.
۲. تمرین ۱ را درحالی حل کنید که $P = (2, -1)$ و $Q = (-4, 2)$.
۳. خط L در V_3 حاوی نقطه $P = (-3, 1, 1)$ و موازی بردار $(1, -2, 3)$ است. معین کنید از نقاط زیر کدامها بر L قرار دارند:
(الف) $(0, 0, 0)$ ؛ (ب) $(2, -1, 4)$ ؛ (پ) $(-2, -1, 4)$ ؛
(ت) $(-2, 3, -2)$ ؛ (ث) $(2, -9, 16)$.
۴. خط L حاوی دو نقطه $P = (-3, 1, 1)$ و $Q = (1, 2, 7)$ است. معین کنید از نقاط زیر کدامها بر L واقعند:
(الف) $(-7, 0, 5)$ ؛ (ب) $(-7, 0, -5)$ ؛ (پ) $(-11, 1, 11)$ ؛
(ت) $(-11, -1, 11)$ ؛ (ث) $(-1, 3/2, 4)$ ؛
(ج) $(-5/3, 4/3, 3)$ ؛ (ج) $(-1, 3/2, -4)$.
۵. در هر یک از حالات زیر معین کنید آیا هر سه نقطه P و Q و R بر یک خط قرار دارند یا خیر.
(الف) $P = (2, 1, 1)$ ، $Q = (4, 1, -1)$ ، $R = (3, -1, 1)$
(ب) $P = (2, 2, 3)$ ، $Q = (-2, 3, 1)$ ، $R = (-6, 4, 1)$
(پ) $P = (2, 1, 1)$ ، $Q = (-2, 3, 1)$ ، $R = (5, -1, 1)$
۶. از هشت نقطه زیر سه نقطه A و B و C بر یک خط واقعند. کلیه زیرمجموعه‌های دارای سه نقطه یا بیشتر را مشخص کنید که نقاط آنها بر یک خط قرار دارند:
(الف) $A = (2, 1, 1)$ ، $B = (6, -1, 1)$ ، $C = (-6, 5, 1)$
(ب) $D = (-2, 3, 1)$ ، $E = (1, 1, 1)$ ، $F = (-4, 4, 1)$
(پ) $G = (-13, 9, 1)$ ، $H = (14, -6, 1)$

۷. خطی مار بر نقطه $P = (1, 1, 1)$ با بردار $A = (1, 2, 3)$ موازی است. خطی دیگر مار بر $Q = (2, 1, 0)$ موازی بردار $B = (3, 8, 13)$ می باشد. ثابت کنید این دو خط متقاطعند و نقطه تقاطع را مشخص نمایید.

۸. (الف) ثابت کنید که دو خط $L(P; A)$ و $L(Q; B)$ در V_n متقاطعند اگر و فقط اگر $P - Q$ در پیمای خطی A و B باشد.
(ب) معلوم کنید که آیا دو خط زیر در V_3 متقاطعند یا نه:

$$L = \{(1, 1, -1) + t(-2, 1, 3)\},$$

$$L' = \{(3, -4, 1) + t(-1, 5, 2)\}.$$

۹. فرض کنید $X(t) = P + tA$ نقطه دلخواهی برخط $L(P; A)$ باشد که در آن $P = (1, 2, 3)$ و $A = (1, -2, 2)$ ، و قرار دهید $Q = (3, 3, 1)$.
(الف) $\|Q - X(t)\|^2$ ، یعنی مربع فاصله بین Q و $X(t)$ ، را حساب کنید.
(ب) ثابت کنید دقیقاً یک نقطه مانند $X(t_0)$ هست که فاصله $\|Q - X(t)\|$ را مینیمم می کند و این فاصله مینیمم را محاسبه نمایید.
(پ) ثابت کنید $Q - X(t_0)$ بر A عمود است.

۱۰. فرض کنید Q نقطه ای غیرواقع برخط $L(P; A)$ در V_n باشد.
(الف) قرار دهید $f(t) = \|Q - X(t)\|^2$ که در آن $X(t) = P + tA$. ثابت کنید $f(t)$ یک چندجمله ای درجه دوم از t است و این چندجمله ای مینیمم خود را دقیقاً در یک t ، مثلاً در $t = t_0$ ، می گیرد.
(ب) ثابت کنید $Q - X(t_0)$ بر A عمود است.

۱۱. دو خط موازی $L(P; A)$ و $L(Q; A)$ در V_n مفروضند. ثابت کنید یا

$$L(P; A) \cap L(Q; A) \neq \emptyset \quad \text{یا} \quad L(P; A) = L(Q; A)$$

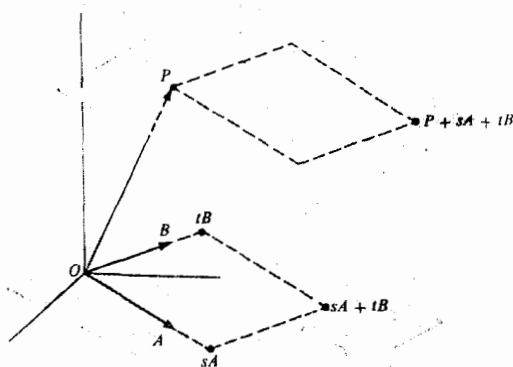
تهی می باشد.

۱۲. دو خط غیرموازی $L(P; A)$ و $L(Q; B)$ در V_n داده شده اند. ثابت کنید که اشتراک آنها یا تهی است و یا فقط از یک نقطه تشکیل شده است.

۶.۱۳ صفحات در فضای n بعدی اقلیدسی

یک خط در فضای n بعدی با مجموعه ای بشکل $\{P + tA\}$ تعریف شد که با افزودن کلیه بردارهای واقع در پیمای خطی بردار ناصفر A به نقطه معین P بدست می آید. یک صفحه نیز به همین نحو تعریف می شود با این تفاوت که P را به همه بردارهای واقع در پیمای خطی دو بردار مستقل خطی A و B اضافه می کنیم. برای اطمینان از اینکه V_n شامل دو بردار مستقل خطی است از ابتدا فرض می کنیم $n \geq 2$. اغلب کاربردهای ما مربوط به حالت

$n = 3$ خواهند بود.



شکل ۳.۱۳ صفحه مار بر P پیموده شده بوسیله A و B و رابطه هندسی آن با صفحه مار بر O پیموده شده بوسیله A و B .

تعریف. مجموعه M از نقاط در V_n را یک صفحه نامند هرگاه نقطه ای مثل P و دو بردار مستقل خطی چون A و B باشند بطوری که

$$M = \{P + sA + tB \mid s, t \text{ حقیقی هستند}\}.$$

این مجموعه را بطور ساده تر بصورت $M = \{P + sA + tB\}$ خواهیم نوشت. می گوئیم هر نقطه M بر این صفحه واقع است (قرار دارد). در حالت خاص، با فرض $s = t = 0$ ، می بینیم که P بر این صفحه قرار دارد. مجموعه $\{P + sA + tB\}$ را صفحه مار بر P و پیموده شده بوسیله A و B نیز می نامیم. وقتی P مبدأ باشد صفحه همان پیمای خطی A و B خواهد بود. شکل ۳.۱۳ یک صفحه را در V_3 که از مبدأ گذشته و بوسیله A و B پیموده می شود و همچنین صفحه ای را که از نقطه ناصفر P گذشته و توسط همان دو بردار پیموده می شود نشان خواهد داد.

حال چند خاصیت از صفحه را که نظیر آن خواص از خطوط است که در قضایای ۱.۱۳ تا ۴.۱۳ داده شده اند بدست می آوریم. اولین خاصیت نشان می دهد که بردارهای A و B در تعریف صفحه $\{P + sA + tB\}$ را می توان با هر جفت بردار دیگر که همان پیمای خطی را دارند عوض کرد.

قضیه ۷.۱۳. دو صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ و $M' = \{P + sC + tD\}$ بر نقطه P برآیند اگر و فقط اگر پیمای خطی A و B مساوی پیمای خطی C و D باشد.

برهان. هرگاه پیمای خطی A و B برابر پیمای خطی C و D باشد آنگاه واضح

است که $M = M'$ بعکس، فرض کنیم $M = M'$. صفحه M هم حاوی $P + A$ است و هم شامل $P + B$. چون هر دو این نقاط بر M' نیز واقعند پس هر یک از A و B باید در پیمای خطی C و D باشد. بهمین نحو هر یک از C و D در پیمای خطی A و B می باشد. ازاینرو پیمای خطی A و B برابر پیمای خطی C و D خواهد بود.

قضیه بعدی نشان می دهد که می توان نقطه P در تعریف صفحه $\{P + sA + tB\}$ را با هر نقطه دیگر Q واقع بر همان صفحه عوض کرد.

قضیه ۸.۱۳. دو صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ و $M' = \{Q + sA + tB\}$ پیموده شده بوسیله بردارهای A و B مساویند اگر و فقط اگر Q بر M واقع باشد.

برهان. هرگاه $M = M'$ آنگاه Q یقیناً بر M قرار دارد. برای اثبات عکس فرض می کنیم Q بر M واقع باشد، مثلاً $Q = P + aA + bB$. نقطه دلخواه X را در M اختیار می کنیم. دراینصورت، بازای اسکالرهای s و t ، $X = P + sA + tB$. اما $P = Q - aA - bB$ ، پس $X = Q + (s - a)A + (t - b)B$. لذا X در M' است، در نتیجه $M \subseteq M'$. بهمین نحو درمی یابیم که $M' \subseteq M$ ، پس دو صفحه مساوی خواهند بود.

اصل توازی اقلیدس (قضیه ۳.۱۳) مشابهی درمورد صفحات دارد. قبل از بیان این قضیه به تعریف توازی دو صفحه نیاز خواهیم داشت. این تعریف توسط نمایش هندسی شکل ۳.۱۳ پیشنهاد می شود.

تعریف. دو صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ و $M' = \{Q + sC + tD\}$ موازی گویند هرگاه پیمای خطی A و B مساوی پیمای خطی C و D باشد. همچنین بردار X را موازی صفحه M خوانیم هرگاه X در پیمای خطی A و B قرار داشته باشد.

قضیه ۹.۱۳. اگر صفحه M و نقطه Q غیردایره بر آن مفروض باشند یک و فقط یک صفحه مانند M' هست که شامل Q بوده و با M موازی است.

برهان. فرض کنیم $M = \{P + sA + tB\}$ و صفحه $M' = \{Q + sA + tB\}$ را در نظر می گیریم. این صفحه حاوی Q است و با همان بردارهای A و B که M را می پیمایند پیموده می شود. ازاینرو M' با M موازی خواهد بود. هرگاه M'' صفحه دیگری مار بر Q و موازی M باشد آنگاه

$$M'' = \{Q + sC + tD\}$$

بطوری که پیمای خطی C و D مساوی پیمای خطی A و B می باشد. بنا بر قضیه ۷.۱۳ باید داشته باشیم $M'' = M'$. در نتیجه M' تنها صفحه مار بر Q است که موازی M می باشد.

قضیه ۴.۱۳ به ما می گوید که دو نقطه متمایز یک خط را مشخص می کنند. قضیه بعدی نشان می دهد که سه نقطه متمایز یک صفحه را معین خواهند کرد البته بشرط آنکه سه نقطه در یک امتداد نباشند.

قضیه ۱۰.۱۲. هرگاه P و Q و R سه نقطه غیرواقع بر یک خط باشند آنگاه یک و فقط یک صفحه مانند M هست که حاوی این سه نقطه می باشد. این صفحه را می توان با مجموعه

$$M = \{P + s(Q - P) + t(R - P)\} \quad (۴.۱۳)$$

توصیف کرد.

برهان. ابتدا فرض می کنیم یکی از نقاط، مثلاً P ، مبدأ باشد. در این صورت Q و R بر یک خط مار بر مبدأ قرار ندارند، در نتیجه مستقل خطی خواهند بود. لذا این نقاط یک صفحه مار بر مبدأ، یعنی صفحه

$$M' = \{sQ + tR\},$$

را می پیمایند. این صفحه شامل هر سه نقطه O و Q و R خواهد بود. حال ثابت می کنیم M' تنها صفحه ای است که حاوی هر سه نقطه O ، Q ، و R است. گوئیم هر صفحه دیگر مار بر مبدأ از شکل

$$M'' = \{sA + tB\}$$

برخوردار است که در آن A و B مستقل خطی می باشند. اگر M'' شامل Q و R باشد بازی اسکالرهائی چون a و b و c و d خواهیم داشت

$$Q = aA + bB, R = cA + dB. \quad (۵.۱۳)$$

بنابراین هر ترکیب خطی از Q و R یک ترکیب خطی از A و B نیز هست، در نتیجه $M' \subseteq M''$.

برای اثبات $M'' \subseteq M'$ کافی است ثابت کنیم هر یک از A و B یک ترکیب خطی از Q و R است. با ضرب معادله اول (۵.۱۳) در d و معادله دوم در b و تفریق آنها از هم B حذف شده و خواهیم داشت

$$(ad - bc)A = dQ - bR.$$

حال گوئیم $ad - bc$ نمی تواند صفر باشد، در غیر این صورت Q و R وابسته خواهند شد.

پس می‌توان رابطه فوق را بر $ad - bc$ بخش کرده و A را بصورت ترکیب خطی از Q و R درآورد. بهمین نحو می‌توان B را بصورت یک ترکیب خطی از Q و R نوشت، پس خواهیم داشت $M'' \subseteq M'$. این قضیه را برای وقتی که یکی از سه نقطه Q, P, R مبدأ است ثابت می‌کند.

برای اثبات قضیه در حالت کلی، فرض می‌کنیم M مجموعه مذکور در (۴.۱۳) باشد و قرار می‌دهیم $C = Q - P$ و $D = R - P$. ابتدا نشان می‌دهیم که C و D مستقل خطی‌اند. گوئیم اگر چنین نباشد باید بازای اسکالری چون t داشته باشیم $D = tC$ که به ما $R - P = t(Q - P)$ یا $R = P + t(Q - P)$ را می‌دهد که با واقع نبودن Q و R بر یک خط متناقض است. پس مجموعه M صفحه‌ای است مار بر P که بوسیله جفت مستقل خطی C و D پیموده می‌شود. این صفحه حاوی هر سه نقطه P و Q و R می‌باشد (با فرض $s = 1$ و $t = 0$ و Q و با انتخاب $s = 0$ و $t = 1$ و R بدست می‌آید). حال باید ثابت کنیم این تنها صفحه‌ای است که حاوی P و Q و R می‌باشد.

فرض کنیم M' صفحه‌ای شامل P و Q و R باشد. چون M' صفحه‌ای حاوی P است پس بازای یک جفت بردار مستقل خطی مانند A و B خواهیم داشت

$$M' = \{P + sA + tB\}.$$

فرض کنیم $M'_0 = \{sA + tB\}$ صفحه مار بر مبدأ باشد که بوسیله همین دو بردار A و B پیموده می‌شود. واضح است که M'_0 حاوی بردار X است اگر و فقط اگر M'_0 شامل $X - P$ باشد. چون M'_0 حاوی Q و R است پس صفحه M'_0 شامل $C = Q - P$ و $D = R - P$ خواهد بود. اما هم اکنون نشان دادیم که، بعلاوه مستقل خطی بودن C و D ، یک و فقط یک صفحه حاوی O و C و D وجود دارد. بنابراین $M'_0 = \{sC + tD\}$ ، پس $M' = \{P + sC + tD\} = M$ این برهان را تمام خواهد کرد.

در قضیه ۵.۱۳ ثابت کردیم که دو بردار در V_n وابسته خطی‌اند اگر و فقط اگر بر یک خط مار بر مبدأ واقع باشند. قضیه بعدی نتیجه متناظر برای سه بردار خواهد بود.

قضیه ۱۱.۱۳. سه بردار A و B و C در V_n وابسته خطی‌اند اگر و فقط اگر بر یک صفحه مار بر مبدأ قرار داشته باشند.

برهان. فرض کنیم A و B و C وابسته باشند. پس می‌توان یکی از بردارها را بصورت ترکیبی خطی از دو تای دیگر، مثلاً بصورت $C = sA + tB$ ، نوشت. چنانچه A و B مستقل باشند صفحه‌ای را خواهند پیمود مار بر مبدأ که C بر آن قرار دارد. هرگاه A و B وابسته باشند آنگاه A و B و C بر خطی مار بر مبدأ واقعند، و در نتیجه بر هر صفحه مار بر مبدأ که حاوی هر سه نقطه A و B و C باشد قرار خواهند داشت.

برای اثبات عکس فرض می‌کنیم A و B و C بر صفحه‌ای مار بر مبدأ، مثلاً M ، قرار داشته باشند. هرگاه A و B وابسته باشند آنگاه A و B و C نیز چنین‌اند و چیزی برای اثبات وجود ندارد. چنانچه A و B مستقل باشند یک صفحه M' مار بر مبدأ را خواهند پیمود. بنا بر قضیه ۱۰.۱۳ یک و فقط یک صفحه مار بر O وجود دارد که حاوی A و B است. بنابراین $M' = M$. چون C بر این صفحه قرار دارد باید داشته باشیم $C = sA + tB$ ، پس A و B و C وابسته خواهند بود.

۷.۱۳ صفحات و توابع برداری

تناظری که به هر جفت عدد حقیقی s و t بردار $P + sA + tB$ واقع بر صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ را مربوط می‌کند مثال دیگری از یک تابع برداری است. در این حالت قلمرو تابع مجموعه کلیه جفتهای اعداد حقیقی (s, t) و برد آن صفحه M می‌باشد. هرگاه این تابع را با X و مقادیر آن را با $X(s, t)$ نشان دهیم آنگاه بازای هر جفت (s, t) خواهیم داشت

$$X(s, t) = P + sA + tB. \quad (۶.۱۳)$$

X را یک تابع برداری از دو متغیر حقیقی می‌نامیم. اسکالرهایی s و t را پارامتر و معادله (۶.۱۳) را یک معادله پارامتری و یا یک معادله برداری صفحه می‌خوانند. این معادله شبیه نمایش خط بوسیله یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی است. وجود دو پارامتر در معادله (۶.۱۳) به صفحه کیفیت دوبعدی می‌دهد. وقتی هر بردار در V_3 بوده و بر حسب مؤلفه‌هایش نوشته می‌شود، یعنی

$$X(s, t) = (x, y, z) \text{ و } B = (b_1, b_2, b_3), A = (a_1, a_2, a_3), P = (p_1, p_2, p_3)$$

معادله برداری (۶.۱۳) را می‌توان با سه معادله اسکالر زیر عوض کرد:

$$x = p_1 + sa_1 + tb_1, y = p_2 + sa_2 + tb_2, z = p_3 + sa_3 + tb_3.$$

پارامترهای s و t را همیشه می‌شود از این سه معادله حذف نمود و یک معادله خطی بشکل $ax + by + cz = d$ ، بنام معادله دکارتی صفحه، بدست آورد. این مطلب را با یک مثال روشن می‌کنیم.

مثال. فرض می‌کنیم $M = \{P + sA + tB\}$ که در آن $P = (1, 2, 3)$ ، $A = (1, 2, 1)$ و $B = (1, -2, -1)$. معادله برداری نظیر عبارت است از

$$X(s, t) = (1, 2, 3) + s(1, 2, 1) + t(1, -2, -1).$$

از این رابطه سه معادله پارامتری اسکالر

$$x = 1 + s + t, y = 2 + 2s - 2t, z = 3 + s - t$$

بدست می‌آید. برای رسیدن به یک معادله دکارتی، معادله اول و سوم را بصورت‌های

$s + t = 1 - x'$ و $s - t = z - 3$ می نویسیم. با جمع و سپس تفریق این معادلات خواهیم داشت $2s = x + z - 4$ و $2t = x - z + 2$. اگر اینها را در معادله مربوط به y بگذاریم به معادله دکارتی $x + y - 3z = -6$ خواهیم رسید. در بخش ۱۳.۱۶ معادلات دکارتی خطی بیشتر بررسی خواهند شد.

۸.۱۳ تمرینات

۱. فرض کنید $M = \{P + sA + tB\}$ که در آن $P = (1, 2, -3)$ ، $A = (3, 2, 1)$ و $B = (1, 0, 4)$. تعیین کنید از نقاط زیر کدامها بر M واقعند.
(الف) $(1, 2, 0)$ ؛ (ب) $(1, 2, 1)$ ؛ (پ) $(6, 4, 6)$ ؛ (ت) $(6, 6, 6)$ ؛ (ث) $(6, 6, -5)$.
۲. سه نقطه $P = (1, 1, -1)$ ، $Q = (3, 3, 2)$ و $R = (3, -1, -2)$ صفحه M را مشخص می کنند. تعیین کنید از نقاط زیر کدامها بر M واقعند:
(الف) $(2, 2, 1/2)$ ؛ (ب) $(4, 0, -1/2)$ ؛ (پ) $(-3, 1, -3)$ ؛ (ت) $(3, 1, 3)$ ؛ (ث) $(0, 0, 0)$.
۳. معادلات پارامتری اسکالر هر یک از صفحات زیر را معین کنید.
(الف) صفحه ماربر $(1, 2, 1)$ و تولیدشده بوسیله بردارهای $(0, 1, 0)$ و $(1, 1, 4)$.
(ب) صفحه ماربر $(1, 2, 1)$ و $(0, 1, 0)$ و $(1, 1, 4)$.
۴. صفحه M دارای معادلات پارامتری اسکالر زیر است:
 $x = 1 + s - 2t$ ، $y = 2 + s + 4t$ ، $z = 2s + t$.
(الف) معین کنید از نقاط زیر کدامها بر M واقعند:
 $(0, 0, 0)$ ، $(1, 2, 0)$ ، $(2, -3, -3)$.
- (ب) بردارهای P و A و B را طوری بیابید که $M = \{P + sA + tB\}$.
۵. فرض کنید صفحه M با سه نقطه P و Q و R که بر یک خط راست نیستند مشخص شده باشد.
(الف) اگر p و q و r چنان سه اسکالر باشند که $p + q + r = 1$ ثابت کنید $pP + qQ + rR$ بر M قرار دارد.
(ب) ثابت کنید هر نقطه واقع بر M از شکل $pP + qQ + rR$ برخوردار است که در آن $p + q + r = 1$.
۶. برای هر یک از صفحات زیر یک معادله دکارتی خطی بشکل $ax + by + cz = d$ پیدا کنید.
(الف) صفحه ماربر $(2, 3, 1)$ و پیموده شده بوسیله $(3, 2, 1)$ و $(-1, -2, -3)$.
(ب) صفحه ماربر $(2, 3, 1)$ و $(-2, -1, -3)$ و $(4, 3, -1)$.
(پ) صفحه ماربر $(2, 3, 1)$ موازی صفحه ماربر مبدأ و پیموده شده بوسیله $(2, 0, -2)$ و $(1, 1, 1)$.
۷. صفحه M دارای معادله دکارتی $3x - 5y + z = 9$ است.

(الف) تعیین کنید از نقاط زیر کدامها بر M واقعند:

$$(۵, -۱, ۳), (-۱, -۲, ۲), (۰, -۲, -۱).$$

(ب) بردارهای P و A و B را طوری پیدا کنید که $M = \{P + sA + tB\}$.

۸. دو صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ و $M' = \{Q + sC + tD\}$ را در نظر بگیرید که در آنها $P = (۱, ۱, ۱)$, $A = (۲, -۱, ۳)$, $B = (-۱, ۰, ۲)$, $Q = (۲, ۳, ۱)$, $C = (۱, ۲, ۳)$ و $D = (۳, ۲, ۱)$. دو نقطه متمایز در اشتراک $M \cap M'$ پیدا کنید.

۹. صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ داده شده که در آن $P = (۲, ۳, ۱)$, $A = (۱, ۲, ۳)$ و $B = (۳, ۲, ۱)$ ، و صفحه دیگر M' با معادله دکارتی $x - ۲y + z = ۰$ مفروض است.

(الف) تعیین کنید که آیا M و M' موازیند یا خیر.

(ب) اگر M'' دارای معادله دکارتی

$$x + ۲y + z = ۰$$

باشد دو نقطه در اشتراک $M' \cap M''$ پیدا نمایید.

۱۰. فرض کنید L خط مار بر $(۱, ۱, ۱)$ موازی بردار $(۲, -۱, ۳)$ و M صفحه مار بر $(۲, -۱, ۳)$ و پیچیده شده بوسیله بردارهای $(۲, ۱, ۳)$ و $(۰, ۱, ۱)$ باشد. ثابت کنید یک و فقط یک نقطه در اشتراک $L \cap M$ وجود دارد و این نقطه را مشخص نمایید.

۱۱. خطی با بردار هادی X را موازی صفحه M نامند هرگاه X موازی M باشد. فرض کنید L خط مار بر $(۱, ۱, ۱)$ موازی بردار $(۲, -۱, ۳)$ باشد. معین کنید آیا L موازی هر یک از صفحات زیر هست یا نه.

(الف) صفحه مار بر $(۲, -۱, ۳)$ و پیچیده شده بوسیله $(۲, ۱, ۳)$ و $(۳/۴, ۱, ۱)$.

(ب) صفحه مار بر $(۲, -۱, ۳)$ و $(۱, ۱, ۱)$ و $(۲, ۴, -۱)$.

(پ) صفحه ای با معادله دکارتی $x + ۲y + ۳z = -۳$.

۱۲. دو نقطه متمایز P و Q بر صفحه M واقعند. ثابت کنید هر نقطه واقع بر خط مار بر P و Q نیز بر M قرار خواهد داشت.

۱۳. فرض کنید خط L مار بر $(۱, ۲, ۳)$ و موازی بردار $(۱, ۱, ۱)$ بوده و نقطه $(۲, ۳, ۵)$ بر آن واقع نباشد. معادله دکارتی صفحه M مار بر $(۲, ۳, ۵)$ را که حاوی هر نقطه L است بدست آورید.

۱۴. خط L و نقطه P غیر واقع بر آن مفروض است. ثابت کنید یک و فقط یک صفحه مار بر P هست که حاوی هر نقطه L باشد.

۹.۱۳ ضوب خارجی

در بسیاری از کاربردهای جبر برداری در مسائل هندسه و مکانیک داشتن یک روش ساده برای ساختن برداری عمود بر هر دو بردار مفروض A و B سودمند است. این کار توسط

حاصلضرب خارجی $A \times B$ (بخوانید: « A ضرب خارجی B ») صورت می‌گیرد که این‌طور تعریف می‌شود:

تعریف. فرض کنیم $A = (a_1, a_2, a_3)$ و $B = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در V_3 باشند. حاصلضرب خارجی آنها $A \times B$ (با همین ترتیب) مساوی بردار

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

تعریف می‌شود.

از این تعریف خواص زیر بآسانی نتیجه خواهند شد.

قضیه ۱۲.۱۳. بازای کلیه بردارهای A و B و C در V_3 و هر c حقیقی داریم:

$$(الف) \quad A \times B = - (B \times A) \quad (\text{شبه تقارن});$$

$$(ب) \quad A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \quad (\text{قانون پخشپذیری});$$

$$(پ) \quad c(A \times B) = (cA) \times B;$$

$$(ت) \quad A \cdot (A \times B) = 0 \quad (\text{تعامد به } A);$$

$$(ث) \quad B \cdot (A \times B) = 0 \quad (\text{تعامد به } B);$$

$$(ج) \quad \|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 \quad (\text{اتحاد لاگرانژ});$$

$$(چ) \quad A \times B = O \quad \text{اگر و فقط اگر } A \text{ و } B \text{ وابسته خطی باشند.}$$

برهان. قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ) فوراً از تعریف نتیجه می‌شوند و بعنوان تمرین به خواننده محول می‌گردند. برای اثبات (ت) توجه می‌کنیم که

$$A \cdot (A \times B) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

قسمت (ث) نیز به همین نحو بدست می‌آید، یا اینکه می‌توان آن را از (الف) و (ت) نتیجه گرفت. برای اثبات (ج) می‌نویسیم

$$\|A \times B\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

و

$$\|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

و سپس، بروشی خالی از لطف، تحقیق می‌کنیم که دوطرف راست این روابط یکی می‌باشند. خاصیت (ج) نشان می‌دهد که $A \times B = O$ اگر و فقط اگر

$$(A \cdot B)^2 = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

طبق نامساوی کشی - شوارتز (قضیه ۳.۱۲) این وضع رخ می دهد اگر و فقط اگر یکی از بردارها مضرب اسکالری از دیگری باشد. بعبارت دیگر، $A \times B = 0$ اگر و فقط اگر A و B وابسته خطی باشند، که این (ج) را ثابت خواهد کرد.

چند مثال. از (الف) و (ج) معلوم می شود که $A \times A = 0$. از تعریف ضرب خارجی می بینیم که

$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j.$$

ضرب خارجی شرکتپذیر نیست. بعنوان مثال، داریم

$$(i \times i) \times j = 0 \times j = 0 \text{ ولی } i \times (i \times j) = i \times k = -j$$

قضیه بعدی دو خاصیت اساسیتر ضرب خارجی را متصف می کند.

قضیه ۱۳.۱۳. فرض کنیم A و B دو بردار مستقل خطی در V_p باشند. دداینصودت

(الف) بردارهای A و B و $A \times B$ مستقل خطی اند؛

(ب) هر بردار N در V_p که هم به A و هم به B متعامد باشد مضرب اسکالری از $A \times B$

خواهد بود.

برهان. قرار می دهیم $C = A \times B$. پس، بدلیل مستقل خطی بودن A و B ، $C \neq 0$. اگر اسکالرهایی a و b و c طوری باشند که $aA + bB + cC = 0$ با ضرب خارجی هر عضو در C و استفاده از روابط $A \cdot C = B \cdot C = 0$ خواهیم دید که $c = 0$. این رابطه $aA + bB = 0$ را بدست می دهد، پس، چون A و B مستقل هستند، $a = b = 0$. این (الف) را ثابت می کند.

فرض کنیم N برداری متعامد به A و B بوده و قرار می دهیم $C = A \times B$. ثابت می کنیم

$$(N \cdot C)^2 = (N \cdot N)(C \cdot C).$$

سپس از نامساوی کشی - شوارتز (قضیه ۳.۱۲) نتیجه می شود که N مضرب اسکالری از C می باشد.

چون A و B و C مستقل خطی اند پس، بنابر قضیه ۱۵.۱۲ (پ)، V_p را می بینیم. مخصوصاً N را خواهند پیمود، در نتیجه بازای اسکالرهائی چون a و b و c می توان نوشت

$$N = aA + bB + cC.$$

این، بخاطر آنکه $N \cdot A = N \cdot B = 0$ ، رابطه

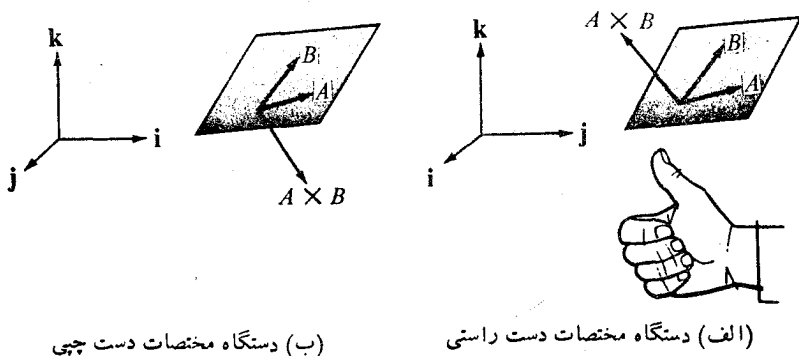
$$N \cdot N = N \cdot (aA + bB + cC) = cN \cdot C$$

را به ما می دهد. همچنین، از اینکه $C \cdot A = C \cdot B = 0$ ، خواهیم داشت

$$C \cdot N = C \cdot (aA + bB + cC) = cC \cdot C.$$

بنابراین $(N \cdot N)(C \cdot C) = (cN \cdot C)(C \cdot C) = (N \cdot C)(cC \cdot C) = (N \cdot C)^2$ که برهان را تمام خواهد کرد.

قضیه ۱۲.۱۳ ما را در تجسم ضرب خارجی بطورهندسی یاری می‌دهد. از خواص (ت) و (ث) می‌دانیم که $A \times B$ هم بر A عمود است و هم بر B . وقتی بردار $A \times B$ بطورهندسی بایک سهم نموده شود جهت سهم به وضعیت نسبی بردارهای یک‌ه مختصات بستگی



(ب) دستگاه مختصات دست چپی

(الف) دستگاه مختصات دست راستی

شکل ۴.۱۳ نمایش وضعیت نسبی A ، B ، و $A \times B$.

خواهد داشت. اگر i, j, k مطابق شکل ۴.۱۳ (الف) باشند گوئیم اینها یک دستگاه مختصات دست راستی تشکیل می‌دهند. در این حالت جهت $A \times B$ با «قاعده دست راست» معین می‌شود. یعنی، هرگاه A طوری بسمت B بچرخد که انگشتان دست راست جهت چرخش را نشان دهند، آنگاه شست جهت $A \times B$ را نشان خواهد داد (بلحاظ بحث، فرض می‌کنیم انگشت شست بر انگشتان دیگر عمود باشد). در یک دستگاه مختصات دست چپی، که در شکل ۴.۱۳ (ب) نشان داده شده، جهت $A \times B$ خلاف حالت قبل است و می‌توان آن را با قاعده نظیر دست چپ مشخص کرد.

طول $A \times B$ تعبیر هندسی جالبی دارد. اگر A و B بردارهای ناصفری باشند که با هم زاویه θ ، که $0 \leq \theta \leq \pi$ ، می‌سازند در خاصیت (ج) قضیه ۱۲.۱۳ می‌توانیم بنویسیم

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta \quad \text{تا}$$

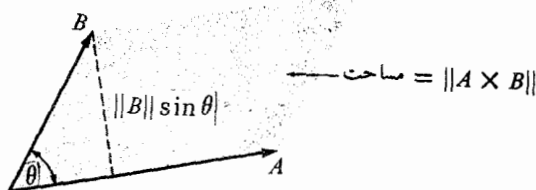
$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|A\|^2 \|B\|^2 \sin^2 \theta$$

نتیجه شود که از آن

$$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \theta$$

بدست می‌آید. چون $\|B\| \sin \theta$ ارتفاع متوازی‌الاضلاع تشکیل شده بوسیله A و B است (ر.ک. شکل ۵.۱۳) پس می‌بینیم که طول $A \times B$ مسادی مساحت این متوازی‌الاضلاع

خواهد بود.



شکل ۵.۱۳ طول $A \times B$ مساحت متوازی الاضلاع معین شده بوسیله A و B است.

۱۰.۱۳ حاصلضرب خارجی بیان شده بصورت یک دترمینان

بکمک دترمینانها می توان دستور معروف ضرب خارجی را بشکل فشرده تری نوشت. اگر a و b و c و d چهار عدد باشند تفاضل $ad - bc$ را اغلب با علامت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

شان داده و آن را دترمینان (مرتبه دو) می خوانند. اعداد a, b, c و d را عناصر آن نامیده و می گویند این اعداد در دو سطر افقی a, b, c و d, c, b و دو ستون قائم a, c و b, d آرایش یافته اند. توجه کنید که تعویض دوسطر و یا دوستون با هم فقط علامت دترمینان را تغییر می دهد. بعنوان مثال، چون $ad - bc = -(bc - ad)$ داریم

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

اگر هر مؤلفه حاصلضرب خارجی را بصورت یک دترمینان مرتبه دو بنویسیم دستور معروف $A \times B$ چنین خواهد شد:

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

این را می شود برحسب بردارهای یکه مختصات i, j, k این طور هم نوشت:

$$(۷.۱۳) \quad A \times B = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k.$$

دترمینانهای مرتبه سه با سه سطر و سه ستون نوشته می شوند و می توان آنها را برحسب دترمینانهای مرتبه دو با دستور زیر تعریف کرد:

$$(۸.۱۳) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

این را «بسط» دترمینان نسبت به سطر اول آن می نامند. توجه کنید که دترمینانی که درست راست در a_1 ضرب شده را می شود از دترمینان سمت چپ و با حذف سطر و ستونی که a_1 بر آنها ظاهر شده بدست آورد. دو دترمینان دیگر طرف راست بهمین نحو حاصل خواهند شد. دترمینانهای مرتبه های بیشتر از سه در جلد دو بحث شده اند. تنها هدف ما در معرفی دترمینانهای مرتبه دو و سه در این مرحله ارائه روش مفیدی برای نوشتن برخی از دستورها بشکلی فشرده است که بتوان آنها را سهلتر بخاطر سپرد. دترمینانها در صورتی که عناصر سطر اول آنها بردار باشند نیز معنی دارند. بعنوان مثال، اگر بنویسیم

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

و این را طبق قاعده (۸.۱۳) «بسط» دهیم درخواهیم یافت که نتیجه مساوی طرف راست (۷.۱۳) است. بعبارت دیگر، تعریف حاصلضرب خارجی $A \times B$ را می توان بشکل فشرده زیر نوشت:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

بعنوان مثال، برای محاسبه حاصلضرب خارجی $A = 2i - 8j + 3k$ و $B = 4j + 2k$ می نویسیم

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} k$$

$$= -36i - 6j + 8k.$$

۱۱.۱۳ تمرینات

۱. فرض کنید $A = -i + 2k$ ، $B = 2i + j - k$ ، و $C = i + 2j + 2k$. هر یک از بردارهای زیر را بر حسب i ، j ، و k حساب کنید:

- (الف) $A \times B$ (ت) $A \times (C \times A)$ (ج) $(A \times C) \times B$
 (ب) $B \times C$ (ث) $(A \times B) \times C$ (ح) $(A + B) \times (A - C)$
 (پ) $C \times A$ (ج) $A \times (B \times C)$ (خ) $(A \times B) \times (A \times C)$

۲. در هریک از حالات زیر، برداری بطول ۱ در V_3 بیابید که هم به A متعامد باشد و هم به B :

(الف) $B = 2i + 3j - k$ ، $A = i + j + k$

$$(ب) \quad B = -i + 5j + 7k, A = 2i - 3j + 4k$$

$$(پ) \quad B = -3i + 2j - k, A = i - 2j + 3k$$

۳. در هر یک از حالات زیر با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلثی را بیابید که رئوسش A و B و C باشند:

$$(الف) \quad C = (3, 4, 0), B = (2, 0, -1), A = (0, 2, 2)$$

$$(ب) \quad C = (1, 2, 1), B = (1, -3, 4), A = (-2, 3, 1)$$

$$(پ) \quad C = (1, 0, 1), B = (0, 1, 1), A = (0, 0, 0)$$

۴. اگر $C = 3i + 3j + 6k, B = 2i + 7j + 4k, A = 2i + 5j + 3k$ حاصل ضرب خارجی $(A - C) \times (B - A)$ را بر حسب i, j, k بیان نمایید.

۵. ثابت کنید $\|A \times B\| = \|A\| \|B\|$ اگر فقط اگر A و B متعامد باشند.

۶. دو بردار مستقل خطی A و B در V_3 داده شده اند. فرض کنید $C = (B \times A) - B$ (الف) ثابت کنید A بر $B + C$ عمود است.

(ب) ثابت کنید زاویه θ بین B و C در $\pi/2 < \theta < \pi$ صدق می کند.

(پ) چنانچه $\|B\| = 1$ و $\|B \times A\| = 2$ طول C را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید A و B دو بردار متعامد در V_3 و هر یک بطول ۱ باشد.

(الف) ثابت کنید که $A \times B, B, A$ یک پایه متعامدیکه برای V_3 است.

(ب) فرض کنید $C = (A \times B) \times A$. ثابت کنید $\|C\| = 1$.

(پ) شکلی بکشید که رابطه هندسی بین $A, B, A \times B$ را نشان دهد و، با استفاده از آن، روابط

$$(A \times B) \times B = -A \quad \text{و} \quad (A \times B) \times A = B$$

را بدست آورید.

(ت) روابط قسمت (پ) را بطور جبری ثابت کنید.

۸. (الف) هرگاه $A \times B = 0$ و $A \cdot B = 0$ آنگاه حداقل یکی از A و B صفر است. این مطلب را ثابت کرده و آن را تعبیر هندسی نمایید.

(ب) $A \neq 0$ مفروض است. اگر $A \times B = A \times C$ و $A \cdot B = A \cdot C$ ثابت کنید $B = C$.

۹. فرض کنید $A = 2i - j + 2k$ و $C = 3i + 2j - k$.

(الف) بردار B را طوری بیابید که $A \times B = C$. آیا بیش از یک جواب وجود دارد؟

(ب) بردار B را طوری بیابید که $A \times B = C$ و $A \cdot B = 1$. آیا بیش از یک جواب وجود دارد؟

۱۰. بردار A و بردار C عمود بر آن در V_3 مفروضند. ثابت کنید فقط یک بردار مانند B هست که $A \times B = C$ و $A \cdot B = 1$.

۱۱. سه رأس یک متوازی الاضلاع در نقاط $A = (1, 0, 1)$ ، $B = (-1, 1, 1)$ و $C = (2, -1, 2)$ قرار دارند.

(الف) کلیه نقاط ممکن D را که می‌توانند رأس چهارم آن باشند پیدا کنید.

(ب) مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

۱۲. دو بردار غیرموازی A و B در V_3 داده شده‌اند بطوری که

$$A \cdot B = 2, \|A\| = 1, \|B\| = 4. \text{ با فرض } C = 2(A \times B) - 3B$$

مقادیر $A \cdot (B + C)$ ، $\|C\|$ ، و کسینوس زاویه θ بین B و C را حساب کنید.

۱۳. دو بردار مستقل خطی A و B در V_3 داده شده‌اند. درست یا غلط بودن هریک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $A + B$ ، $A - B$ ، $A \times B$ مستقل خطی‌اند.

(ب) $A + (A \times B)$ ، $A + B$ ، $B + (A \times B)$ مستقل خطی هستند.

(پ) A ، B ، $(A + B) \times (A - B)$ مستقل خطی می‌باشند.

۱۴. (الف) ثابت کنید سه بردار A و B و C در V_3 بریک خط واقعند اگر و فقط اگر

$$(B - A) \times (C - A) = 0.$$

(ب) چنانچه $A \neq B$ ثابت کنید خط مار بر A و B مجموعه همه بردارهایی مانند

$$P \text{ است که } (P - A) \times (P - B) = 0.$$

۱۵. دو بردار متعامد A و B در V_3 و هریک بطول ۱ مفروضند. فرض کنید P برداری باشد

که در معادله $P \times B = A - P$ صدق می‌کند. هریک از احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) P بر B عمود و طولش $\sqrt{2}/2$ است.

(ب) P ، B ، و $P \times B$ یک پایه برای V_3 تشکیل می‌دهند.

(پ) $(P \times B) \times B = -P$.

(ت) $P = A/2 - (A \times B)/2$.

۱۲-۱۳ ضرب سه‌گانه اسکالر

با ترکیب ضربهای نقطه‌ای و خارجی می‌توان حاصلضرب سه‌گانه اسکالر $A \cdot B \times C$ را تشکیل داد که فقط می‌تواند بمعنی $A \cdot (B \times C)$ گرفته شود؛ چون این حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار است پس مقدار آن اسکالر خواهد بود. این اسکالر را می‌شود بوسیله دترمینانها حساب کرد. می‌نویسیم $A = (a_1, a_2, a_3)$ ، $B = (b_1, b_2, b_3)$ ، $C = (c_1, c_2, c_3)$ و $B \times C$ را طبق معادله (۷-۱۳) بیان می‌کنیم. با ضرب نقطه‌ای آن در A خواهیم داشت

$$A \cdot B \times C = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

لذا $A \cdot B \times C$ مساوی دترمینانی است که سطرهاى آن مؤلفه‌هاى سازه‌هاى A و B و C مى‌باشند.

در قضیه ۱۲.۱۳ دیدیم که دو بردار A و B وابسته خطی اند اگر و فقط اگر حاصلضرب خارجی آنها $A \times B$ بردار صفر باشد. قضیه بعدی محک نظیر را برای وابستگی خطی سه بردار بدست مى‌دهد.

قضیه ۱۴.۱۳. سه بردار A, B, C در V_3 وابسته خطی اند اگر و فقط اگر

$$A \cdot B \times C = 0.$$

برهان. ابتدا فرض مى‌کنیم A, B, C و C وابسته باشند. هرگاه B و C وابسته باشند آنگاه $B \times C = 0$ و در نتیجه $A \cdot B \times C = 0$. پس فرض مى‌کنیم B و C مستقل هستند. چون هر سه بردار وابسته اند پس اسکالر هائی چون a و b و c ، که همه صفر نیستند، وجود دارند بطوری که $aA + bB + cC = 0$. در این رابطه باید داشته باشیم $a \neq 0$ ، در غیر اینصورت B و C وابسته خواهند شد. بنا بر این مى‌توان رابطه بالا را بر a تقسیم کرد و A را بصورت یک ترکیب خطی از B و C ، مثلاً بشکل $A = tB + sC$ ، نوشت. با ضرب نقطه‌ای هر طرف در $B \times C$ خواهیم دید که

$$A \cdot (B \times C) = tB \cdot B \times C + sC \cdot B \times C = 0.$$

زیرا هم B و هم C بر $B \times C$ عمود است. از اینرو وابستگی A, B, C و C ایجاب مى‌کند که $A \cdot B \times C = 0$.

برای اثبات عکس این مطلب فرض مى‌کنیم $A \cdot B \times C = 0$. هرگاه B و C وابسته باشند آنگاه A, B, C و C نیز چنین اند و چیزی برای اثبات وجود ندارد. پس فرض مى‌کنیم B و C مستقل خطی باشند. در اینصورت، بنابر قضیه ۱۳.۱۳، سه بردار A, B, C ، و $B \times C$ مستقل خطی خواهند بود. لذا اینها A را مى‌پیمایند، پس بازای اسکالر هائی چون a و b و c مى‌توان نوشت

$$A = aB + bC + c(B \times C).$$

با ضرب نقطه‌ای هر طرف در $B \times C$ و استفاده از رابطه $A \cdot (B \times C) = 0$ درخواهیم یافت که $c = 0$ ، پس $A = aB + bC$. این ثابت مى‌کند که A, B, C و C وابسته خطی هستند.

مثال. برای اینکه تعیین کنیم آیا سه بردار $(1, -2, 3)$ ، $(2, 3, -1)$ ، $(5, -7, 3)$ ، و $(2, 5, -1)$ وابسته هستند یا نه، حاصلضرب سه گانه اسکالر آنها را تشکیل داده و آن را

بصورت دترمینان می نویسیم

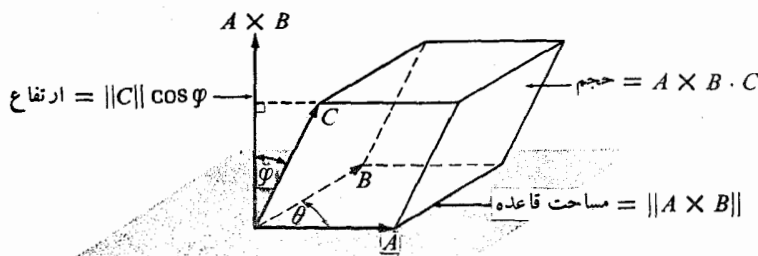
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-14 + 25) - 3(6 - 5) - 1(-15 + 7) = 27.$$

چون حاصلضرب سه گانه اسکالر ناصفر است پس بردارها مستقل خطی خواهند بود.

ضرب سه گانه اسکالر از تعبیر هندسی جالبی برخوردار است. شکل ۶.۱۳ متوازی-السطوحی را نشان می دهد که از سه بردار هندسی A ، B ، و C ، که بر یک صفحه قرار ندارند، تشکیل شده است. ارتفاع آن برابر $\|C\| \cos \varphi$ است که در آن φ زاویه بین $A \times B$ و C می باشد. در این شکل $\cos \varphi$ ، باین دلیل که $0 \leq \varphi < \pi/2$ ، مثبت است. مساحت متوازی الاضلاع قاعده مساوی $\|A \times B\|$ بوده و این عدد مساحت هر مقطع عرضی موازی با قاعده نیز خواهد بود. چنانچه از مساحت مقطع عرضی از 0 تا $\|C\| \cos \varphi$ انتگرال بگیریم درمی یابیم که حجم متوازی السطوح برابر $\|A \times B\| (\|C\| \cos \varphi)$ است، یعنی مساوی مساحت قاعده ضربدر ارتفاع. اما داریم

$$\|A \times B\| (\|C\| \cos \varphi) = (A \times B) \cdot C.$$

بعبارت دیگر، حاصلضرب سه گانه اسکالر $A \times B \cdot C$ برابر با حجم متوازی السطوحی است که بوسیله A و B و C تشکیل می شود. وقتی $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ ، $\cos \varphi$ منفی بوده و حاصلضرب $A \times B \cdot C$ قرینه این حجم می باشد. چنانچه A و B و C بر صفحه ای مار بر مبدأ قرار گیرند وابسته خطی هستند و حاصلضرب سه گانه اسکالر آنها برابر صفر است. در این حالت متوازی السطوح تبه شده و دارای حجم صفر خواهد بود.



شکل ۶.۱۳ تعبیر هندسی حاصلضرب سه گانه اسکالر بعنوان حجم یک متوازی السطوح.

این تعبیر هندسی ضرب سه گانه اسکالر چند خاصیت جبری این ضرب را منعکس می کند. بعنوان مثال، هر جایگشت دوری بردارهای A و B و C حاصلضرب سه گانه اسکالر آنها را تغییر نمی دهد. یعنی که داریم

$$(9.13) \quad A \times B \cdot C = B \times C \cdot A = C \times A \cdot B.$$

برهان جبری این خاصیت در تمرین ۷ از بخش ۱۴.۱۳ مختصراً شرح داده شده است. این خاصیت ایجاب می‌کند که در یک حاصلضرب سه‌گانه اسکالر علامات نقطه و ضربدر قابل تعویضند. درواقع تعویض پذیری ضرب^۱ نقطه‌ای نتیجه می‌دهد که

$$(B \times C) \cdot A = A \cdot (B \times C)$$

و، چنانچه این با اولین معادله (۹.۱۳) تلفیق شود، درخواستیم یافت که

$$(10.13) \quad A \times B \cdot C = A \cdot B \times C.$$

حاصلضرب سه‌گانه اسکالر $A \cdot B \times C$ را اغلب با علامت $[ABC]$ ، بدون استفاده از نقطه یا ضربدر، نشان می‌دهند. بواسطه معادله (۱۰.۱۳) در این نماد ابهامی وجود ندارد. حاصلضرب فقط به ترتیب سازه‌های A و B و C بستگی دارد نه به محل قرارگرفتن نقطه و ضربدر.

۱۳.۱۳ قاعده کرامر^۱ برای حل یک دستگاه از سه معادله خطی

با استفاده از ضرب سه‌گانه اسکالر می‌توان یک دستگاه از سه معادله خطی همزمان با سه مجهول x و y و z را حل کرد. فرض کنیم دستگاه بصورت زیر نوشته شده باشد:

$$(11.13) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

A را برداری بامؤلفه‌های a_1, a_2, a_3 انگاشته و B, C, D را بهمین نحو تعریف می‌کنیم. دراینصورت سه معادله (۱۱.۱۳) معادل یک معادله برداری واحد

$$(12.13) \quad xA + yB + zC = D$$

می‌شود. اگر دو طرف این معادله را در $B \times C$ ضرب نقطه‌ای کرده و بجای $A \cdot B \times C$ بنویسیم $[ABC]$ درخواستیم یافت که

$$x[ABC] + y[BBC] + z[CBC] = [DBC].$$

چون $[BBC] = [CBC] = 0$ پس ضرائب y و z حذف شده و بدست خواهیم آورد که

$$(13.13) \quad \text{اگر } [ABC] \neq 0, \quad x = \frac{[DBC]}{[ABC]}.$$

با استدلال مشابهی می‌توان دستورهای متناظر برای y و z را نتیجه گرفت. بنابراین خواهیم داشت:

$$(14.13) \quad \text{اگر } [ABC] \neq 0, \quad y = \frac{[ADC]}{[ABC]} \quad \text{و} \quad z = \frac{[ABD]}{[ABC]}.$$

شرط $0 \neq [ABC]$ باین معنی است که سه بردار A و B و C مستقل خطی هستند. در این حالت (۱۲.۱۳) نشان می‌دهد که هر بردار D در فضای سه بعدی بوسیله A و B و C پیموده شده و ضرائب x و y و z بطور منحصر بفرد با دستورهای (۱۳.۱۳) و (۱۴.۱۳) معین می‌شوند. این دستورها را وقتی حاصلضربهای سه گانه اسکالر در آنها بصورت دترمینان نوشته شده باشند با اسم قاعده کرامر برای حل دستگاه (۱۱.۱۳) می‌شناسند:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

هرگاه $[ABC] = 0$ آنگاه A و B و C بر صفحه‌ای مار بر مبدأ واقعند و دستگاه جواب ندارد مگر اینکه D نیز در همان صفحه قرار داشته باشد. در این حالت اخیر باسانی می‌توان نشان داد که دستگاه دارای بی نهایت جواب است. در واقع بردارهای A ، B ، C وابسته خطی اند، پس اسکالرهائی چون u ، v ، و w ، که همه صفر نیستند، وجود دارند بطوری که $uA + vB + wC = 0$. هرگاه سه تائی (x, y, z) در (۱۲.۱۳) صدق کند آنگاه سه تائی $(x + tu, y + tv, z + tw)$ ، بازای هر t حقیقی، نیز چنین خواهد کرد زیرا که داریم

$$\begin{aligned} (x + tu)A + (y + tv)B + (z + tw)C \\ = xA + yB + zC + t(uA + vB + wC) \\ = xA + yB + zC. \end{aligned}$$

۱۴.۱۳ تمرینات

۱. حاصلضرب سه گانه اسکالر $A \cdot B \times C$ را در هریک از حالات زیر حساب کنید.

(الف) $A = (3, 0, 0)$ ، $B = (0, 4, 0)$ ، $C = (0, 0, 8)$.

(ب) $A = (2, 3, -1)$ ، $B = (3, -7, 5)$ ، $C = (1, -5, 2)$.

(پ) $A = (2, 1, 3)$ ، $B = (-3, 0, 6)$ ، $C = (4, 5, -1)$.

۲. کلیه t های حقیقی را بیابید بطوری که بازای آنها سه بردار $(1, t, 1)$ ، $(t, 1, 0)$ ، و $(0, 1, t)$ وابسته خطی باشند.

۳. حجم متوازی السطوحی را که توسط بردارهای $j + k$ ، $i + j$ ، و $k + i$ تشکیل یافته محاسبه کنید.

۴. ثابت کنید که

$$A \times B = A \cdot (B \times i)i + A \cdot (B \times j)j + A \cdot (B \times k)k.$$

۵. ثابت کنید که

$$i \times (A \times i) + j \times (A \times j) + k \times (A \times k) = 2A.$$

۶. (الف) کلیه بردارهای $ai + bj + ck$ را بیابید که در رابطه

$$(ai + bj + ck) \cdot k \times (ei + 3j + 2k) = 3$$

صدق می‌کنند.

(ب) بردار $ai + bj + ck$ را بیابید که در رابطه (الف) صدق‌کند و طول آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۷. از خواص جبری ضربهای نقطه‌ای و خارجی استفاده کرده خواص زیر را درمورد ضرب سه‌گانه اسکالر نتیجه بگیرید.

$$(A + B) \cdot (A + B) \times C = 0 \quad (\text{الف})$$

(ب) $A \cdot B \times C = -B \cdot A \times C$. این رابطه نشان می‌دهد که جایجائی دو بردار اول علامت را تغییر می‌دهد. [داهمنائی: از قسمت (الف) و قوانین پخشپذیری استفاده کنید.]

(پ) $A \cdot B \times C = -A \cdot C \times B$. این رابطه نشان می‌دهد که جایجائی بردارهای دوم و سوم علامت را تغییر می‌دهد. [داهمنائی: از خاصیت شبه‌تقارن استفاده نمایید.]

(ت) $A \cdot B \times C = -C \cdot B \times A$. این بین آن است که جایجائی بردارهای اول و سوم علامت را تغییر خواهد داد. [داهمنائی: (ب) و (پ) را بکار ببرید.]
از مساوی قرار دادن طرفهای راست (ب)، (پ)، و (ت) چنین خواهیم داشت:

$$A \cdot B \times C = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B$$

که نشان می‌دهد که هر جایگشت دوری A ، B ، و C حاصلضرب سه‌گانه اسکالر آنها را تغییر نمی‌دهد.

۸. این تمرین برهان خلاصه‌ای از اتحاد برداری

$$A \times (B \times C) = (C \cdot A)B - (B \cdot A)C \quad (15.13)$$

را نشان می‌دهد که گاهی آن را دستور «کب منهای بک» می‌خوانند. فرض کنید $C = (c_1, c_2, c_3)$ ، $B = (b_1, b_2, b_3)$ ، و ثابت کنید

$$i \times (B \times C) = c_1 B - b_1 C.$$

این رابطه (15.13) را برای حالت خاص $A = i$ ثابت می‌کند. دستورهای نظیر را برای $A = j$ و $A = k$ ثابت کرده و سپس با تلفیق آنها (15.13) را بدست آورید.

۹. از دستور «کب منهای بک» در تمرین ۸ استفاده کرده اتحادهای برداری زیر را نتیجه بگیرید.

$$(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D \quad (\text{الف})$$

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = O \quad (\text{ب})$$

$$B \times (C \times A) = O \text{ اگر و فقط اگر } A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad (\text{پ})$$

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (B \cdot D)(A \cdot C) - (B \cdot C)(A \cdot D) \quad (\text{ت})$$

۱۰. چهار بردار A, B, C ، و D در V_3 در روابط

$$C + D = i + 2j + k, A \times D \cdot B = 3, A \times C \cdot B = 5$$

و $C - D = i - k$ را بر حسب i و j و k حساب کنید.

$$(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2 \quad ۱۱.$$

$$۱۲. \text{دستور } A \times [A \times (A \times B)] \cdot C = - \|A\|^2 A \cdot B \times C \text{ را اثبات و یا رد کنید.}$$

۱۳. (الف) ثابت کنید که حجم یک چهار وجهی با رئوس A و B و C و D برابر است با

$$\frac{1}{6} |(B - A) \cdot (C - A) \times (D - A)|.$$

(ب) این حجم را در صورتی حساب کنید که

$$D = (4, 0, 0) \text{ و } C = (0, 3, 0), B = (0, 0, 2), A = (1, 1, 1)$$

۱۴. (الف) اگر $B \neq C$ ثابت کنید که فاصله قائم A تا خط مار بر B و C مساوی

$$\frac{\|(A - B) \times (C - B)\|}{\|B - C\|}$$

می باشد.

(ب) این فاصله را وقتی حساب کنید که

$$C = (4, 5, 1) \text{ و } B = (-1, 1, 1), A = (1, -2, -5)$$

۱۵. دستور هرون^۱ برای مساحت S یک مثلث بطول اضلاع a, b ، و c عبارت است از

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ که در آن } s = (a+b+c)/2 \text{ در این تمرین بطور خلاصه برهان برداری این دستور آمده است.}$$

فرض کنید مثلث بر آسهای O, A ، و B باشد بطوری که $\|A\| = a$ ، $\|B\| = b$ ، و $\|B - A\| = c$

(الف) با ترکیب دو اتحاد

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$$

و

$$-2A \cdot B = \|A - B\|^2 - \|A\|^2 - \|B\|^2$$

$$\begin{aligned} 4S^2 &= a^2b^2 - \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2) \end{aligned}$$

را نتیجه بگیرید.

(ب) دستور قسمت (الف) را بصورت

$$S^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$$

درآورده و از اینجا دستور هرون را نتیجه بگیرید.

هر یک از دستگاههای معادلات تمرینهای ۱۶، ۱۷، و ۱۸ را با استفاده از قاعده کرامر حل کنید.

$$-y + z = 3, \quad 2x - y + 4z = 11, \quad x + 2y + 3z = 5. \quad ۱۶$$

$$2x + 5y + 3z = 3, \quad 3x - y - z = 2, \quad x + y + 2z = 4. \quad ۱۷$$

$$y + z = 5, \quad x + z = 2, \quad x + y = 5. \quad ۱۸$$

۱۹. اگر $P = (1, 1, 1)$ و $A = (2, 1, -1)$ ثابت کنید هر نقطه (x, y, z) واقع بر خط $\{P + tA\}$ در دستگاه معادلات خطی

$$3x + y + 7z = 11, \quad x + y + 3z = 5, \quad x - y + z = 1$$

صدق می‌کند.

۱۵.۱۳ بردارهای قائم بر صفحات

در بخش ۶.۱۳ صفحه بعنوان مجموعه‌ای بشکل $\{P + sA + tB\}$ تعریف شد که در آن A و B بردارهایی مستقل خطی هستند. حال نشان می‌دهیم که با استفاده از مفهوم بردار قائم می‌توان صفحات در V_3 را بروشی کاملاً متفاوت توصیف کرد.

تعریف. فرض کنیم $M = \{P + sA + tB\}$ صفحه‌ای ماد بر P و تولید شده بوسیله A و B باشد. بردار N در V_3 را عمود بر M خوانند هرگاه N هم بر A عمود باشد و هم بر B . هرگاه علاوه بر این، N ناصفر هم باشد آنگاه N را یک بردار قائم بر صفحه می‌نامند.

توجه: هرگاه $N \cdot A = N \cdot B = 0$ آنگاه $N \cdot (sA + tB) = 0$ پس هر

بردار عمود بر A و بر B بر هر بردار موجود در پیمای خطی A و B عمود است. همچنین، اگر N قائم بر صفحه باشد، tN نیز بازای هر t حقیقی ناصفر چنین خواهد بود.

قضیه ۱۵.۱۳. صفحه $M = \{P + sA + tB\}$ ماد بر P و پیموده شده وسیله A و B مفروض است. قرار می‌دهیم $N = A \times B$ در اینصورت

(الف) N یک بردار قائم بر M است؛

(ب) M مجموعه کلیه X هائی در V_3 است که در معادله

$$(X - P) \cdot N = 0 \quad (۱۶.۱۳)$$

صدق می‌کنند.

برهان. چون M یک صفحه است پس A و B مستقل خطی می‌باشند، در نتیجه $A \times B \neq 0$. این (الف) را ثابت می‌کند زیرا $A \times B$ هم بر A عمود است و هم بر B . برای اثبات حکم (ب) فرض می‌کنیم M' مجموعه همه X هائی در V_3 باشد که در معادله (۱۶.۱۳) صدق می‌کنند. هرگاه $X \in M$ آنگاه $X - P$ در پیمای خطی A و B است. پس $X - P$ بر N عمود خواهد بود. از اینرو $X \in M'$ که $M \subseteq M'$ را ثابت خواهد کرد. بعکس فرض کنیم $X \in M'$. در اینصورت X در (۱۶.۱۳) صدق می‌کند. چون A و B و N مستقل خطی اند (قضیه ۱۳.۱۳) پس هر بردار در V_3 را خواهند پیمود، بخصوص بازای اسکالرهائی چون s, t, u داریم

$$X - P = sA + tB + uN.$$

با ضرب نقطه‌ای هر عضو در N درمی‌یابیم که $u = 0$ ، پس $X - P = sA + tB$. این نشان می‌دهد که $X \in M$. در نتیجه $M' \subseteq M$ که برهان (ب) را تمام می‌کند.

معنی هندسی قضیه ۱۵.۱۳ در شکل ۷.۱۳ نشان داده شده است. نقاط P و X بر صفحه واقع بوده و بردار قائم N بر $X - P$ عمود است. این شکل قضیه زیر را پیشنهاد خواهد کرد.

قضیه ۱۶.۱۳. با این فرض که صفحه M مار بر نقطه P و بردار ناصفر N قائم به M داده شده‌اند قرار می‌دهیم

$$d = \frac{|P \cdot N|}{\|N\|} \quad (۱۷.۱۳)$$

در اینصورت طول هر X واقع بر M ، یعنی $\|X\|$ ، از d ناکمتر است. بعلاوه، $\|X\| = d$ اگر و فقط اگر X تصویر P در امتداد N باشد؛

$$t = \frac{P \cdot N}{N \cdot N} \quad X = tN \quad \text{که دآن}$$

پرهان. اثبات از نامساوی کشی - شوارتز و دقیقاً بهمان روشی گسه قضیه ۶.۱۳ (نتیجه متناظر برای خطوط در V_3) را ثابت کردیم حاصل می شود.

با همین استدلال درمی یابیم که هرگاه نقطه Q بر M واقع نباشد آنگاه، در میان کلیه نقاط X واقع بر M ، طول $\|X - Q\|$ وقتی مینیمم است که $X - Q$ تصویر $P - Q$ در امتداد N باشد. این طول مینیمم $\|N\| |(P - Q) \cdot N|$ بوده و فاصله Q تا صفحه نام دارد. عدد d در (۱۷.۱۳) فاصله مبدأ تا صفحه خواهد بود.

۱۶.۱۳ معادلات دکارتی خطی صفحات

نتایج قضایای ۱۵.۱۳ و ۱۶.۱۳ را می توان برحسب مؤلفه ها نیز بیان کرد. اگر بنویسیم $P = (x_1, y_1, z_1)$ ، $N = (a, b, c)$ ، $X = (x, y, z)$ ، معادله (۱۶.۱۳) بصورت

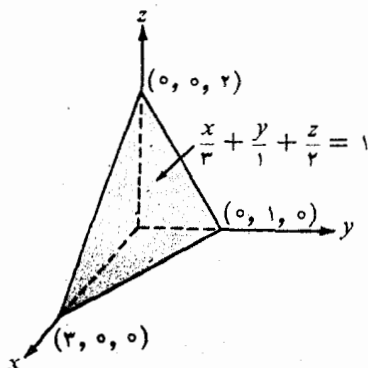
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad (18.13)$$

درمی آید. این را یک معادله دکارتی صفحه می خوانند، و فقط بازای آن (x, y, z) هائی برقرار است که بر صفحه واقع باشند. اگر هریک از a و b و c را در اسکار ناصفر t ضرب کنیم مجموعه نقاط صادقی در (۱۸.۱۳) تغییری نمی کند. این فقط منجر به این می شود که در (۱۶.۱۳) بردار قائم دیگری انتخاب می کنیم.

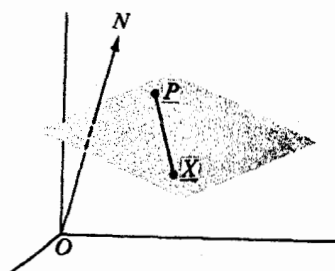
در معادله (۱۸.۱۳) می توان جملاتی را که شامل x, y, z نیستند بطرف دیگر برده و آن را بشکل

$$ax + by + cz = d_1 \quad (19.13)$$

نوشت که در آن $d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$. هر معادله باین شکل را نسبت به x, y, z و خطی می گویند. هم اکنون نشان دادیم که هر نقطه (x, y, z) واقع بر صفحه در معادله دکارتی خطی (۱۹.۱۳) صدق می کند که در آن a و b و c هر سه صفر نیستند. بعکس، هر معادله خطی با این خاصیت نمایشگر یک صفحه خواهد بود. (خواننده می تواند این مطلب را بعنوان



شکل ۸.۱۳ یک صفحه با طول، عرض، و ارتفاع از مبدأ ۲، ۱، و ۳.



شکل ۷.۱۳ یک صفحه مار بر P و X با بردار قائم N .

تمرین ثابت کند.)

عدد d_1 در معادله (۱۹.۱۳) با فاصله d ی صفحه تا مبدأ رابطه ساده‌ای دارد. چون $d_1 = P \cdot N$ داریم $|d_1| = |P \cdot N| = d \|N\|$ اگر d_1 به طول N بطول ۱ باشد، $|d_1| = d$. این صفحه از مبدأ می‌گذرد اگر و فقط اگر $d_1 = 0$.

مثال. معادله دکارتی $2x + 6y + 3z = 6$ صفحه‌ای را با بردار قائم $N = 2i + 6j + 3k$ نمایش می‌دهد. این معادله را بشکل

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$$

می‌نویسیم که از آن معلوم می‌شود که صفحه محوره‌های مختصات را در نقاط $(3, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 2)$ قطع می‌کند. اعداد ۳، ۱، و ۲ را بر ترتیب طول، عرض، و ارتفاع از مبدأ صفحه می‌نامند. با دانستن این اعداد می‌توان صفحه را با سرعت رسم کرد. بخشی از این صفحه در شکل ۸.۱۳ نشان داده شده است. فاصله آن تا مبدأ برابر است با

$$d = 6 / \|N\| = 6/7.$$

دو صفحه موازی دارای یک قائم مشترک N می‌باشند. اگر $N = (a, b, c)$ می‌توان معادلات دکارتی دو صفحه موازی را این‌طور نوشت:

$$ax + by + cz = d_1, \quad ax + by + cz = d_2$$

که فقط در عبارت سمت راست متفاوتند. عدد $|d_1 - d_2| / \|N\|$ را فاصله قائم بین دو صفحه می‌نامند و این تعریفی است که توسط قضیه ۱۶.۱۳ پیشنهاد می‌شود.

دو صفحه را متعامد خوانند هرگاه قائم یکی بر قائم دیگری عمود باشد. بطور کلی، هرگاه قائمهای دو صفحه با هم زاویه θ بسازند، آنگاه می‌گوئیم زاویه بین دو صفحه θ می‌باشد.

۱۷.۱۳ تمرینات

۱. بردارهای $A = 2i + 3j - 4k$ و $B = j + k$ مفروضند.

(الف) بردار ناصفر N را طوری بیابید که هم بر A عمود باشد و هم بر B .

(ب) برای صفحه مار بر مبدأ که بوسیله A و B پیموده شده یک معادله دکارتی پیدا کنید.

(پ) برای صفحه مار بر $(1, 2, 3)$ که بوسیله A و B پیموده شده یک معادله دکارتی بیابید.

۲. صفحه‌ای دارای معادله دکارتی $x + 2y - 2z + 7 = 0$ است. مطلوبست:

(الف) یک بردار قائم بطول یک؛

(ب) طول، عرض، و ارتفاع از مبدأ صفحه؛

(پ) فاصله صفحه تا مبدأ؛

(ت) نقطه Q واقع بر صفحه که نزدیکترین نقطه به مبدأ است.

۳. معادله دکارتی صفحه مار بر $(-3, 2, 1)$ و موازی صفحه $4 = y - 2z + 3x$ را بیابید. فاصله بین این دو صفحه چقدر است؟

۴. چهار صفحه دارای معادلات دکارتی $5 = x + 2y - 2z$ ، $2 = 3x - 6y + 3z$ ، $-1 = 2x + y + 2z$ ، و $7 = x - 2y + z$ هستند.

(الف) نشان دهید که دوتای آنها موازی و دوتای دیگر برهم عمودند.

(ب) فاصله بین دو صفحه موازی را بیابید.

۵. سه نقطه $(-1, 1, 1)$ ، $(2, 3, 3)$ ، و $(-2, -1, 3)$ صفحه‌ای را مشخص می‌کنند.

(الف) یک بردار قائم بر صفحه را پیدا کنید.

(ب) برای این صفحه یک معادله دکارتی بدست آورید.

(پ) فاصله صفحه را تا مبدأ پیدا کنید.

۶. برای صفحه‌ای که بوسیله $(1, 2, 3)$ و $(2, 3, 4)$ و $(-2, 7, -1)$ مشخص شده یک معادله دکارتی بیابید.

۷. زاویه بین دو صفحه با معادلات دکارتی $1 = x + y$ و $2 = y + z$ را معین کنید.

۸. هر خط موازی با بردار ناصفر N را عمود بر صفحه M نامند هرگاه N قائم به M باشد. برای صفحه مار بر $(-7, 3, 2)$ یک معادله دکارتی بیابید با این فرض که خط مار بر $(3, 2, 1)$ و $(12, 4, 2)$ بر این صفحه عمود باشد.

۹. برای خطی که شامل نقطه $(-3, 1, 2)$ بوده و بر صفحه‌ای بمعادله

$$5 = z - 3y + 4x$$

عمود است یک معادله پارامتری برداری پیدا کنید.

۱۰. یک نقطه در فضا طوری حرکت می‌کند که وضعیت آن در لحظه t با بردار

$$\mathbf{X}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (2 - 3t)\mathbf{j} + (2t - 1)\mathbf{k}$$

مشخص می‌شود.

(الف) ثابت کنید نقطه در امتداد یک خط حرکت می‌کند. (این خط را L بنامید.)

(ب) یک بردار N موازی L پیدا کنید.

(پ) نقطه‌کی با صفحه $0 = 2x + 3y + 2z + 1$ برخورد می‌کند؟

(ت) برای صفحه موازی صفحه قسمت (پ) که حاوی نقطه $X(3)$ است یک معادله دکارتی پیدا کنید.

(ث) برای صفحه عمود بر L که شامل نقطه $X(2)$ است یک معادله دکارتی بدست آورید.

۱۱. برای صفحه مار بر $(1, 1, 1)$ که بردار قائم آن N بترتیب با i, j, k زوایای $\pi/3, \pi/4, \pi/3$ می سازد یک معادله دکارتی پیدا کنید.

۱۲. حجم یک چهاروجهی را حساب کنید که رئوسش در مبدأ و در نقاطی است که محورهای مختصات صفحه $6 = x + 2y + 3z$ را قطع می کنند.

۱۳. بردار A بطول ۱ را طوری بیابید که بر $k - 3j + i$ عمود بوده و با صفحه ای بمعادله دکارتی $1 = x - y + 5z$ موازی باشد.

۱۴. معادله دکارتی صفحه ای را بیابید که با هر دو بردار $j + i$ و $k + j$ موازی بوده و محور x را در $(0, 0, 2)$ قطع کند.

۱۵. کلیه نقاطی را بیابید که بر فصل مشترک سه صفحه

$$x - y + 3z = 3, \quad 3x + y + 5z = 7, \quad 3x + y + z = 5$$

قرار دارند.

۱۶. ثابت کنید سه صفحه ای که قائمهای آنها مستقل خطی باشند در یک و فقط یک نقطه همدیگر را قطع می کنند.

۱۷. هر خط با بردار هادی A را با صفحه M موازی خوانند هرگاه A با M موازی باشد. خطی حاوی $(1, 2, 3)$ با هریک از صفحات

$$2x + 3y + 4z = 5 \quad \text{و} \quad x + 2y + 3z = 4$$

موازی است. برای این خط یک معادله پارامتری برداری پیدا کنید.

۱۸. چنانچه خط L با صفحه M غیرموازی باشد ثابت کنید فصل مشترک $L \cap M$ فقط حاوی یک نقطه است.

۱۹. (الف) ثابت کنید فاصله نقطه (x_0, y_0, z_0) تا صفحه ای بمعادله دکارتی

$$ax + by + cz + d = 0$$

برابر است با

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

(ب) نقطه P را بر صفحه $0 = 5x - 14y + 2z + 9$ طوری بیابید که نزدیکترین نقطه به $Q = (-2, 15, -7)$ باشد.

۲۰. برای صفحه موازی با صفحه $0 = 2x - y + 2z + 4$ یک معادله دکارتی بیابید در صورتی که نقطه $(-1, 2, 3)$ از دو صفحه بیک فاصله باشد.

۲۱. (الف) اگر سه نقطه A و B و C یک صفحه را مشخص کنند ثابت کنید فاصله نقطه

Q تا این صفحه برابر است با

$$|(Q - A) \cdot (B - A) \times (C - A)| / \|(B - A) \times (C - A)\|.$$

(ب) این فاصله را وقتی حساب کنید که

$$C = (2, 3, 4), B = (1, -1, 1), A = (0, 1, 1), Q = (1, 0, 0)$$

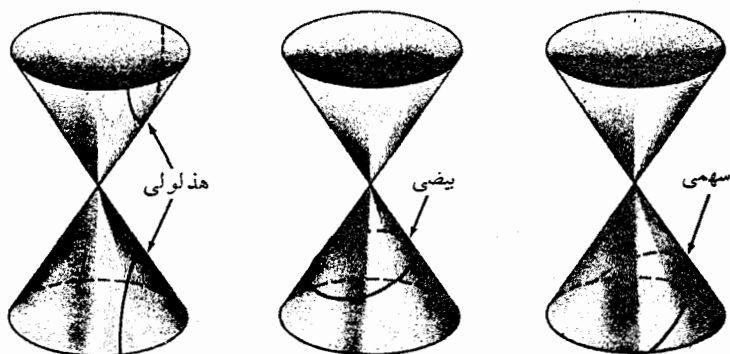
۲۲. ثابت کنید اگر دو صفحه M و M' موازی نباشند فصل مشترک آنها $M \cap M'$ یک خط است.

۲۳. برای صفحه‌ای که موازی $\vec{j}$ بوده و از فصل مشترک صفحات $x + 2y + 3z = 4$ و $2x + y + z = 2$ می‌گذرد یک معادلهٔ دکارتی پیدا کنید.

۲۴. برای صفحه‌ای که موازی بردار $3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ بوده و حاوی فصل مشترک صفحات $x + y = 3$ و $2y + 3z = 4$ است یک معادلهٔ دکارتی پیدا کنید.

۱۸.۱۳ مقاطع مخروطی

خط متحرک G که خط ثابت A را در نقطهٔ معلوم P قطع کرده و با آن زاویهٔ ثابت θ ($0 < \theta < \pi/2$) می‌سازد سطحی را در فضای سه بعدی تولید می‌کند که آن را یک مخروط مستدیر قائم می‌نامند. خط G را مولد، A را محور، و P را رأس مخروط می‌خوانند. هریک از مخروطهای شکل ۹.۱۳ دارای محور قائم است. قسمتهای بالائی و پائینی مخروط که در رأس بهم رسیده‌اند دامنه‌های مخروط نامیده می‌شوند. منحنیهائی که از تقاطع مخروط و صفحه‌ای که از رأس نمی‌گذرد ایجاد می‌شوند مقاطع مخروطی یا فقط مخروطی نام دارند. اگر صفحهٔ قطع‌کننده موازی یکی از خطوط مار

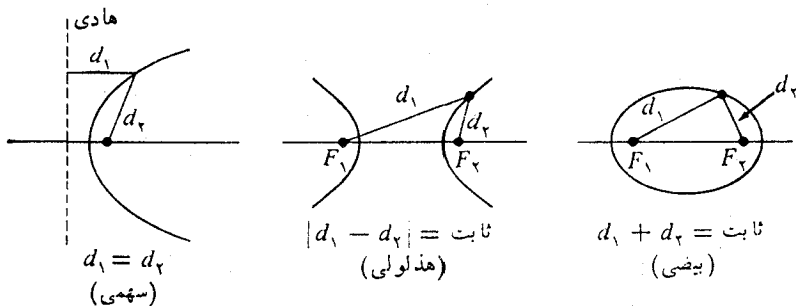


شکل ۹.۱۳ مقاطع مخروطی

بر رأس باشد مخروطی را یک سهمی می‌خوانند. درغیراینصورت، بسته به اینکه صفحه یکی یا هر دو دامنه را قطع کند، فصل مشترک یک بیضی یا یک هذلولی نامیده خواهد

شد. (ر.ک. شکل ۱۳.۹۰). هذلولی از دو «شاخه» تشکیل شده است که هریک بر یکی از دامنه‌ها قرار دارد.

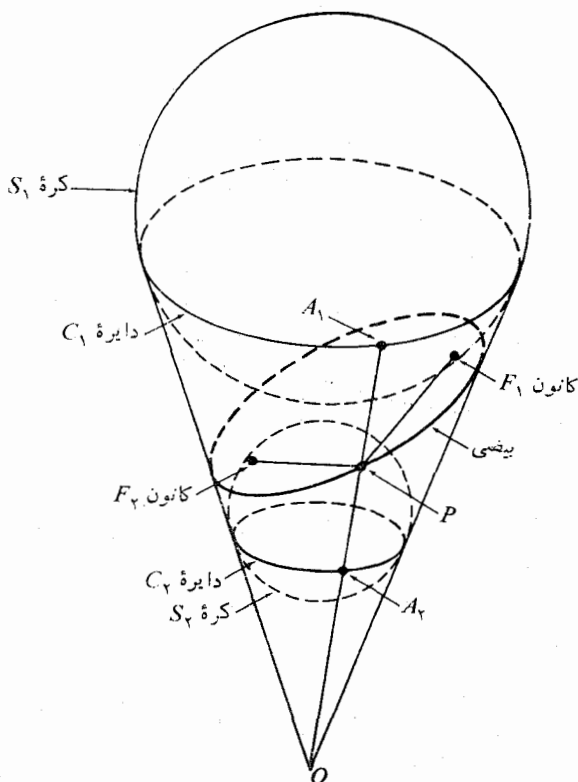
بسیاری از کشفیات مهم در ریاضیات محض و کاربردها به مقاطع مخروطی مربوط بوده‌اند. بحث آپولونیوس^۱ در مقاطع مخروطی در قرن سوم پیش از میلاد یکی از عمیق‌ترین آثار هندسه کلاسیک یونانی بشمار می‌رود. تقریباً ۲۰۰۰ سال بعد گالیله^۲ دریافت که اگر پرتابه‌ای از بالای یک برج بطور افقی پرتاب شود (چنانچه از مقاومت هوا صرف‌نظر شده و حرکت در بالای بخشی از زمین صورت گیرد که بتوان آن را مسطح گرفت) سقوط پرتابه به زمین بصورت سهمی خواهد بود. یکی از نقاط عطف در تاریخ علم هیئت حدود ۱۶۰۰ میلادی صورت گرفت و آن زمانی بود که کپلر^۳ اظهار داشت که کلیه سیارات در مدارهای بیضوی حرکت می‌کنند. تقریباً ۸۰ سال بعد نیوتن نشان داد که حرکت سیارات بصورت بیضی قانون جاذبه عکس مربع را نتیجه می‌دهد. این کشف نیوتن را به تنظیم نظریه مشهور خود در باره جاذبه عمومی هدایت کرد که غالباً آن را بزرگ‌ترین کشف علمی می‌دانند که تا بحال صورت گرفته است. مقاطع مخروطی نه فقط بصورت مدار سیارات و اقمار مصنوعی ظاهر می‌شوند بلکه در شکل مسیر ذرات اتمی اولیه نیز رخ می‌نمایند. اینها در ساختن عدسی و آینه و همچنین در معماری مورد استفاده قرار می‌گیرند. این مثالها و مثالهای متعدد دیگر نشان می‌دهند که هرچه در اهمیت مقاطع مخروطی بگوئیم کم گفته‌ایم.



شکل ۱۳.۹۰ تعاریف کانونی مقاطع مخروطی.

برای مقاطع مخروطی تعاریف معادل دیگری نیز وجود دارند. یکی از این تعاریف به نقاط خاصی اشاره می‌کند که به آنها کانون می‌گویند. یک بیضی را می‌توان مجموعه کلیه نقاطی در صفحه دانست که مجموع فواصل آنها (d_1 و d_2) از دو نقطه ثابت F_1 و F_2 (کانونها) ثابت است. (ر.ک. شکل ۱۳.۹۰). اگر کانونها برهم منطبق شوند بیضی به یک دایره بدل خواهد شد. یک هذلولی مجموعه تمام نقاطی است که برای آنها تفاضل $|d_1 - d_2|$ ثابت است. یک سهمی مجموعه همه نقاطی در صفحه است که فاصله آنها تا نقطه ثابت F (بنام کانون) مساوی فاصله آنها تا یک خط معلوم (بنام خط هادی) می‌باشد.

یک استدلال بسیار ساده و زیبا وجود دارد که برطبق آن هر خاصیت کانونی بیضی نتیجه‌ای از تعریف آن بعنوان مقطعی از یک مخروط می‌باشد. این برهان، که می‌توان آن را «برهان قیف بستنی» نامید، در سال ۱۸۲۲ توسط یک ریاضیدان بلژیکی بنام داندلین^۱ (۱۸۴۷ - ۱۷۹۴) کشف شد، و در آن از دو کره S_1 و S_2 استفاده می‌شود که، مطابق شکل ۱۱.۱۳، طوری رسم شده‌اند که بر صفحه قطع‌کننده و مخروط مماسند. این کرات در امتداد دو دایره موازی C_1 و C_2 با مخروط تماس دارند. ثابت می‌کنیم که می‌توان از نقاط F_1 و F_2 ، یعنی نقاط تماس کرات با صفحه، بعنوان کانونهای بیضی استفاده کرد.



شکل ۱۱.۱۳ برهان قیف بستنی.

فرض کنیم P نقطه دلخواهی از بیضی باشد. مسئله اثبات ثابت بودن

$$\|\vec{PF}_1\| + \|\vec{PF}_2\|$$

است، یعنی که این عبارت از P مستقل می‌باشد. برای این منظور بر مخروط خطی از رأس O به P می‌کشیم و فرض می‌کنیم A_1 و A_2 بترتیب محل برخورد آن با دایره C_1 و C_2

باشند. در این صورت $\vec{PA}_\lambda$ و $\vec{PF}_\lambda$ دو مماس از P بر S_λ اند، و در نتیجه

$$\|\vec{PF}_\lambda\| = \|\vec{PA}_\lambda\|.$$

به همین نحو داریم $\|\vec{PF}_\nu\| = \|\vec{PA}_\nu\|$ ، و لذا خواهیم داشت

$$\|\vec{PF}_\lambda\| + \|\vec{PF}_\nu\| = \|\vec{PA}_\lambda\| + \|\vec{PA}_\nu\|.$$

اما $\|\vec{PA}_\lambda\| + \|\vec{PA}_\nu\| = \|\vec{A_\lambda A_\nu}\|$ که فاصله دو دایره موازی C_λ و C_ν در امتداد سطح مخروط می باشد. این ثابت می کند که، همانطور که حکم شده، می توان از F_λ و F_ν بعنوان کانونهای بیضی استفاده کرد.

این برهان را با کمی تغییر می توان برای هذلولی و سهمی نیز بکار برد. در حالت هذلولی، در هر قسمت از مخروط یک کره لازم می شود. در مورد سهمی، از کره مماس بر صفحه قطع کننده در کانون F استفاده خواهد شد. این کره با مخروط در امتداد دایره ای در تماس است که در صفحه ای قرار دارد که فصل مشترک آن با صفحه قطع کننده خط هادی سهمی می باشد. با این راهنماییها خواننده باید قادر باشد تا نشان دهد که خواص کانونی هذلولی و سهمی را می توان از تعاریف آنها بعنوان مقاطعی از یک مخروط نتیجه گرفت.

۱۹.۱۳ خروج از مرکز مقاطع مخروطی

مشخصه دیگر مقاطع مخروطی در رابطه با مفهومی است که خروج از مرکز نام دارد. یک مقطع مخروطی را می توان مسیر حرکت نقطه ای در صفحه دانست که نسبت فواصل آن از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت مقداری ثابت است. این نسبت ثابت را خروج از مرکز منحنی نامیده و با e نشان می دهند. (این مقدار را نباید با عدد اولر e اشتباه کرد.) منحنی بیضی است هرگاه $0 < e < 1$ ، سهمی است هرگاه $e = 1$ ، و هذلولی است هرگاه $e > 1$. نقطه ثابت کانون و خط ثابت خط هادی نامیده می شود.

ما این تعریف را بعنوان مبنای بررسی خود در مقاطع مخروطی می پذیریم زیرا به ما امکان بحث هر سه نوع مخروطی را با هم داده و بدرد استفاده در روشهای برداری خواهد خورد. در این بحث فرض آن است که کلیه نقاط و خطوط در یک صفحه قرار دارند.

تعریف. خط L ، نقطه F غیرواقع بر آن، و عدد مثبت e داده شده است. فرض کنیم $d(X, L)$ فاصله X تا L باشد. مجموعه تمام X هایی را که در رابطه

$$\|X - F\| = ed(X, L) \quad (20.13)$$

صدق می کنند یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e می نامند. مخروطی را بیضی نامند هرگاه $e < 1$ ، سهمی خوانند هرگاه $e = 1$ ، و هذلولی نام می دهند هرگاه $e > 1$.

اگر N یک بردار قائم به L و P نقطه‌ای واقع بر آن باشد فاصله $d(X, L)$ هر نقطه مانند X تا L با دستور

$$d(X, L) = \frac{|(X - P) \cdot N|}{\|N\|}$$

داده می‌شود. وقتی طول N یک است این دستور بصورت $d(X, L) = |(X - P) \cdot N|$ ساده شده و معادله اساسی (۲۰.۱۳) در مورد مقاطع مخروطی بشکل

$$(۲۱.۱۳) \quad \|X - F\| = e |(X - P) \cdot N|$$

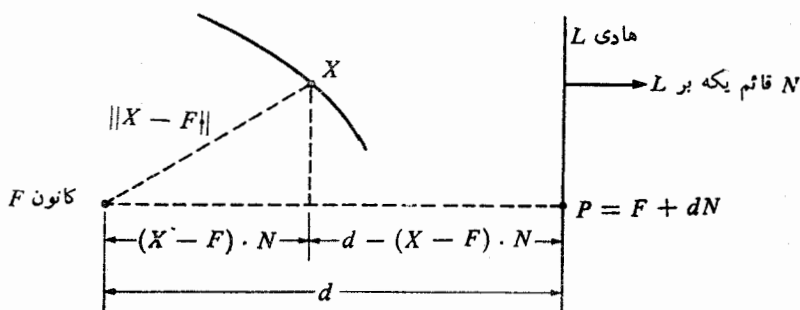
در خواهد آمد.

خط L صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند که ما آنها را بر طبق انتخاب N بدلولخواه «مثبت» و «منفی» می‌نامیم. چنانچه $(X - P) \cdot N > 0$ می‌گوئیم X در نیم صفحه مثبت است و، اگر $(X - P) \cdot N < 0$ ، می‌گوئیم X در نیم صفحه منفی قرار دارد. روی خود L داریم $(X - P) \cdot N = 0$. در شکل ۱۲.۱۳، بخاطر بردار قائم N ، نقاط واقع در سمت راست L در نیم صفحه مثبت و نقاط واقع در طرف چپ در نیم صفحه منفی قرار دارند.

حال کانون F را، طبق شکل ۱۲.۱۳، در نیم صفحه منفی قرار می‌دهیم و P را نزدیکترین نقطه L به F می‌گیریم. در اینصورت

$$|d| = \|P - F\| \quad \text{که در آن } P - F = dN$$

فاصله کانون تا خط هادی می‌باشد. چون F در نیم صفحه منفی است خواهیم داشت



شکل ۱۲.۱۳ یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e مجموعه کلیه X هائی است که در $\|X - F\| = e |(X - F) \cdot N - d|$ صدق می‌کنند.

$(F - P) \cdot N = -d < 0$ پس d مثبت خواهد بود. با گذاردن $F + dN$ بجای P در (۲۱.۱۳) قضیه زیر را داریم که در شکل ۱۲.۱۳ مجسم شده است.

قضیه ۱۷.۱۳. فرض کنیم C یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e ، کانون F ، و خط هادی L در فاصله d از F باشد. هرگاه N یک برداریکه قائم به L بوده و F در نیم صفحه منفی تعیین شده بوسیله N قرار داشته باشد آنگاه C از کلیه نقاطی چون X تشکیل شده که در معادله

$$(22.13) \quad \|X - F\| = e |(X - F) \cdot N - d|$$

صدق می کند.

۲۰.۱۳ معادلات قطبی مقاطع مخروطی

معادله قضیه ۱۷.۱۳ را می توان با گذاردن کانون در محلی خاص ساده کرد. مثلاً اگر کانون در مبدأ باشد معادله بصورت

$$(23.13) \quad \|X\| = e |X \cdot N - d|$$

درمی آید. این شکل خصوصاً وقتی مفید است که بخواهیم X را بر حسب مختصات قطبی بیان کنیم. خط هادی L را، مطابق شکل ۱۳.۱۳، قائم گرفته و فرض می کنیم $N = i$. اگر مختصات قطبی X برابر r و θ باشند خواهیم داشت $\|X\| = r$ ، $X \cdot N = r \cos \theta$ ، و معادله (۲۳.۱۳) بصورت

$$(24.13) \quad r = e |r \cos \theta - d|$$

درخواهد آمد. چنانچه X سمت چپ خط هادی باشد داریم $r \cos \theta < d$ ، پس

$$|r \cos \theta - d| = d - r \cos \theta$$

و رابطه (۲۴.۱۳) بصورت $r = e(d - r \cos \theta)$ درمی آید یا، اگر آن را نسبت به r حل کنیم، خواهیم داشت

$$(25.13) \quad r = \frac{ed}{e \cos \theta + 1}.$$

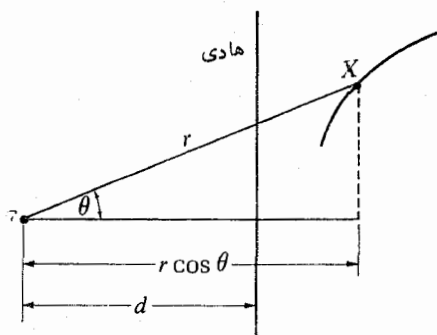
اگر X طرف راست خط هادی باشد داریم $r \cos \theta > d$ ، پس (۲۴.۱۳) بصورت

$$r = e(r \cos \theta - d)$$

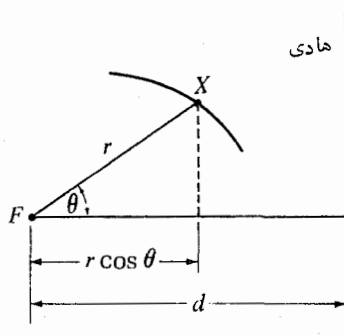
درمی آید که رابطه

$$(26.13) \quad r = \frac{ed}{e \cos \theta - 1}$$

را نتیجه خواهد داد. چون $r > 0$ این معادله آخر ایجاب می کند که $e > 1$. بعبارت دیگر، فقط هذلولیها هستند که سمت راست خط هادی نقطه دارند. در نتیجه قضیه زیر را ثابت کرده ایم که در شکل ۱۳.۱۳ مجسم شده است.



(ب) برشاخه راست هذلولی $r \cos \theta > d$



(الف) بر بیضی، سهمی، و شاخه چپ هذلولی $r \cos \theta < d$

شکل ۱۳.۱۳ مقاطع مخروطی با معادله قطبی $r = e |r \cos \theta - d|$ در مبدأ است و سمت چپ خط هادی قرار دارد.

قضیه ۱۸.۱۳. فرض کنیم C یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e ، کانون F در مبدأ، و خط هادی قائم L در فاصله d سمت راست F باشد. اگر $0 < e \leq 1$ مخروطی بیضی یا سهمی است؛ هر نقطه C سمت چپ L واقع است و در معادله قطبی

$$(۲۷.۱۳) \quad r = \frac{ed}{e \cos \theta + 1}$$

صدق می‌کند. چنانچه $e > 1$ منحنی یک هذلولی است که هر شاخه‌اش در یک طرف L قرار دارد. نقاط واقع بر شاخه چپ در (۲۷.۱۳) و نقاط شاخه راست در

$$(۲۸.۱۳) \quad r = \frac{ed}{e \cos \theta - 1}$$

صدق می‌نمایند.

معادلات قطبی مربوط به مواضع دیگر خط هادی در مجموعه تمرینات زیر مطرح شده‌اند.

۲۱.۱۳ تمرینات

۱. ثابت کنید که اگر در قضیه ۱۷.۱۳، F در نیم صفحه مثبت تعیین شده بوسیله N قرار داشته باشد معادله (۲۲.۱۳) را باید با

$$\|X - F\| = e |(X - F) \cdot N + d|$$

عوض کرد.

۲. فرض کنید C یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e ، کانون در مبدأ، و خط هادی قائم L بافاصله d سمت چپ F باشد.
(الف) ثابت کنید اگر C یک بیضی یا سهمی باشد هر نقطه C در طرف راست L قرار داشته و در معادله قطبی

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

صدق می‌کند.

(ب) ثابت کنید اگر C هذلولی باشد نقاط شاخه راست در معادله قسمت (الف) و نقاط شاخه چپ در $r = -ed/(1 + e \cos \theta)$ صدق می‌نمایند. توجه کنید که $1 + e \cos \theta$ همیشه در این حالت منفی است.

۳. اگر خط هادی یک مقطع مخروطی افقی و بافاصله d بالای کانون قرار داشته و کانون در مبدأ باشد ثابت کنید نقاط آن در معادلات قطبی صدق می‌کنند که از معادلات قضیه ۱۸.۱۳ با تبدیل $\cos \theta$ به $\sin \theta$ بدست می‌آیند. چنانچه خط هادی افقی و زیرکانون باشد معادلات قطبی نظیر چه خواهند بود؟

درهریک از تمرینات ۴ تا ۹ برای یک مقطع مخروطی با کانون F در مبدأ و خط هادی قائم واقع در سمت راست F یک معادله قطبی داده شده است. در هر حالت خروج از مرکز e و فاصله d کانون از خط هادی را تعیین کنید. شکلی بکشید که رابطه منحنی را با کانون و خط هادی آن نشان دهد.

$$r = \frac{3}{1 + \frac{1}{4} \cos \theta} \quad ۵.$$

$$r = \frac{2}{1 + \cos \theta} \quad ۴.$$

$$r = \frac{1}{-\frac{1}{4} + \cos \theta} \quad ۷.$$

$$r = \frac{6}{3 + \cos \theta} \quad ۶.$$

$$r = \frac{4}{1 + \cos \theta} \quad ۹.$$

$$r = \frac{4}{1 + 2 \cos \theta} \quad ۸.$$

در هر یک از تمرینات ۱۰ تا ۱۲ یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e دارای کانونی در مبدأ بوده و خط هادی آن با یک معادله دکارتی داده شده است. در هر حالت فاصله d کانون تا خط هادی را حساب کرده و معادله قطبی مقطع مخروطی را مشخص نمایید. در مورد هذلولی، برای هر شاخه یک معادله قطبی بنویسید. شکلی بکشید که مبین رابطه منحنی با کانون و خط هادی آن باشد.

$$e = 1/2, ۱۰: ۳x + 4y = 25 \text{ خط هادی}$$

$$e = 1, ۱۱: 4x + 3y = 25 \text{ خط هادی}$$

$$e = 2.12; \text{ خط هادی: } x + y = 1.$$

۱۳. یک ستاره دنباله‌دار در یک مدار سهمی شکل طوری حرکت می‌کند که خورشید در کانون آن قرار دارد. وقتی ستاره در 10^8 میلی خورشید است زاویه بین بردار واصل از کانون تا ستاره و بردار یکه N از کانون عمود بر خط هادی برابر $\pi/3$ است. که در اینجا کانون در نیم صفحه منفی تعیین شده بوسیله N قرار دارد.

(الف) با اختیار کانون در مبدأ، برای مدار معادله قطبی پیدا کرده و کمترین فاصله ستاره را تا خورشید حساب نمایید.

(ب) قسمت (الف) را با این فرض که کانون در نیم صفحه مثبت تعیین شده بوسیله N قرار دارد حل کنید.

۲۲.۱۳ مقاطع مخروطی متقارن نسبت به مبدأ

یک مجموعه از نقاط را متقارن نسبت به مبدأ خوانند هرگاه وقتی X در این مجموعه باشد $-X$ نیز باشد. اینک نشان می‌دهیم که همیشه می‌توان کانون یک بیضی یا هذلولی را طوری اختیار کرد که مقطع مخروطی نسبت به مبدأ متقارن باشد. برای این کار معادله اساسی (۲۲.۱۳) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$(29.13) \quad \|X - F\| = e|(X - F) \cdot N - d| = e|X \cdot N - F \cdot N - d| \\ = |eX \cdot N - a|$$

که در آن $a = ed + eF \cdot N$. با مربع کردن دو طرف خواهیم داشت

$$(30.13) \quad \|X\|^2 - 2F \cdot X + \|F\|^2 = e^2(X \cdot N)^2 - 2eaX \cdot N + a^2.$$

اگر بخواهیم نسبت به مبدأ تقارن داشته باشیم باید این معادله با تبدیل X به $-X$ نیز برقرار باشد. این عمل نتیجه می‌دهد که

$$(31.13) \quad \|X\|^2 + 2F \cdot X + \|F\|^2 = e^2(X \cdot N)^2 + 2eaX \cdot N + a^2.$$

با تفریق (۳۱.۱۳) از (۳۰.۱۳) تقارن خواهیم داشت اگر و فقط اگر

$$F \cdot X = eaX \cdot N \quad \text{یا} \quad (F - eaN) \cdot X = 0$$

این معادله بازای کلیه X های واقع بر منحنی برقرار است اگر و فقط اگر F و N با معادله

$$(32.13) \quad F = eaN$$

رابطه $F = eaN$ را رابطه $F \cdot N = ea$ را ایجاب می‌کند که به ما $a = ed + e^2a$ را خواهد داد. اگر $e = 1$ معادله اخیر نمی‌تواند برقرار شود زیرا d ، یعنی فاصله کانون تا خط هادی، مخالف صفر است. این یعنی که برای سهمی تقارن نسبت به مبدأ وجود ندارد. چنانچه $e \neq 1$ همیشه می‌توان روابط (۳۲.۱۳) را با اختیار

$$(۳۳.۱۳) \quad a = \frac{ed}{1-e^2} \text{ و } F = \frac{e^2 d}{1-e^2} N$$

برقرار ساخت. توجه کنید که اگر $e < 1$ ، $a > 0$ ، اگر $e > 1$ ، $a < 0$ ، با گذاردن $F = eaN$ در (۳۰.۱۳) قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۹.۱۳. فرض کنیم C یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز $e \neq 1$ و کانون F در فاصله d از خط هادی L باشد. هرگاه N قائم یک‌ای به L بوده و $F = eaN$ ، که در آن $a = ed/(1-e^2)$ ، آنگاه C مجموعه کلیه نقاطی چون X است که در معادله

$$(۳۴.۱۳) \quad \|X\|^2 + e^2 a^2 = e^2 (X \cdot N)^2 + a^2$$

صدق می‌کنند.

این معادله تقارن مخروطی را نسبت به مبدأ نشان می‌دهد زیرا از تعویض X به $-X$ تغییری نخواهد کرد. بخاطر این تقارن است که بیضی و هذلولی هریک دو کانون دارند که بطور متقارن حول مرکز جا گرفته‌اند، و دارای دو خط هادی می‌باشند که آنها نیز بطور متقارن در اطراف مرکز جای دارند.

معادله (۳۴.۱۳) برای $X = \pm aN$ برقرار می‌شود. این دو نقطه رئوس مخروطی نام دارند. پاره خط واصل بین آنها را محدود اطول خوانند هرگاه مخروطی بیضی باشد، و محدود متقاطع می‌نامند هرگاه مخروطی یک هذلولی باشد.

فرض کنیم N' بردار یک‌ای متعامد به N باشد. هرگاه $X = bN'$ آنگاه $X \cdot N = 0$ ، پس $X = bN'$ در معادله (۳۴.۱۳) صدق می‌کند اگر و فقط اگر $a^2 = b^2 + e^2 a^2$. این آیدجاب می‌کند که $e < 1$ و $b^2 = a^2(1-e^2)$. پاره خط واصل بین نقاط $X = \pm bN'$ که $b = a\sqrt{1-e^2}$ ، محدود اقصر بیضی نام دارد.

توجه: اگر در (۳۴.۱۳) قرار دهیم $e = 0$ این معادله بصورت $\|X\| = a$ در می‌آید که معادله یک دایره بشاع a و بمرکز مبدأ است. نظریه روابط (۳۳.۱۳) می‌توان چنین دایره را حالت حدی یک بیضی دانست که در آن $e \rightarrow 0$ و $d \rightarrow \infty$ بطوری که $ed \rightarrow a$.

۲۳.۱۳ معادلات دکارتی مقاطع مخروطی

برای دست یافتن به معادلات دکارتی بیضی و هذلولی کافی است (۳۴.۱۳) را برحسب مختصات قائم X بنویسیم. N را مساوی i اختیار می‌کنیم (که به معنی قائم بودن خطوط هادی است) و قرار می‌دهیم $(x, y) = X$. در اینصورت $x^2 + y^2 = \|X\|^2$ ، $X \cdot N = x$ و (۳۴.۱۳) بصورت

$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2) \text{ یا } x^2 + y^2 + e^2 a^2 = e^2 x^2 + a^2$$

درمی آید که به ما

$$(۳۵.۱۳) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

را خواهد داد. این معادلهٔ دکارتی نمایشگر هم بیضی است ($e < 1$) و هم هذلولی ($e > 1$) و شکل متعارف نامیده می‌شود. کانونها در نقاط $(ae, 0)$ و $(-ae, 0)$ قرار دارند و خطوط هادی خطوط قائم $x = a/e$ و $x = -a/e$ می‌باشند.

اگر $e < 1$ قرار می‌دهیم $b = a\sqrt{1-e^2}$ و معادلهٔ بیضی را بشکل متعارف

$$(۳۶.۱۳) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

می‌نویسیم. کانونهای آن در $(c, 0)$ و $(-c, 0)$ قرار دارند که $c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$. مثالی در شکل ۱۴.۱۳ (الف) نموده شده است.

چنانچه $e > 1$ قرار می‌دهیم $b = |a|\sqrt{e^2 - 1}$ و معادلهٔ هذلولی را بشکل متعارف

$$(۳۷.۱۳) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

می‌نویسیم. کانونهای آن در نقاط $(c, 0)$ و $(-c, 0)$ قرار دارند که

$$c = |a|e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

مثالی در شکل ۱۴.۱۳ (ب) نشان داده شده است.

توجه: اگر (۳۷.۱۳) را نسبت به y و برحسب x حل کنیم به دو معادلهٔ

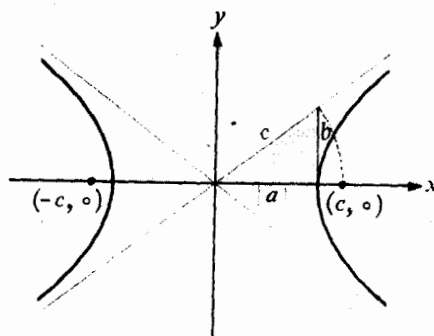
$$(۳۸.۱۳) \quad y = \pm \frac{b}{|a|} \sqrt{x^2 - a^2}$$

دست خواهیم یافت. عدد $\sqrt{x^2 - a^2}$ بازای x های مثبت بزرگ تقریباً مساوی x است، پس طرف راست (۳۸.۱۳) تقریباً برابر $|a|bx/|a| + bx/|a|$ خواهد بود. باآسانی ثابت می‌شود که تفاضل بین $y_1 = bx/|a|$ و $y_2 = b\sqrt{x^2 - a^2}/|a|$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ به ۰ نزدیک می‌شود. این تفاضل برابر است با

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \frac{b}{|a|} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{|a|} \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \frac{|a|b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{|a|b}{x}. \end{aligned}$$

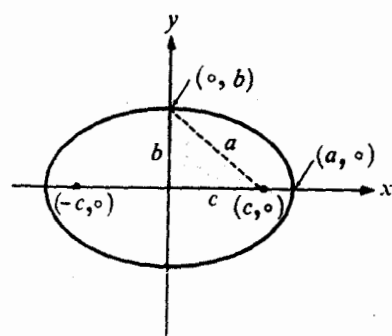
پس، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $y_1 - y_2 \rightarrow 0$. بنابراین، خط $y = bx/|a|$ یک مجانب

هذلولی است. خط $y = -bx/|a|$ مجانب دیگر آن خواهد بود. می‌گویند هذلولی مجانباً به این خطوط نزدیک می‌شود. این مجانبها در شکل ۱۴.۱۳ (ب) نموده شده‌اند.



(ب) هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; b^2 = c^2 - a^2$$



(الف) بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; b^2 = a^2 - c^2$$

شکل ۱۴.۱۳ مقاطع مخروطی با خروج از مرکز $e \neq 1$ و مقماران نسبت به مبدأ. کانونها در $(\pm c, 0)$ قرار دارند که $c = |a|e$. مثلثها a و b و c را بطور هندسی بهم ربط می‌دهند.

اگر خطوط هادی قائم نباشند معادلات دکارتی بیضی و هذلولی شکل دیگری بخود می‌گیرند. بعنوان مثال، اگر خطوط هادی افقی گرفته شوند می‌توان در معادله (۳۴.۱۳) N رامساوی j اختیار کرد. چون $y = X \cdot j = X \cdot N$ معادله‌ای دکارتی شبیه (۳۵.۱۳) بدست می‌آید با این تفاوت که x و y با هم عوض شده‌اند. شکل متعارف در این حالت عبارت است از

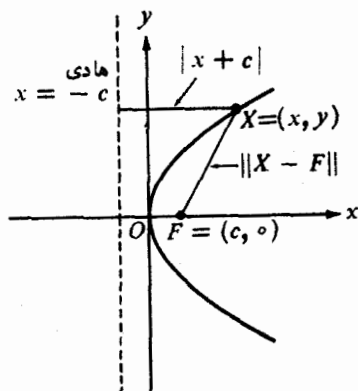
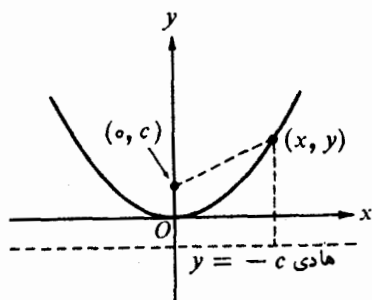
$$(۳۹.۱۳) \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

اگر مخروطی را با اضافه کردن بردار $X_0 = (x_0, y_0)$ به هر نقطه‌اش انتقال دهیم مرکز آن بعوض مبدأ در (x_0, y_0) خواهد بود. معادلات دکارتی نظیر X را می‌توان از (۳۵.۱۳) یا (۳۹.۱۳)، با تبدیل x به $x - x_0$ و y به $y - y_0$ بدست آورد.

برای رسیدن به معادله دکارتی سهمی مجدداً از معادله اساسی (۲۰.۱۳) با فرض $e = 1$ استفاده می‌کنیم. خط هادی را خط قائم $x = -c$ گرفته و کانون را در $(c, 0)$ می‌گذاریم. اگر $X = (x, y)$ خواهیم داشت $X - F = (x - c, y)$ و معادله (۲۰.۱۳) نتیجه می‌دهد که $(x - c)^2 + y^2 = |x + c|^2$. این معادله بشکل متعارف

$$(۴۰.۱۳) \quad y^2 = 4cx$$

ساده می شود. نقطه میانی بین کانون و خط هادی (مبدأ در شکل ۱۵.۱۳) را رأس سهمی می خوانند و خط مار بر رأس و کانون محور سهمی خواهد بود. سهمی نسبت به محورش متقارن است. اگر $c > 0$ سهمی، همانطور که شکل ۱۵.۱۳ نشان داده، سمت راست محور y جا دارد. وقتی $c < 0$ منحنی در طرف چپ محور y قرار خواهد گرفت.



شکل ۱۵.۱۳ سهمی $y^2 = 4cx$ شکل ۱۶.۱۳ سهمی $x^2 = 4cy$

اگر محورها طوری اختیار شوند که کانون بر محور y در نقطه $(0, c)$ قرار گیرد و خط افقی $y = -c$ خط هادی باشد شکل متعارف معادله دکارتی بصورت

$$x^2 = 4cy$$

درخواهد آمد. وقتی $c > 0$ سهمی، همانند شکل ۱۶.۱۳، سمت بالا باز می شود. چنانچه $c < 0$ باز شدنش بسوی پائین خواهد بود.

اگر سهمی شکل ۱۵.۱۳ طوری انتقال یابد که رأس آن در نقطه (x_0, y_0) قرار گیرد معادله نظیر چنین می شود:

$$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$$

کانون اینک در نقطه $(x_0 + c, y_0)$ است و خط هادی خط $x = x_0 - c$ خواهد بود. محور سهمی خط $y = y_0$ می باشد.

بهین نحو، انتقال سهمی شکل ۱۶.۱۳ به معادله

$$(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0)$$

با کانون $(x_0, y_0 + c)$ منجر می شود. خط $y = y_0 - c$ خط هادی آن و خط $x = x_0$ محورش خواهد بود.

خواننده ممکن است اثبات این مطلب را که سهمی مجانبی ندارد سرگرم کننده یابد.

۲۴.۱۳ تمرینات

هر یک از معادلات تمرینهای ۱ تا ۶ نمایش یک بیضی است. مختصات مرکز، کانونها، و رئوس را بیابید و هر منحنی را رسم کنید. همچنین خروج از مرکز را محاسبه نمایید.

$$\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{36} = 1 \quad ۲ \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad ۱$$

$$9x^2 + 25y^2 = 25 \quad ۴ \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \quad ۳$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1 \quad ۶ \quad .4y^2 + 3x^2 = 1 \quad ۵$$

در هر یک از تمرینات ۷ تا ۱۲ یک معادلهٔ دکارتی (بشکل متعارف مناسب) برای بیضی بیابید که در شرائط قید شده صدق می‌کند. هرمنحنی را رسم نمایید.

۷. مرکز در (۵, ۵)، یکی از کانونها در (۳/۴, ۵)، و یک رأس در (۱, ۵) است.
۸. مرکز در (۳, ۴)، نیم‌محورها بطولهای ۳ و ۴، و محور اطول موازی محور x است.

۹. همان شرائط تمرین ۸ با این تفاوت که محور اطول موازی محور y است.

۱۰. رئوس در (۲, ۱) و (۲, ۷) و محور اقصر بطول ۲ است.

۱۱. رئوس در (۲, ۳) و (۲, ۱۳) و کانونها در (۲, ۴) و (۲, ۱۲) اند.

۱۲. مرکز در (۲, ۱)، محور اطول موازی محور x ، و منحنی از نقاط (۱, ۶) و (۲, ۳) می‌گذرد.

هر یک از معادلات تمرینهای ۱۳ تا ۱۸ نمایش یک هذلولی است. مختصات مرکز، کانونها، و رئوس آن را پیدا کنید. هرمنحنی را رسم کرده و طرز قرار گرفتن مجانبها را نشان دهید. همچنین خروج از مرکز را محاسبه نمایید.

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{64} = 1 \quad ۱۴ \quad \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad ۱۳$$

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \quad ۱۶ \quad \frac{(x+3)^2}{4} - (y-3)^2 = 1 \quad ۱۵$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \quad ۱۸ \quad .4x^2 - 5y^2 + 20 = 0 \quad ۱۷$$

در هر یک از تمرینات ۱۹ تا ۲۳ یک معادلهٔ دکارتی (بشکل متعارف مناسب) برای هذلولی بیابید که در شرائط قید شده صدق می‌کند. هر منحنی را کشیده و طرز قرار گرفتن مجانبها را نشان دهید.

۱۹. مرکز در $(0, 0)$ ، یکی از کانونها در $(4, 0)$ ، و یکی از رئوس در $(2, 0)$ است.
 ۲۰. کانونها در $(0, \pm\sqrt{2})$ و رئوس در $(0, \pm 1)$ اند.
 ۲۱. رئوس در $(\pm 2, 0)$ و مجانبها $y = \pm 2x$ می‌اند.
 ۲۲. مرکز در $(-1, 4)$ ، یکی از کانونها در $(-1, 2)$ ، و یکی از رئوس در $(-1, 3)$ است.

۲۳. مرکز در $(2, -3)$ است، محور مقاطع با یکی از محورهای مختصات موازی است، و منحنی از نقاط $(3, -1)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرد.

۲۴. بازای چه مقدار (یا مقادیری) از C خط $3x - 2y = C$ بر هذلولی $x^2 - 3y^2 = 1$ مماس است؟

۲۵. مجانبهای یک هذلولی خطوط $2x - y = 0$ و $2x + y = 0$ می‌باشند. معادلهٔ دکارتی آن را در صورتی بیابید که منحنی از نقطهٔ $(3, -5)$ گذشته باشد.

هر یک از معادلات تمرینهای ۲۶ تا ۳۱ نمایش یک سهمی است. مختصات رأس، معادله‌ای برای خط هادی، و یک معادله برای محور پیدا کنید. هر یک از منحنیها را رسم نمایید.

$$y^2 = -8x \quad ۲۶. \quad y^2 = 3x \quad ۲۷.$$

$$x^2 = 6y \quad ۲۸. \quad (y-1)^2 = 12x - 6 \quad ۲۹.$$

$$x^2 + 8y = 0 \quad ۳۰. \quad (x+2)^2 = 4y + 9 \quad ۳۱.$$

در هر یک از تمرینات ۳۲ تا ۳۷ یک معادلهٔ دکارتی (بشکل متعارف مناسب) برای سهمیی بیابید که در شرائط قید شده صدق می‌کند و منحنی را رسم نمایید.

۳۲. کانون در $(0, -1/4)$ بوده و معادلهٔ خط هادی $y = 1/4$ است.

۳۳. رأس در $(0, 0)$ بوده و معادلهٔ خط هادی $x = -2$ است.

۳۴. رأس در $(-4, 3)$ بوده و کانون در $(-4, 1)$ است.

۳۵. کانون در $(3, -1)$ بوده و معادلهٔ خط هادی $x = 1/2$ است.

۳۶. محور موازی محور y است و سهمی از نقاط $(0, 1)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، و $(2, 0)$ می‌گذرد.

۳۷. محور موازی محور x است، رأس در $(1, 3)$ می‌باشد، و سهمی از $(-1, -1)$ می‌گذرد.

۳۸. مستقیماً از تعریف کانونی شروع کرده و برای سهمیی که کانونش در مبدأ و خط هادیش $10 = 2x + y$ است یک معادلهٔ دکارتی پیدا کنید.

۲۵.۱۳ تمرینات متفرقه در باب مقاطع مخروطی

۱. نشان دهید که مساحت ناحیهٔ داخل بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ مساوی ab برابر

مساحت دایره‌ای بشعاع یک است.

توجه: این حکم را می‌توان با استفاده از خواص عمومی انتگرال وبدون انتگرالگیری ثابت کرد.

۲. (الف) نشان دهید که حجم جسم دوار حاصل ازدوران بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ حول محور طولش ab^2 برابر حجم یک کره یکه است.

توجه: این حکم را می‌توان با استفاده از خواص عمومی انتگرال وبدون انتگرالگیری ثابت کرد.

(ب) اگر بیضی حول محور اقصر خود بچرخد نتیجه چه صورتی خواهد داشت؟

۳. کلیه اعداد مثبت A و B را پیدا کنید که $A > B$ و مساحت ناحیه داخل بیضی $Ax^2 + By^2 = 3$ مساوی مساحت ناحیه داخل بیضی

$$(A+B)x^2 + (A-B)y^2 = 3$$

باشد.

۴. یک طاق سهمی شکل قاعده‌ای بطول b و ارتفاع h دارد. مساحت ناحیه بین سهمی و قاعده طاق را محاسبه کنید.

۵. ناحیه بین سهمی $8x = y^2$ و خط $x = 2$ حول محور x دوران می‌کند. حجم جسم دوار تولید شده را محاسبه نمایید.

۶. دو سهمی با معادلات $y^2 = 2(x-1)$ و $y^2 = 2(x-2)$ ناحیه مسطح R را در بر می‌گیرند.

(الف) مساحت R را با انتگرالگیری حساب کنید.

(ب) حجم جسم دوار حاصل از چرخش R حول محور x را بیابید.

(پ) قسمت (ب) را در حالی حل کنید که R حول محور y چرخیده باشد.

۷. معادله دکارتی مقطع مخروطی را بیابید که از تمام نقاط (x, y) تشکیل شده که فاصله‌شان تا نقطه $(2, 0)$ نصف فاصله آنها از خط $y = 8$ است.

۸. معادله دکارتی سهمی را بیابید که کانونش در مبدأ و خط هادیش $x + y + 1 = 0$ است.

۹. معادله دکارتی هذلولی را بیابید که از مبدأ گذشته و مجانبهای آن خطوط $y = 2x + 1$ و $y = -2x + 3$ می‌باشند.

۱۰. (الف) معادله $p^2 + 2py = px^2 + (p+2)y^2$ برای هر $p > 0$ نمایش یک بیضی است. خروج از مرکز و مختصات کانونها را (برحسب p) پیدا کنید.

(ب) معادله دکارتی هذلولی را بیابید که همان کانونهای بیضی قسمت (الف) را داشته و خروج از مرکزش $1/\sqrt{3}$ باشد.

۱۱. در بخش ۲۲.۱۳ ثابت کردیم که یک مخروطی متقارن نسبت به مبدأ در معادله $\|X - F\| = |eX \cdot N - a|$ صدق می‌کند که در آن $a = ed + eF \cdot N$. با استفاده از این رابطه ثابت کنید که اگر مخروطی بیضی باشد

$$\|X - F\| + \|X + F\| = 2a.$$

بعبارت دیگر، مجموع فواصل هر نقطه بیضی تا کانونهایش برابر مقدار ثابتی است.

۱۲. به تمرین ۱۱ باز می‌گردیم. ثابت کنید که برهر شاخهٔ هذلولی تفاضل

$$\|X - F\| - \|X + F\|$$

ثابت است.

۱۳. (الف) ثابت کنید که هر تبدیل تشابه (که x را به tx و y را به ty می‌برد) یک بیضی بمرکز مبدأ را به بیضی دیگری با همان خروج از مرکز خواهد برد. بعبارت دیگر، بیضیهای متشابه دارای یک خروج از مرکزند.

(ب) عکس این مطلب را نیز ثابت کنید. یعنی ثابت کنید که هرگاه دو بیضی متحدالمرکز دارای یک خروج از مرکز بوده و محورهای اطولشان بر یک خط واقع باشند آنگاه این بیضیها با یک تبدیل تشابه بهم مربوط می‌شوند.

(پ) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را برای هذلولیها ثابت کنید.

۱۴. با استفاده از معادلهٔ دکارتی نمایش کلیهٔ مخروطیها با خروج از مرکز e و بمرکز مبدأ، ثابت کنید این مخروطیها منحنیهای انتگرال معادلهٔ دیفرانسیل $x/y = (e^2 - 1)x'/y'$ می‌باشند.

توجه: چون این یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن است (بخش ۲۵.۸) پس مجموعهٔ تمام این مخروطیها با خروج از مرکز تحت هر تبدیل تشابه پایا است. (قس. تمرین ۱۳.)

۱۵. (الف) ثابت کنید که دستهٔ همهٔ سهمیها تحت یک تبدیل تشابه پایا است. یعنی هر تبدیل تشابه یک سهمی را به سهمی دیگر می‌برد.

(ب) کلیهٔ سهمیهای متشابه با $x^2 = y$ را پیدا کنید.

۱۶. خط $0 = 4 - y + x = x - y + 4$ بر سهمی $x^2 = 4y$ مماس است. نقطهٔ تماس را بیابید.

۱۷. (الف) $a \neq 0$ داده شده است. اگر دو سهمی $y^2 = 4p(x - a)$ و $x^2 = 4qy$ برهم مماس باشند نشان دهید که مختص x نقطهٔ تماس فقط توسط a مشخص می‌شود.

(ب) برای a, p, q شرایطی ذکر کنید که مبین مماس بودن دو سهمی فوق باشند.

۱۸. مکان هندسی نقاطی چون P را در صفحه در نظر بگیرید که فاصلهٔ P از نقطهٔ $(3, 2)$ مساوی مجموع فواصل P از دو محور مختصات باشد.

(الف) نشان دهید که قسمتی از این مکان که در ربع اول است بخشی از یک هذلولی می‌باشد. مجانبها را تعیین و شکل را رسم کنید.

(ب) نمودار مکان هندسی را در سایر ربعها رسم نمائید.

۱۹. دوسهمی دارای یک کانون و یک محورند لکن رئوس آنها در دوطرف کانون واقع

شده‌اند. ثابت کنید این سهمیها متعامداً یکدیگر را قطع می‌کنند (یعنی خطوط مماس بر آنها در نقاط تقاطع برهم عمود می‌باشند).
۲۰. (الف) ثابت کنید که معادلهٔ دکارتی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

نمایش کلیهٔ مخروطیهای متقارن نسبت به مبدأ است که کانونهایشان در $(0, c)$ و $(0, -c)$ قرار دارند.

(ب) c را ثابت گرفته و S را مجموعهٔ کلیهٔ مخروطیهای فوق بپندارید که از تغییر a^2 روی تمام اعداد مثبت غیر از c^2 بدست می‌آیند. ثابت کنید که هر منحنی در S در معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

صدق می‌کند.

(پ) ثابت کنید که S خود متعامد است، یعنی مجموعهٔ کلیهٔ مسیرهای قائم منحنیهای در S خود S می‌باشد. [دانهانی: در معادلهٔ دیفرانسیل قسمت (ب) y' را با $1/y'$ عوض کنید.]

۲۱. نشان دهید که مکان هندسی مراکز یک خانواده از دایره که همگی از نقطهٔ مفروضی گذشته و بر خط مفروضی مماسند یک سهمی است.

۲۲. نشان دهید که مکان هندسی مراکز یک خانواده از دایره که همگی بر یک دایرهٔ مفروض مماس (خارجی) و نیز بر یک خط داده شده مماس هستند یک سهمی است. (تمرین ۲۱ را می‌توان یک حالت خاص تصور کرد.)

۲۳. (الف) وترى بطول $|c|$ بر محور سهمی $y^2 = 4cx$ عمود رسم شده است. فرض کنید P و Q نقاط برخورد این وتر با سهمی باشند. نشان دهید که بردار از O به P بردار از O به Q عمود است.

(ب) وترى از یک سهمی که از کانون موازی خط هادی رسم شود وتر کانونی نام دارد. ابتدا نشان دهید که طول وتر کانونی دو برابر فاصلهٔ کانون تا خط هادی است، و سپس نشان دهید که مماسهای بر سهمی در دو انتهای وتر کانونی محور سهمی را روی خط هادی قطع می‌کنند.

۲۴. دو نقطهٔ P و Q را نسبت به یک دایره متقارن گویند هرگاه P و Q با مرکز در یک امتداد باشند، مرکز بینشان واقع نشود، و حاصلضرب فواصل آنها تا مرکز مساوی مجذور شعاع دایره باشد. چنانچه Q خط مستقیم $5 - 2y + x$ را بپیماید مکان هندسی نقطهٔ P را که با Q نسبت به دایرهٔ $4 = x^2 + y^2$ متقارن است پیدا کنید.

حساب توابع برداری

۱.۱۴ توابع برداری از یک متغیر حقیقی

در این فصل جبر برداری با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال ترکیب شده و کاربردهائی از آن در مطالعهٔ منحنیها و چند مسئلهٔ مکانیک شرح داده می‌شود. در این بررسی مفهوم تابع برداری پایه و اساس خواهد بود.

تعریف. تابعی که قلمرو آن مجموعهٔ اعداد حقیقی و بردش زیرمجموعه‌ای از فضای n بعدی V_n باشد یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی نامیده می‌شود.

ما با این نوع تابع در فصل ۱۳ برخورد کرده‌ایم. مثلاً خط مار بر نقطهٔ P موازی بردار ناصفر A برد یک تابع برداری X است که بازای هر t حقیقی با

$$X(t) = P + tA$$

داده می‌شود.

توابع برداری با حروف بزرگ لاتین نظیر F, G, X, Y ، و غیره، یا بوسیلهٔ حروف سیاه کوچک f, g ، و مانند اینها، نشان داده می‌شوند. مقدار تابع F در t ، طبق معمول، با $F(t)$ نموده می‌شود. در مثالهایی که ما بررسی می‌کنیم قلمرو F بازه‌ای است که ممکن است حاوی یک یا هر دو نقطهٔ انتهائی بوده و یا اینکه نامتناهی باشد.

۲.۱۴ اعمال جبری. مؤلفه‌ها

از اعمال معمولی جبر برداری می‌توان برای تلفیق دو تابع برداری یا یک تابع برداری با

یک تابع حقیقی استفاده کرد. اگر F و G توابعی برداری و u یک تابع حقیقی باشد بطوری که همه یک قلمرو مشترک داشته باشند، توابع جدید $F + G$ ، uF ، و $F \cdot G$ را با معادلات

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t), (uF)(t) = u(t)F(t), \\ (F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$$

تعریف می‌کنیم. مجموع $F + G$ و حاصلضرب uF برداری هستند حال آنکه حاصلضرب نقطه‌ای $F \cdot G$ حقیقی می‌باشد. چنانچه $F(t)$ و $G(t)$ در فضای سه بعدی باشند می‌توان حاصلضرب خارجی $F \times G$ را نیز با دستور

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$$

تعریف کرد.

عمل ترکیب را نیز می‌توان برای تلفیق توابع برداری با توابع حقیقی بکار گرفت. بعنوان مثال، اگر قلمرو تابع برداری F برد تابع حقیقی u را دربرگیرد ترکیب $G = F \circ u$ تابع برداری جدیدی است که بازای هر t در قلمرو u با معادله

$$G(t) = F[u(t)]$$

تعریف می‌شود.

هرگاه مقادیر تابع F در V_n باشند آنگاه هر بردار $F(t)$ ، n مؤلفه دارد و می‌توانیم بنویسیم

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

بنابراین، هر تابع برداری F ، n تابع حقیقی $f_1, \dots, f_n$ را بدست می‌دهد که مقادیر آنها در t مؤلفه‌های $F(t)$ می‌باشند. ما این رابطه را بصورت $F = (f_1, \dots, f_n)$ نشان داده و f_k را مؤلفه k ام F می‌خوانیم.

۳.۱۴ حدود، مشتقات، و انتگرالها

مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظیر حد، مشتق، و انتگرال، را می‌توان به توابع برداری نیز تعمیم داد. کافی است تابع برداری را بر حسب مؤلفه‌هایش نوشته و اعمال حساب دیفرانسیل و انتگرال را بر مؤلفه‌ها انجام داد.

تعریف. اگر $F = (f_1, \dots, f_n)$ یک تابع برداری باشد حد، مشتق، و انتگرال را با معادلات

$$\lim_{t \rightarrow p} F(t) = (\lim_{t \rightarrow p} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow p} f_n(t)), \\ F'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)),$$

$$\int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right),$$

با این شرط که مؤلفه‌های سمت راست با معنی هستند، تعریف می‌کنیم.

همچنین می‌گوئیم F بر یک بازه پیوسته، مشتقپذیر، یا انتگرالپذیر است هرگاه هر مؤلفه F این خاصیت را بر آن بازه داشته باشد.

با توجه به این تعاریف نباید از اینکه بسیاری از قضایای حدود، پیوستگی، مشتقگیری و انتگرالگیری توابع حقیقی برای توابع برداری نیز معتبرند تعجب کرد. ما چند قضیه را که در این فصل مورد استفاده قرار خواهد گرفت بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰۱۴. هرگاه F, G, u بر یک بازه مشتقپذیر باشند آنگاه $uF, F + G$ و $F \cdot G$ نیز چنین بوده و داریم

$$(F + G)' = F' + G', (uF)' = u'F + uF', (F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'.$$

چنانچه مقادیر F و G در V_p باشند نیز خواهیم داشت

$$(F \times G)' = F' \times G + F \times G'.$$

برهان. برای نشان دادن مسیر طبیعی برهانها، دستور مربوط به $(uF)'$ را مورد بحث قرار می‌دهیم. سایر برهانها مشابه بوده و بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. با نوشتن $F = (f_1, \dots, f_n)$ داریم

$$uF = (uf_1, \dots, uf_n), (uF)' = ((uf_1)', \dots, (uf_n)').$$

اما مشتق مؤلفه k ام uF عبارت است از $(uf_k)' = u'f_k + uf_k'$ پس خواهیم داشت

$$(uF)' = u'(f_1, \dots, f_n) + u(f_1', \dots, f_n') = u'F + uF'.$$

خواننده باید متوجه باشد که دستورهای مشتقگیری قضیه ۱۰۱۴ شبیه دستورهای معمولی مشتقگیری از مجموع یا حاصلضرب توابع حقیقی است. چون ضرب خارجی تعویضپذیر نیست باید در دستور مربوط به $(F \times G)'$ به ترتیب سازها توجه داشت. دستور مشتقگیری از $F \cdot G$ قضیه زیر را بدست می‌دهد که بارها مورد استفاده ما قرار خواهد گرفت.

قضیه ۲۰۱۴. هرگاه تابع برداری F بر بازه I مشتقپذیر بوده و طولش ثابت باشد آنگاه $F \cdot F' = 0$ بر I است. بعبارت دیگر، برای هر t در I ، $F'(t)$ بر $F(t)$ عمود خواهد بود.

برهان. قرار می‌دهیم $\|F(t)\|^2 = F(t) \cdot F(t)$. بنا به فرض g بر I ثابت است، و در نتیجه $g' = 0$ بر I می‌باشد. اما، چون g بصورت ضرب نقطه‌ای است،

لذا داریم $g' = F' \cdot F + F \cdot F' = 2F \cdot F'$ پس $F \cdot F' = 0$ را خواهیم داشت.

قضیه بعدی به توابع مرکب می پردازد. اثبات آن از قضایای ۵.۳ و ۲.۴، که حاوی نتایج متناظر برای توابع حقیقی اند، به سبب سهولت حاصل خواهد شد.

قضیه ۳.۱۴. فرض کنیم $G = F \circ u$ که در آن F برداری و u حقیقی است. هرگاه u در F و $u(t)$ پیوسته باشد آنگاه G در t پیوسته خواهد بود. چنانچه $u'(t)$ و $F'[u(t)]$ وجود داشته باشند $G'(t)$ نیز وجود دارد و از قاعده زنجیره ای

$$G'(t) = F'[u(t)]u'(t)$$

بدست می آید.

هرگاه تابع برداری F بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه هر مؤلفه آن بر $[a, b]$ پیوسته و، در نتیجه، برای بازه انتگرال پذیر است، پس F بر $[a, b]$ انتگرال پذیر خواهد بود. سه قضیه بعدی خواص اساسی انتگرال توابع برداری را بدست می دهند. در هر حالت اثبات بی درنگ از نتایج متناظر آن برای انتگرالهای توابع حقیقی حاصل می شود.

قضیه ۴.۱۴. خطی بودن و جمع پذیری. اگر توابع برداری F و G بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند $c_1 F + c_2 G$ نیز باضای هر c_1 و c_2 چنین است و داریم

$$\int_a^b [c_1 F(t) + c_2 G(t)] dt = c_1 \int_a^b F(t) dt + c_2 \int_a^b G(t) dt.$$

همچنین باضای هر c در $[a, b]$ خواهیم داشت

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^c F(t) dt + \int_c^b F(t) dt.$$

قضیه ۵.۱۴. اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنیم تابع برداری F بر $[a, b]$ پیوسته باشد. اگر $c \in [a, b]$ انتگرال نامعین A را مساوی یک تابع برداری بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$A(x) = \int_c^x F(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

در اینصورت $A'(x)$ وجود دارد و، باضای هر x در (a, b) ، خواهیم داشت $A'(x) = F(x)$.

قضیه ۶.۱۴. دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنیم تابع برداری F بر بازه باز I دارای مشتق پیوسته باشد. در اینصورت باضای هر انتخاب c و x در I خواهیم داشت

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) dt.$$

قضیه بعدی تعمیمی است از خاصیت $\int_a^b cF(t) dt = c \int_a^b F(t) dt$ که در آن ضرب در اسکالر c با ضرب نقطه‌ای در بردار C عوض شده است.

قضیه ۷.۱۴. هرگاه $F = (f_1, \dots, f_n)$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد آنگاه بازای هر بردار $C = (c_1, \dots, c_n)$ حاصلضرب نقطه‌ای $C \cdot F$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است و داریم

$$C \cdot \int_a^b F(t) dt = \int_a^b C \cdot F(t) dt.$$

برهان. چون هر مؤلفه F انتگرالپذیر است خواهیم داشت

$$C \cdot \int_a^b F(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) dt = \int_a^b C \cdot F(t) dt.$$

حال قضیه ۷.۱۴ را همراه با نامساوی کشی-شوارتز بکار برده خاصیت مهم زیر را برای انتگرالهای توابع برداری بدست می‌آوریم.

قضیه ۸.۱۴. اگر F و $\|F\|$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشند داریم

$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt. \quad (۱۰.۱۴)$$

برهان. فرض کنیم $C = \int_a^b F(t) dt$. هرگاه $C = O$ آنگاه (۱۰.۱۴) خودبخود برقرار است. پس فرض می‌کنیم $C \neq O$ و با بکار بردن قضیه ۷.۱۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\|C\|^2 = C \cdot C = C \cdot \int_a^b F(t) dt = \int_a^b C \cdot F(t) dt. \quad (۲۰.۱۴)$$

چون حاصلضرب نقطه‌ای $C \cdot F(t)$ حقیقی است پس نامساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$\int_a^b C \cdot F(t) dt \leq \int_a^b |C \cdot F(t)| dt \leq \int_a^b \|C\| \|F(t)\| dt, \quad (۳۰.۱۴)$$

که در آخرین مرحله از نامساوی کشی-شوارتز، یعنی $|C \cdot F(t)| \leq \|C\| \|F(t)\|$ استفاده کرده‌ایم. از تلفیق (۲۰.۱۴) و (۳۰.۱۴) خواهیم داشت

$$\|C\|^2 \leq \|C\| \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

چون $\|C\| > 0$ می‌توان با تقسیم بر $\|C\|$ به نامساوی (۱۰.۱۴) دست یافت.

۴.۱۴ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۵ مشتقات $F'(t)$ و $F''(t)$ هریک از توابع برداری را حساب کنید.

$$F(t) = (t, t^x, t^y, t^z) \cdot ۱$$

$$F(t) = (\cos t, \sin^x t, \sin^y t, \tan t) \cdot ۲$$

$$F(t) = (\arcsin t, \arccos t) \cdot ۳$$

$$F(t) = ye^t i + ze^t j \cdot ۴$$

$$F(t) = \cosh t i + \sinh^y t j + e^{-zt} k \cdot ۵$$

$$F(t) = \log(1 + t^x) i + \arctan t j + \frac{1}{1 + t^x} k \cdot ۶$$

۷. فرض کنید F یک تابع برداری است که با

$$F(t) = \frac{yt}{1 + t^x} i + \frac{1 - t^x}{1 + t^x} j + k$$

داده شده است. ثابت کنید زاویه بین $F(t)$ و $F'(t)$ ثابت، یعنی مستقل از t ، می باشد.

انتگرالهای برداری تمرینات ۸ تا ۱۱ را حساب کنید.

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t, \cos t, \tan t) dt \cdot ۹ \quad \int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t) dt \cdot ۸$$

$$\int_0^1 (te^t i + t^x e^t j + te^{-t} k) dt \cdot ۱۱ \quad \int_0^1 \left(\frac{e^t}{1 + e^t} i + \frac{1}{1 + e^t} j \right) dt \cdot ۱۰$$

۱۲. $A \cdot B$ را در صورتی محاسبه کنید که $A = yi - yj + k$ و

$$B = \int_0^1 (te^{yt} i + t \cosh^y t j + yt e^{-zt} k) dt.$$

۱۳. بردار ناصفر B و تابع برداری F داده شده اند بطوری که بازای هر t ، $F(t) \cdot B = t$ و زاویه بین $F'(t)$ و B ثابت (مستقل از t) می باشد. ثابت کنید $F''(t)$ به $F(t)$ متعامد است.

۱۴. بازای دوبردار ناصفر A و B قرار دهید $F(t) = e^{yt} A + e^{-zt} B$. ثابت کنید $F''(t)$ با $F(t)$ همجهت است.

۱۵. اگر $G = F \times F'$ ، G' را بر حسب F ومشتقات آن حساب کنید.

۱۶. اگر $G = F \cdot F' \times F''$ ثابت کنید که $G' = F \cdot F' \times F'''$.

۱۷. ثابت کنید $\lim_{t \rightarrow p} F(t) = A$ اگر فقط اگر $\lim_{t \rightarrow p} \|F(t) - A\| = 0$.

۱۸. ثابت کنید تابع برداری F بر بازه I مشتقپذیر است اگر فقط اگر بازای هر t در I داشته باشیم

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(t+h) - F(t)].$$

۱۹. قضیه مشتق صفر را برای توابع برداری ثابت کنید: هرگاه بازای هر t در بازه I باز $F(t) = C$ ، $F'(t) = 0$ ، آنگاه برداری مانند C هست که بازای هر t در I ، $F(t) = C$.

۲۰. اگر بردارهای ثابت A و B و تابع برداری F چنان باشند که $F(t) = tA + B$ ، $F'(t) = A + B$ ، $F(0) = D$ و $F'(0) = C$ را در صورتی معین کنید که $F(0) = D$ و $F'(0) = C$.

۲۱. یک معادله دیفرانسیل بشکل $Y'(x) + p(x)Y(x) = Q(x)$ که در آن p یک تابع حقیقی معلوم، Q یک تابع برداری داده شده، و Y تابع برداری مجهولی باشد یک معادله دیفرانسیل برداری خطی مرتبه اول نامیده می شود. ثابت کنید هرگاه p و Q بر بازه I پیوسته باشند آنگاه، بازای هر a در I و هر بردار B ، یک و فقط یک جواب Y وجود دارد که در شرط اولیه $Y(a) = B$ صدق می کند، و این جواب با دستور

$$Y(t) = Be^{-q(t)} + e^{-q(t)} \int_a^t Q(x) e^{q(x)} dx$$

بیان می شود که در آن $q(x) = \int_a^x p(t) dt$.

۲۲. تابع برداری F بازای هر $t \geq 0$ در معادله $tF'(t) = F(t) + tA$ صدق می کند که در آن A یک بردار ثابت است. اگر $F(1) = 2A$ ، $F'(1) = A$ و $F(3) = A$ را بر حسب A حساب کنید.

۲۳. تابع برداری F ، که بر بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است، را طوری پیدا کنید که بازای هر $x > 0$

$$F(x) = x e^x A + \frac{1}{x} \int_1^x F(t) dt$$

که در آن A بردار ناصفر ثابتی باشد.

۲۴. تابع برداری F ، که هرگز صفر نبوده و بازای هر t دارای مشتق پیوسته $F'(t)$ می باشد، همیشه با مشتق خود موازی است. ثابت کنید بردار ثابت A و تابع حقیقی و مثبت u وجود دارند بطوری که بازای هر t ، $F(t) = u(t)A$.

۵.۱۴ کاربرد در منحنیها، تماس

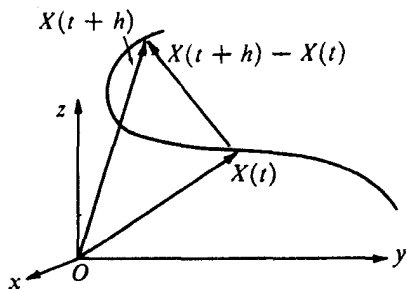
فرض کنیم X یک تابع برداری باشد که قلمروش بازه ای چون I است. وقتی t در I تغییر می کند مقادیر تابعی متناظر $X(t)$ مجموعه ای از نقاط را می پیمایند که ما آن را نمودار تابع X می نامیم. اگر مقادیر تابع در فضای دوبعدی یا سه بعدی باشند نمودار را می توان بطور هندسی تجسم کرد. بعنوان مثال، اگر $X(t) = P + tA$ که در آن P و A بردارهای ثابتی در V_3 بوده و $A \neq 0$ ، نمودار X یک خط راست مار بر P موازی A خواهد بود. شکل ۱.۱۴ نشان می دهد که یک تابع کلیتر نمودار کلیتری رسم خواهد کرد. اگر X بر I پیوسته باشد نمودار آن یک منحنی نامیده می شود؛ بطور دقیقتر، می گوئیم این منحنی بوسیله X توصیف می شود. گاهی اوقات می گوئیم منحنی بطور پادامتری بوسیله X توصیف می شود.

بازه I را یک بازه پادامتری می نامند؛ هر t در I یک پادامتر خوانده خواهد شد. می توان از خواص تابع X برای تحقیق در خواص هندسی نمودار آن استفاده کرد. بخصوص، مثل حالت یک تابع حقیقی، X' با مفهوم تماس در ارتباط است. ما خارج قسمت تفاضلی

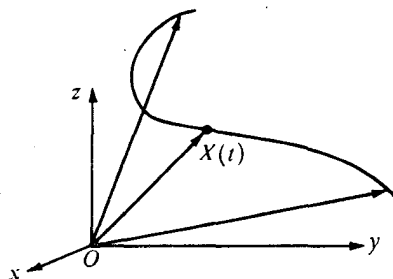
$$(۴.۱۴) \quad \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

را تشکیل داده و رفتار آن را، وقتی $h \rightarrow 0$ ، تحقیق می کنیم. این کسر حاصل ضرب بردار $X(t+h) - X(t)$ در اسکالر $1/h$ است. صورت، یعنی $X(t+h) - X(t)$ ، که در شکل ۲.۱۴ بطور هندسی نموده شده، موازی بردار (۴.۱۴) می باشد. اگر این خارج-قسمت تفاضلی را برحسب مؤلفه هایش بیان کرده و h را به ۰ میل دهیم، با فرض وجود $X'(t)$ ، در خواهیم یافت که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X'(t).$$



شکل ۲.۱۴ بردار $X(t+h) - X(t)$ موازی $[X(t+h) - X(t)]/h$ است.



شکل ۱.۱۴ منحنی رسم شده بوسیله بردار $X(t)$.

تعبیر هندسی این رابطه تعریف زیر را پیشنهاد می کند.

تعریف. فرض کنیم C یک منحنی توصیف شده بوسیله تابع برداری وپیوسته X باشد. اگر $X'(t)$ موجود وناصفر باشد خط (است مار بر $X(t)$ و موازی $X'(t)$ خط مماس بر C در $X(t)$ نامیده می شود. بردار $X'(t)$ را بردار مماس بر C در $X(t)$ می نامیم.

مثال ۱. خط (است. برای خطی بمعادله $X(t) = P + tA$ که در آن $A \neq 0$ داریم $X'(t) = A$ ، پس خط مماس در هر نقطه بر نمودار X منطبق است، خاصیتی که واقعاً خواستار آن هستیم.

مثال ۲. دایره. هرگاه X دایره‌ای بشعاع a و مرکز P را توصیف کند آنگاه، بازای هر t ، $\|X(t) - P\| = a$. بردار $X(t) - P$ یک بردار شعاع نامیده می‌شود؛ این بردار را می‌توان بطور هندسی با یک سهم از مرکز به نقطه $X(t)$ نمایش داد. چون بردار شعاع طولش ثابت است قضیه ۲.۱۴ به ما می‌گوید که بر مشتق خود عمود بوده و، در نتیجه، بر خط مماس عمود خواهد بود. لذا، در مورد دایره، تعریف ما از تماس با تعریفی که در هندسه مسطحه مقدماتی داده شده مطابقت خواهد داشت.

مثال ۳. پایانی تحت تغییر پارامتر. توابع مختلف می‌توانند یک نمودار داشته باشند. مثلاً فرض کنیم X یک تابع برداری پیوسته باشد که بر بازه I تعریف شده است و u را یک تابع حقیقی می‌انگاریم که مشتقپذیر بوده و u' هرگز بر بازه J صفر نمی‌شود و همچنین برد u مساوی I می‌باشد. در اینصورت تابع Y ، که بر J با معادله

$$Y(t) = X[u(t)]$$

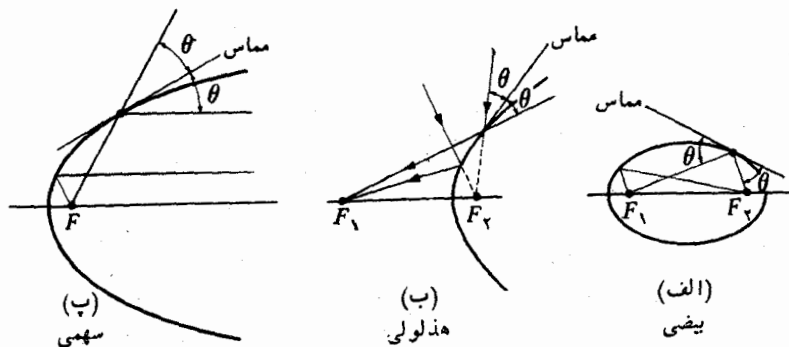
تعریف می‌شود، یک تابع برداری پیوسته است که نمودارش با نمودار X یکی است. دو تابع X و Y که این طور بهم مربوط شوند هم‌انداز نامیده می‌شوند. گوئیم اینها نمایشهای پارامتری متفاوت یک منحنی هستند. تابع u معرف یک تغییر پارامتر خواهد بود.

مهمترین مفاهیم هندسی مربوط به یک منحنی آنهایی هستند که تحت هر تغییر پارامتر پایا می‌مانند. مثلاً باسانی ثابت می‌شود که خط مماس پایا است. اگر $X'[u(t)]$ وجود داشته باشد قاعده زنجیره‌ای نشان می‌دهد که $Y'(t)$ نیز وجود داشته و با دستور

$$Y'(t) = X'[u(t)]u'(t)$$

داده می‌شود. $u'(t)$ هرگز صفر نیست. هرگاه $X'[u(t)]$ ناصفر باشد آنگاه $Y'(t)$ نیز ناصفر است، پس $Y'(t)$ موازی $X'[u(t)]$ خواهد بود. بنابراین، هر دو نمایش X و Y در هر نقطه منحنی یک خط مماس را بدست می‌دهند.

مثال ۴. خواص انعکاسی مقاطع مخروطی. مقاطع مخروطی دارای خواص انعکاسی



شکل ۳.۱۴ خواص انعکاسی مقاطع مخروطی.

هستند که اغلب در ساختن وسایل نوری و صوتی از آنها استفاده می شود. همانطور که شکل ۳.۱۴ (الف) نشان داده، اشعه نور که از یک کانون آینه ای بیضی صادر می شوند در کانون دیگر جمع می گردند. اشعه ای که بسوی یکی از کانونهای آینه ای هذلولوی بروند در کانون دیگر، مانند شکل ۳.۱۴ (ب)، جمع می شوند. در یک آینه سهموی، مانند شکل ۳.۱۴ (پ)، اشعه موازی محور در کانون جمع خواهند شد. برای اثبات این خواص انعکاسی باید ثابت کنیم که در هر یک از اشکال زوایائی که با θ مشخص شده اند مساویند. ما این عمل را برای بیضی و هذلولی انجام داده و از خواننده می خواهیم که برهانی برای سهمی ارائه دهد.

کانون F_1 را در مبدأ گذارده و فرض می کنیم اگر X نقطه دلخواهی از مخروطی باشد $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ بردارهای یکه ای باشند که بترتیب با X و $X - F_2$ همجهت هستند. (ر.ک. شکل ۴.۱۴). چنانچه $d_1 = \|X\|$ و $d_2 = \|X - F_2\|$ بترتیب فواصل کانونی X از کانونهای F_1 و F_2 باشند خواهیم داشت

$$X = d_1 \mathbf{u}_1 + F_2 \quad \text{و} \quad X = d_2 \mathbf{u}_2$$

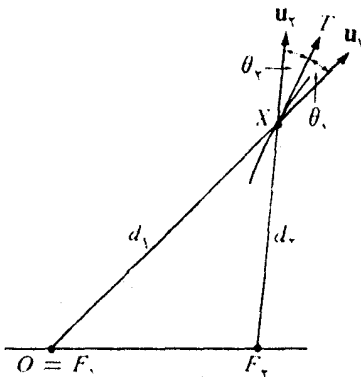
حال X ، $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ ، d_1 و d_2 را بعنوان توابعی می انگاریم که بر بازه ای از اعداد حقیقی تعریف شده اند. مشتقات آنها با معادلات

$$(5.14) \quad X' = d_1' \mathbf{u}_1 + d_1 \mathbf{u}_1', \quad X' = d_2' \mathbf{u}_2 + d_2 \mathbf{u}_2'$$

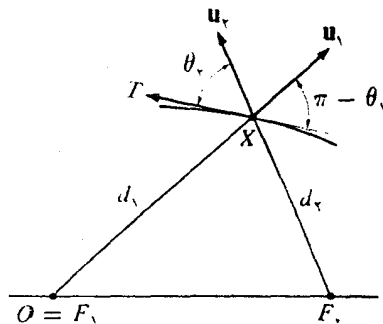
بهم مربوط می شوند. چون طولهای $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ ثابتند هر یک بر مشتق خود عمود است، در نتیجه از معادلات (۵.۱۴) خواهیم داشت $X' \cdot \mathbf{u}_1 = d_1'$ و $X' \cdot \mathbf{u}_2 = d_2'$. با جمع و تفریق این روابط درمی یابیم که

$$(6.14) \quad X' \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = d_1' + d_2', \quad X' \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = d_1' - d_2'.$$

$d_1 + d_2$ بر بیضی ثابت است، در نتیجه $d_1' + d_2' = 0$. بر هر شاخه هذلولی $d_1 - d_2$



(ب) بر هذلولی $\theta_2 = \theta_1$



(الف) بر بیضی $\theta_2 = \pi - \theta_1$

شکل ۴.۱۴ برهانهای خواص انعکاسی بیضی و هذلولی.

ثابت است، پس $d'_\gamma - d'_\alpha = 0$. بنابراین، معادله (۶.۱۴) نتیجه می‌دهد که

$$X' \cdot (u_\alpha + u_\gamma) = 0 \text{ و } X' \cdot (u_\alpha - u_\gamma) = 0.$$

فرض می‌کنیم $T = X' / \|X'\|$ بردار یک‌ای همجهت X' باشد. پس T بر مخروطی مماس است و چنین خواهیم داشت:

$$\text{بریزی } T \cdot u_\gamma = -T \cdot u_\alpha \text{ و } T \cdot u_\alpha = T \cdot u_\gamma.$$

اگر θ_α و θ_γ بترتیب زوایائی باشند که T با u_α و u_γ می‌سازد و $0 \leq \theta_\alpha \leq \pi$ و $0 \leq \theta_\gamma \leq \pi$ ، این دو معادله آخر نشان می‌دهند که

$$\text{بریزی } \cos \theta_\gamma = -\cos \theta_\alpha \text{ و } \cos \theta_\gamma = \cos \theta_\alpha.$$

لذا،

$$\text{بریزی } \theta_\gamma = \pi - \theta_\alpha \text{ و } \theta_\gamma = \theta_\alpha.$$

این روابط بین زوایای θ_α و θ_γ خواص انعکاسی بیضی و هذلولی را بدست می‌دهند.

۶.۱۴ کاربردهائی در حرکت منحنی الخط. سرعت، تندی، و شتاب

فرض کنیم جسمی در فضای دوبعدی یا سه بعدی طوری حرکت می‌کند که جای آن در لحظه t نسبت به یک دستگاه مختصات با بردار $X(t)$ مشخص می‌شود. وقتی t در یک فاصله زمانی تغییر می‌کند مسیر طی شده بوسیله جسم همان نمودار X می‌باشد. بنابراین، تابع برداری X طبعاً یک نمونه ریاضی است که حرکت را توصیف می‌کند. ما X را تابع مکان حرکت می‌نامیم. مفاهیم فیزیکی نظیر سرعت، تندی، و شتاب را می‌توان برحسب مشتقات تابع مکان تعریف کرد.

در بحث زیر، بی آنکه هربار ذکر کنیم، فرض می‌کنیم تابع مکان از هر مرتبه که لازم باشد مشتق دارد.

تعریف. حرکتی را دد نظرمی‌گیریم که بوسیله تابع برداری X توصیف می‌شود. $X'(t)$ را بردار سرعت در لحظه t می‌نامیم. طول بردار سرعت، یعنی $\|X'(t)\|$ ، تندی نام دارد. مشتق دوم بردار مکان، یعنی $X''(t)$ ، بردار شتاب خوانده می‌شود.

نمادگذاری. گاهی اوقات تابع مکان X را با r ، بردار سرعت را با v ، تندی را با v ، و شتاب را با a نشان می‌دهیم. بنابراین

$$a = v' = r'', \text{ و } v = \|v\|, v = r'$$

اگر بردار سرعت $X'(t)$ بصورت یک بردار هندسی تجسم شود که در $X(t)$ به منحنی متصل شده است خواهیم دید که این بردار در امتداد خط مماس قرار دارد. استفاده

از کلمه «تندی» برای طول بردار سرعت در بخش ۱۲.۱۴ توجیه می شود که نشان می دهیم تندی میزان تغییر طول قوس در امتداد منحنی است. این چیزی است که سرعت سنج یک اتومبیل اندازه می گیرد. بنابراین، طول بردار سرعت به ما میزان تندی حرکت جسم را در هر لحظه بازگو می کند و جهت آن به ما جهت رفتش را نشان خواهد داد. اگر تندی یا جهت حرکت (و یا هر دو) را تغییر دهیم سرعت تغییر خواهد کرد. بردار شتاب این تغییر را اندازه می گیرد. اثر شتاب وقتی احساس می شود که اتومبیل تندی و یا جهتش را تغییر می دهد. بردار شتاب مثل بردار سرعت نیست که لزوماً در امتداد خط مماس باشد.

مثال ۱. حرکت خطی. حرکتی را در نظر می گیریم که بردار مکان آن با

$$\mathbf{r}(t) = P + f(t)A$$

داده شده است که در آن P و A بردارهای ثابتی بوده و $A \neq O$. این حرکت در امتداد خط مار بر P موازی A صورت می گیرد. سرعت، تندی، و شتاب از این روابط بدست می آیند:

$$\mathbf{v}(t) = f'(t)A, v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = |f'(t)| \|A\|, \mathbf{a}(t) = f''(t)A.$$

اگر $f'(t)$ و $f''(t)$ صفر نباشند بردار شتاب موازی بردار سرعت خواهد بود.

مثال ۲. حرکت مستدیر. اگر نقطه (x, y) در V_p با مختصات قطبی اش r و θ نموده شود خواهیم داشت

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta.$$

چنانچه r ثابت باشد، مثلاً $r = a$ ، و θ روی بازه ای بطول لااقل 2π تغییر کند نقطه متناظر (x, y) دایره ای بشعاع a و بمرکز مبدأ را طی خواهد نمود. اگر θ را تابعی از زمان t بگیریم، مثلاً $\theta = f(t)$ ، حرکتی خواهیم داشت که تابع مکان آن چنین است:

$$\mathbf{r}(t) = a \cos f(t) \mathbf{i} + a \sin f(t) \mathbf{j}.$$

بردار سرعت متناظر عبارت است از

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -af'(t) \sin f(t) \mathbf{i} + af'(t) \cos f(t) \mathbf{j}$$

که از آن درمی یابیم که تندی در لحظه t مساوی

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = a|f'(t)|$$

می باشد. سازه $|f'(t)| = |d\theta/dt|$ را تندی زاویه ای جسم می نامند.

یک حالت خاص و مهم وقتی است که $\theta = \omega t$ که در آن ω (امگا) یک ثابت مثبت می باشد. در این حالت جسم در لحظه $t = 0$ از نقطه $(a, 0)$ حرکت کرده و با تندی زاویه ای ثابت ω و در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت دور دایره می گردد. دستورهای مربوط به مکان، سرعت، و تندی باین صورت خواهند بود:

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j},$$

$$\mathbf{v}(t) = -\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + \omega a \cos \omega t \mathbf{j}, \quad v(t) = a\omega.$$

بردار شتاب عبارت است از

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 a \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 a \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}(t),$$

که نشان می‌دهد که شتاب همیشه در جهت مخالف بردار مکان می‌باشد. چنانچه آن را بصورت یک بردار هندسی در محل جسم تجسم کنیم بردار شتاب یک بردار بطرف مرکز دایره خواهد بود. باین دلیل است که این شتاب را مایل به مرکز یا «طالب مرکز» می‌نامند، اصطلاحی که اول بار توسط نیوتن پیشنهاد شد.

توجه: اگر یک جسم متحرک بجرم m باشد بنا به قانون دوم حرکت نیوتن نیروی وارد بر آن (بخاطر شتاب) مساوی بردار $m\mathbf{a}(t)$ است، یعنی جرم ضربدر شتاب. چنانچه حرکت جسم بر یک دایره با تندی زاویه‌ای ثابتی صورت گیرد این را نیروی مایل به مرکز می‌نامند زیرا جهت آن بطرف مرکز است. این نیرو بوسیله مکانیسمی اعمال می‌شود که جسم را در یک مدار مستدیر نگه می‌دارد. این مکانیسم در پرتاب سنگ با یک فلاخن (دیسمان و در حرکت یک ماهواره بدور زمین جاذبه ثقل است. عکس العمل مساوی و مخالف (طبق قانون سوم نیوتن)، یعنی نیروی $-m\mathbf{a}(t)$ ، نیروی گریز از مرکز و یا «فرار از مرکز» نامیده می‌شود.

مثال ۳. حرکت بر دایره بیضی. شکل ۵.۱۴ یک بیضی بمعادله دکارتی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

و دو دایره متحدالمرکز بشعاعهای a و b را نشان می‌دهد. زاویه θ که در شکل دیده می‌شود زاویه خروج از مرکز نام دارد. این زاویه با معادلات

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

به مختصات (x, y) یک نقطه از بیضی مربوط می‌شود. وقتی θ روی بازه‌ای بطول 2π تغییر می‌کند نقطه متناظر (x, y) بیضی را خواهد پیمود. اگر θ را تابعی از زمان t بگیریم، مثلا $\theta = f(t)$ ، حرکتی را خواهیم داشت که با تابع مکان

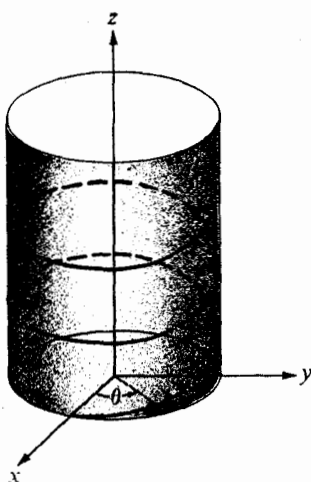
$$\mathbf{r}(t) = a \cos f(t) \mathbf{i} + b \sin f(t) \mathbf{j}$$

مشخص می‌شود. چنانچه $\omega t = \theta$ ، که در آن ω ثابت مثبتی است، سرعت، تندی، و شتاب از این روابط بدست می‌آیند:

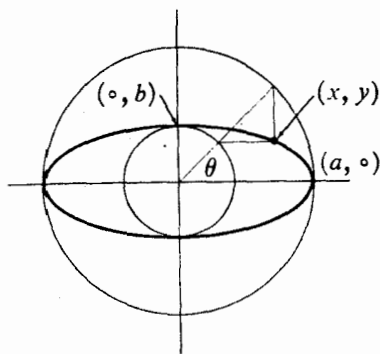
$$\mathbf{v}(t) = \omega(-a \sin \omega t \mathbf{i} + b \cos \omega t \mathbf{j}),$$

$$v(t) = \omega(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2},$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2(a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$



شکل ۶.۱۴ حرکت بریک مارپیچ.



شکل ۵.۱۴ حرکت بریک بیضی.

بنا بر این وقتی یک جسم بریک بیضی طوری حرکت کند که زاویه خروج از مرکز آن بمیزان ثابتی تغییر نماید شتاب مایل به مرکز خواهد بود.

مثال ۴. حرکت بریک مارپیچ. اگر نقطه (x, y, z) حول محور z و بفاصله ثابت a از آن بگردد و بطور همزمان بموازات محور z طوری حرکت کند که مؤلفه z آن با زاویه دوران متناسب باشد منحنی حاصل را یک مارپیچ مستدیر می نامند. مثالی در شکل ۶.۱۴ نشان داده شده است. اگر θ زاویه دوران باشد خواهیم داشت

$$(۷.۱۴) \quad x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b\theta$$

که در آنها $a > 0$ و $b \neq 0$. وقتی θ از ۰ تا 2π تغییر کند مختصات x و y به مقادیر اولیه خود برمی گردند حال آنکه z از ۰ تا $2\pi b$ تغییر خواهد کرد. عدد $2\pi b$ را اغلب پای مارپیچ می نامند.

حال فرض کنیم $\theta = \omega t$ که در آن ω ثابت است. در این صورت حرکت بر مارپیچ بوسیله بردار مکان

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + b\omega t \mathbf{k}$$

توصیف خواهد شد. بردارهای سرعت و شتاب متناظر عبارتند از

$$\mathbf{v}(t) = -\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + \omega a \cos \omega t \mathbf{j} + b\omega \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2(a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}).$$

در نتیجه وقتی بردار شتاب بر مارپیچ قرار گیرد برداری موازی صفحه xy بوده و بطرف محور z می باشد.

اگر θ را از دو معادله اول (۷.۱۴) حذف کنیم معادله دکارتی $x^2 + y^2 = a^2$ را بدست می آوریم که معادله یک دایره در صفحه xy است. اما این معادله در فضای سه بعدی یک سطح را نمایش می دهد. نقطه (x, y, z) در این معادله صدق می کند اگر و فقط اگر فاصله اش از محور z مساوی a باشد. مجموعه کلیه این نقاط استوانه مستدیر قائمی است بشاع a که محورش در امتداد محور z می باشد. مارپیچ دور این استوانه می پیچد.

۷.۱۴ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۶، $\mathbf{r}(t)$ نمایش بردار مکان یک جسم متحرک در لحظه t بر یک منحنی فضائی است. در هر حالت سرعت $\mathbf{v}(t)$ و شتاب $\mathbf{a}(t)$ را بر حسب $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ مشخص کنید؛ همچنین تندی $v(t)$ را محاسبه نمایید.

$$\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k} \quad ۱$$

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \quad ۲$$

$$\mathbf{r}(t) = 3t \cos t \mathbf{i} + 3t \sin t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k} \quad ۳$$

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + 4 \sin \frac{t}{4} \mathbf{k} \quad ۴$$

$$\mathbf{r}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + 2t^3 \mathbf{j} + 3t \mathbf{k} \quad ۵$$

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + (1 - \cos t) \mathbf{k} \quad ۶$$

۷. مارپیچی را در نظر بگیرید که بوسیله معادله برداری

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + b \omega t \mathbf{k}$$

بیان شده که در آن ω یک ثابت مثبت می باشد. ثابت کنید که خط مماس با محور z زاویه ثابتی می سازد که کسینوس آن $b/\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

۸. در ارتباط با مارپیچ تمرین ۷، ثابت کنید که سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ بردارهایی بطول ثابت هستند و

$$\frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

۹. در ارتباط با تمرین ۷، فرض کنید $\mathbf{u}(t)$ برداریکه $\mathbf{u}(t) = \sin \omega t \mathbf{i} - \cos \omega t \mathbf{j}$ باشد. نشان دهید که دو ثابت A و B وجود دارند بطوری که $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = A\mathbf{u}(t) + B\mathbf{k}$ و A و B را بر حسب a, b ، و ω بیان نمایید.

۱۰. ثابت کنید که در هر حرکت حاصلضرب نقطه ای سرعت و شتاب نصف مشتق مجذور تندی است:

$$v(t) \cdot a(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2(t).$$

۱۱. فرض کنید c برداریکه ثابتی باشد. یک جسم در فضا طوری حرکت می‌کند که بردار مکانش $r(t)$ در معادله $r(t) \cdot c = e^{2t}$ بازای هر t صدق می‌کند و بردار سرعتش $v(t)$ با c زاویه ثابت θ را می‌سازد که $0 < \theta < \pi/2$ است.
(الف) ثابت کنید که تندی در لحظه t مساوی $2e^{2t}/\cos \theta$ است.
(ب) حاصلضرب نقطه‌ای $a(t) \cdot v(t)$ را بر حسب t و θ حساب کنید.

۱۲. اتحاد $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ برای توابع هذلولوی این فکر را پیش می‌آورد که ممکن است هذلولوی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ را با معادلات پارامتری

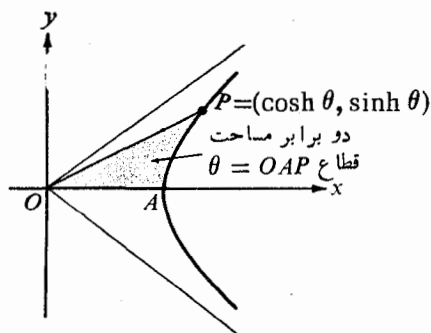
$$x = a \cosh \theta, y = b \sinh \theta$$

یا، عبارت معادل، با معادله برداری $r = a \cosh \theta i + b \sinh \theta j$ نمایش داد. وقتی $a = b = 1$ پارامتر θ دارای تعبیری هندسی است که مشابه تعبیر هندسی رابطه بین θ ، $\sin \theta$ و $\cos \theta$ در دایره یکۀ شکل ۷.۱۴ (الف) می‌باشد. شکل ۷.۱۴ (ب) یک شاخه از هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$ را نشان می‌دهد. اگر $x = \cosh \theta$ و $y = \sinh \theta$ مختصات نقطه P باشند ثابت کنید θ دو برابر مساحت قطاع سایه‌دار OAP در شکل است.

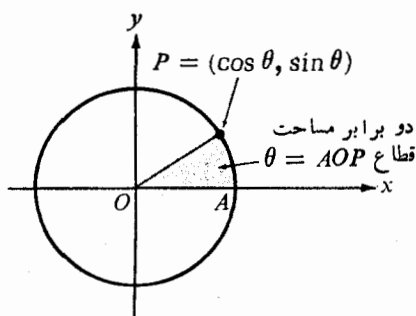
[دانهمایی: فرض کنید $A(\theta)$ مساحت قطاع OAP باشد. نشان دهید که

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta - \int_1^{\cosh \theta} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

ازاین مشتق بگیرید تا $A'(\theta) = 1/2$ بدست آید.]



شکل ۷.۱۴ (ب) هذلولوی: $x^2 - y^2 = 1$



شکل ۷.۱۴ (الف) دایره: $x^2 + y^2 = 1$

شکل ۷.۱۴ تشابه بین پارامتر برای دایره و پارامتر برای هذلولوی.

۱۳. جسمی در امتداد یک هذلولی بمعادله $r(t) = a \cosh \omega t \mathbf{i} + b \sinh \omega t \mathbf{j}$ که در آن ω ثابت است، حرکت می‌کند. ثابت کنید شتاب گریزنده از مرکز می‌باشد.

۱۴. ثابت کنید خط مماس در نقطه X از یک سهمی منصف زاویه خط واصل بین X و کانون و خط مار بر X موازی محور سهمی می‌باشد. این خاصیت انعکاسی سهمی را بدست می‌دهد. (ر. ک. شکل ۳۰۱۴).

۱۵. جسمی بجرم ۱ در یک صفحه طبق معادله $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ حرکت می‌کند. این جسم با نیروئی بزرگی چهار برابر فاصله‌اش تا مبدأ بطرف مبدأ جذب می‌شود. در لحظه $t = 0$ مکان اولیه $\mathbf{r}(0) = 4\mathbf{i}$ و سرعت اولیه $\mathbf{v}(0) = 6\mathbf{j}$ می‌باشد.

(الف) مؤلفه‌های $x(t)$ و $y(t)$ را بطور صریح بر حسب t بیان کنید.

(ب) مسیر جسم یک مقطع مخروطی است. معادله دکارتی این مخروطی را بیابید، مخروطی را بکشید، و جهت حرکت را در امتداد منحنی نشان دهید.

۱۶. جسمی در امتداد سهمی $c(y - x) = x^2$ طوری حرکت می‌کند که مؤلفه‌های افقی و قائم بردار شتاب باهم برابرند. اگر برای رفتن از نقطه $(0, c)$ به نقطه $(0, 0)$ ، T واحد زمان نیاز باشد چقدر وقت لازم است تا جسم از $(0, c)$ به نقطه نیمه راه $(c/4, c/2)$ برود؟

۱۷. فرض کنید منحنی C بوسیله دو تابع هم‌ارز X و Y ، که $Y(t) = X[u(t)]$ توصیف شده باشد. ثابت کنید بردارهای سرعت مربوط به X و Y در هر نقطه از C موازیند اما بردارهای شتاب نظیر الزاماً چنین نخواهند بود.

۸۰۱۴ مماس یکه، قائم اصلی، و صفحه بوسان یک منحنی

برای حرکت خطی بردار شتاب موازی بردار سرعت است. در حرکت مستدیر با تندى زاویه‌ای ثابت، بردار شتاب بر سرعت عمود خواهد بود. در این بخش نشان می‌دهیم که در یک حرکت کلی بردار شتاب مجموع دو بردار متعامد است که یکی موازی سرعت بوده و دیگری عمود بر آن می‌باشد. اگر حرکت خطی نباشد این دو بردار متعامد در هر نقطه از منحنی صفحه‌ای را مشخص می‌کنند که صفحه بوسان نامیده می‌شود.

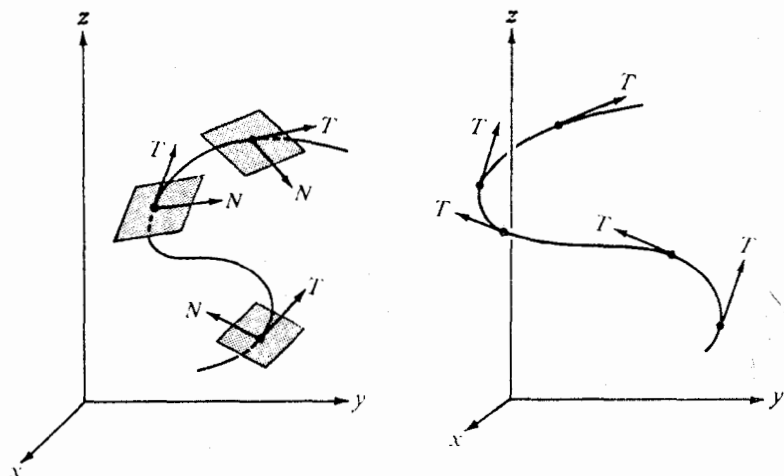
برای بررسی این مفاهیم بردار مماس یکه T را معرفی می‌کنیم. این تابع برداری دیگری است مربوط به منحنی و با معادله

$$T(t) = \frac{X'(t)}{\|X'(t)\|},$$

وقتی $\|X'(t)\| \neq 0$ ، تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که برای هر t ، $\|T(t)\| = 1$.

شکل ۸۰۱۴ وضعیت بردار هندی مماس یکه $T(t)$ را که به منحنی چسبیده برای مقادیر مختلف t نشان می‌دهد. وقتی جسم در امتداد منحنی حرکت می‌کند بردار متناظر T ، که طولش ثابت است، فقط می‌تواند جهتش تغییر یابد. میزان تغییر جهت مماس T با مشتقش T'

سنجیده می‌شود. چون طول T ثابت است قضیه ۲.۱۴ به ما می‌گوید که T بر مشتق T' عمود خواهد بود.



شکل ۹.۱۴ صفحه بوسان.

شکل ۸.۱۴ بردار مماس یکه T .

هرگاه حرکت خطی باشد آنگاه $T' = 0$. چنانچه $T' \neq 0$ برداریکه‌ای که همجهت با T' باشد قائم اصلی منحنی نام داشته و با N نموده می‌شود. بنابراین، N تابع برداری جدیدی است مربوط به منحنی و با معادله

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \quad \text{وقتی } \|T'(t)\| \neq 0$$

تعریف می‌شود.

وقتی دو بردار هندسی یکه $T(t)$ و $N(t)$ در نقطه $X(t)$ به منحنی وصل شوند صفحه‌ای را بنام صفحه بوسان منحنی مشخص می‌کنند. اگر سه مقدار از t ، مثلاً t_1 ، t_2 و t_3 را اختیار کنیم و صفحه‌ای که با سه نقطه $X(t_1)$ ، $X(t_2)$ و $X(t_3)$ مشخص می‌شوند در نظر بگیریم می‌توان نشان داد که این صفحه، وقتی t_1 به t_2 و t_2 به t_3 نزدیک می‌شوند، به صفحه بوسان در $X(t_1)$ نزدیک خواهد شد. باین دلیل صفحه بوسان در هر نقطه از منحنی را صفحه‌ای می‌خوانند که بیش از هر صفحه دیگر به منحنی چسبیده است. اگر خود منحنی مسطح (غیر از خط مستقیم) باشد صفحه بوسان بر صفحه منحنی منطبق است. اما در حالت کلی صفحه بوسان با t تغییر خواهد کرد. مثالهایی در شکل ۹.۱۴ نشان داده شده‌اند. قضیه بعدی نشان می‌دهد که بردار شتاب مجموع دو بردار است، یکی موازی T و دیگری موازی T' .

قضیه ۹.۱۴. برای حرکتی که بوسیله تابع برداری r توصیف شده، فرض می‌کنیم $v(t)$

تندی در لحظه t باشد، یعنی $v(t) = \|r'(t)\|$. در اینصورت بردار شتاب a یک ترکیب خطی از T و T' است که با دستور

$$(۸.۱۴) \quad a(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t)$$

داده می‌شود. چنانچه $T'(t) \neq 0$ همچنین خواهیم داشت

$$(۹.۱۴) \quad a(t) = v'(t)T(t) + v(t)\|T'(t)\|N(t).$$

پرهان. از دستور معروف مماس‌یکه نتیجه می‌شود که

$$v(t) = v(t)T(t).$$

اگر از این حاصلضرب مشتق بگیریم خواهیم داشت

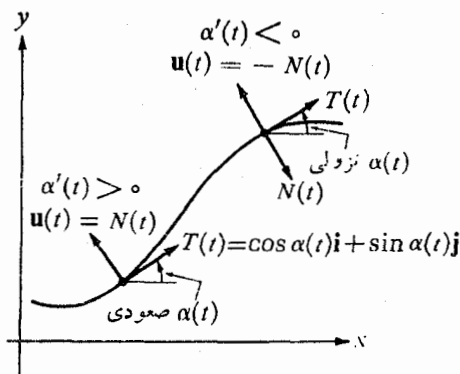
$$a(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t)$$

که (۸.۱۴) را ثابت می‌کند. برای اثبات (۹.۱۴) از تعریف N استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $T'(t) = \|T'(t)\|N(t)$.

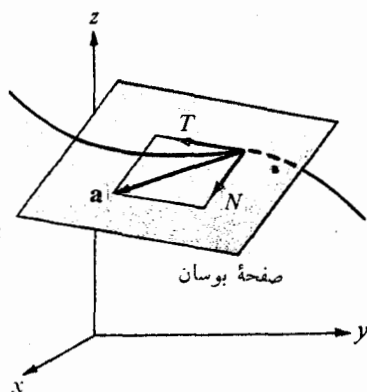
این قضیه نشان می‌دهد که بردار شتاب همیشه در صفحه بوسان قرار دارد. مثالی در شکل ۱۰.۱۴ نموده شده است. ضرائب $T(t)$ و $N(t)$ در (۹.۱۴) را بترتیب مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب می‌نامند. هر تغییر در تندی موجب تغییر در مؤلفه مماسی می‌شود در حالی که هر تغییر درجهت بر مؤلفه قائم اثر خواهد داشت.

در یک منحنی مسطح طول $T'(t)$ دارای تعبیر هندسی جالبی است. چون T یک بردار یکه است می‌توانیم بنویسیم

$$T(t) = \cos \alpha(t)\mathbf{i} + \sin \alpha(t)\mathbf{j}$$



شکل ۱۱.۱۴ زاویه شیب بردار مماس یک منحنی مسطح.



شکل ۱۰.۱۴ بردار شتاب در صفحه بوسان قرار دارد.

که در آن، همانطور که شکل ۱۱.۱۴ نشان داده، $\alpha(t)$ زاویه بین بردار مماس و قسمت مثبت محور x است. با مشتقگیری خواهیم داشت

$$T'(t) = -\sin \alpha(t) \alpha'(t) \mathbf{i} + \cos \alpha(t) \alpha'(t) \mathbf{j} = \alpha'(t) \mathbf{u}(t)$$

که $\mathbf{u}(t)$ یک بردار یک‌ه می‌باشد. لذا $\|T'(t)\| = |\alpha'(t)|$ و این نشان می‌دهد که $\|T'(t)\|$ میزان تغییر زاویه شیب بردار مماس را اندازه می‌گیرد. وقتی $\alpha'(t) > 0$ زاویه صعودی است و در نتیجه $\mathbf{u}(t) = N(t)$. وقتی $\alpha'(t) < 0$ زاویه نزولی بوده و در این حالت $\mathbf{u}(t) = -N(t)$. هر دو حالت در شکل ۱۱.۱۴ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که زاویه شیب $\mathbf{u}(t)$ برابر $\pi/2 + \alpha(t)$ است زیرا داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\sin \alpha(t) \mathbf{i} + \cos \alpha(t) \mathbf{j} \\ &= \cos \left[\alpha(t) + \frac{\pi}{2} \right] \mathbf{i} + \sin \left[\alpha(t) + \frac{\pi}{2} \right] \mathbf{j}. \end{aligned}$$

۹.۱۴ تمرینات

تمرینات ۱ تا ۶ در زیر مربوط به حرکاتی می‌شوند که بترتیب در تمرینات ۱ تا ۶ بخش ۷.۱۴ توصیف شدند. برای t داده شده، (الف) مماس یکه T و قائم اصلی N را برحسب $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بنویسید؛ (ب) شتاب $\mathbf{a}$ را بصورت یک ترکیب خطی از N و T بیان نمایید.

$$t = 0.3$$

$$t = \pi.2$$

$$t = 2.1$$

$$t = \pi/4.6$$

$$t = 1.5$$

$$t = \pi.4$$

۷. ثابت کنید اگر بردار شتاب همیشه صفر باشد حرکت خطی خواهد بود.

۸. ثابت کنید مؤلفه قائم بردار شتاب مساوی $\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|/\|\mathbf{v}\|$ است.

۹. برای هریک از احکام زیر، که دربارهٔ منحنی مسیر یک جسم متحرک در فضای سه بعدی است، یا برهانی ارائه دهید یا یک مثال نقض.

(الف) اگر سرعت ثابت باشد منحنی در یک صفحه قرار دارد.

(ب) اگر تندی ثابت باشد منحنی در یک صفحه واقع است.

(پ) اگر شتاب ثابت باشد منحنی در یک صفحه قرار خواهد داشت.

(ت) اگر سرعت برشتاب عمود باشد منحنی در یک صفحه واقع خواهد بود.

۱۰. جسمی بجرم یک با بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ در لحظه t تحت اثر نیروهائی در فضا حرکت می‌کند.

(الف) ثابت کنید $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$ رابطه $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند که در آن $\mathbf{c}$ یک بردار ثابت است.

(ب) اگر $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ ، که در آن $\mathbf{c}$ یک بردار ثابت است، نشان دهید که حرکت

در یک صفحه صورت می گیرد. هر دو حالت $c = 0$ و $c \neq 0$ را در نظر بگیرید.

(پ) اگر بر آیند نیروهای وارد بر جسم همیشه بسوی مبدأ باشد ثابت کنید جسم در یک صفحه حرکت خواهد کرد.

(ت) اگر جسم در یک صفحه حرکت کند آیا $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ لزوماً ثابت خواهد بود؟

۱۱. جسمی در امتداد یک منحنی طوری حرکت می کند که بردار سرعت با بردار یکة مفروض $\mathbf{c}$ زاویة ثابتی می سازد.

(الف) اگر منحنی در یک صفحه حاوی $\mathbf{c}$ قرار داشته باشد ثابت کنید بردار شتاب یا صفر است و یا موازی سرعت می باشد.

(ب) یک منحنی (که مسطح نباشد) مثال بزنید که در آن بردار شتاب نه هرگز صفر بوده و نه موازی سرعت باشد.

۱۲. جسمی در امتداد بیضی $x^2 + y^2 = 1$ با بردار مکان $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ حرکت می کند. حرکت طوری است که مؤلفه افقی بردار سرعت در لحظه t مساوی $g(t) -$ می باشد.

(الف) آیا جسم حول بیضی در جهت عقربه های ساعت می چرخد یا در جهت خلاف آن؟
(ب) ثابت کنید مؤلفه قائم بردار سرعت در لحظه t با $f(t)$ متناسب است و ضریب تناسب را بدست آورید.

(پ) چه مدت زمان لازم است تا جسم یکبار دور بیضی بچرخد؟

۱۳. منحنی مسطح C در ربع اول دارای شیب منفی در هر نقطه خود بوده و از نقطه $(1, 2/3)$ می گذرد. بردار مکان $\mathbf{r}$ از مبدأ تا هر نقطه (x, y) بر C با $\mathbf{i}$ زاویة θ و بردار سرعت با $\mathbf{i}$ زاویة φ می سازد که $0 < \theta < \pi/2$ و $0 < \varphi < \pi/2$. اگر در هر نقطه C داشته باشیم $3 \tan \varphi = 4 \cot \theta$ برای C یک معادله دکارتی بیابید و منحنی را رسم کنید.

۱۴. هر خط عمود بر خط مماس یک منحنی مسطح یک خط قائم نام دارد. اگر در هر نقطه از منحنی مسطح C خط قائم و خط موازی محور y رسم شوند پاره خطی بطول ۲ را بر محور x جدا می کنند. برای این منحنی در صورتی که از نقطه $(1, 2)$ بگذرد یک معادله دکارتی پیدا کنید. مسئله دو جواب خواهد داشت.

۱۵. فرض کنید دو بردار ناصفر و ثابت A و B با هم زاویة θ می سازند که $0 < \theta < \pi$. یک حرکت با بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ در معادله دیفرانسیل

$$\mathbf{r}'(t) = A \times \mathbf{r}(t)$$

صدق می کند و شرط اولیه چنین است: $\mathbf{r}(0) = B$.

(الف) ثابت کنید شتاب $\mathbf{a}(t)$ بر A عمود است.

(ب) ثابت کنید تندى ثابت است و این تندى را بر حسب A ، B ، و θ حساب کنید.

(پ) منحنی را رسم کنید و رابطه اش را با بردارهای A و B نشان دهید.

۱۶. این تمرین نشان می دهد که مماس یکه و قائم اصلی با تغییر پارامتر چگونه تغییر

می‌کنند. فرض کنید منحنی C بوسیله دو تابع هم‌ارز X و Y ، که $Y(t) = X[u(t)]$ توصیف شده باشد. مماس یکه برای X را با T_X و برای Y را با T_Y نشان دهید. (الف) ثابت کنید اگر u اکیداً صعودی باشد در هر نقطه از C داریم

$$T_Y(t) = T_X[u(t)]$$

اما، اگر u اکیداً نزولی باشد، $T_Y(t) = -T_X[u(t)]$. در حالت اول می‌گوئیم u جهت را حفظ می‌کند و، در حالت دوم، جهت را برمی‌گرداند.

(ب) ثابت کنید در هر نقطه از C بردارهای قائم اصلی متناظر N_Y و N_X در $N_Y(t) = N_X[u(t)]$ صدق می‌کنند. نتیجه بگیرید که صفحه بوسان تحت تغییر پارامتر پایا است.

۱۰.۱۴ تعریف طول قوس

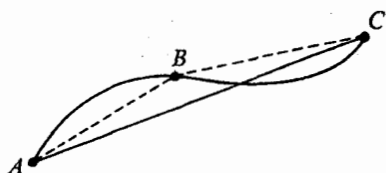
طول قوس یک منحنی در مباحث مختلفی از حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی مطرح می‌شود. پیش از آنکه بتوان به مطالعه خواص طول یک منحنی پرداخت باید روی تعریفی برای طول قوس توافق کنیم. هدف از این بخش تنظیم این تعریف خواهد بود. این کار بطور طبیعی به ساختن تابعی منجر می‌شود (بنام تابع طول قوس) که طول منحنی پیموده شده بوسیله یک جسم متحرک را در هر لحظه از حرکت اندازه می‌گیرد. بعضی از خواص اساسی این تابع در بخش ۱۲.۱۴ بحث شده‌اند. بخصوص ثابت می‌کنیم که در بسیاری از منحنیهای که در عمل ظاهر می‌شوند این تابع را می‌توان بصورت انتگرال تندی بیان کرد.

برای رسیدن به تعریف آنچه که ما طول یک منحنی می‌دانیم طوری عمل می‌کنیم که گوئی می‌بایست این طول را با یک خط‌کش اندازه می‌گرفتیم. ابتدا چند نقطه بر منحنی بعنوان رئوس یک چندضلعی محاطی اختیار می‌کنیم. (مثالی در شکل ۱۲.۱۴ نموده شده است.) بعد طول کل این چندضلعی را با خط‌کش خود اندازه گرفته و آن را بعنوان یک تقریب برای طول منحنی در نظر می‌گیریم. بزودی خواهیم دید که بعضی از چندضلعیها بهتر از بقیه به منحنی «چسبیده‌اند» خصوصاً اگر با چندضلعی P_1 شروع کنیم و چندضلعی محاطی جدید P_2 را با افزودن رئوس بیشتر به رئوس P_1 بسازیم بوضوح، همانطور که از شکل ۱۳.۱۴ برمی‌آید، طول P_2 از طول P_1 بزرگتر خواهد بود. به همین نحو می‌توان چندضلعیهای بیشتر و بیشتر را با طولهای بزرگتر و بزرگتر ساخت.

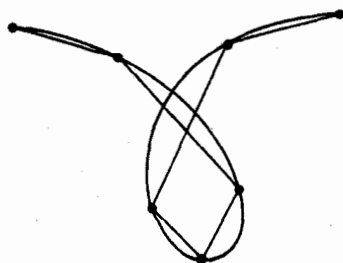
از سوی دیگر، درک شهودی ما به ما می‌گوید که طول هر چندضلعی محاطی نباید از طول منحنی تجاوز کند (زیرا خط مستقیم کوتاهترین مسیر بین دو نقطه است). بعبارت دیگر، وقتی به تعریفی برای طول یک منحنی برسیم باید یک کران بالائی برای طولهای همه چندضلعیهای محاطی باشد. بنابراین، یقیناً منطقی است که طول منحنی را کوچکترین کران بالائی طولهای همه چندضلعیهای محاطی ممکن تعریف کنیم.

این تعریف برای اغلب منحنیهای که در عمل پیش می‌آیند یک تعریف مفید و مستدل

برای طول یک منحنی است. اما باکمال تعجب می بینیم که حالات نامناسبی هستند که این تعریف برای آنها قابل استفاده نیست. منحنیهائی وجود دارند که طولهای چندضلعیهای محاطی آنها کران بالائی ندارند. (مثالی در تمرین ۲۲ بخش ۱۳.۱۴ داده شده است.) بنا براین



شکل ۱۳.۱۴ طول چندضلعی ABC از طول چندضلعی AC بزرگتر است.



شکل ۱۴.۱۴ منحنی با یک چندضلعی محاطی.

لازم است همه منحنیها را به دو دسته تقسیم کنیم: آنهایی که طول دارند و آنهایی که طول ندارند. دسته اول را با طول متناهی و دسته دوم را با طول نامتناهی خواهیم نامید.

برای آنکه این مفاهیم را بشکل تحلیلی تنظیم کنیم با یک منحنی در فضای سه بعدی یا در فضای دوبعدی شروع می کنیم که بوسیله تابع برداری $\mathbf{r}$ توصیف شده است و بخشی از آن را در نظر می گیریم که با تغییر t در بازه $[a, b]$ توسط $\mathbf{r}(t)$ پیموده می شود. ابتدا فقط فرض می کنیم $\mathbf{r}$ بر بازه پارامتری پیوسته باشد. بعداً قیود دیگری را اضافه خواهیم کرد. حال افراز دلخواه P از بازه $[a, b]$ را در نظر می گیریم، مثلاً

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad \text{که در آن } P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

فرض کنیم $\pi(P)$ چندضلعییی باشد که رئوسش $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \dots, \mathbf{r}(t_n)$ است. (مثالی که در آن $n = 6$ در شکل ۱۴.۱۴ دیده می شود.) طول اضلاع این چندضلعی چنین است:

$$\|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)\|, \|\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\|, \dots, \|\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})\|.$$

بنا براین، طول چندضلعی $\pi(P)$ که با $|\pi(P)|$ نموده می شود، مساوی مجموع

$$|\pi(P)| = \sum_{k=1}^n \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|$$

خواهد بود.

تعریف. هرگاه عدد مثبتی مانند M باشد بطوری که بازای هر افراز P از $[a, b]$,

$$|\pi(P)| \leq M \quad (10.14)$$

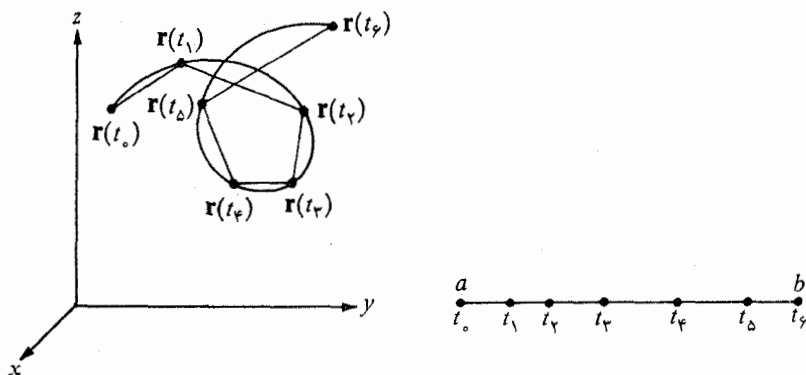
آنگاه منحنی با طول متناهی نام دارد و طول قوس آن، که با $\Lambda(a, b)$ نموده می شود،

مساوی کوچکترین کران بالائی مجموعه کلیه اعداد $|\pi(P)|$ تعریف می گردد. اگر این چنین M نباشد منحنی با طول نامتناهی نام خواهد داشت.

توجه کنید که هرگاه M صادق در (۱۰.۱۴) موجود باشد آنگاه بازای هر افزایش P خواهیم داشت

$$(11.14) \quad |\pi(P)| \leq \Lambda(a, b) \leq M$$

زیرا کوچکترین کران بالائی نمی تواند از هیچ کران بالائی بیشتر باشد.



شکل ۱۴.۱۴ یک افزایش $[a, b]$ به شش زیربازه و چندضلعی محاطی متناظر آن.

بآسانی می توان ثابت کرد که در صورتی که بردار سرعت $\mathbf{v}$ یک منحنی بر بازه پارامتری $[a, b]$ پیوسته باشد منحنی با طول متناهی است. در واقع قضیه زیر به ما می گوید که در این حالت می توان از انتگرال تندی بعنوان یک کران بالائی کلیه اعداد $|\pi(P)|$ استفاده کرد.

قضیه ۱۰.۱۴. فرض کنیم $\mathbf{v}(t)$ بردار سرعت یک منحنی با بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ بوده و $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ تندی نشان دهد. اگر $\mathbf{v}$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد منحنی با طول متناهی است و طولش $\Lambda(a, b)$ درنمساوی

$$(12.14) \quad \Lambda(a, b) \leq \int_a^b v(t) dt$$

صدق خواهد کرد.

برهان. بازای هر افزایش P از $[a, b]$ داریم

$$\begin{aligned} |\pi(P)| &= \sum_{k=1}^n \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{r}'(t) dt \right\| \\ &= \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{v}(t) dt \right\| \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_a^b v(t) dt \end{aligned}$$

که در آن نامساوی نتیجه‌ای از قضیه ۸.۱۴ است. این نشان می‌دهد که بازای هر افراز P داریم

$$|\pi(P)| \leq \int_a^b v(t) dt,$$

و لذا عدد $\int_a^b v(t) dt$ یک کران بالائی مجموعه همه اعداد $|\pi(P)|$ می‌باشد. این ثابت می‌کند که منحنی با طول متناهی است و همچنین می‌گوید که طول $\Lambda(a, b)$ نمی‌تواند از انتگرال تندی تجاوز نماید.

در یکی از بخشهای آتی ثابت می‌کنیم که نامساوی (۱۲.۱۴) در واقع یک تساوی است. در اثبات این مطلب از جمعپذیری طول قوس، که در بخش بعد توصیف شده، استفاده خواهد شد.

۱۱.۱۴ جمعپذیری طول قوس

اگر یک منحنی با طول متناهی به دو بخش قسمت شود طول تمام آن مساوی مجموع طولهای دو قسمت خواهد بود. این یکی دیگر از آن احکام «شهوداً واضح» است که اثباتش ساده نمی‌باشد. این خاصیت را جمعپذیری طول قوس نامیده و می‌توان آن را بصورت تحلیلی این طور بیان کرد.

قضیه ۱۱.۱۴. یک منحنی با طول متناهی و بطول $\Lambda(a, b)$ را در نظر می‌گیریم که توسط برداری چون $r(t)$ ، وقتی t در بازه $[a, b]$ تغییر می‌کند، رسم شده است. چنانچه $a < c < b$ ، C_1 و C_2 را منحنیهائی می‌انگاریم که بوسیله $r(t)$ ، وقتی t بترتیب دوی بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ تغییر می‌کند، رسم شده‌اند. در اینصورت C_1 و C_2 نیز با طول متناهی هستند و اگر $\Lambda(a, c)$ و $\Lambda(c, b)$ بترتیب طولهای آنها باشند، خواهیم داشت

$$\Lambda(a, b) = \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

برهان. فرض کنیم P_1 و P_2 بترتیب افرازه‌های دلخواهی از $[a, c]$ و $[c, b]$ باشند. نقاط P_1 با نقاط P_2 افراز جدید P از $[a, b]$ را بوجود می‌آورند که برای آن داریم

$$|\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| = |\pi(P)| \leq \Lambda(a, b). \quad (۱۳.۱۴)$$

این نشان می‌دهد که $|\pi(P_1)|$ و $|\pi(P_2)|$ بوسیله $\Lambda(a, b)$ کراندارند، و در نتیجه C_1 و C_2 با طول متناهی می‌باشند. از (۱۳.۱۴) همچنین خواهیم داشت

$$|\pi(P_1)| \leq \Lambda(a, b) - |\pi(P_2)|.$$

حال P_2 را ثابت گرفته و P_1 را روی کلیه افرازه‌های ممکن $[a, c]$ تغییر می‌دهیم. چون عدد $|\pi(P_2)| - \Lambda(a, b)$ یک کران بالائی برای همه اعداد $|\pi(P_1)|$ است پس

نمی تواند ازکوچکترین کران بالائی آنها، که $\Lambda(a, c)$ است، کمتر باشد. ازاینرو داریم

$$|\pi(P_r)| \leq \Lambda(a, b) - \Lambda(a, c),$$

یا، بعبارت معادل،

$$|\pi(P_r)| \leq \Lambda(a, b) - \Lambda(a, c).$$

این نشان می دهد که $\Lambda(a, b) - \Lambda(a, c)$ یک کران بالائی برای کلیه مجموعه های $|\pi(P_r)|$ است، و چون نمی تواند ازکوچکترین کران بالائی آنها، یعنی $\Lambda(c, b)$ ، کمتر باشد خواهیم داشت $\Lambda(c, b) \leq \Lambda(a, b) - \Lambda(a, c)$. بعبارت دیگر، داریم

$$(14.14) \quad \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b) \leq \Lambda(a, b).$$

حال نامساوی عکس را ثابت می کنیم. با افراز دلخواه P از $[a, b]$ شروع می کنیم. اگر نقطه c را به P بیفزاییم افراز P_r از $[a, c]$ و افراز P_p از $[c, b]$ را خواهیم داشت بطوری که

$$|\pi(P)| \leq |\pi(P_r)| + |\pi(P_p)| \leq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

این نشان می دهد که $\Lambda(a, c) + \Lambda(c, b)$ یک کران بالائی برای همه اعداد $|\pi(P)|$ است. چون این نمی تواند ازکوچکترین کران بالائی کمتر باشد پس باید داشته باشیم

$$\Lambda(a, b) \leq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

این نامساوی، همراه با (۱۴.۱۴)، خاصیت جمع پذیری را ایجاب خواهد کرد.

۱۴.۱۴ تابع طول قوس

فرض کنیم یک منحنی مسیری باشد که توسط بردار مکان $r(t)$ رسم شده است. طبیعی است این سؤال را مطرح کنیم که جسم تا لحظه t چه مسافتی را در امتداد منحنی پیموده است؟ برای بحث در باره این سؤال تابع طول قوس s را معرفی می کنیم که این طور تعریف می شود:

$$s(a) = 0; s(t) = \Lambda(a, t), t > a$$

عبارت $s(a) = 0$ یعنی که فرض کرده ایم حرکت در لحظه $t = a$ شروع می شود. با استفاده از قضیه جمع پذیری می توان چند خاصیت مهم s را نتیجه گرفت. برای مثال، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۴.۱۴. تابع طول قوس s دموود هر منحنی با طول متناهی بر $[a, b]$ صعودی است. یعنی که چنین داریم:

$$(15.14) \quad s(t_1) \leq s(t_2), a \leq t_1 < t_2 \leq b$$

برهان. اگر $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ خواهیم داشت

$$s(t_2) - s(t_1) = \Lambda(a, t_2) - \Lambda(a, t_1) = \Lambda(t_1, t_2)$$

که آخرین تساوی از جمعپذیری نتیجه شده است. چون $\Lambda(t_1, t_2) \geq 0$ این (۱۵.۱۴) را ثابت خواهد کرد.

حال ثابت می‌کنیم تابع s در هر نقطهٔ درونی بازهٔ پارامتری مشتق داشته و این مشتق مساوی تندی جسم می‌باشد.

قضیهٔ ۱۳.۱۴. فرض کنیم s تابع طول قوس مربوط به یک منحنی بوده و $v(t)$ تندی آن را در لحظهٔ t نشان دهد. هرگاه v بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه $s'(t) = v(t)$ بازای هر t در (a, b) وجود دارد و با دستور

$$s'(t) = v(t) \quad (۱۶.۱۴)$$

بیان می‌شود.

برهان. تعریف می‌کنیم $f(t) = \int_a^t v(u) du$. می‌دانیم که، بنابر اولین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، $f'(t) = v(t)$. ثابت می‌کنیم $s'(t) = v(t)$. برای این منظور خارج قسمت تفاضلی

$$\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\| \quad (۱۷.۱۴)$$

را تشکیل می‌دهیم. ابتدا فرض می‌کنیم $h > 0$. پاره خط واصل بین نقاط $r(t)$ و $r(t+h)$ را می‌توان یک چندضلعی دانست که تقریبی برای قوس واصل بین این نقاط می‌باشد. بنابراین، بموجب (۱۱.۱۴)، خواهیم داشت

$$\|r(t+h) - r(t)\| \leq \Lambda(t, t+h) = s(t+h) - s(t).$$

با استفاده از این در (۱۷.۱۴) و بکارگیری نامساوی (۱۲.۱۴) مذکور در قضیهٔ ۱۵.۱۴ خواهیم داشت

$$\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(u) du = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که این نامساویها برای $h < 0$ نیز معتبرند. اگر $h \rightarrow 0$ خارج قسمت تفاضلی سمت چپ به $\|r'(t)\| = v(t)$ و خارج قسمت تفاضلی طرف راست به $f'(t) = v(t)$ نزدیک می‌شود. در نتیجه کسر $[s(t+h) - s(t)]/h$ نیز به $v(t)$ نزدیک خواهد شد. اما این بدان معنی است که، همانطور که حکم شده، $s'(t)$ وجود دارد و مساوی $v(t)$ می‌باشد.

قضیهٔ ۱۳.۱۴ با درک شهودی ما از مفهوم تندی بعنوان مسافت پیموده شده در واحد

زمان مطابقت دارد.

با استفاده از (۱۶.۱۴) و دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان طول قوس را با انتگرالگیری از تندی حساب کرد. مثلاً مسافتی که یک جسم در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ پیموده عبارت است از

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

بویژه، وقتی $t_1 = a$ و $t_2 = b$ ، انتگرال زیر را برای طول قوس خواهیم داشت:

$$\Lambda(a, b) = \int_a^b v(t) dt.$$

مثال ۱. طول یک قوس مستدیر. برای محاسبه طول قوسی از یک دایره شعاع a می‌توان این طور فرض کرد که جسمی در امتداد این دایره با معادله

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

حرکت می‌کند. بردار سرعت $\mathbf{v}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}$ و تندی $v(t) = a$ خواهد بود. اگر از تندی روی بازه‌ای بطول θ انتگرال بگیریم درمی‌یابیم که طول قوس طی شده برابر $a\theta$ است. بعبارت دیگر، طول یک قوس مستدیر متناسب با زاویه‌ای است که این قوس دربر گرفته است؛ ثابت تناسب شعاع دایره خواهد بود. برای دایره‌یکه داریم $a = 1$ و طول قوس درست مساوی اندازه زاویه می‌باشد.

مثال ۲. طول نمودار یک تابع حقیقی. می‌توان نمودار تابع حقیقی f تعریف شده بر بازه $[a, b]$ را یک منحنی با بردار مکان

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + f(t) \mathbf{j}$$

در نظر گرفت. بردار سرعت نظیر $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + f'(t) \mathbf{j}$ و تندی

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}$$

خواهد بود. در نتیجه طول قوس نمودار f روی زیر بازه $[a, x]$ از انتگرال

$$(18.14) \quad s(x) = \int_a^x v(t) dt = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

بدست می‌آید.

۱۳.۱۴ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۹ طول مسیر طی شده بوسیله یک جسم را که بر یک منحنی طبق معادله داده شده در حرکت است در فاصله زمانی تعیین شده در هر حالت حساب کنید.

$$a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi, \mathbf{r}(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + a(t - \sin t)\mathbf{j} \cdot 1$$

$$0 \leq t \leq 2, \mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} \cdot 2$$

$$a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi, \mathbf{r}(t) = a(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t \cos t)\mathbf{j} \cdot 3$$

$$0 < b < a, c^2 = a^2 - b^2, 0 \leq t \leq 2\pi, \mathbf{r}(t) = \frac{c^2}{a} \cos^2 t \mathbf{i} + \frac{c^2}{b} \sin^2 t \mathbf{j} \cdot 4$$

$$a > 0, 0 \leq t \leq T, \mathbf{r}(t) = a(\sinh t - t)\mathbf{i} + a(\cosh t - 1)\mathbf{j} \cdot 5$$

$$0 \leq t \leq 2\pi, \mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k} \cdot 6$$

$$0 \leq t \leq 2, \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 6t^3 \mathbf{k} \cdot 7$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \log(\sec t) \mathbf{j} + \log(\sec t + \tan t) \mathbf{k} \cdot 8$$

$$t_0 \leq t \leq t_1, \mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + b \omega t \mathbf{k} \cdot 9$$

۱۰. برای طول نمودار معادله‌ای بشکل $x = g(y)$ که در آن g بر بازه‌ای مثل $[c, d]$ مشتق پیوسته دارد یک انتگرال شبیه انتگرال (۱۸.۱۴) پیدا کنید.

۱۱. یک منحنی دارای معادله $x^3 = y^2$ است. طول قوس واصل بین $(1, 1)$ و $(1, 1)$ را حساب کنید.

۱۲. دو نقطه A و B بر دایره‌ای که بمرکز O قطاع مستدیر AOB را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید طول قوس AB دو برابر مساحت این قطاع است.

۱۳. برای طول منحنیهائی که معادلات زیر را دارند انتگرالهایی بدست آورید:

(الف) $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$; (ب) $x = t + \log t$, $y = t - \log t$

$1 \leq t \leq e$. نشان دهید که طول منحنی دوم $\sqrt{2}$ برابر طول منحنی اولی است.

۱۴. (الف) انتگرالی بنویسید که طول منحنی $y = c \cosh(x/c)$ را از $x = 0$ تا $x = a$ ($a > 0$ و $c > 0$) بدست دهد.

(ب) نشان دهید که c برابر طول این منحنی مساوی مساحت ناحیه‌ای است که به

$y = c \cosh(x/c)$, محور x , محور y , و خط $x = a$ محدود شده است.

(پ) این انتگرال را حساب کرده و طول منحنی را وقتی $a = 2$ بدست آورید.

۱۵. نشان دهید که اگر $x > 0$ طول منحنی $y = \cosh x$ واصل بین نقاط $(0, 1)$ و $(x, \cosh x)$ مساوی $\sinh x$ است.

۱۶. تابع نامنفی f دارای این خاصیت است که مجموعه‌ی عرضی آن روی یک بازه دلخواه مساحتی متناسب با طول قوس نمودارش روی این بازه دارد. f را پیدا کنید.

۱۷. از معادله برداری $\mathbf{r}(t) = a \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j}$ که در آن $0 < b < a$ استفاده کرده نشان دهید که محیط L یک بیضی از انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

که در آن $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ (عدد e خروج از مرکز بیضی است). این حالت خاصی است از انتگرال

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt,$$

بنام انتگرال بیضوی نوع دوم، که در آن $0 \leq k < 1$. اعداد $E(k)$ برای مقادیر مختلف k در جدولی ثبت شده‌اند.

۱۸. اگر $0 < b < 4a$ قرار دهید

$$r(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} + b \sin \frac{1}{4}t \mathbf{k}.$$

نشان دهید که طول مسیر طی شده از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ برابر $8aE(k)$ است که در آن $E(k)$ در تمرین ۱۷ تعریف شده است و $k^2 = 1 - (b/4a)^2$.

۱۹. جسمی با بردار مکان

$$r(t) = tA + t^2B + 2\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} A \times B,$$

که در آن A و B دو برداریکه ثابت بوده و باهم زاویه‌ای برابر $\pi/3$ رادیان می‌سازند، در حرکت است. تسلی جسم را در لحظه t حساب کنید و زمان لازم برای طی مسافتی بقدر ۱۲ واحد طول قوس از وضعیت اولیه $r(0)$ بدست آورید.

۲۰. الف) وقتی یک دایره در امتداد یک خط مستقیم (بدون لغزش) می‌غلتد هر نقطه از محیطش یک منحنی بنام دورگون را رسم می‌کند. اگر خط ثابت محور x بوده و نقطهٔ رسام (x, y) ابتدا در مبدأ باشد نشان دهید که وقتی دایره باندازهٔ زاویهٔ θ می‌غلتد خواهیم داشت

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$$

که در آنها a شعاع دایره است. اینها معادلات پارامتری دورگون خواهند بود.

ب) در رابطه با قسمت الف) نشان دهید که $dy/dx = \cot(\theta/2)$ و نتیجه بگیرید که خط مماس بر دورگون در نقطهٔ (x, y) با محور x زاویهٔ $(\pi - \theta)/2$ می‌سازد. شکلی بکشید و نشان دهید که خط مماس از بالاترین نقطهٔ دایره می‌گذرد.

۲۱. فرض کنید C منحنی توصیف شده بوسیلهٔ دو تابع هم‌ارز X و Y باشد که، بازای $c \leq t \leq d$ $Y(t) = X[u(t)]$. اگر تابع u که معرف تغییر پارامتر است در $[c, d]$ مشتق پیوسته داشته باشد ثابت کنید

$$\int_{u(c)}^{u(d)} \|X'(u)\| du = \int_c^d \|Y'(t)\| dt$$

و نتیجه بگیرید که طول قوس C تحت چنین تغییر پارامتری پایا می باشد.

۲۲. منحنی مسطحی را در نظر بگیرید که معادله برداری آن $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$ است که در آن

$$f(0) = 0; f(t) = t \cos(\pi/2t), t \neq 0$$

افراز زیر را برای بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید:

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

نشان دهید که طول چندضلعی محاطی متناظر $\pi(P)$ در نامساوی زیر صدق می کند:

$$|\pi(P)| > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n},$$

و نتیجه بگیرید که این منحنی با طول نامتناهی می باشد.

۱۴.۱۴ انحناى يك منحنى

برای یک خط مستقیم بردار مماس یکه T تغییر جهت نمی دهد، و در نتیجه $T' = 0$. اگر منحنی یک خط مستقیم نباشد T' میزان تغییر جهت مماس را اندازه خواهد گرفت. میزان تغییر مماس یکه نسبت به طول قوس بردار انحناى منحنی نامیده می شود. ما این بردار را با dT/ds نشان می دهیم که در آن s نمایش طول قوس است. قاعده زنجیره ای همراه با رابطه $s'(t) = v(t)$ به ما می گوید که بردار انحناى dT/ds و مشتق «نسبت به زمان» T' با معادله

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{s'(t)} T'(t) = \frac{1}{v(t)} T'(t)$$

به هم مربوط می شوند. چون $T'(t) = \|T'(t)\| N(t)$ خواهیم داشت

$$(14.14) \quad \frac{dT}{ds} = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)} N(t)$$

که نشان می دهد که بردار انحنا با قائم اصلی $N(t)$ همجهت می باشد. سازه اسکالری که در (۱۴.۱۴) در $N(t)$ ضرب شده عددی نامنفی است بنام انحناى منحنی در t و با $\kappa(t)$ (حرف یونانی کاپا است) نشان داده می شود. بنابراین، انحناى $\kappa(t)$ ، که مساوی طول بردار انحنا تعریف می شود، از دستور زیر بدست خواهد آمد:

$$(14.15) \quad \kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}.$$

مثال ۱. انحناى يک دایره. برای دایره ای بشاع a ، که با معادله

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

بیان شده، خواهیم داشت

$$v(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}, \quad v(t) = a, \quad T(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j},$$

و $T'(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$ بنا بر این داریم $\|T'(t)\| = 1$ پس $\kappa(t) = 1/a$ این نشان می‌دهد که هر دایره دارای انحنای ثابت است. معکوس انحنا شعاع دایره می‌باشد.

وقتی $\kappa(t) \neq 0$ معکوس آن شعاع انحنا نامیده شده و با $\rho(t)$ حرف یونانی ρ (است) نشان داده می‌شود. دایره‌ای در صفحه بوسان که شعاعش $\rho(t)$ و مرکزش نوک بردار انحنا است دایره بوسان نام خواهد داشت. می‌توان نشان داد که دایره بوسان وضعیت حدی دوایری است که از سه نقطه مجاور هم بر منحنی می‌گذرند وقتی که دو نقطه به سومی نزدیک شوند. بواسطه این خاصیت است که اغلب دایره بوسان در هر نقطه را دایره‌ای می‌نامند که «پیش از هر منحنی دیگر به منحنی چسبیده است.»

مثال ۲. انحنا ی یک منحنی مسطح. برای یک منحنی مسطح دیدیم

$$\|T'(t)\| = |\alpha'(t)|$$

که در آن، همانطور که شکل ۱۱.۱۴ نشان داده، $\alpha(t)$ زاویه‌ای است که بردار مماس با قسمت مثبت محور x می‌سازد. از قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\alpha'(t) = d\alpha/dt = (d\alpha/ds)(ds/dt) = v(t) d\alpha/ds,$$

پس معادله (۲۰.۱۴) ایجاب می‌کند که

$$\kappa(t) = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

بعبارت دیگر، انحنا ی یک منحنی مسطح قدر مطلق میزان تغییر α نسبت به طول قوس است. این کمیت تغییر جهت در واحد مسافت را در امتداد منحنی اندازه خواهد گرفت.

مثال ۳. منحنیهای مسطح با انحنا ی ثابت. هرگاه $d\alpha/ds$ عدد ثابت ناصفری باشد،

مثلاً $d\alpha/ds = a$ ، آنگاه $\alpha = as + b$ ثابت است. پس اگر طول قوس s را بعنوان پارامتر بکار ببریم خواهیم داشت $T = \cos(as + b)\mathbf{i} + \sin(as + b)\mathbf{j}$. با انتگرالگیری درمی‌یابیم که

$$\mathbf{r} = (1/a) \sin(as + b)\mathbf{i} - (1/a) \cos(as + b)\mathbf{j} + A$$

که در آن A یک بردار ثابت است. بنابراین $\|\mathbf{r} - A\| = 1/|a|$ ، لذا منحنی یک دایره (یا قوسی از یک دایره) بمرکز A و شعاع $1/|a|$ خواهد بود. این ثابت می‌کند که هر منحنی مسطح با انحنا ی ثابت $\kappa \neq 0$ یک دایره (یا قوسی از یک دایره) باشد $1/\kappa$ می‌باشد.

حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که انحنا را به سرعت و شتاب ربط می‌دهد.

قضیه ۱۴.۱۴. برای هر حرکت با سرعت $\mathbf{v}(t)$ ، تندی $v(t)$ ، شتاب $\mathbf{a}(t)$ ، و انحنا $\kappa(t)$ داریم

$$(۲۱.۱۴) \quad \mathbf{a}(t) = v'(t)T(t) + \kappa(t)v^2(t)N(t).$$

این دستور بنوبه خود ایجاب می‌کند که

$$(۲۲.۱۴) \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)\|}{v^3(t)}.$$

برهان. برای اثبات (۲۱.۱۴) رابطه (۲۰.۱۴) را بشکل $\|T'(t)\| = \kappa(t)v(t)$ با گذاردن این عبارت در معادله (۸.۱۴) بجای $T'(t)$ رابطه (۲۱.۱۴) را بدست خواهیم آورد.

برای اثبات (۲۲.۱۴) حاصلضرب خارجی $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)$ را تشکیل می‌دهیم، (۲۱.۱۴) را برای $\mathbf{a}(t)$ و دستور $\mathbf{v}(t) = v(t)T(t)$ را برای سرعت بکار می‌بریم. این عمل، بدلیل اینکه $T \times T = O$ ، نتیجه می‌دهد که

$$(۲۳.۱۴) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{v} = v'vT \times T + \kappa v^3N \times T = \kappa v^3N \times T.$$

اگر طول هرطرف (۲۳.۱۴) را گرفته و توجه کنیم که

$$\|N \times T\| = \|N\| \|T\| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

خواهیم داشت $\|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\| = \kappa v^3$ که (۲۲.۱۴) را ثابت می‌کند.

درعمل محاسبه بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ (با مشتقگیری از بردار مکان $\mathbf{r}$) نسبتاً آسان است؛ بنابراین، معادله (۲۲.۱۴) روش مفیدی را برای محاسبه انحنا بدست می‌دهد. این روش معمولاً از محاسبه انحنا بوسیله تعریفش ساده‌تر است.

برای خط مستقیم داریم $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = O$ ، پس انحنا همه‌جا صفر می‌باشد. در یک نقطه یک منحنی با انحنا کوچک شعاع انحنا بزرگ دارد، و در نتیجه در مجاورت آن نقطه فرق زیادی با خط مستقیم نخواهد داشت. بنابراین، انحنا تمایل به انحراف یک منحنی از یک خط مستقیم را اندازه می‌گیرد.

۱۵.۱۴ تمرینات

۱. به منحنیهای تمرینات ۱ تا ۶ از بخش ۹.۱۴ بازگشته و در هر حالت انحنا $\kappa(t)$ را برای مقدار t داده شده حساب کنید.

۲. یک ماریچ بوسیله تابع مکان $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + b \omega t \mathbf{k}$ توصیف

شده است. ثابت کنید این منحنی دارای انحنای ثابت $\kappa = a/(a^2 + b^2)$ است.

۳. دوبرداریکه ثابت A و B باهم زاویه θ می سازند که $0 < \theta < \pi$. جسمی بر یک منحنی فضائی طوری حرکت می کند که بردار مکان آن $r(t)$ و سرعتش $v(t)$ با معادله $v(t) = A \times r(t)$ بهم مربوطند. اگر $r(0) = B$ ثابت کنید منحنی دارای انحنای ثابت است و این انحنا را برحسب θ حساب کنید.

۴. یک نقطه درفضا طبق معادله برداری

$$r(t) = r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j} + r \cos t \mathbf{k}$$

حرکت می کند.

(الف) نشان دهید که مسیر یک بیضی است و برای صفحه حاوی آن معادله دکارتی پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که شعاع انحنا مساوی $\rho(t) = r\sqrt{2}(1 + \sin^2 t)^{3/2}$ است.

۵. نشان دهید که انحنای منحنی بمعادله برداری $r(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2} t \mathbf{k}$ برابر $\kappa(t) = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$ می باشد.

۶. (الف) نشان دهید که انحنای منحنی مسطحی که بوسیله معادله $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ توصیف شده از دستور

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}}$$

بدست می آید.

(ب) نشان دهید که انحنای یک منحنی مسطح بمعادله دکارتی $y = f(x)$ در نقطه $(x, f(x))$ برابر

$$\frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}}$$

می باشد.

۷. اگر نقطه طوری حرکت کند که طول بردارهای سرعت و شتاب همیشه ثابت باشد نشان دهید که انحنا در تمام نقاط مسیر ثابت است. این ثابت را برحسب $\|a\|$ و $\|v\|$ بیان کنید.

۸. اگر دو منحنی مسطح با معادلات دکارتی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در نقطه (a, b) یک مماس و یک انحنا داشته باشند ثابت کنید $|f''(a)| = |g''(a)|$.

۹. بازای مقادیری از ثابتهای a و b ، دو منحنی با معادلات دکارتی $y = ax(b - x)$ و $y = x(x + 2)$ فقط در یک نقطه P همدیگر را قطع می کنند، در P یک مماس مشترک دارند، و در این نقطه از یک انحنا برخوردارند.

(الف) کلیه a و b هائی را بیابید که در این شرایط صدق می کنند.

(ب) برای هر انتخاب ممکن a و b که در این شرایط صدق می کنند دو منحنی را رسم

کنید. نحوه تقاطع آنها را در P نشان دهید.

۱۰. (الف) ثابت کنید که شعاع انحنای یک سهمی کمترین مقدار را در رأس دارد.

(ب) دو برداریکه ثابت A و B که با هم زاویه θ ($0 < \theta < \pi$) می سازند مفروضند. منحنی با بردار مکان $\mathbf{r}(t) = tA + t^2B$ یک سهمی است که در صفحه پیموده شده بوسیله A و B جای دارد. بردار مکان رأس این سهمی را (برحسب A ، B ، و θ) مشخص کنید. می توانید از خاصیت سهمی که در قسمت (الف) بیان شده استفاده نمایید.

۱۱. جسمی در امتداد یک منحنی مسطح با تندی ثابت 5 در حرکت است. این جسم در لحظه $t = 0$ از مبدأ با سرعت اولیه $5\mathbf{j}$ شروع به حرکت کرده و هرگز بطرف چپ محور y نمی رود. انحنای مسیر $\kappa(t) = 2t$ است. فرض کنید $\alpha(t)$ زاویه ای باشد که بردار سرعت با قسمت مثبت محور x در لحظه t می سازد.

(الف) $\alpha(t)$ را بصورت تابع صریحی از t بیان کنید.

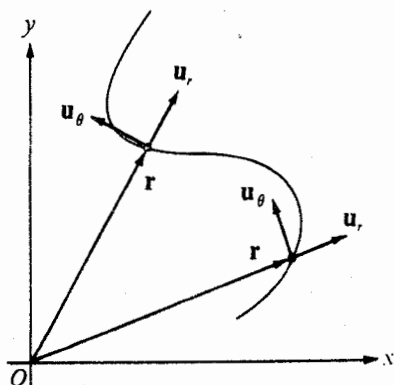
(ب) سرعت $\mathbf{v}(t)$ را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ محاسبه نمایید.

۱۲. جسمی در امتداد یک منحنی مسطح با تندی ثابت 2 حرکت می کند. حرکت در لحظه $t = 0$ از مبدأ و با سرعت اولیه $2\mathbf{i}$ $\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i}$ آغاز می شود. انحنای در هر لحظه $\kappa(t) = 4t$ می باشد. اگر منحنی هرگز زیر محور x نرود سرعت را وقتی $t = \sqrt{\pi}/4$ پیدا کنید.

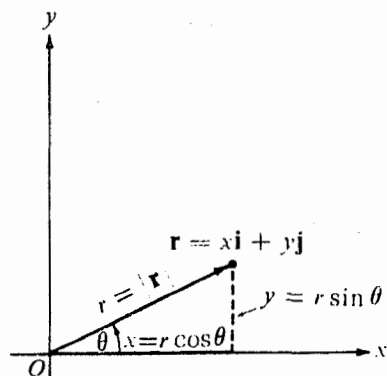
۱۶.۱۴ سرعت و شتاب در مختصات قطبی

گاهی اوقات طبیعی تر آن است که نقاط یک منحنی مسطح را بجای مختصات قائم با مختصات قطبی بیان کنیم. چون مختصات قائم (x, y) با مختصات قطبی r و θ توسط معادلات

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$



شکل ۱۶.۱۴ بردارهای یکه $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$.



شکل ۱۵.۱۴ مختصات قطبی.

بهم مربوطند بردار مکان $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ که مبدأ را به (x, y) وصل می کند چنین خواهد بود:

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} = r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

که در آن $\|\mathbf{r}\| = r$. این رابطه در شکل ۱۵.۱۴ نشان داده شده است. بردار $\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ برداری است بطول یک که با $\mathbf{r}$ همجهت است. این بردار یکه را معمولا با $\mathbf{u}_r$ نشان داده و معادله فوق را این طور می نویسند:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

شایسته است بردار یکه $\mathbf{u}_\theta$ را نیز معرفی می کنیم که بر $\mathbf{u}_r$ عمود بوده و باین صورت تعریف می شود:

$$\mathbf{u}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

توجه کنید که

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} = -\mathbf{u}_r.$$

در بررسی منحنیهای مسطح، دوبرار یکه $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ همان نقشی را در مختصات قطبی ایفا می کنند که بردارهای یکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ در مختصات قائم دارند. شکل ۱۶.۱۴ بردارهای یکه $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ را نشان می دهد که در چند نقطه منحنی به آن وصل شده اند.

حال فرض کنیم مختصات قطبی r و θ توابعی از t باشند، مثلا $r = f(t)$ ، $\theta = g(t)$. ما دستورهائی را برای بیان سرعت و شتاب بر حسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بدست می آوریم. برای بردار مکان داریم

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r = f(t) \mathbf{u}_r.$$

چون θ به پارامتر t بستگی دارد بردار یکه $\mathbf{u}_r$ نیز چنین است و این را باید در محاسبه بردار سرعت بحساب آورد. بنابراین خواهیم داشت

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}.$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای می توان $d\mathbf{u}_r/dt$ را بر حسب $\mathbf{u}_\theta$ بیان کرد و نوشت

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta, \quad (24.14)$$

و معادله بردار سرعت بصورت

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \quad (25.14)$$

درخواهد آمد.

سازه های اسکالر dr/dt و $r d\theta/dt$ را که در $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ ضرب شده اند بترتیب

مؤلفه‌های شعاعی و متقاطع سرعت می‌نامند.
چون $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بردارهای یک‌تعامدی هستند خواهیم داشت

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

پس تبدی v از دستور

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2}$$

بدست خواهد آمد.

اگر از طرفین (۲۵.۱۴) مشتق بگیریم درمی‌یابیم که بردار شتاب بصورت زیر است:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \right) + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} \right).$$

$d\mathbf{u}_r/dt$ را می‌توان بوسیله (۲۴.۱۴) برحسب $\mathbf{u}_\theta$ بیان کرد. بهمین نحو می‌توان مشتق $\mathbf{u}_\theta$ را با معادله

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = - \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r$$

بیان داشت. این عمل به دستور زیر منجر می‌شود که $\mathbf{a}$ را برحسب مؤلفه‌های شعاعی و متقاطع بیان می‌کند:

$$(۲۶.۱۴) \quad \mathbf{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta.$$

وقتی $t = \theta$ می‌توان منحنی را با معادله قطبی $r = f(\theta)$ بیان کرد. در این حالت دستوره‌ای سرعت، تبدی، و شتاب بنحو قابل ملاحظه‌ای ساده شده و نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{d\theta} \mathbf{u}_r + r \mathbf{u}_\theta, \quad v = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2}, \quad \mathbf{a} = \left(\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r \right) \mathbf{u}_r + 2 \frac{dr}{d\theta} \mathbf{u}_\theta.$$

۱۷.۱۴ حرکت در صفحه با شتاب شعاعی

بردار شتاب را شعاعی گویند هرگاه در معادله (۲۶.۱۴) مؤلفه متقاطع همواره صفر باشد. این مؤلفه برابر است با

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right).$$

بنابراین، شتاب شعاعی است اگر و فقط اگر $r^2 d\theta/dt$ ثابت باشد.

حرکت در صفحه با شتاب شعاعی تعبیر هندسی جالبی بر حسب مساحت دارد. فرض کنیم $A(t)$ مساحت ناحیه‌ای باشد که بوسیلهٔ بردار مکان از یک لحظهٔ ثابت، مثلاً $t = a$ ، تا زمان بعدی t جارو می‌شود. یک مثال ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۷.۱۴ است. ثابت می‌کنیم که میزان تغییر زمانی این مساحت درست مساوی $(r^2 d\theta/dt)/2$ است. یعنی که داریم

$$A'(t) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (27.14)$$

از این نتیجه می‌شود که بردار شتاب شعاعی است اگر و فقط اگر بردار مکان مساحت را بمیزان ثابتی جارو کند.

برای اثبات (۲۷.۱۴) فرض کنیم حذف t از دو معادلهٔ $r = f(t)$ و $\theta = g(t)$ امکان‌پذیر بوده و بدین ترتیب بشود r را بصورت تابعی از θ ، مثلاً $r = R(\theta)$ ، بیان کرد. این یعنی که یک تابع حقیقی مانند R هست بطوری که $R[g(t)] = f(t)$. پس ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۱۷.۱۴ مجموعهٔ شعاعی R روی بازهٔ $[g(a), g(t)]$ می‌باشد. بنا بر قضیهٔ ۶.۲، مساحت این ناحیه از انتگرال

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{g(a)}^{g(t)} R^2(\theta) d\theta$$

بدست می‌آید. اگر از این انتگرال بوسیلهٔ اولین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$A'(t) = \frac{1}{2} R^2[g(t)] g'(t) = \frac{1}{2} f^2(t) g'(t) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

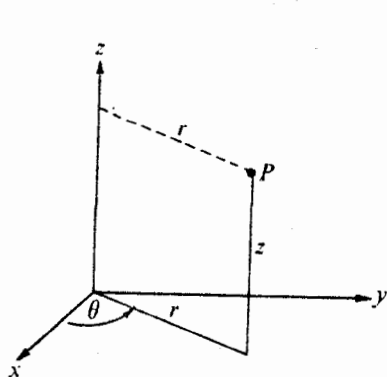
که (۲۷.۱۴) را ثابت خواهد کرد.

۱۸.۱۴ مختصات استوانه‌ای

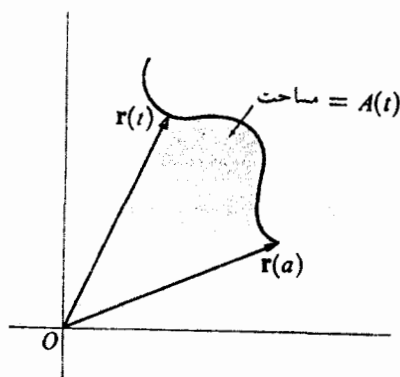
وقتی مختصات x و y نقطهٔ $P = (x, y, z)$ در فضای سه بعدی را با مختصات قطبی r و θ عوض می‌کنیم سه عدد r ، θ ، و z مختصات استوانه‌ای نقطهٔ P نامیده می‌شوند. همانطور که شکل ۱۸.۱۴ نشان داده در اینجا عدد نامنفی r نمایشگر فاصلهٔ محور z تا نقطهٔ P است. نقاطی در فضا که برای آنها r ثابت باشد بفاصلهٔ ثابتی از محور z واقعند، و در نتیجه بر استوانهٔ مستدیری قرار خواهند داشت (بهین دلیل این مختصات را استوانه‌ای می‌نامند). برای بحث منحنیهای فضائی در مختصات استوانه‌ای باید معادلهٔ بردار مکان را با رابطه‌ای بشکل

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z(t)\mathbf{k}$$

عوض کرد. دستورهای نظیر برای بردارهای سرعت و شتاب فقط با افزودن جملات $\mathbf{k}z'(t)$ و $\mathbf{k}z''(t)$ بترتیب به طرفهای راست دستورهای دوبعدی (۲۵.۱۴) و (۲۶.۱۴) بدست



شکل ۱۸.۱۴ مختصات استوانه‌ای.



شکل ۱۷.۱۴ بردار مکان مساحتی بمیزان $A'(t) = (r^2 d\theta/dt)/2$ را جادو می‌کند.

۱۹.۱۴ تمرینات

۱. جسمی در یک صفحه طوری حرکت می‌کند که در لحظه t دارای مختصات قطبی $r = t$ و $\theta = t$ است. برای سرعت v ، شتاب a ، و انحنای κ در لحظه t دستورهائی بیابید.

۲. جسمی در فضا طوری حرکت می‌کند که در لحظه t دارای مختصات استوانه‌ای $r = t$ ، $\theta = t$ ، $z = t$ می‌باشد. این جسم یک منحنی را طی می‌کند که آن را مارپیچ مخروطی می‌نامند.

(الف) برای سرعت v ، شتاب a ، و انحنای κ در لحظه t دستورهائی پیدا کنید.
(ب) برای محاسبه زاویه بین بردار سرعت و مولد مخروط در هر نقطه از منحنی دستوری پیدا کنید.

۳. جسمی در فضا طوری حرکت می‌کند که در لحظه t دارای مختصات استوانه‌ای $r = \sin t$ ، $\theta = t$ ، $z = \log \sec t$ ($0 \leq t < \pi/2$) است.

(الف) نشان دهید که منحنی براستوانه‌ای بمعادله دکارتی $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$ قرار دارد.

(ب) برای زاویه‌ای که بردار سرعت با k می‌سازد دستوری (بر حسب t) پیدا کنید.

۴. اگر یک منحنی با معادله قطبی $r = f(\theta)$ ، که در آن $a \leq \theta \leq b \leq a + 2\pi$ ، داده شده باشد ثابت کنید طول قوس آن مساوی است با

$$\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

۵. منحنیی که بمعادله قطبی $r = a(1 + \cos \theta)$ ، که در آن $0 < \theta \leq 2\pi$ و $a > 0$ ،

بیان شده یک دلگون نام دارد. نمودار دلگون $r = 4(1 + \cos \theta)$ را رسم کرده و طول قوس آن را حساب کنید.

۶. جسمی در امتداد یک منحنی مسطح بمعادله قطبی $r = e^{\theta}$ که در آن c ثابت بوده و θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند، در حرکت است.

(الف) شکل کلی منحنی را برای هر یک از مقادیر $c = 0$ ، $c = 1$ ، و $c = -1$ رسم کنید.

(ب) فرض کنید $L(c)$ طول قوس منحنی و $a(c)$ مساحت ناحیه‌ای باشد که بردار مکان در تغییر θ از ۰ تا 2π جارو می‌کند. $L(c)$ و $a(c)$ را برحسب c حساب کنید.

۷. منحنی بمعادله قطبی $r = \sin^2 \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) را رسم کرده و نشان دهید که این منحنی از دو حلقه تشکیل شده است.

(الف) مساحت ناحیه محدود به یکی از حلقه‌های آن را حساب کنید.

(ب) طول یکی از حلقه‌های منحنی را محاسبه نمایید.

در هریک از تمرینات ۸ تا ۱۱ منحنی مسطحی را که معادله قطبی اش داده شده رسم کنید و طول قوس آن را محاسبه نمایید.

$$0 \leq \theta \leq \pi, r = \theta \quad ۸ \quad 0 \leq \theta \leq \pi, r = e^{\theta} \quad ۹$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, r = 1 + \cos \theta \quad ۱۰ \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, r = 1 - \cos \theta \quad ۱۱$$

۱۲. اگر یک منحنی بمعادله قطبی $r = f(\theta)$ باشد نشان دهید که شعاع انحنای آن ρ از دستور $\rho = (r^2 + r'^2)^{3/2} / |r^2 - rr'' + 2r'^2|$ بدست می‌آید که در آن $r' = f'(\theta)$ و $r'' = f''(\theta)$.

۱۳. برای هریک از منحنیهای تمرینات ۸ تا ۱۱ شعاع انحنای θ تعیین شده حساب کنید.

(الف) θ دلخواه در تمرین ۸. (ب) θ دلخواه در تمرین ۹.

(پ) $\theta = \pi/4$ در تمرین ۱۰. (ت) $\theta = \pi/2$ در تمرین ۱۱.

۱۴. فرض کنید φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) زاویه بین بردار مکان و بردار سرعت یک منحنی باشد. اگر منحنی درمختصات قطبی بیان شده باشد ثابت کنید

$$v \cos \varphi = dr/d\theta \quad \text{و} \quad v \sin \varphi = r$$

که در آنها v تندی می‌باشد.

۱۵. یک موشک طوری طرح‌ریزی شده که مستقیماً بسوی هدفش حرکت می‌کند. بخاطر نقص فنی، موشک پس از پرتاب با خط واصل بین خود و هدف زاویه ثابت $\alpha \neq 0$ را می‌سازد. مسیر حرکت را در صورتی بیابید که موشک به هدف ثابتی پرتاب شده باشد. در نحوه تغییر مسیر نسبت به α بحث کنید. آیا موشک هرگز به هدف خواهد

رسید؟ (فرض کنید حرکت در یک صفحه صورت می‌گیرد.)

۱۶. بخاطر نقص فنی، یک گروه مراقبت زمینی کنترل موشکی را که اخیراً پرتاب شده از دست داده است. می‌دانیم موشک با تندی ثابتی در یک مسیر مستقیم و در جهتی نامعلوم پیش می‌رود. وقتی موشک در ۴ میلی بوده برای یک لحظه رؤیت شده و دوباره ناپدید گشته است. بلافاصله یک ضد موشک با تندی ثابتی معادل سه برابر موشک اول پرتاب شده است. مسیر موشک دوم چه باید باشد تا به موشک اول برسد؟ (فرض کنید هر دو موشک در یک صفحه حرکت می‌کنند.)

۱۷. ثابت کنید اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول همگن بشکل $y' = f(x, y)$ در مختصات قطبی نوشته شود به یک معادله جدائی پذیر تبدیل می‌شود. از این روش استفاده کرده معادله $y' = (y - x)/(y + x)$ را حل کنید.

۱۸. جسمی (که در فضا حرکت می‌کند) دارای بردار سرعت $\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ است که در آن ω ثابت مثبتی بوده و $\mathbf{r}$ بردار مکان می‌باشد. ثابت کنید جسم در امتداد یک دایره با تندی زاویه‌ای ثابت ω حرکت می‌کند. (تندی زاویه‌ای بنا به تعریف $|d\theta/dt|$ است که در آن θ زاویه قطبی در لحظه t می‌باشد.)

۱۹. جسمی در یک صفحه عمود بر محور z در حرکت است. حرکت در امتداد دایره‌ای که مرکزش بر این محور است صورت می‌گیرد.

(الف) نشان دهید که برداری چون $\mathbf{w}(t)$ موازی محور z هست بطوری که

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}(t)$$

که در آن $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ بردارهای مکان و سرعت در لحظه t می‌باشند. بردار $\mathbf{w}(t)$ را بردار سرعت زاویه‌ای و اندازه آن $\omega(t) = \|\mathbf{w}(t)\|$ را تندی زاویه‌ای می‌نامند.

(ب) بردار $\mathbf{a}(t) = \mathbf{w}'(t)$ بردار شتاب زاویه‌ای نامیده می‌شود. نشان دهید که بردار شتاب $\mathbf{a}(t) [= \mathbf{v}'(t)]$ از دستور زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{a}(t) = [\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] \mathbf{w}(t) - \omega^2(t) \mathbf{r}(t) + \omega(t) \times \mathbf{r}(t).$$

(پ) اگر جسم در صفحه xy بوده و تندی زاویه‌ای $\omega(t)$ ثابت باشد، مثلاً $\omega(t) = \omega$ ،

ثابت کنید بردار شتاب $\mathbf{a}(t)$ مایل به مرکز است و در واقع $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$.

۲۰. می‌گویند یک جسم دارای حرکت جسم صلب است هرگاه، بازای هر دو ذره p و q در آن، فاصله $\|\mathbf{r}_p(t) - \mathbf{r}_q(t)\|$ ، که $\mathbf{r}_p(t)$ و $\mathbf{r}_q(t)$ بردارهای مکان p و q در لحظه t اند، از t مستقل باشد. ثابت کنید در یک حرکت جسم صلب که در هر ذره p حول محور z می‌چرخد داریم $\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}_p(t)$ که در آن $\mathbf{w}(t)$ برای تمام ذرات یکی بوده و $\mathbf{v}_p(t)$ سرعت ذره p می‌باشد.

۲۰.۱۴ کاربردهانی در حرکت سیارات

منجم آلمانی، یوهان کپلر^۱ (۱۶۳۰ - ۱۵۷۱)، با تحلیل انبوه اطلاعاتی که تا سال ۱۶۰۰

درباره حرکت سیارات جمع شده بود سعی کرد قوانین ریاضی حاکم بر حرکت سیارات را کشف کند. تا آن زمان شش سیاره شناخته شده بودند و، مطابق نظریه کپرنیکی، این تصور می رفت که مدار آنها بر پوسته های کروی متحدالمرکزی حول خورشید قرار دارند. کپلر تلاش کرد نشان دهد که اشعه این پوسته ها با پنج جسم منتظم در هندسه ارتباط دارند. او هوشمندانه این ایده را مطرح کرد که منظومه شمسی چیزی شبیه یک معمای چینی است. کپلر خورشید را در مرکز منظومه قرار داد. بعد، بتوالی، شش کره هم مرکز که بتوان آنها را از داخل و خارج بر پنج جسم منتظم، یعنی هشت وجهی، بیست وجهی، دوازده وجهی، چهار وجهی، و مکعب، با همین ترتیب (از داخل به خارج) محاط و محیط کرد. درونی ترین کره، محاط در هشت وجهی منتظم، متناظر مسیر عطارد بود. کره بعدی، محیط بر هشت وجهی و محاط در بیست وجهی، برای مدار زهره تخصیص یافته بود. مدار زمین بر کره ای واقع می شد که بر بیست وجهی محیط بوده و در دوازده وجهی محاط شده است، و به همین ترتیب تا آخر. بیرونی ترین کره، که حاوی مدار مشتری است، بر مکعب محیط می شد. اگرچه این نظریه با تقریب پنج درصد صحیح می نمود اما دقت مشاهدات نجومی در آن زمان با درصد خطای به مراتب کمتری صورت می گرفت، و کپلر بالاخره فهمید که باید این نظریه را اصلاح نماید. پس از بررسی های بسیار دریافت که اطلاعات مربوط به مدارات بیشتر شایسته مسیرهای بیضوی است تا مسیرهای مستدیر دستگاه کپرنیکی. پس از چندسال تلاش مداوم دیگر کپلر سه قانون مشهور خود را، که بطور تجربی به آنها رسیده بود، بیان کرد که تمام پدیده های نجومی شناخته شده تا آن زمان را توضیح می دادند. این قوانین را می توان بشرح زیر بیان داشت:

قانون اول کپلر: سیارات بر بیضیهائی در حرکتند که خورشید در یکی از کانونهای آنها است.

قانون دوم کپلر: بردار مکان از خورشید تا سیاره مساحتی را بمیزانی ثابت جارومی کند.

قانون سوم کپلر: مربع دوره تناوب یک سیاره با مکعب فاصله میانگینی اش تا خورشید متناسب است.

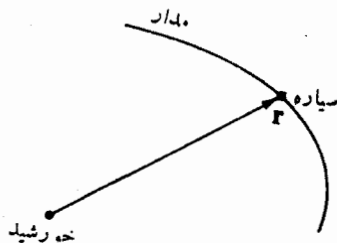
توجه: منظور از دوره تناوب یک سیاره یعنی زمان لازم برای آنکه یکبار دور مدار بیضوی بچرخد. فاصله میانگینی تا خورشید مساوی نصف طول محور اطول بیضی می باشد.

تنظیم این قوانین از روی جداول نجومی کاری بس بزرگ بود. قریب به ۵۰ سال بعد نیوتن ثابت کرد که هر سه قانون کپلر نتایجی از دومین قانون حرکت و قانون جاذبه عمومی مشهورش می باشند. در این بخش از روشهای برداری استفاده کرده نشان می دهیم که چگونه می توان قوانین کپلر را از قوانین نیوتن نتیجه گرفت. فرض کنیم یک خورشید ثابت بجرم M و یک سیاره متحرک بجرم m داریم که

با نیروی F بسمت خورشید جذب می‌شود. (از اثر نیروهای دیگر صرف‌نظر می‌شود). قانون دوم حرکت نیوتن چنین می‌گوید که

$$F = ma \quad (28.14)$$

که در آن a بردار شتاب سیاره متحرک می‌باشد. بردار مکان از خورشید به سیاره را (مثل شکل ۱۹.۱۴) با r نشان می‌دهیم، قرار می‌دهیم $r = ||r||$ و فرض می‌کنیم u_r یک بردار



شکل ۱۹.۱۴ بردار مکان از خورشید تا سیاره.

یکه همجهت r باشد، پس $r = ru_r$. قانون جاذبه عمومی می‌گوید که

$$F = -G \frac{mM}{r^2} u_r$$

که در آن G ثابت است. از تلفیق این رابطه با (۲۸.۱۴) خواهیم داشت

$$a = - \frac{GM}{r^2} u_r \quad (29.14)$$

که به ما شعاعی بودن شتاب را بازگو می‌کند. لحظه‌ای دیگر ثابت می‌کنیم که مدار در یک صفحه قرار دارد. بمحض دانستن این مطلب، از نتایج بخش ۱۷.۱۴ فوراً معلوم می‌شود که بردار مکان مساحتی را بمیزانی ثابت جارو خواهد کرد.

برای اینکه ثابت کنیم مسیر در یک صفحه است از این مطلب که r و a موازیند استفاده می‌کنیم. اگر بردار سرعت $v = dr/dt$ را معرفی کنیم خواهیم داشت

$$r \times a = r \times \frac{dv}{dt} + v \times v = r \times \frac{dv}{dt} + \frac{dr}{dt} \times v = \frac{d}{dt} (r \times v).$$

چون $r \times a = 0$ این یعنی که $r \times v$ بردار ثابتی می‌باشد، مثلاً $r \times v = c$.

اگر $c = 0$ بردار مکان r با v موازی بوده و حرکت در امتداد یک خط راست صورت می‌گیرد. چون مسیر یک سیاره خط مستقیم نیست باید داشته باشیم $c \neq 0$. رابطه $r \times v = c$ نشان می‌دهد که $r \cdot c = 0$ پس بردار مکان در صفحه‌ای عمود بر c قرار دارد. از آنجا که شتاب شعاعی است r مساحتی بمیزان ثابت جارو خواهد کرد. این قانون

دوم کپلر را ثابت می‌کند.

اثبات اینکه این میزان ثابت درست نصف طول بردار $\mathbf{c}$ است آسان خواهد بود. درواقع اگر مختصات قطبی بکار برده و سرعت را برحسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ ، مثل معادله (۲۵.۱۴)، بیان کنیم خواهیم داشت

$$(۳۰.۱۴) \mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (r\mathbf{u}_r) \times \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta,$$

و در نتیجه $\|\mathbf{c}\| = |r^2 d\theta/dt|$. این، بنابر (۲۷.۱۴)، مساوی $|A'(t)|$ است که در آن $A'(t)$ میزانی است که بردار شعاعی مساحت جارو می‌کند.

قانون دوم کپلر در شکل ۲۰.۱۴ نشان داده شده است. دو ناحیه سایه‌دار، که توسط بردار مکان در فاصله‌های زمانی برابر جارو شده‌اند، مساحت مساوی دارند.

حال ثابت می‌کنیم مسیریک بیضی است. ابتدا حاصلضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ را تشکیل داده و با استفاده از (۲۹.۱۴) و (۳۰.۱۴) درخواهیم یافت که

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{c} &= \left(-\frac{GM}{r^2} \mathbf{u}_r \right) \times \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta \right) \\ &= -GM \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta) = GM \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \end{aligned}$$

چون $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ و $\mathbf{u}_\theta = d\mathbf{u}_r/d\theta$ می‌توان معادله قبلی برای $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ را این طور هم نوشت:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \frac{d}{dt} (GM \mathbf{u}_r).$$

انتگرالگیری به ما این نتیجه را می‌دهد:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM \mathbf{u}_r + \mathbf{b}$$

که در آن $\mathbf{b}$ بردار ثابت دیگری است. این را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$(۳۱.۱۴) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM(\mathbf{u}_r + \mathbf{e})$$

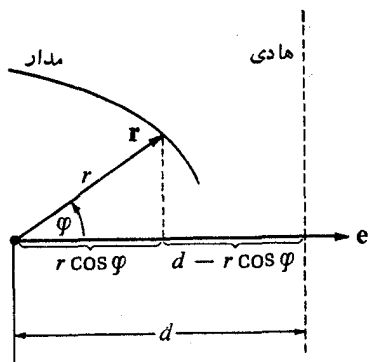
که در آن $\mathbf{b} = GM\mathbf{e}$. این رابطه را با (۳۰.۱۴) تلفیق می‌کنیم تا $\mathbf{v}$ حذف شده و معادله‌ای برای r بدست آید. برای این کار طرفین (۳۰.۱۴) را در $\mathbf{c}$ و دو طرف (۳۱.۱۴) را در $\mathbf{r}$ ضرب نقطه‌ای می‌کنیم. اگر دو عبارت مربوط به حاصلضرب سه‌گانه اسکالر $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{c}$ را متحد قرار دهیم به معادله

$$(۳۲.۱۴) \quad GMr(1 + e \cos \varphi) = c^2$$

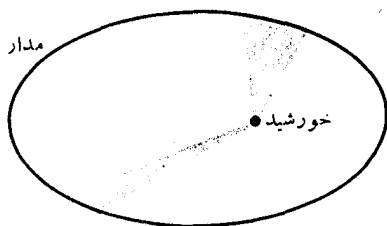
می‌رسیم که در آن $e = \|\mathbf{e}\|$ ، $c = \|\mathbf{c}\|$ ، و φ زاویه بین بردار ثابت $\mathbf{e}$ و بردار شعاعی $\mathbf{r}$ می‌باشد. (ر.ک. شکل ۲۱.۱۴). اگر قرار دهیم $d = c^2/GMe$ معادله (۳۲.۱۴) بصورت

$$(۳۳.۱۴) \quad r = e(d - r \cos \varphi) \quad \text{یا} \quad r = \frac{ed}{e \cos \varphi + 1}$$

درخواهد آمد. این، بنا به قضیه ۱۸.۱۳، معادله قطبی یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e و یک کانون درخورشید است. شکل ۲۱.۱۴ خط هادی عمود بر e که در فاصله d از خورشید رسم شده نشان می‌دهد. فاصله سیاره تا خط هادی برابر $d - r \cos \varphi$ است و نسبت $r/(d - r \cos \varphi)$ مساوی خروج از مرکز e می‌باشد. مخروطی یک بیضی است



شکل ۲۱.۱۴ نسبت $r/(d - r \cos \varphi)$ مساوی خروج از مرکز $e = ||\mathbf{e}||$ است.



شکل ۲۰.۱۴ قانون دوم کپلر. دونا حیه سایه دار، که در فاصله‌های زمانی مساوی چارو شده اند، مساحات مساوی دارند.

اگر $e < 1$ ، سهمی است اگر $e = 1$ ، و هذلولی است اگر $e > 1$. چون می‌دانیم سیارات در مسیرهای بسته حرکت می‌کنند پس مدار مورد نظر باید یک بیضی باشد. این قانون اول کپلر را ثابت می‌کند.

بالاخره قانون سوم کپلر را نتیجه می‌گیریم. فرض کنیم محور اطول بیضی بطول $2a$ و محور اقصرش بطول $2b$ باشد. پس مساحت آن πab خواهد بود. T را مدت زمانی می‌گیریم که سیاره یکبار دور بیضی می‌گردد. چون بردار مکان مساحتی بمیزان $c/2$ چارو می‌کند خواهیم داشت $\pi ab = (cT)/2$ یا $T = (2\pi ab)/c$. می‌خواهیم ثابت کنیم T^2 با a^3 متناسب است.

از بخش ۲۲.۱۳ داریم $b^2 = a^2(1 - e^2)$ و $ed = a(1 - e^2)$ ، پس

$$c^2 = GMed = GMa(1 - e^2),$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{GMa(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

چون T^2 مساوی حاصلضرب مقداری ثابت در a^3 است پس این قانون سوم کپلر را ثابت خواهد کرد.

۲۱.۱۴ تمرینات متفرقه برای دوره

۱. فرض کنید r بردار واصل از مبدأ به نقطه دلخواهی بر سهمی $y^2 = x$ بوده، α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) زاویه بین r با خط مماس باشد، و θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) زاویه‌ای باشد که r با قسمت محور x می‌سازد. α را بر حسب θ بیان نمایید.

۲. نشان دهید که بردار $T = y\mathbf{i} + 2cx\mathbf{j}$ بر سهمی $y^2 = 4cx$ در نقطه (x, y) مماس است و بردار $N = 2cy\mathbf{i} - T$ بر T عمود می‌باشد.

[دانهمایی: معادله برداری سهمی را بنویسید، از y بعنوان پارامتر استفاده کنید.]

۳. ثابت کنید که معادله خطی بشیب m و مماس بر سهمی $y^2 = 4cx$ را می‌توان به شکل $y = mx + c/m$ نوشت. مختصات نقطه تماس چه هستند؟

۴. (الف) تمرین ۳ را برای سهمی $(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$ حل کنید.

(ب) تمرین ۳ را برای سهمی $x^2 = 4cy$ و، بطور کلی، برای سهمی

$$(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0)$$

حل کنید.

۵. ثابت کنید که معادله خط مماس بر سهمی $y^2 = 4cx$ در نقطه (x_1, y_1) را می‌شود به شکل $y_1 y = 2c(x + x_1)$ نوشت.

۶. تمرین ۵ را برای هر یک از سهمیهای تمرین ۴ حل کنید.

۷. (الف) فرض کنید P نقطه‌ای بر سهمی $y = x^2$ باشد. Q را نقطه برخورد خط قائم در P با محور y بگیرید. حد Q ، وقتی P به محور y میل کند، چه خواهد بود؟

(ب) همین مسئله را برای منحنی $y = f(x)$ ، که برای آن $f'(0) = 0$ ، حل کنید.

۸. فرض کنید خط $y = c$ سهمی $y = x^2$ را در دو نقطه قطع می‌کند. شعاع دایره‌ای را بیابید که از این دو نقطه و رأس سهمی می‌گذرد. شعاعی را که تعیین می‌کنید به c بستگی دارد. این شعاع، وقتی $c \rightarrow 0$ ، چه وضعی خواهد داشت؟

۹. ثابت کنید نقطه (x_0, y_0) داخل، بر، یا خارج بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ است بسته به اینکه $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2$ کوچکتر، مساوی، یا بزرگتر از ۱ باشد.

۱۰. بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ نشان دهید که بردارهای T و N بمعادلات

$$T = -\frac{y}{b^2}\mathbf{i} + \frac{x}{a^2}\mathbf{j}, N = \frac{x}{a^2}\mathbf{i} + \frac{y}{b^2}\mathbf{j}$$

وقتی در نقطه (x, y) قرار می‌گیرند بترتیب مماس و قائم بریضی خواهند بود. اگر θ زاویه خروج از مرکز در (x_0, y_0) باشد نشان دهید که خط مماس در (x_0, y_0) از معادله دکارتی

$$\frac{x}{a} \cos \theta_0 + \frac{y}{b} \sin \theta_0 = 1$$

برخورددار است.

۱۱. نشان دهید که خط مماس بریضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ در نقطه (x_0, y_0) دارای معادله $x_0 x/a^2 + y_0 y/b^2 = 1$ است.

۱۲. ثابت کنید حاصلضرب فواصل قائم کانونهای یک بیضی از هر خط مماس ثابت است، این مقدار ثابت مجذور نصف طول محور اقصر خواهد بود.

۱۳. دو خط مماس بریضی $x^2 + 4y^2 = 8$ رسم شده‌اند که هر دو موازی خط $x + 2y = 7$ هستند. نقاط تماس را پیدا کنید.

۱۴. دایره‌ای از دو کانون یک بیضی گذشته و در دو نقطه بر آن مماس است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۵. فرض کنید V یکی از دو رأس یک هذلولی باشد که طول محور متقاطع آن $2a$ بوده و خروج از مرکزش 2 است. فرض کنید P نقطه‌ای واقع بر همان شاخه‌ای باشد که V در آن است. مساحت ناحیه محصور به هذلولی و پاره خط VP را به A نشان داده و فرض کنید r طول VP باشد.

(الف) محورهای مختصات را در محل مناسبی قرار داده و معادله‌ای برای این هذلولی بنویسید.

(ب) مساحت A را بصورت یک انتگرال بیان کرده و، بدون محاسبه آن، نشان دهید که $A r^{-2}$ ، وقتی P به V میل کند، به حدی میل خواهد کرد. این حد را پیدا کنید.

۱۶. نشان دهید که بردارهای

$$N = (x/a^2)\mathbf{i} - (y/b^2)\mathbf{j} \text{ و } T = (y/b^2)\mathbf{i} + (x/a^2)\mathbf{j}$$

در صورتی که در نقطه (x, y) هذلولی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ قرارگیرند بترتیب براین هذلولی مماس و قائم خواهند بود.

۱۷. نشان دهید که خط مماس بر هذلولی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ در نقطه (x_0, y_0) بمعادله $x_0 x/a^2 - y_0 y/b^2 = 1$ است.

۱۸. خط قائم در هر نقطه از یک منحنی و خط واصل بین آن نقطه و مبدأ مثلث متساوی-الساقینی می‌سازند که قاعده‌اش بر محور x قرار دارد. نشان دهید که این منحنی یک هذلولی است.

۱۹. خط قائم در نقطه P از یک منحنی محور x را در X و محور y را در Y قطع می‌کند. این منحنی را بیابید در صورتی که هر P نقطه وسط پاره خط نظیر XY بوده و نقطه

(۵، ۴) بر منحنی قرار داشته باشد.

۲۵. ثابت کنید حاصلضرب فواصل قائم هر نقطه دلخواه واقع بر یک هذلولی تا مجانبهایش مقدار ثابتی است.

۲۱. یک منحنی با معادله قطبی $r = f(\theta)$ داده شده است. f را در صورتی بیابید که طول یک قوس دلخواه واصل بین دو نقطه متمایز منحنی متناسب باشد با (الف) اندازه زاویه‌ای که قوس در مبدأ در برمی‌گیرد؛ (ب) تفاضل فواصل شعاعی از مبدأ تا نقاط انتهائی قوس؛ (پ) مساحت قطاعی که از این قوس و شعاعهای نقاط انتهائیش تشکیل می‌شود.

۲۲. اگر یک منحنی در فضای سه بعدی بوسیله تابع برداری $\mathbf{r}$ توصیف شود که بر بازه پارامتری $[a, b]$ تعریف شده است ثابت کنید حاصلضرب سه‌گانه اسکالر

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(a) \times \mathbf{r}(b)$$

لااقل برای یک t در (a, b) صفر است. این نتیجه را تعبیر هندسی نمائید.

۱۵

فضاهای خطی

۱۰۱۵ مقدمه

در سراسر این کتاب با نمونه‌های زیادی از اشیاء ریاضی برخوردیم که می‌توانند با هم جمع و یا اینکه در اعداد حقیقی ضرب شوند. مقدم بر همه، اعداد حقیقی خود از این اشیاء هستند. سایر مثالها عبارت خواهند بود از توابع حقیقی، اعداد مختلط، سریهای نامتناهی، بردارها در فضای n بعدی، و توابع برداری. در این فصل یکی از مفاهیم کلی ریاضی، بنام فضای خطی، را مطرح می‌کنیم که همه این مثالها و بسیاری دیگر را بعنوان حالاتی خاص در بردارد.

بطور خلاصه، یک فضای خطی مجموعه‌ای است از عناصر از هر نوع که می‌توان بر آنها اعمال مشخصی (بنام جمع و ضرب در اعداد) را انجام داد. در تعریف فضای خطی ما نه سرشت عناصر را مشخص می‌کنیم و نه می‌گوئیم اعمال چگونه بر آنها صورت می‌گیرد. در عوض قید می‌کنیم که اعمال خواص معینی دارند که آنها را بعنوان اصول موضوع برای فضای خطی در نظر می‌گیریم. حال به شرح مبسوط این اصول می‌پردازیم.

۲۰۱۵ تعریف فضای خطی

فرض کنیم V یک مجموعه ناتهی از اشیاء، که عنصر نامیده می‌شوند، باشد. مجموعه V را یک فضای خطی خوانند هرگاه در ده اصل موضوع زیر که به سه گروه تقسیم شده‌اند صدق کند.

اصول موضوع بسته بودن

اصل موضوع ۱. بسته بودن تحت جمع. به هر جفت عنصر x و y در V یک عنصر منحصر-بفرد در V بنام مجموع x و y نظیر شده که با $x + y$ نشان داده می‌شود.

اصل موضوع ۲. بسته بودن تحت ضرب در اعداد حقیقی. به هر x در V و هر عدد حقیقی a عنصری در V بنام حاصلضرب a و x نظیر شده که با ax نشان داده می‌شود.

اصول موضوع برای جمع

اصل موضوع ۳. قانون تعویض پذیری. برای هر x و y در V داریم $x + y = y + x$.

اصل موضوع ۴. قانون شرکت پذیری. برای هر x, y, z در V داریم

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

اصل موضوع ۵. وجود عنصر صفر. عنصری در V که با O نموده می‌شود، وجود دارد بطوری که

$$x + O = x, \quad \forall x \text{ در } V$$

اصل موضوع ۶. وجود قرینه‌ها. برای هر x در V عنصر $(-1)x$ دارای این خاصیت است:

$$x + (-1)x = O.$$

اصول موضوع برای ضرب در اعداد

اصل موضوع ۷. قانون شرکت پذیری. برای هر x در V و همه اعداد حقیقی a و b داریم

$$a(bx) = (ab)x.$$

اصل موضوع ۸. قانون پخش پذیری برای جمع در V . برای هر x و y در V و همه a های حقیقی داریم

$$a(x + y) = ax + ay.$$

اصل موضوع ۹. قانون پخش پذیری برای جمع اعداد. برای هر x در V و کلیه a و b های حقیقی داریم

$$(a + b)x = ax + bx.$$

اصل موضوع ۱۰. وجود همانی. برای هر x در V داریم $1x = x$.

گاهی فضاهای خطی، بصورتی که در بالا تعریف شد، را فضاهای خطی حقیقی می نامیم تا برضرب عناصر V در اعداد حقیقی تأکید شده باشد. اگر در اصول موضوع ۲، ۷، ۸، و ۹ عدد مختلط جایگزین عدد حقیقی شود نهاد حاصل یک فضای خطی مختلط نام خواهد داشت. گاهی فضای خطی فضای برداری خطی یا فقط فضای برداری نامیده می شود؛ اعدادی که بعنوان ضریب بکار رفته اند اسکالر نیز نام دارند. اسکالرهایی یک فضای خطی حقیقی اعداد حقیقی و اسکالرهایی یک فضای خطی مختلط اعداد مختلط خواهند بود. اگرچه ماعدتاً با نمونه‌هایی از فضاهای خطی حقیقی سروکار داریم لیکن همه قضا یا برای فضاهای خطی مختلط نیز اعتبار دارند. وقتی از اصطلاح فضای خطی بدون توضیح بیشتر استفاده می کنیم فرض این است که فضا می تواند حقیقی یا مختلط باشد.

۳.۱۵ مثالهایی از فضاهای خطی

اگر مجموعه V را مشخص کرده و بگوئیم چگونه عناصرش با هم جمع و چطور در اعداد ضرب می شوند به یک نمونه واقعی از فضاهای خطی دست می یابیم. خواننده می تواند با آسانی تحقیق کند که هر یک از مثالهای زیر در کلیه اصول موضوع فضای خطی حقیقی صدق می کند.

مثال ۱. فرض می کنیم $V = \mathbb{R}$ ، یعنی مجموعه همه اعداد حقیقی بوده، و $x + y$ و ax را جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی باشند.

مثال ۲. فرض می کنیم $V = \mathbb{C}$ ، یعنی مجموعه همه اعداد مختلط بوده، و $x + y$ را جمع معمولی اعداد مختلط و ax را ضرب عدد مختلط x در عدد حقیقی a تعریف می کنیم. با اینکه عناصر V اعداد مختلط هستند اما این یک فضای خطی حقیقی است زیرا اسکالرهاش حقیقی می باشند.

مثال ۳. فرض می کنیم $V = V_n$ ، یعنی فضای برداری همه n تاییهای اعداد حقیقی باشد که در آن جمع و ضرب در اسکالرها بر ووال معمول برحسب مؤلفه‌ها تعریف شده اند.

مثال ۴. فرض می کنیم V مجموعه همه بردارهایی در V_n باشد که بر بردار ناصفر مفروض N عمودند. اگر $n = 2$ این فضای خطی خط مستقیمی است مار بر O که N بردار قائم آن می باشد. چنانچه $n = 3$ این فضا صفحه‌ای مار بر O با بردار قائم N خواهد بود.

مثالهای زیر فضاهای تابعی نامیده می شوند. عنصرهای V توابع حقیقی هستند بطوری که جمع دو تابع f و g بطور معمول تعریف می شود: بازای هر x حقیقی در اشتراک قلمروهای f و g ،

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

ضرب تابع f در اسکالر حقیقی a این طور تعریف می گردد: af تابعی است که مقدارش در هر x از قلمرو f مساوی $af(x)$ می باشد. عنصر صفر تابعی است که مقادیرش همه جا صفرند. خواننده می تواند با آسانی تحقیق کند که هر یک از مجموعه های زیر یک فضای تابعی است.

مثال ۵. مجموعه همه توابعی که بریک بازه مفروض تعریف شده اند.

مثال ۶. مجموعه کلیه چندجمله ایها.

مثال ۷. مجموعه همه چندجمله ایها از درجه نایبتر از n که n ثابت است. (هر موقع این مجموعه را در نظر می گیریم فرض این است که چندجمله ای صفر نیز در آن گذارده شده است.) مجموعه همه چندجمله ایها از درجه n یک فضای خطی نیست زیرا اصول موضوع بسته بودن برقرار نمی باشند. برای مثال، مجموع دو چندجمله ای از درجه n لزوماً از درجه n نخواهد بود.

مثال ۸. مجموعه همه توابع پیوسته بریک بازه مفروض. اگر بازه $[a, b]$ باشد این فضا را با $C(a, b)$ نشان خواهیم داد.

مثال ۹. مجموعه همه توابعی که در یک نقطه مفروض مشتق پذیرند.

مثال ۱۰. مجموعه همه توابعی که بریک بازه مفروض انتگرال پذیرند.

مثال ۱۱. مجموعه کلیه توابع f که $f(1) = 0$. در این مثال عدد ۰ مهم است. اگر ۰ را با عدد ناصفر c عوض کنیم اصول موضوع بسته بودن را نقض خواهیم کرد.

مثال ۱۲. مجموعه همه جوابهای معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + ay' + by = 0$ که در آن a و b ثوابت معلومی هستند. در اینجا نیز ۰ اهمیت دارد. مجموعه جوابهای یک معادله دیفرانسیل غیر همگن در اصول موضوع بسته بودن صدق نمی کنند.

این مثالها و بسیاری دیگر نشانگر آنند که چگونه مفهوم فضای خطی در جبر، هندسه، و آنالیز نفوذ دارد. وقتی از اصول موضوع فضای خطی قضیه ای نتیجه می شود یکبار به نتیجه ای خواهیم رسید که برای هر مثال واقعی معتبر است. بایکی کردن مثالهای متفرق باین طریق بیش عمیقتری نسبت به هر یک از آنها بدست خواهد آمد. گاهی اطلاع ویژه ای از یک مثال خاص در پیش بینی و یا تعبیر نتایج برقرار برای سایر مثالها مؤثر بوده و روابطی را که در غیر این صورت ممکن است از نظر دور بمانند آشکار می سازد.

۴.۱۵ نتایج مقدماتی اصول موضوع

فضای زیر بآسانی از اصول موضوع فضای خطی نتیجه می‌شوند.

قضیه ۴.۱۵. یکتائی عنصر صفر. در هر فضای خطی یک و فقط یک عنصر صفر وجود دارد.

پرهان. اصل موضوع ۵ به ما می‌گوید که لااقل یک عنصر صفر وجود دارد. فرض کنیم دو عنصر صفر، مثلاً O_1 و O_2 ، وجود می‌داشت. با فرض $x = O_1$ و $O = O_2$ در اصل موضوع ۵ داریم $O_1 + O_2 = O_1$. بهمین نحو، با اختیار $x = O_1$ و $O = O_2$ خواهیم داشت $O_2 + O_1 = O_2$. اما، بواسطه قانون تعویضپذیری، $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$ پس $O_1 = O_2$.

قضیه ۴.۱۵. یکتائی عناصر قرینه. در هر فضای خطی هر عنصر دقیقاً یک قرینه دارد. یعنی، بازای هر x ، یک و فقط یک y هست که $x + y = O$.

پرهان. اصل موضوع ۶ به ما می‌گوید که هر x دارای حداقل یک قرینه، یعنی $(-1)x$ ، هست. فرض کنیم x دو قرینه، مثلاً y_1 و y_2 را، داشته باشد. در اینصورت $x + y_1 = O$ و $x + y_2 = O$. اگر y_2 را به طرفین معادله اول افزوده و از اصل موضوع ۵، ۴، و ۳ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2$$

و

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$

بنابراین $y_1 = y_2$ پس x دقیقاً یک قرینه، یعنی عنصر $(-1)x$ را، خواهد داشت.

نمادگذاری. قرینه x با $-x$ نموده می‌شود. تفاضل $y - x$ مساوی مجموع $y + (-x)$ تعریف می‌گردد.

قضیه بعد پاره‌ای از خواص را که بر اعمال جبری مقدماتی در یک فضای خطی حاکمند وصف می‌کند.

قضیه ۴.۱۵. در یک فضای خطی داده شده فرض می‌کنیم x و y عناصر دلخواه و a و b اسکالرها دلخواهی باشند. در اینصورت خواص زیر را خواهیم داشت:

$$(الف) \quad 0x = O$$

$$(ب) \quad aO = O$$

$$(پ) \quad (-a)x = -(ax) = a(-x)$$

(ت) هرگاه $ax = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $x = 0$ ؛

(ث) هرگاه $ax = ay$ و $a \neq 0$ آنگاه $x = y$ ؛

(ج) هرگاه $ax = bx$ و $x \neq 0$ آنگاه $a = b$ ؛

(چ) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$

(ح) $x + x = 2x$ ، $x + x + x = 3x$ ، بطور کلی، $\sum_{i=1}^n x = nx$

ما (الف)، (ب)، و (پ) را ثابت می‌کنیم و اثبات سایر خواص را بعنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

برهان (الف). فرض کنیم $z = 0$ ، $x = 0$ می‌خواهیم ثابت کنیم $z = 0$ با افزودن z به خودش و استفاده از اصل موضوع ۹ خواهیم داشت

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

حال $z - z$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم تا $z = 0$ بدست آید.

برهان (ب). فرض کنیم $z = a0$ ، z را با خودش جمع می‌کنیم، و اصل موضوع ۸ را بکار می‌بریم.

برهان (پ). فرض کنیم $z = (-a)x$ ، با افزودن z به ax و استفاده از اصل موضوع ۹ خواهیم داشت

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = 0,$$

پس z قرینه ax است، یعنی $z = -(ax)$. بهمین نحو، اگر $a(-x)$ را به ax افزوده و از اصل موضوع ۸ و خاصیت (ب) استفاده کنیم، درخواهیم یافت که $a(-x) = -(ax)$.

۵.۱۵ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۲۸ تحقیق کنید که اگر جمع و ضرب در اسکالرهای حقیقی مطابق معمول تعریف شوند مجموعه‌های داده شده فضای خطی حقیقی هستند یا نه. برای آنهایی که نیستند بگوئید کدام اصول موضوع برقرار نمی‌باشند. توابع تمرینات ۱ تا ۱۷ حقیقی هستند. در تمرینات ۳، ۴، و ۵ قلمرو هر تابع حاوی ۰ و ۱ است و در تمرینات ۷ تا ۱۲ هر قلمرو شامل همه اعداد حقیقی می‌باشد.

۱. تمام توابع گویا.

۲. تمام توابع گویای f/g که درجه f از درجه g نایبتر است (با انضمام $f = 0$).

۳. همه f هایی که $f(0) = f(1)$. ۴. همه f هایی که $f(1) = 2f(0)$.

۵. همه f هایی که $f(0) = 1 + f(1)$. ۶. تمام توابع پله‌ای تعریف شده بر $[0, 1]$.

۷. همه f ‌های که، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، تمام توابع زوج.
 ۹. تمام توابع فرد.
 ۱۰. تمام توابع کراندار.
 ۱۱. تمام توابع صعودی.
 ۱۲. تمام توابع با دوره تناوب 2π .
 ۱۳. همه f ‌های انتگرالپذیر بر $[0, 1]$ که $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
 ۱۴. همه f ‌های انتگرالپذیر بر $[0, 1]$ که $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$.
 ۱۵. همه f ‌هایی که بازای هر x ، $f(x) = f(1-x)$.
 ۱۶. تمام چندجمله‌ایهای تیلور از درجهٔ نایشتراز n بازای n ثابت (با ضمام چندجمله‌ای صفر).

۱۷. تمام جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

که در آن توابع مفروض P و Q همه جا پیوسته‌اند.

۱۸. تمام دنباله‌های حقیقی کراندار.
 ۱۹. تمام دنباله‌های حقیقی همگرا.
 ۲۰. تمام سریهای حقیقی همگرا.
 ۲۱. تمام سریهای حقیقی بطور مطلق همگرا.
 ۲۲. تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $z = 0$.
 ۲۳. تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $x = 0$ یا $y = 0$.
 ۲۴. تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $y = 5x$.
 ۲۵. تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $3x + 4y = 1$ و $z = 0$.
 ۲۶. تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مضارب اسکالر $(1, 2, 3)$ اند.
 ۲۷. تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مؤلفه‌هایشان در یک دستگاه سه‌معادلهٔ خطی بشکل

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0,$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

صدق می‌کنند.

۲۸. تمام بردارهایی در V_n که ترکیبات خطی دو بردار مفروض A و B اند.
 ۲۹. فرض کنید $V = R^+$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد. «مجموع» دو عنصر x و y در V را مساوی حاصلضرب $x \cdot y$ (بمعنی معمولی) و «حاصلضرب» عنصر x در V در اسکالر c را برابر x^c تعریف کنید. ثابت کنید V یک فضای خطی حقیقی است که ۱ عنصر صفر آن است.

۳۰. (الف) ثابت کنید اصل موضوع ۱۰ را می‌توان از سایر اصول نتیجه گرفت.
 (ب) ثابت کنید اگر اصل موضوع ۶ با اصل موضوع ۶' زیر عوض شود دیگر نمی‌توان اصل موضوع ۱۰ را از سایر اصول نتیجه گرفت.
 اصل موضوع ۶': بازای هر x در V عنصری مثل y در V هست که $x + y = 0$.

۳۱. فرض کنید S مجموعه تمام جفتهای مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی باشد. در هر حالت تحقیق کنید آیا S با اعمال جمع و ضرب در اسکالرها که در زیر تعریف شده اند یک فضای خطی هست یا نه. اگر مجموعه یک فضای خطی نیست تعیین کنید کدام اصول برقرار نمی باشند.

$$(الف) \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, 0), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$(ب) \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$(پ) \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$$

$$(ت) \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$$

$$a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|).$$

۳۲. قسمتهای (ت) تا (ح) قضیه ۳۰.۱۵ را ثابت کنید.

۶.۱۵ زیرفضاهای یک فضای خطی

فرض کنیم V فضائی خطی و S یک زیرمجموعه ناتهی آن باشد. هرگاه S نیز با همان اعمال جمع و ضرب در اسکالرها یک فضای خطی باشد آنگاه S یک زیر فضای V نام دارد. قضیه زیر برای تعیین اینکه زیرمجموعه ای از یک فضای خطی یک زیرفضا هست یا نه محک ساده ای بدست می دهد.

قضیه ۴.۱۵. فرض کنیم S یک زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی V باشد. در این صورت S یک زیرفضا است اگر و فقط اگر در اصول موضوع بسته بودن صدق کند.

برهان. اگر S یک زیرفضا باشد در تمام اصول موضوع یک فضای خطی صدق می کند، و لذا، بخصوص، در اصول موضوع بسته بودن صدق خواهد کرد.

حال نشان می دهیم که اگر S در اصول موضوع بسته بودن صدق کند در سایر اصول نیز صادق خواهد بود. قوانین تعویض پذیری و شرکت پذیری برای جمع (اصول ۳ و ۴) و اصول موضوع ضرب در اسکالرها (اصول ۷ تا ۱۵) خود بخود در S صادقند زیرا برای همه عناصرهای V برقرار می باشند. می ماند تحقیق اصول موضوع ۵ و ۶، وجود عنصر صفر در S ، و وجود قرینه برای هر عنصر در S .

فرض کنیم x عنصری از S باشد. (S ، بدلیل تهی نبودنش، لااقل یک عنصر دارد.) بنا بر اصل موضوع ۲، بازای هر اسکالر a ، ax در S است. با فرض $a = 0$ نتیجه می شود که $0x$ در S می باشد. اما، بنا بر قضیه ۳۰.۱۵ (الف)، $0x = 0$ ، پس $0 \in S$ و اصل موضوع ۵ برقرار خواهد بود. با فرض $a = -1$ می بینیم که $(-1)x$ در S است. اما $0x + (-1)x = x$ زیرا $x + (-1)x = 0$ (هر دو در V هستند، پس اصل موضوع ۶ در S صادق می باشد. لذا S یک زیر فضای V خواهد بود.

تعریف. فرض کنیم S یک زیرمجموعه ناتهی یک فضای خطی V باشد. عنصر x در V بشکل

$$x = \sum_{i=1}^k c_i x_i,$$

که در آن $x_1, \dots, x_k$ همه در S بوده و $c_1, \dots, c_k$ اسکالر می‌باشند، یک ترکیب خطی متناهی از عناصر S نام دارد. مجموعه کلیه ترکیبات خطی متناهی از عناصر S در اصول موضوع بسته بودن صدق می‌کند، و در نتیجه زیر فضائی از V خواهد بود. ما این را زیر فضای پیموده شده بوسیله S ، یا پیمای خطی S ، نامیده و با $L(S)$ نشان می‌دهیم. اگر S تهی باشد $L(S)$ را مساوی $\{0\}$ ، یعنی مجموعه‌ای فقط مشتمل بر عنصر صفر، تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌های مختلف ممکن است یک زیر فضا را پیمایند. مثلاً فضای V بوسیله هریک از مجموعه‌های $\{i, j\}$ ، $\{i + j, i, j\}$ ، و $\{i + j, -j, -i, j, 0\}$ از بردار ها پیموده می‌شود. فضای کلیه چندجمله‌ایهای $p(t)$ از درجه نایبتر از n بوسیله مجموعه $n + 1$ چندجمله‌ای

$$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

پیموده می‌شود. این فضا بوسیله مجموعه $\{1, t/2, t^2/3, \dots, t^n/(n+1)\}$ و مجموعه $\{1, (1+t), (1+t)^2, \dots, (1+t)^n\}$ پیموده می‌شود. فضای کلیه چندجمله‌ایها بوسیله مجموعه نامتناهی $\{1, t, t^2, \dots\}$ از چندجمله‌ایها پیموده خواهد شد.

در اینجا چند سؤال بطور طبیعی مطرح می‌شوند. برای مثال، چه فضاهائی بوسیله یک مجموعه متناهی از عناصر پیموده می‌شوند؟ اگر یک فضا را بشود بوسیله مجموعه‌ای متناهی از عناصر پیمود حداقل عنصرهای لازم چندتا است؟ برای بحث درباره اینها و سایر سؤالات مربوطه، مفاهیم وابستگی، استقلال، پایه‌ها، و بعد را معرفی می‌کنیم. با این مفاهیم در فصل ۱۲ ضمن مطالعه فضای برداری V_n مواجه شدیم. حال آنها را به فضاهای خطی کلی تعمیم می‌دهیم.

۷.۱۵ مجموعه‌های وابسته و مستقل در یک فضای خطی

تعریف. مجموعه S از عناصر در فضای خطی V را وابسته نامند هرگاه مجموعه‌ای متناهی از عنصرهای متبایز در S ، مثلاً $x_1, \dots, x_k$ ، و مجموعه متناظری از اسکالره‌ای $c_1, \dots, c_k$ ، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = 0.$$

مجموعه S را مستقل خوانند هرگاه وابسته نباشد. در این حالت، بازای هر انتخاب از عناصر

متناهی $x_1, \dots, x_k$ و اسکالرهایی $c_1, \dots, c_k$

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = 0 \quad \text{ایجاب می کند که } c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

با آنکه وابستگی و استقلال از خواص مجموعه‌هایی از عناصرند اما ما این اصطلاحات را برای خود عناصرها هم بکار می‌بریم. برای مثال، عنصرهای یک مجموعه مستقل نیز عنصرهای مستقل نامیده می‌شوند.

اگر S یک مجموعه متناهی باشد تعریف پیشگفته با تعریفی که در فصل ۱۲ برای فضای V_n داده شد مطابقت دارد. لکن تعریف حاضر به مجموعه‌های متناهی محدود نخواهد شد.

مثال ۱. هرگاه زیر مجموعه T از مجموعه S وابسته باشد آنگاه S خود نیز وابسته است. این منطقیاً معادل آن است که بگوئیم هر زیر مجموعه یک مجموعه مستقل مجموعه‌ای مستقل می‌باشد.

مثال ۲. هرگاه عنصری در S مضرب اسکالری از عنصر دیگر باشد آنگاه S وابسته خواهد بود.

مثال ۳. هرگاه $O \in S$ آنگاه S وابسته است.

مثال ۴. مجموعه تهی مستقل است.

بسیاری از مجموعه‌های وابسته و مستقل از بردارهای V_n در فصل ۱۲ بحث شدند. مثالهای زیر این مفاهیم را در فضاهای تابعی نشان می‌دهند. در هر حالت فضای خطی زمینه V مجموعه تمام توابع حقیقی است که بر خط حقیقی تعریف شده‌اند.

مثال ۵. فرض کنیم بازای هر t حقیقی $u_1(t) = \sin t$ و $u_2(t) = \cos t$ و $u_3(t) = 1$. اتحاد فیثاغورس نشان می‌دهد که $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$ پس سه تابع u_1, u_2, u_3 وابسته خواهند بود.

مثال ۶. فرض کنیم بازای $k = 0, 1, 2, \dots$ و هر t حقیقی $u_k(t) = t^k$. مجموعه $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ مستقل است. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم که بازای هر $n, n+1$ چند جمله‌ای $u_0, u_1, \dots, u_n$ مستقل هستند. هر رابطه بشکل $\sum c_k u_k = 0$ بدین معنی است که بازای هر t حقیقی

$$\sum_{k=0}^n c_k t^k = 0. \quad (1.15)$$

این، وقتی $t = 0$ نتیجه می‌دهد که $c_0 = 0$. با مشتقگیری از (۱.۱۵) و گذاردن $t = 0$ در آن خواهیم داشت $c_1 = 0$. با تکرار این عمل درمی‌یابیم که هر ضریب c_k صفر خواهد بود.

مثال ۷. اگر $a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی متمایزی باشند n تابع نمائی

$$u_1(x) = e^{a_1 x}, \dots, u_n(x) = e^{a_n x}$$

مستقل خواهند بود. این را می توان باستقرا بر n ثابت کرد. نتیجه وقتی $n = 1$ بدیهی است. پس فرض می کنیم برای $n - 1$ تابع نمائی درست بوده واسکالرهایی $c_1, \dots, c_n$ را طوری می گیریم که

$$(2.15) \quad \sum_{k=1}^n c_k e^{a_k x} = 0.$$

فرض کنیم a_M ماکزیم n عدد $a_1, \dots, a_n$ باشد. با ضرب طرفین (۲.۱۵) در $e^{-a_M x}$ خواهیم داشت

$$(3.15) \quad \sum_{k=1}^n c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0.$$

اگر $k \neq M$ عدد $a_k - a_M$ منفی خواهد بود. بنابراین، وقتی در معادله (۳.۱۵) $x \rightarrow +\infty$ ، هر جمله با $k \neq M$ به صفر میل می کند و خواهیم داشت $c_M = 0$. چنانچه از (۲.۱۵) جمله a_M را حذف کرده و فرض استقرا را بکار ببریم درمی یابیم که هریک از $n - 1$ ضریب باقیمانده c_k صفر خواهد بود.

قضیه ۵.۱۵. فرض کنیم S مجموعه مستقلی مرکب از k عنصر در فضای خطی V بوده و $L(S)$ زیرفضای پیموده شده بوسیله S باشد. در اینصورت هر مجموعه از $k + 1$ عنصر در $L(S)$ وابسته خواهد بود.

برهان. وقتی $V = V_n$ قضیه ۵.۱۵ به قضیه ۸.۱۲ تبدیل می شود. اگر برهان قضیه ۸.۱۲ را بررسی کنیم درمی یابیم که فقط بر فضای خطی بودن V_n تکیه داشته و به هیچ ویژگی خاص از V_n متکی نیست. لذا برهانی که برای قضیه ۸.۱۲ داده ایم در مورد هر فضای خطی V اعتبار خواهد داشت.

۸.۱۵ پایه ها و بعد

تعریف. مجموعه متناهی S از عنصرها در فضای خطی V را یک پایه متناهی برای V خوانند هرگاه S مستقل بوده و V را بپیماید. فضای V را با بعد متناهی نامند هرگاه پایه ای متناهی داشته و یا اینکه V فقط از O تشکیل شده باشد. در غیر اینصورت V با بعد نامتناهی خوانده خواهد شد.

قضیه ۶.۱۵. فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد متناهی باشد. در اینصورت هر پایه متناهی برای V از یک تعداد عنصر برخوردار است.

برهان. فرض کنیم S و T دو پایه متناهی برای V باشند. همچنین S از k عنصر و T از m عنصر تشکیل شده باشد. چون S مستقل بوده و V را می‌پیماید قضیه ۵.۱۵ به ما می‌گوید که هر مجموعه از $k+1$ عنصر در V وابسته می‌باشد. بنابراین، هر مجموعه با بیش از k عنصر در V وابسته خواهد بود. چون T مجموعه‌ای مستقل است باید داشته باشیم $m \leq k$. همین استدلال زمانی که S و T با هم عوض شوند نشان می‌دهد که $k \leq m$. بنابراین $k = m$.

تعریف. اگر فضای خطی V پایه‌ای مرکب از n عنصر داشته باشد عدد صحیح n بعد نامیده می‌شود. می‌نویسیم $n = \dim V$. چنانچه $V = \{O\}$ می‌گوئیم V دارای بعد ۰ است.

مثال ۱. فضای V_n دارای بعد n است. یک پایه برای آن مجموعه n برداریکه مختصات می‌باشد.

مثال ۲. فضای کلیه چندجمله‌ایهای $p(t)$ از درجه نایبتر از n دارای بعد $n+1$ است. مجموعه $n+1$ چندجمله‌ای $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ یک پایه برای آن خواهد بود. هر چندجمله‌ای از درجه نایبتر از n یک ترکیب خطی از این $n+1$ چندجمله‌ای می‌باشد.

مثال ۳. فضای جوابهای معادله دیفرانسیل $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ بعدش دو است. یکی از پایه‌ها از دو تابع $u_1(x) = e^{-x}$ و $u_2(x) = e^{3x}$ تشکیل شده است. هر جواب یک ترکیب خطی از این دو خواهد بود.

مثال ۴. فضای همه چندجمله‌ایهای $p(t)$ با بعد نامتناهی است. با آنکه مجموعه نامتناهی $\{1, t, t^2, \dots\}$ این فضا را می‌پیماید اما هیچ مجموعه متناهی از چندجمله‌ایها این فضا را نخواهد پیمود.

قضیه ۷.۱۵. فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد متناهی بوده $\dim V = n$. دد-اینصورت این مطالب را خواهیم داشت:

- (الف) هر مجموعه از عناصر مستقل در V زیرمجموعه‌ای است از یک پایه برای V ؛
(ب) هر مجموعه از n عنصر مستقل پایه‌ای برای V خواهد بود.

برهان. برهان (الف) با برهان قسمت (ب) قضیه ۱۰.۱۲ یکی است. برهان (ب) همان برهان قسمت (ب) قضیه ۱۰.۱۲ خواهد بود.

فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد n بوده و یک پایه را که عناصرش $e_1, \dots, e_n$ با ترتیب معین هستند در نظر می‌گیریم. ما چنین پایه مرتب را با n تایی $(e_1, \dots, e_n)$ می‌نمایانیم. اگر $x \in V$ می‌توان x را بصورت یک ترکیب خطی از عناصر این پایه بیان داشت:

$$(۴.۱۵) \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

ضرائب این معادله n تائی $(c_1, \dots, c_n)$ از اعداد را تشکیل می‌دهند که بطور منحصربه‌فرد بوسیله x معین می‌شود. درواقع، هرگاه نمایش دیگری از x بصورت یک ترکیب خطی از $e_1, \dots, e_n$ داشته باشیم، مثلاً $x = \sum_{i=1}^n d_i e_i$ ، آنگاه، با تفریق این از (۴.۱۵)، درمی‌یابیم که $\sum_{i=1}^n (c_i - d_i) e_i = 0$ ، اما، چون عناصر پایه مستقل هستند، این می‌رساند که بازای هر i ، $c_i = d_i$ ، پس خواهیم داشت $(c_1, \dots, c_n) = (d_1, \dots, d_n)$.

مؤلفه‌های n تائی مرتب $(c_1, \dots, c_n)$ که با معادله (۴.۱۵) تعیین می‌شوند مؤلفه‌های x نسبت به پایه مرتب $(e_1, \dots, e_n)$ نام دارند.

۹.۱۵ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۱۰ فرض کنید S مجموعه همه بردارهای (x, y, z) در V_3 باشد که مؤلفه‌هایشان در شرط داده شده صدق می‌کنند. تعیین کنید آیا S یک زیرفضای V_3 هست یا نه. اگر S یک زیرفضا بود $\dim S$ را حساب کنید.

$$.x + y = 0 \quad ۲ \quad .x = 0 \quad ۱$$

$$.x = y \quad ۴ \quad .x + y + z = 0 \quad ۳$$

$$.x = z \text{ یا } x = y \quad ۶ \quad .x = y = z \quad ۵$$

$$.x + y = 1 \quad ۸ \quad .x^2 - y^2 = 0 \quad ۷$$

$$.z = 3x \text{ و } y = 2x \quad ۹$$

$$.x - y - z = 0 \text{ و } x + y + z = 0 \quad ۱۰$$

فرض کنید P_n فضای خطی کلیه چندجمله‌ایهای حقیقی از درجه نایشتتر از n (n ثابت) باشد. در هر یک از تمرینات ۱۱ تا ۲۰، S را مجموعه همه چندجمله‌ایهای f در P_n بینگارید که در شرط داده شده صدق می‌کنند. تعیین کنید آیا S یک زیرفضای P_n هست یا نه. اگر S یک زیرفضا بود $\dim S$ را حساب کنید.

$$.f'(0) = 0 \quad ۱۲ \quad .f(0) = 0 \quad ۱۱$$

$$.f(0) + f'(0) = 0 \quad ۱۴ \quad .f''(0) = 0 \quad ۱۳$$

$$.f(0) = f(2) \quad ۱۶ \quad .f(0) = f(1) \quad ۱۵$$

$$.f \text{ فرد است.} \quad ۱۸ \quad .f \text{ زوج است.} \quad ۱۷$$

$$.f = 0 \text{ یا } f \text{ نایشتتر است از } k, \text{ که } k < n \quad ۱۹$$

$$.f = 0 \text{ یا } f \text{ مساوی } k, \text{ که } k < n \text{ است یا } f \text{ نایشتتر است از } k, \text{ که } k < n \quad ۲۰$$

۲۱. در فضای خطی کلیه چندجمله‌ایهای حقیقی $p(t)$ زیرفضائی را وصف کنید که بوسیله

هر یک از زیرمجموعه‌های زیر از چندجمله‌ایها پیموده می‌شود و بعد این زیرفضا را معین نمائید.

(الف) $\{1, t^2, t^4\}$; (ب) $\{t, t^3, t^5\}$; (پ) $\{t, t^2\}$; (ت) $\{1 + t, (1 + t)^2\}$.

۲۲. در این تمرین $L(S)$ زیرفضائی است که بوسیلهٔ زیرمجموعهٔ S از فضای خطی V پیموده می‌شود. هر یک از احکام (الف) تا (ج) را ثابت کنید.

(الف) $S \subseteq L(S)$.

(ب) هرگاه $S \subseteq T \subseteq V$ و T زیرفضائی از V باشد آنگاه $L(S) \subseteq L(T)$. این خاصیت را با گفتن اینکه $L(S)$ کوچکترین زیرفضائی از V است که حاوی S می‌باشد توصیف می‌کنند.

(پ) زیرمجموعهٔ S از V یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر $L(S) = S$.

(ت) هرگاه $S \subseteq T \subseteq V$ آنگاه $L(S) \subseteq L(T)$.

(ث) هرگاه S و T زیرفضاهائی از V باشند آنگاه $S \cap T$ نیز چنین است.

(ج) هرگاه S و T زیرمجموعه‌هائی از V باشند آنگاه

$$L(S \cap T) \subseteq L(S) \cap L(T).$$

(ج) مثالی بیاورید که در آن $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.

۲۳. فرض کنید V فضای خطی کلیهٔ توابع حقیقی باشد که بر خط حقیقی تعریف شده‌اند. تعیین کنید آیا زیرمجموعه‌های زیر از V وابسته هستند یا که مستقل. بعد زیرفضای

پیموده شده بوسیلهٔ هر مجموعه را حساب کنید.

(الف) $\{1, e^{ax}, e^{bx}\}$, $a \neq b$ (ب) $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$

(پ) $\{1, e^{ax}, xe^{ax}\}$ (ت) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$

(ث) $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$ (ج) $\{\cos x, \sin x\}$

(چ) $\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$ (ح) $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$

(خ) $\{\sin x, \sin^2 x\}$ (د) $\{e^x \cos x, e^{-x} \sin x\}$

۲۴. فرض کنید V یک فضای خطی با بعد متناهی بوده و S زیرفضائی از آن باشد. هر یک از احکام زیر را ثابت نمائید.

(الف) $\dim S \leq \dim V$ با بعد متناهی است و $\dim S = \dim V$ اگر و فقط اگر $S = V$.

(ب) هر پایه برای S بخشی از یک پایه برای V است.

(ت) هر پایه برای V لزوماً شامل پایه‌ای برای S نخواهد بود.

۱۰۱۵ ضربهای داخلی، فضاهای اقلیدسی، نرمها

در هندسهٔ اقلیدسی معمولی آن خواصی که برامکان اندازه‌گیری طول پاره‌خطها و زوایای

بین خطوط تکیه دارند خواص متری نامیده می‌شوند. ما در بررسی V_n طولها و زوایا را برحسب حاصلضرب نقطه‌ای تعریف کردیم. حال می‌خواهیم این مفاهیم را به فضاهای خطی کلیتری تعمیم دهیم. ابتدا تعمیمی از ضرب نقطه‌ای، که ما آن را ضرب داخلی می‌نامیم، معرفی کرده و سپس طول و زاویه را برحسب حاصلضرب داخلی تعریف خواهیم کرد.

در فصل ۱۲ حاصلضرب نقطه‌ای $x \cdot y$ دو بردار

$$y = (y_1, \dots, y_n) \text{ و } x = (x_1, \dots, x_n)$$

در V_n با دستور

$$(5.15) \quad x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

تعریف شد. در یک فضای خطی کلی، برای حاصلضربهای داخلی، بجای $x \cdot y$ می‌نویسیم (x, y) ، و ضرب را بعوض آنکه با دستور مشخصی تعریف کنیم بطور اصل موضوعی معرفی می‌نمائیم. یعنی چند خاصیت را که می‌خواهیم ضربهای داخلی داشته باشند بیان کرده و آنها را بعنوان اصول موضوع در نظر می‌گیریم.

تعریف. گویند فضای خطی حقیقی V دارای ضرب داخلی است هرگاه به هر جفت عنصر x و y در V عدد حقیقی منحصر بفرد (x, y) نظیر شود که بازای کلیه انتخابهای x, y, z در V و همه اسکالرهایی حقیقی c در اصول موضوع زیر صدق نماید:

$$(1) \quad (x, y) = (y, x) \text{ (تعویض پذیری یا تقارن)};$$

$$(2) \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z) \text{ (پخش پذیری یا خطی بودن)};$$

$$(3) \quad c(x, y) = (cx, y) \text{ (شرکت پذیری یا همگنی)};$$

$$(4) \quad \text{اگر } x \neq 0, (x, x) > 0 \text{ (مثبت بودن)}.$$

هر فضای خطی حقیقی با یک ضرب داخلی یک فضای اقلیدسی حقیقی نامیده می‌شود.

توجه: با فرض $c = 0$ در (۳) خواهیم دید که بازای هر $y, (0, y) = 0$.

در یک فضای خطی مختلط، حاصلضرب داخلی (x, y) عدد مختلطی است که در همان اصول موضوع داخلی حقیقی صدق می‌کند باستثنای اینکه رابطه

$$(1') \quad (x, y) = \overline{(y, x)},$$

جایگزین اصل موضوع تقارن می‌شود که در آن $\overline{(y, x)}$ مزدوج مختلط (y, x) است. در اصل موضوع همگنی ضریب اسکالر c می‌تواند هر عدد مختلطی باشد. از اصل موضوع همگنی و (۱') رابطه لنگه

$$(x, cy) = \overline{(cy, x)} = \overline{c(y, x)} = \bar{c}(x, y)$$

را نتیجه خواهیم گرفت.

یک فضای خطی مختلط دارای ضرب داخلی یک فضای اقلیدسی مختلط نامیده می‌شود. گاهی اوقات اصطلاح فضای یک‌ه‌ای نیز بکار برده می‌شود. یک نمونه فضای برداری مختلط $V_{\mathbb{C}}(C)$ است که باختصار در بخش ۱۶.۱۲ از آن بحث شد.

با اینکه ما عمدتاً به نمونه‌هایی از فضاهای اقلیدسی حقیقی توجه داریم ولی فضایی این فصل برای فضاهای اقلیدسی مختلط نیز معتبرند. وقتی اصطلاح فضای اقلیدسی را بدون توضیح بیشتری بکار می‌بریم فرض آن است که فضا می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد. خواننده باید تحقیق کند که هر یک از مثالهای زیر در کلیه اصول موضوع ضرب داخلی صدق می‌کند.

مثال ۱. در $V_{\mathbb{R}}$ قرار می‌دهیم $(x, y) = x \cdot y$ ، یعنی حاصلضرب نقطه‌ای معمولی x و y .

مثال ۲. اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ دو بردار دلخواه در V_2 باشند (x, y) را با دستور

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

تعریف می‌کنیم. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است در یک فضای خطی معلوم بیش از یک ضرب داخلی وجود داشته باشد.

مثال ۳. فرض کنیم $C(a, b)$ فضای خطی کلیه توابع حقیقی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد. حاصلضرب داخلی دو تابع f و g را با دستور

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

تعریف می‌کنیم. این دستور شبیه معادله (۵.۱۵) است که معرف حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار در $V_{\mathbb{R}}$ می‌باشد. مقادیر تابعی $f(t)$ و $g(t)$ نقش مؤلفه‌های x_i و y_i را داشته و انتگرال‌گیری جای جمع‌بندی را می‌گیرد.

مثال ۴. در فضای $C(a, b)$ تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)dt$$

که در آن w یک تابع مثبت ثابت در $C(a, b)$ است. تابع w تابع وزن نامیده می‌شود. در مثال ۳، برای هر t داریم $w(t) = 1$.

مثال ۵. در فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_0^{\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt.$$

این انتگرال مجازی، بعلت وجود سازه نمائی، بازای هر انتخابی از چندجمله‌ایهای f و g همگرا است.

قضیه ۸.۱۵. در فضای اقلیدسی V هر ضرب داخلی در نامساوی کشی - شوارتز صدق می‌کند:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y), \quad \forall x, y \text{ در } V$$

بعلاوه، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند.

برهان. وقتی نتیجه متناظر را برای بردارها در V_n (قضیه ۳.۱۲) ثابت می‌کردیم تذکر دادیم که برهان نتیجه خواص ضرب نقطه‌ای مذکور در قضیه ۲.۱۲ است و به تعریف خاصی که این خواص از آن ناشی شده بستگی ندارد. در نتیجه آن برهان در هر فضای اقلیدسی حقیقی نیز معتبر خواهد بود. وقتی این برهان را در یک فضای اقلیدسی مختلط بکار می‌بریم نامساوی $(x, y)(y, x) \leq (x, x)(y, y)$ را بدست می‌آوریم که همان نامساوی کشی - شوارتز است زیرا

$$(x, y)(y, x) = (x, y)\overline{(x, y)} = |(x, y)|^2.$$

مثال. اگر قضیه ۸.۱۵ در مورد فضای $C(a, b)$ با ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

بکار رود خواهیم دید که نامساوی کشی - شوارتز بشکل

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right)$$

درمی‌آید.

با استفاده از ضرب داخلی می‌توان مفهوم متری طول را در هر فضای اقلیدسی معرفی کرد.

تعریف. در فضای اقلیدسی V عدد نامنفی $\|x\|$ که با معادله

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

تعریف می‌شود نرم عنصر x نام خواهد داشت.

وقتی نامساوی کشی - شوارتز بر حسب نرمها بیان شود بشکل

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

درخواهد آمد.

چون ممکن است تعریف یک ضرب داخلی بطرق گوناگونی صورت گیرد پس نرم یک عنصر تابع انتخاب ضرب داخلی خواهد بود. باید انتظار این عدم یکنائی را داشت. این وضع مشابه آن است که می توان برای اندازه گیری یک پاره خط معلوم از اعداد متفاوتی (بسته به انتخاب مقیاس یا واحد اندازه گیری) استفاده کرد. قضیه بعدی خواص اساسی نرمها را که تابع انتخاب ضرب داخلی نیستند بدست می دهد.

قضیه ۹.۱۵. در یک فضای اقلیدسی هر نرم بازای کلیه عنصرهای x و y و هر اسکالر c از خواص زیر برخوردار است:

(الف) اگر $x = 0$ ، $\|x\| = 0$ ؛

(ب) اگر $x \neq 0$ ، $\|x\| > 0$ (مثبت بودن)؛

(پ) $\|cx\| = |c| \|x\|$ (همگنی)؛

(ت) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی).

تساوی در (ت) برقرار است هرگاه $x = 0$ یا $y = 0$ یا، بازای c ای مثبت، $y = cx$.

برهان. خواص (الف)، (ب)، و (پ) فوراً از اصول موضوع ضرب داخلی نتیجه می شوند. برای اثبات (ت) توجه می کنیم که

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)}.\end{aligned}$$

مجموع $(x, y) + \overline{(x, y)}$ حقیقی است. نامساوی کشی - شوارتز نشان می دهد که

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \text{ و } |\overline{(x, y)}| \leq \|x\| \|y\|$$

پس داریم

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

این (ت) را ثابت می کند. وقتی $y = cx$ ، که $c > 0$ ، خواهیم داشت

$$\|x + y\| = \|x + cx\| = (1 + c)\|x\| = \|x\| + \|cx\| = \|x\| + \|y\|.$$

تعریف. در فضای اقلیدسی حقیقی V زاویه بین عناصر ناصفر x و y مساوی آن θ در بازه $0 \leq \theta \leq \pi$ تعریف می شود که در معادله

$$(۹.۱۵) \quad \cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

صدق می کند.

توجه: نامساوی کشی - شوارتز نشان می دهد که کسر سمت راست (۹.۱۵) در بازه

[۱، ۱-] قرار دارد، پس درست یک θ در $[0, \pi]$ هست که کسینوس آن مساوی این کسر خواهد بود.

۱۱-۱۵ تعامد در یک فضای اقلیدسی

تعریف. دو عنصر x و y در فضای اقلیدسی V را متعامد نامند هرگاه حاصلضرب داخلی آنها صفر باشد. زیرمجموعه S از V را یک مجموعه متعامد خوانند هرگاه بازای هر جفت عنصر متمایز x و y در S ، $(x, y) = 0$. یک مجموعه متعامد را متعامدیکه می نامند هرگاه نرم هر عنصر آن ۱ باشد.

عنصر صفر به هر عنصر V متعامد است؛ این تنها عنصر متعامد بخود می باشد. قضیه بعدی رابطه بین تعامد و وابستگی را نشان خواهد داد.

قضیه ۱۵-۱۵. در فضای اقلیدسی V هر مجموعه متعامد از عناصر ناصفر مستقل است. بخصوص، در یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی که $\dim V = n$ ، هر مجموعه متعامد مشتمل بر n عنصر ناصفر یک پایه برای V خواهد بود.

پروهان. فرض کنیم S یک مجموعه متعامد از عناصر ناصفر در V بوده و یک ترکیب خطی متناهی از عناصر S صفر باشد، مثلاً

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = 0$$

که در آن هر $x_i \in S$. با ضرب نقطه‌ای هر طرف در x_1 و استفاده از این مطلب که اگر $i \neq 1$ ، $(x_1, x_i) = 0$ ، درمی یابیم که $c_1(x_1, x_1) = 0$ ، اما، چون $x_1 \neq 0$ ، $(x_1, x_1) \neq 0$ ، پس $c_1 = 0$. اگر این استدلال را برای x_j بجای x_1 تکرار کنیم درخواهیم یافت که هر $c_j = 0$. این ثابت می کند که S مستقل است. چنانچه $\dim V = n$ و S از n عنصر تشکیل شده باشد قضیه ۷-۱۵ (ب) نشان می دهد که S یک پایه برای V خواهد بود.

مثال. در فضای خطی حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

فرض می کنیم S مجموعه توابع مثلثاتی $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ باشد که این طور داده شده اند:

$$u_0(x) = 1, u_1(x) = \cos nx, u_2(x) = \sin nx \text{ و } u_{n-1}(x) = \cos nx, n = 1, 2, \dots$$

اگر $m \neq n$ روابط تعامد

$$\int_0^{2\pi} u_n(x) u_m(x) dx = 0$$

را خواهیم داشت، پس S یک مجموعه متعامد خواهد بود. چون هیچیک از اعضای S عنصر صفر نیست پس S مستقل می باشد. نرم هر عنصر S را می شود باسانی حساب کرد. داریم

$$(u_0, u_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$$

و، برای $n \geq 1$ ، خواهیم داشت

$$(u_{2n-1}, u_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi, (u_{2n}, u_{2n}) = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

بنابراین $\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$ و، برای $n \geq 1$ ، $\|u_n\| = \sqrt{\pi}$. اگر هر u_n را بر نرمش تقسیم کنیم مجموعه متعامدیکه $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ را بدست می آوریم که در آن

$$\varphi_n = u_n / \|u_n\|$$

پس چنین خواهیم داشت:

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \text{ و } \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \text{؛ برای } \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

در بخش ۱۳.۱۵ ثابت خواهیم کرد که هر فضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای یک پایه متعامد است. قضیه بعدی نحوه محاسبه مؤلفه های یک عنصر را نسبت به چنین پایه ای نشان می دهد.

قضیه ۱۱.۱۵. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی و دارای بعد n بوده و $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متعامدی برای V باشد. هرگاه عنصر x بصورت یک ترکیب خطی از عناصر پایه، مثلاً بشکل

$$(7.15) \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i,$$

بیان شده باشد آنگاه مؤلفه های آن نسبت به پایه مرتب $(e_1, \dots, e_n)$ با دستورهای زیر بیان می شوند:

$$(8.15) \quad c_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)}, \text{ برای } j = 1, 2, \dots, n$$

بخصوص، اگر S یک پایه متعامدیکه باشد، هر c_j از

$$(9.15) \quad c_j = (x, e_j)$$

بدست خواهد آمد.

برهان. اگر هرطرف (7.15) را در e_j ضرب داخلی کنیم، چون برای

$$(e_i, e_j) = 0, i \neq j$$

$$(x, e_j) = \sum_{i=1}^n c_i (e_i, e_j) = c_j (e_j, e_j).$$

این (۸.۱۵) را ایجاب می‌کند و، وقتی $(e_j, e_j) = 1$ ، (۹.۱۵) را بدست خواهیم آورد. اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامدیکه باشد معادله (۷.۱۵) را می‌توان بشکل

$$(10.15) \quad x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

نوشت. قضیه بعدی نشان می‌دهد که در یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی و دارای پایه متعامدیکه، حاصلضرب داخلی دو عنصر بر حسب مؤلفه‌های آنها قابل محاسبه است.

مثال ۱۲.۱۵. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی و دارای بعد n بوده و $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامدیکه برای V باشد. دایانصودت بازی هرجفت ازعصرهای x و y در V داریم

$$(11.15) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n (x, e_i) \overline{(y, e_i)} \quad (\text{دستور پارسوال}).$$

خصوصاً، وقتی $x = y$ خواهیم داشت

$$(12.15) \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2.$$

برهان. با ضرب داخلی هرطرف معادله (۱۰.۱۵) در y و استفاده ازخاصیت خطی ضرب داخلی، (۱۱.۱۵) بدست می‌آید. وقتی $x = y$ معادله (۱۱.۱۵) به (۱۲.۱۵) بدل خواهد شد.

توجه: معادله (۱۱.۱۵) بافتخار پارسوال (۱۸۳۶-۱۷۷۶)، که این نوع دستور را در یک فضای تابعی خاص بدست آورد، نامگذاری شده است.

۱۲.۱۵ تمرینات

۱. فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ بردارهای دلخواهی در V_n باشند. در هر حالت معین کنید آیا (x, y) که با دستور داده شده تعریف گشته یک ضرب داخلی برای V_n هست یا خیر. درحالتی که (x, y) یک ضرب داخلی نیست بگوئید کدام اصول موضوع برقرار نمی‌باشند.

$$(x, y) = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \quad (\text{ب}) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i |y_i| \quad (\text{الف})$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 \right)^{1/2} \quad (\text{ت}) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \quad (\text{پ})$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (\text{ث})$$

۲. فرض کنید سه اصل موضوع اول ضرب داخلی حقیقی (تقارن، خطی بودن، و همگنی) را نگهداشته ولی اصل موضوع چهارم را با این اصل جدید عوض کرده باشیم (۲'): $(x, x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$. ثابت کنید که یا بازای هر $x \neq 0$, $(x, x) > 0$ و یا، بازای هر $x \neq 0$, $(x, x) < 0$.

[ادغامی: فرض کنید بازای $x \neq 0$, $(x, x) > 0$ و، بازای $y \neq 0$, $(y, y) < 0$. درفضای پیموده شده بوسیله $\{x, y\}$ عنصر $z \neq 0$ را طوری بیابید که $[z, z] = 0$.

ثابت کنید هر یک از احکام تمرینات ۳ تا ۷ بازای کلیه عنصرهای x و y در یک فضای اقلیدسی حقیقی معتبرند.

$$\|x + y\| = \|x - y\| \quad \text{اگر و فقط اگر } (x, y) = 0. \quad ۳.$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{اگر و فقط اگر } (x, y) = 0. \quad ۴.$$

$$\|x + cy\| \geq \|x\| \quad \text{اگر و فقط اگر بازای هر } c \text{ حقیقی} \quad ۵.$$

$$\|x\| = \|y\| \quad \text{اگر و فقط اگر } (x + y, x - y) = 0. \quad ۶.$$

۷. هرگاه x و y عناصر ناصفری باشند که با هم زاویه θ می سازند آنگاه

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta.$$

۸. درفضای خطی حقیقی $C(1, e)$ ضرب داخلی را با معادله

$$(f, g) = \int_1^e (\log x) f(x) g(x) dx$$

تعریف می کنیم.

(الف) اگر $f(x) = \sqrt{x}$, $\|f\|$ محاسبه کنید.

(ب) چندجمله ای خطی $g(x) = a + bx$ را طوری بیابید که برتابع ثابت $f(x) = 1$ متعامد باشد.

۹. درفضای خطی حقیقی $C(-1, 1)$ فرض کنید $\int_{-1}^1 f(t) g(t) dt = (f, g)$. سه تابع u_1, u_2, u_3 را که

$$u_1(t) = 1, u_2(t) = t, u_3(t) = 1 + t$$

در نظر بگیرید. ثابت کنید که دوتای آنها متعامدند، دوتا باهم زاویه $\pi/3$ می سازند، و دوتایشان باهم زاویه $\pi/6$ خواهند ساخت.

۱۰. در فضای خطی P_n مرکب از همه چندجمله‌ایهای حقیقی از درجه نایبتر از n تعریف کنید

$$(f, g) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

(الف) ثابت کنید (f, g) یک ضرب داخلی برای P_n است.

(ب) (f, g) را وقتی حساب کنید که $f(t) = t$ و $g(t) = at + b$.

(پ) اگر $f(t) = t$ همه چندجمله‌ایهای خطی g را که به f متعامدند بدست آورید.

۱۱. در فضای خطی همه چندجمله‌ایهای حقیقی تعریف کنید

$$(f, g) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) g(t) dt.$$

(الف) ثابت کنید این انتگرال مجازی بازای کلیه چندجمله‌ایهای f و g بطور مطلق همگرا است.

(ب) اگر بازای $x_n(t) = t^n, n = 0, 1, 2, \dots$ ثابت کنید

$$(x_n, x_m) = (m + n)!$$

(پ) (f, g) را وقتی حساب کنید که $f(t) = (t + 1)^2$ و $g(t) = t^2 + 1$.

(ت) کلیه چندجمله‌ایهای خطی $g(t) = a + bt$ را که به $f(t) = 1 + t$ متعامدند پیدا کنید.

۱۲. در فضای خطی همه چندجمله‌ایهای حقیقی، اگر (f, g) با دستور داده شده تعریف گشته باشد، تعیین کنید آیا (f, g) یک ضرب داخلی هست یا خیر. در حالتی که (f, g) یک ضرب داخلی نیست نشان دهید کدام اصول نقض می‌شوند. در (پ) f' و g' مبین مشتق هستند.

$$(f, g) = \left| \int_0^1 f(t) g(t) dt \right| \quad (ب) \quad (f, g) = f(1) g(1) \quad (الف)$$

$$(f, g) = \int_0^1 f'(t) g'(t) dt \quad (پ)$$

$$(f, g) = \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \quad (ت)$$

۱۳. فرض کنید V از کلیه دنباله‌های نامتناهی $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی تشکیل شده که برای آنها سری $\sum x_n^2$ همگرا است. اگر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ دو عنصر از V باشند تعریف کنید

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

(الف) ثابت کنید که این سری بطور مطلق همگرا است.

[دانه‌مائی: از نامساوی کشی - شوارتز برای تخمین مجموع $\sum_{n=1}^M |x_n y_n|$ استفاده نمایید.]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (x, y) می‌باشد.

(پ) اگر برای $n \geq 1$ ، $x_n = 1/n$ و $y_n = 1/(n+1)$ ، (x, y) را حساب کنید.

(ت) اگر برای $n \geq 1$ ، $x_n = 2^n$ و $y_n = 1/n!$ ، (x, y) را محاسبه نمایید.

۱۴. فرض کنید V مجموعه همه توابع حقیقی f باشد که بر $(0, +\infty)$ پیوسته بوده و برای آنها انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-t} f^2(t) dt$ همگرا می‌باشد. تعریف کنید

$$(f, g) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) g(t) dt.$$

(الف) ثابت کنید انتگرال مربوط به (f, g) برای هر جفت از توابع f و g در V بطور مطلق همگرا است.

[دانه‌مائی: از نامساوی کشی - شوارتز برای تخمین انتگرال

$$\int_0^M e^{-t} |f(t) g(t)| dt$$

استفاده کنید.]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (f, g) می‌باشد.

(پ) اگر $f(t) = e^{-t}$ و $g(t) = t^n$ ، که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ ، (f, g) را محاسبه نمایید.

۱۵. در یک فضای اقلیدسی مختلط ثابت کنید که ضرب داخلی برای کلیه عناصر x, y, z و همه a و b های مختلط از خواص زیر برخوردار است.

$$(ax, by) = a\bar{b}(x, y) \quad (\text{الف})$$

$$(x, ay + bz) = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, z) \quad (\text{ب})$$

۱۶. ثابت کنید که اتحادهای زیر در هر فضای اقلیدسی معتبرند.

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x) \quad (\text{الف})$$

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(x, y) + 2(y, x) \quad (\text{ب})$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (\text{پ})$$

۱۷. ثابت کنید که اگر در فضای همه توابع مختلط پیوسته بر بازه $[a, b]$ ضرب داخلی را با دستور

$$(f, g) = \int_a^b w(t) f(t) \overline{g(t)} dt$$

تعریف کنیم، که در آن w یک تابع مثبت ثابت و پیوسته‌ای بر $[a, b]$ است، این فضا یک فضای یکه‌ای خواهد شد.

۱۳.۱۵ ساختن مجموعه‌های متعامد. فرایند گرام^۱ - اشمیت^۲

هر فضای خطی با بعد متناهی پایه‌ای متناهی دارد. اگر فضا اقلیدسی باشد همیشه می‌توان یک پایه متعامد برای آن ساخت. این بعنوان نتیجه‌ای از یک قضیه کلی بدست خواهد آمد که برهانش نحوه ساختن مجموعه‌های متعامد را در هر فضای اقلیدسی (با بعد متناهی یا نامتناهی) نشان می‌دهد. این ساختن به فرایند عمود سازی گرام - اشمیت، بافتخار گرام (۱۹۱۶ - ۱۸۵۰) و اشمیت (۱۹۲۱ - ۱۸۴۵)، نامگذاری شده است.

قضیه ۱۳.۱۵. قضیه عمود سازی. فرض کنیم $x_1, x_2, \dots$ دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از عناصر در فضای اقلیدسی V بوده و $L(x_1, \dots, x_k)$ نمایشگر زیرفضائی باشد که بوسیله k عنصر اول پی‌موده می‌شوند. در اینصورت دنباله متناظری از عناصر $y_1, y_2, \dots$ در V هست که از خواص زیر بازاری هر عدد صحیح k برخوردار است:

(الف) عنصر y_k به هر عنصر زیرفضای $L(y_1, \dots, y_{k-1})$ متعامد است؛

(ب) (زیرفضای پی‌موده شده بوسیله $y_1, \dots, y_k$ همان زیرفضای پی‌موده شده بوسیله $x_1, \dots, x_k$ می‌باشد؛

$$L(y_1, \dots, y_k) = L(x_1, \dots, x_k);$$

(پ) دنباله $y_1, y_2, \dots$ جزد سازه‌های اسکالر، منحصر بفرد است. یعنی، هرگاه $y'_1, y'_2, \dots$ دنباله دیگری از عناصر در V باشد که از خواص (الف) و (ب) بهره‌مند باشد، آنگاه بازاری هر k اسکالری چون c_k وجود دارد که $y'_k = c_k y_k$.

برهان. عنصرهای $y_1, y_2, \dots$ را باستقرا می‌سازیم. برای شروع کار قرار می‌دهیم $x_1 = y_1$. حال فرض کنیم $y_1, \dots, y_r$ طوری ساخته شده باشند که (الف) و (ب) بازاری $k = r$ برقرار شوند. در اینصورت y_{r+1} را با معادله

$$(13.15) \quad y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^r a_i y_i$$

تعریف می‌کنیم که در آن باید اسکالرهایی $a_1, \dots, a_r$ تعیین شوند. بازاری $r \leq j$ حاصل-ضرب داخلی y_{r+1} در y_j این طور داده می‌شود:

$$(y_{r+1}, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - \sum_{i=1}^r a_i(y_i, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - a_j(y_j, y_j)$$

زيرا كه اگر $j \neq i$, $(y_i, y_j) = 0$. چنانچه $y_j \neq 0$ مي توان با فرض

$$(14.15) \quad a_j = \frac{(x_{r+1}, y_j)}{(y_j, y_j)}$$

y_{r+1} را بر y_j عمود گردانند. هرگاه $y_j = 0$ آنگاه y_{r+1} بازاي هر انتخاب a_j به y_j متعامد است، و در اين حالت a_j را مساوي ۰ اختيار مي كنيم. در نتيجه عنصر y_{r+1} خوش تعريف بوده و به هر عنصر قبلي $y_1, \dots, y_r$ عمود مي باشد. در نتيجه به هر عنصر زيرفضاي

$$L(y_1, \dots, y_r)$$

عمود خواهد بود. اين (الف) را وقتي $k = r + 1$ ثابت مي كند.

براي اثبات (ب) در حالت $k = r + 1$ بايد نشان دهيم كه، با فرض

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) = L(x_1, \dots, x_{r+1}), \quad L(y_1, \dots, y_r) = L(x_1, \dots, x_r)$$

برقرار است. r عنصر اول $y_1, \dots, y_r$ در

$$L(x_1, \dots, x_r)$$

قرار دارند، و در نتيجه در زيرفضاي وسيعتر $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ جاي خواهند داشت. عنصر جديد y_{r+1} كه با (13.15) داده شده تفاضل دو عنصر در $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ است، پس اين عنصر نيز در $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ خواهد بود. اين ثابت مي كند كه

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) \subseteq L(x_1, \dots, x_{r+1}).$$

معادله (13.15) نشان مي دهد كه x_{r+1} مجموع دو عنصر در $L(y_1, \dots, y_{r+1})$ است، پس استدلالی مشابه را بطة شمول را در جهت ديگر بدست خواهد داد:

$$L(x_1, \dots, x_{r+1}) \subseteq L(y_1, \dots, y_{r+1}).$$

اين (ب) را براي وقتي $k = r + 1$ ثابت مي كند. در نتيجه هم (الف) و هم (ب) به استقرا بر k ثابت شده اند.

سرانجام (پ) را با استقرا بر k ثابت مي كنيم. حالت $k = 1$ بدیهی است. بنا بر اين فرض مي كنيم (پ) بازاي $k = r$ درست باشد و عنصر y'_{r+1} را در نظر مي گيريم. اين عنصر، بخاطر (ب)، در

$$L(y_1, \dots, y_{r+1})$$

قرار دارد، پس مي توان نوشت

$$y'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1}$$

كه در آن $z_r \in L(y_1, \dots, y_r)$ مي خواهيم ثابت كنيم $z_r = 0$. بنا بر خاصيت (الف)

y_{r+1} و c_{r+1} هر دو بر z_r عمودند. در نتیجه تفاضل آنها، یعنی z_r ، بر z_r عمود خواهد بود. عبارت دیگر، z_r به خودش متعامد می‌باشد، پس $z_r = 0$. این برهان قضیه عمود سازی را کامل خواهد کرد.

در ساختن اخیر فرض کنید برای r داشته باشیم $y_{r+1} = 0$. در این صورت (۱۳.۱۵) نشان می‌دهد که x_{r+1} ترکیبی خطی از $y_1, \dots, y_r$ و، در نتیجه، از $x_1, \dots, x_r$ است، پس عنصرهای $x_1, \dots, x_{r+1}$ وابسته خواهند بود. عبارت دیگر، هرگاه k عنصر اول $x_1, \dots, x_k$ مستقل باشند آنگاه عناصر متناظر $y_1, \dots, y_k$ ناصفر خواهند بود. در این حالت ضرائب a_i در (۱۳.۱۵) توسط (۱۴.۱۵) داده می‌شوند و دستورهای معرف $y_1, \dots, y_k$ چنین خواهند شد:

$$y_r = x_1 \quad \text{بازی } 1, 2, \dots, k-1$$

$$(15.15) \quad y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^r \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i$$

این دستورها فرایند گرام - اشمیت را برای ساختن مجموعه‌ای متعامد از عناصر ناصفر $y_1, \dots, y_k$ که همان زیر فضای مجموعه مستقل $x_1, \dots, x_k$ را پیمایند توصیف می‌کنند. بخصوص، هرگاه $x_1, \dots, x_k$ پایه‌ای برای فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد، آنگاه $y_1, \dots, y_k$ یک پایه متعامد برای همان فضا خواهد بود. همچنین می‌توان این پایه را، با نرمیده کردن هر عنصر y_i ، یعنی تقسیم آن بر نرمش، به یک پایه متعامدیکه بدل ساخت. بنابراین، بعنوان نتیجه‌ای از قضیه ۱۳.۱۵، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۴.۱۵. هر فضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای یک پایه متعامد یکه است.

اگر x و y عنصرهایی در یک فضای اقلیدسی بوده و $y \neq 0$ ، عنصر

$$\frac{(x, y)}{(y, y)} y$$

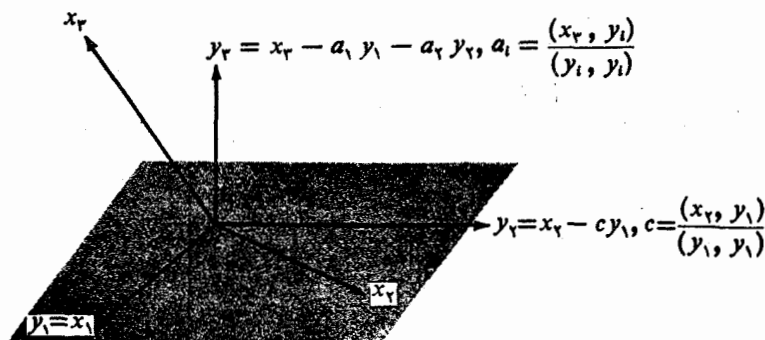
تصویر x در امتداد y نامیده می‌شود. در فرایند گرام - اشمیت (۱۵.۱۵) ما عنصر y_{r+1} را با تفریق تصویر x_{r+1} در امتداد هر یک از عناصر قبلی $y_1, \dots, y_r$ از x_{r+1} می‌سازیم. شکل ۱۰.۱۵ این ساختن را در فضای برداری V_3 بطورهندسی نشان می‌دهد.

مثال ۱. در V_3 ، برای زیر فضای پیموده شده بوسیله سه بردار

$$x_1 = (1, -1, 1), x_2 = (5, 1, 1), x_3 = (-3, -3, 1)$$

یک پایه متعامدیکه بیابید.

حل. با استفاده از فرایند گرام - اشمیت چنین خواهیم داشت:



شکل ۱.۱۵ فرایند گرام - اشمیت در V_3 . مجموعه متعامد $\{y_1, y_2, y_3\}$ از مجموعه مستقل مفروض $\{x_1, x_2, x_3\}$ ساخته شده است.

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1),$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 - y_1 = (2, 2, 0, 2),$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0).$$

چون $y_3 = 0$ پس سه بردار x_3, x_2, x_1 باید وابسته باشند. اما از آنجا که y_1 و y_2 صفر نیستند بردارهای x_1 و x_2 مستقل خواهند بود. بنابراین $L(x_1, x_2, x_3)$ زیرفضایی با بعد ۲ می باشد. مجموعه $\{y_1, y_2\}$ یک پایه متعامد برای این زیرفضا است. اگر هر یک از y_1 و y_2 را بر نرمش بخش کنیم یک پایه متعامد بکه بدست می آوریم که از دو بردار

$$\frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1) \text{ و } \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$$

تشکیل می شود.

مثال ۳. چندجمله ایهای لژاندر. در فضای خطی کلیه چندجمله ایها با ضرب داخلی $(x, y) = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$ ، دنباله نامتناهی $x_0, x_1, x_2, \dots$ را که $x_n(t) = t^n$ در نظر می گیریم. وقتی قضیه عمود سازی را در مورد این دنباله بکار ببریم دنباله دیگری از چندجمله ایها مانند $y_0, y_1, y_2, \dots$ حاصل می شود که اولین بار لژاندر (۱۸۳۳-۱۷۵۲)، ریاضیدان فرانسوی، در رابطه با کارهایش روی نظریه پتانسیل با آن مواجه شد. با فرایند گرام - اشمیت چندجمله ایهای اول با آسانی حساب می شوند. قبل از همه داریم

$$y_0(t) = x_0(t) = 1.$$

چون

$$(x_1, y_0) = \int_{-1}^1 t dt = 0, (y_0, y_0) = \int_{-1}^1 dt = 2$$

درمی یابیم که

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) = x_1(t) = t.$$

حال با استفاده از روابط

$$(x_2, y_0) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, (x_2, y_1) = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0,$$

$$(y_1, y_1) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

خواهیم داشت

$$y_2(t) = x_2(t) - \frac{(x_2, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

بهین نحو درخواهیم یافت که

$$y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, y_4(t) = t^4 - \frac{6}{5}t^2 + \frac{3}{35},$$

$$y_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t.$$

ما در جلد دو وقتی معادلات دیفرانسیل را بیشتر بررسی می‌کنیم مجدداً با این چندجمله‌ایها مواجه شده و ثابت خواهیم کرد که

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

چندجمله‌ایهای P_n که با

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} y_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

داده می‌شوند به چندجمله‌ایهای لژاندر معروفند. چندجمله‌ایهای متناظر در دنباله متعامدیکه $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ که از $\varphi_n = y_n / \|y_n\|$ بدست می‌آیند چندجمله‌ایهای نرمیده شده لژاندر نام دارند. از دستورهائی که در بالا برای $y_0, \dots, y_5$ داده شده خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \varphi_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1), \\ \varphi_3(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5t^3 - 3t), \varphi_4(t) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35t^4 - 30t^2 + 3), \\ \varphi_5(t) &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}(63t^5 - 70t^3 + 15t).\end{aligned}$$

۱۴.۱۵ متممهای متعامد. تصاویر

فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S زیرفضائی با بعد متناهی باشد. می‌خواهیم مسئله تقریب از نوع زیر را مطرح کنیم: اگر عنصر x در V مفروض باشد مطلوبست تعیین عنصری در S که فاصله‌اش تا x حتی‌الامکان کوچک باشد. فاصله بین دو عنصر x و y مساوی نرم $\|x - y\|$ تعریف می‌شود.

پیش از آنکه این مسئله در شکل کلی‌اش بحث شود. حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در شکل ۲۰.۱۵ نشان داده شده است. در اینجا V فضای برداری V_3 بوده و S یک زیر-فضای دوبعدی، یعنی صفحه‌ای مار بر مبدأ، می‌باشد. اگر x در V معلوم باشد مسئله یافتن آن نقطه‌ی S در صفحه‌ی S است که به x نزدیکترین باشد.

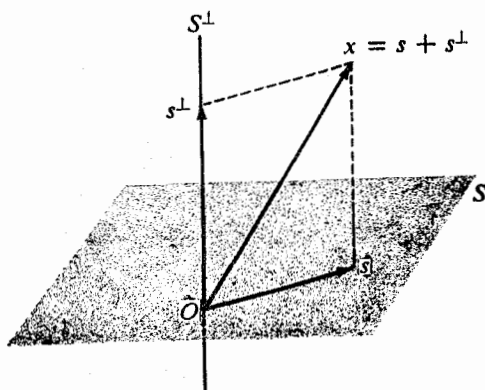
هرگاه $x \in S$ آنگاه به‌وضوح $x = s$ جواب است. هرگاه x در S نباشد آنگاه نزدیکترین نقطه‌ی S با وارد کردن عمودی از x به صفحه بدست می‌آید. این مثال ساده راهی را برای مسئله تقریب در حالت کلی عرضه کرده و موجبات بحث زیر را فراهم می‌سازد.

تعریف. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی V باشد. عنصری در V را متعامد به S خوانیم هرگاه بر هر عنصر S عمود باشد. مجموعه همه عناصرهای متعامد به S را با $S^\perp$ نشان داده و آن را «قائم بر S » می‌نامند.

تحقیق زیر فضای V بودن $S^\perp$ (خواه S خود زیرفضای V باشد یا نباشد) تمرین ساده‌ای است. درحالی که S زیرفضا است $S^\perp$ متمم متعامد S نام خواهد داشت.

مثال. مطابق شکل ۲۰.۱۵، هرگاه S صفحه‌ای مار بر مبدأ باشد آنگاه $S^\perp$ خطی مار بر مبدأ و عمود بر این صفحه خواهد بود. این مثال همچنین تعبیر هندسی قضیه بعدی را بدست می‌دهد.

قضیه ۱۵.۱۵. قضیه تجزیه متعامد. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S زیرفضائی از آن با بعد متناهی باشد. در اینصورت هر عنصر x در V را می‌توان بطور منحصر بفرد بصورت مجموعی از دو عنصر، یکی در S و دیگری در $S^\perp$ ، نمایش داد. یعنی داریم $x = s + s^\perp$ که در آن $s \in S$ و $s^\perp \in S^\perp$. (۱۶.۱۵)

شکل ۲.۱۵ تمپیرهندسی قضیه تجزیه متعامد در V_3 .

بعلاوه، نرم x با دستور فیثاغورس

$$(۱۷.۱۵) \quad \|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2$$

داده خواهد شد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم عملاً یک تجزیه متعامد بصورت (۱۶.۱۵) وجود دارد. چون S با بعد متناهی است پس دارای یک پایه متعامدیکه متناهی مانند $\{e_1, \dots, e_n\}$ خواهد بود. اگر x داده شده باشد عنصرهای s و $s^\perp$ را این طور تعریف می‌کنیم:

$$(۱۸.۱۵) \quad s = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, \quad s^\perp = x - s.$$

توجه کنید که هر جمله $(x, e_i) e_i$ تصویر x در امتداد e_i است. عنصر s مجموع تصاویر x در امتداد هر عنصر پایه می‌باشد. چون s یک ترکیب خطی از عنصرهای پایه است پس s در S قرار دارد. تعریف $s^\perp$ مبنی برقراری معادله (۱۶.۱۵) خواهد بود. برای اثبات اینکه $s^\perp$ در $S^\perp$ است حاصلضرب داخلی $s^\perp$ و هر عنصر پایه e_j را در نظر می‌گیریم. داریم

$$(s^\perp, e_j) = (x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j).$$

اما از (۱۸.۱۵) درمی‌یابیم که $(s, e_j) = (x, e_j)$ ، پس $s^\perp$ متعامد به e_j است. در نتیجه $s^\perp$ بر هر عنصر در S عمود می‌باشد که بمعنی $s^\perp \in S^\perp$ خواهد بود.

حال ثابت می‌کنیم تجزیه متعامد (۱۶.۱۵) منحصر بفرد است. فرض کنیم x دو نمایش این چنینی داشته باشد، مثلاً

$$(۱۹.۱۵) \quad x = t + t^\perp \quad \text{و} \quad x = s + s^\perp$$

که در آنها s و t در S و $s^\perp$ و $t^\perp$ در $S^\perp$ می باشند. می خواهیم ثابت کنیم

$$s = t \text{ و } s^\perp = t^\perp.$$

از (۱۹.۱۵) خواهیم داشت $s^\perp - t^\perp = s - t$ ، پس کافی است ثابت کنیم $s - t = 0$. اما $s - t \in S$ و $s^\perp - t^\perp \in S^\perp$ ، پس $s - t$ هم به $s^\perp - t^\perp$ متعامد و هم مساوی آن است. چون عنصر صفر تنها عنصر متعامد به خود است پس باید داشته باشیم $s - t = 0$. این نشان می دهد که تجزیه منحصر بفرد خواهد بود. بالاخره ثابت می کنیم نرم x از دستور فیثاغورس بدست می آید.

داریم

$$\|x\|^2 = (x, x) = (s + s^\perp, s + s^\perp) = (s, s) + (s^\perp, s^\perp),$$

که چون s و $s^\perp$ متعامدند، بقیه جملات صفر خواهند بود. این (۱۷.۱۵) را ثابت می کند.

تعریف. فرض کنیم S یک زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده و $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای S باشد. اگر $x \in V$ عنصر s که با معادله

$$s = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

تعریف شده، تصویر x بر زیرفضای S نام دارد.

اینک ثابت می کنیم تصویر x بر S جواب مسئله تقریب که در آغاز این بخش بیان شد می باشد.

۱۵.۱۵ بهترین تقریب عنصرها در یک فضای اقلیدسی بوسیله عناصری در یک زیرفضای با بعد متناهی

قضیه ۱۶.۱۵. قضیه تقریب. فرض کنیم S یک زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده و x عنصر دلخواهی از V باشد. در اینصورت تصویر x بر S از هر عنصر دیگری به x نزدیکتر است. یعنی، اگر s تصویر x بر S باشد، بازای هر t در S داریم

$$\|x - s\| \leq \|x - t\|;$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $t = s$.

برهان. بنا به قضیه ۱۵.۱۵ می توان نوشت $x = s + s^\perp$ که در آن $s \in S$ و $s^\perp \in S^\perp$. پس، بازای هر t در S ، خواهیم داشت

$$x - t = (x - s) + (s - t).$$

چون $s - t \in S$ و $s^\perp \in S^\perp$ این یک تجزیه متعامد $x - t$ است، در نتیجه نرم آن از دستور فیثاغورس

$$\|x - t\|^2 = \|x - s\|^2 + \|s - t\|^2$$

بدست می‌آید. اما $\|s - t\|^2 \geq 0$ ، پس داریم $\|x - s\|^2 \leq \|x - t\|^2$ ، که تساوی در آن برقرار است اگر و فقط اگر $s = t$. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال ۱. قریب توابع پیوسته بر $[0, 2\pi]$ بوسیله چندجمله‌ایهای مثلثاتی. فرض کنیم $V = C(0, 2\pi)$ ، یعنی فضای خطی کلیه توابع حقیقی پیوسته بر بازه $[0, 2\pi]$ باشد، و ضرب داخلی را با معادله $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ تعریف می‌کنیم. در بخش ۱۱-۱۵ یک مجموعه متعامدیکه از توابع مثلثاتی $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ را نشان دادیم که

$$(20.15) \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \geq 1 \text{ برای}$$

$$\varphi_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \text{ و } \varphi_{k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$$

$2n+1$ عنصر $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ زیر فضای S با بعد $2n+1$ را می‌پیمایند. عنصرهای S را چندجمله‌ایهای مثلثاتی نام داده‌اند.

اگر $f, g \in C(0, 2\pi)$ را تصویر f بر زیر فضای S می‌گیریم. در این صورت داریم

$$(21.15) \quad (f, \varphi_k) = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_k(x)dx \text{ که در آن } f_n = \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k)\varphi_k$$

اعداد (f, φ_k) را ضرایب فوریته f می‌خوانند. اگر از دستورهای (۲۰-۱۵) استفاده کنیم می‌توانیم (۲۱-۱۵) را بشکل

$$(22.15) \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

بنویسیم که در آن برای $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

قضیه قریب به ما می‌گوید که چندجمله‌ای مثلثاتی مذکور در (۲۲-۱۵) از هر چندجمله‌ای مثلثاتی دیگری در S به f نزدیکتر است باین معنی که نرم $\|f - f_n\|$ حتی الامکان کوچک می‌باشد.

مثال ۲. قریب توابع پیوسته بر $[-1, 1]$ بوسیله چندجمله‌ایهای از درجه نابیشتر از n . فرض کنیم $V = C(-1, 1)$ ، یعنی فضای توابع پیوسته حقیقی بر $[-1, 1]$ باشد،

و قرار می‌دهیم $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. $n+1$ چندجمله‌ای نرمیده شده لزاندز $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ که در بخش ۱۳.۱۵ معرفی شدند، زیرفضای S با بعد $n+1$ را که از کلیه چندجمله‌ایهای با درجه نایشتز از n تشکیل شده می‌پیمایند. اگر $f \in C(-1, 1)$ ، f_n را تصویر f بر S می‌گیریم. در اینصورت خواهیم داشت

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^1 f(t) \varphi_k(t) dt \quad \text{که در آن} \quad f_n = \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k) \varphi_k$$

این یک چندجمله‌ای است از درجه نایشتز از n که بازای آن نرم $\|f - f_n\|$ کوچکترین است. بعنوان مثال، وقتی $f(x) = \sin \pi x$ ، ضرائب (f, φ_k) عبارت خواهند بود از

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^1 \sin \pi t \varphi_k(t) dt.$$

بخصوص داریم $(f, \varphi_0) = 0$ و

$$(f, \varphi_1) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} t \sin \pi t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{\pi}.$$

بنابراین، چندجمله‌ای خطی $f_1(t)$ که به $\sin \pi t$ بر $[-1, 1]$ نزدیکترین است چنین می‌باشد:

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{\pi} \varphi_1(t) = \frac{3}{\pi} t.$$

چون $(f, \varphi_1) = 0$ این نزدیکترین تقریب درجه دوم نیز خواهد بود.

۱۶.۱۵ تمرینات

۱. در هر حالت برای زیرفضای V_3 پیموده شده بوسیله بردارهای داده شده یک پایه متعامدیکه بیابید.

$$x_3 = (3, 2, 3), x_2 = (1, 0, 1), x_1 = (1, 1, 1) \quad (\text{الف})$$

$$x_3 = (1, 0, 1), x_2 = (-1, 1, -1), x_1 = (1, 1, 1) \quad (\text{ب})$$

۲. در هر حالت برای زیرفضای V_4 پیموده شده بوسیله بردارهای مفروض یک پایه متعامدیکه بیابید.

$$x_3 = (0, 0, 1, 1), x_2 = (0, 1, 1, 0), x_1 = (1, 1, 0, 0) \quad (\text{الف})$$

$$x_4 = (1, 0, 0, 1)$$

$$x_3 = (1, 2, -2, 1), x_2 = (1, 0, 2, 1), x_1 = (1, 1, 0, 1) \quad (\text{ب})$$

۳. درفضای خطی حقیقی $C(0, \pi)$ با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^\pi x(t)y(t)dt$ ، بازای

$x_n(t) = \cos nt$ قرار دهید $n = 0, 1, 2, \dots$

ثابت کنید توابع $y_0, y_1, y_2, \dots$ که این طور داده شده اند:

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt \quad n \geq 1 \quad \text{بازای} \quad y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

یک مجموعه متعامدیکه تشکیل می دهند که همان زیرفضای پیموده شده بوسیله $x_0, x_1, x_2, \dots$ را می پیماید.

۴. درفضای خطی کلیه چندجمله ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ بازای $x_n(t) = t^n$ قرار دهید $n = 0, 1, 2, \dots$ ثابت کنید توابع

$$y_0(t) = 1, y_1(t) = \sqrt{3}(2t - 1), y_2(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$$

یک مجموعه متعامدیکه تشکیل می دهند که همان زیرفضای پیموده شده بوسیله $\{x_0, x_1, x_2\}$ را می پیماید.

۵. فرض کنید V فضای خطی کلیه توابع حقیقی f پیوسته بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t) dt$ برای آنها همگرا است. تعریف کنید

$(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t) g(t) dt$ و $y_0, y_1, y_2, \dots$ را مجموعه ای بیگارید که با بکار بردن فرایند گرام - اشمیت در مورد $x_0, x_1, x_2, \dots$ که $x_n(t) = t^n$ بازای $n \geq 0$ حاصل می شود. ثابت کنید

$$y_0(t) = 1, y_1(t) = t - 1, y_2(t) = t^2 - 4t + 2$$

$$y_3(t) = t^3 - 9t^2 + 18t - 6.$$

۶. درفضای خطی حقیقی $C(1, 3)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)dx$ قرار دهید $f(x) = 1/x$ و نشان دهید که چندجمله ای ثابت g که به f نزدیکترین است $g = (1/2) \log 3$ خواهد بود. $\|g - f\|$ را برای این g حساب کنید.

۷. درفضای خطی حقیقی $C(0, 2)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x)dx$ قرار دهید $f(x) = e^x$ و نشان دهید که چندجمله ای ثابت g که به f نزدیکترین است $g = (e^2 - 1)/2$ خواهد بود. $\|g - f\|$ را برای این g حساب کنید.

۸. درفضای خطی حقیقی $C(-1, 1)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ قرار دهید $f(x) = e^x$ و چندجمله ای خطی g را که به f نزدیکترین است بیابید. $\|g - f\|$ را برای این g حساب کنید.

۹. درفضای خطی حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$

فرض کنید $x = f(x)$. در زیر فضای پیموده شده بوسیله

$$u_0(x) = 1, u_1(x) = \cos x, u_2(x) = \sin x$$

چند جمله‌ای مثلثاتی را که به f نزدیکترین است پیدا کنید.

۱۵. در فضای خطی V در تمرین ۵ قرار دهید $f(x) = e^{-x}$ و چند جمله‌ای خطی را که به f نزدیکترین است بدست آورید.

تبدیلات خطی و ماتریسها

۱۰۱۶ تبدیلات خطی

یکی از اهداف غائی آنالیز بررسی جامع توابعی است که قلمرو و بردشان زیر مجموعه‌هایی از فضاهاى خطی اند. چنین توابعی تبدیلات، نگاشته‌ها، یا عملگرها نامیده می‌شوند. در این فصل ساده‌ترین نمونه‌ها، بنام تبدیلات خطی، که در همه شاخه‌های ریاضیات ظاهر می‌شوند مورد بحث قرار می‌گیرند. خواص تبدیلات کلیتر اغلب با تقریبشان به تبدیلات خطی بدست خواهند آمد.

ابتدا چند نماد و اصطلاح مربوط به توابع دلخواه را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم V و W دو مجموعه باشند. علامت

$$T: V \rightarrow W$$

برای نشان دادن این مطلب که T تابعی با قلمرو W و مقادیر در W است بکار می‌رود. بازای هر x در V عنصر $T(x)$ در W را نقش x تحت T نامیده می‌گوئیم T, x را بردی $T(x)$ می‌نگارد.

اگر A زیر مجموعه‌ای از V باشد مجموعه همه نقشهای $T(x)$ بازای x در A را نقش A تحت T نامیده و با $T(A)$ نشان می‌دهیم. نقش قلمرو V ، یعنی $T(V)$ ، برد T خواهد بود.

حال فرض کنیم V و W فضاهاى خطی با یک مجموعه از اسکالرها باشند، و یک تبدیل خطی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف. اگر V و W فضاهاى خطی باشند تابع $T: V \rightarrow W$ را یک تبدیل خطی از V بتوی W خوانند هرگاه از این دو خاصیت برخوردار باشد:

$$\begin{aligned} & \text{(الف) بازای هر } x \text{ و } y \text{ در } V, T(x+y) = T(x) + T(y); \\ & \text{(ب) بازای هر } x \text{ در } V \text{ و هر اسکالر } c, T(cx) = cT(x). \end{aligned}$$

این خواص را می توان لفظاً این طور گفت که T جمع و ضرب در اسکالرها را حفظ می کند. دو خاصیت را می توان در این دستور جا داد که بازای هر x و y در V و کلیه اسکالرها a و b

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y).$$

با استفاده از استقرا، رابطه کثیر

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(x_i)$$

را بازای هر n عنصر $x_1, \dots, x_n$ در V و هر n اسکالر $a_1, \dots, a_n$ نیز خواهیم داشت. خواننده می تواند با آسانی تحقیق کند که مثالهای زیر تبدیلاتی خطی اند.

مثال ۱. تبدیل همانی. تبدیل $T: V \rightarrow V$ که بازای هر x در V , $T(x) = x$ تبدیل همانی نام داشته و با I یا I_V نموده می شود.

مثال ۲. تبدیل صفر. تبدیل $T: V \rightarrow V$ که هر عنصر V را بروی O می نگارد تبدیل صفر خوانده شده و با O نشان داده می شود.

مثال ۳. ضرب در اسکالر ثابت c . در اینجا داریم $T: V \rightarrow V$ که در آن بازای هر x در V , $T(x) = cx$ ، این، وقتی $c = 1$ ، تبدیل همانی و بازای $c = 0$ تبدیل صفر خواهد بود.

مثال ۴. معادلات خطی. فرض می کنیم $V = V_n$ و $W = V_m$. اگر mn عدد حقیقی a_{ik} ، که $i = 1, 2, \dots, m$ و $k = 1, 2, \dots, n$ ، داده شده باشند $T: V_n \rightarrow V_m$ را این طور تعریف می کنیم: T هر بردار $x = (x_1, \dots, x_n)$ در V_n را بروی بردار $y = (y_1, \dots, y_m)$ در V_m طبق معادلات زیر می نگارد:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مثال ۵. ضرب داخلی در یک عنصر ثابت. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد. بازای عنصر ثابت z در V , $T: V \rightarrow R$ را این طور تعریف می کنیم: هرگاه $x \in V$ آنگاه $T(x) = (x, z)$ ، یعنی حاصلضرب داخلی x در z .

مثال ۶. تصویر بر یک زیرفضا. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی بوده و S زیر-

فضائی با بعد متناهی از V باشد. $T: V \rightarrow S$ را این طور تعریف می کنیم: هرگاه $x \in V$ آنگاه $T(x)$ تصویر x بر S است.

مثال ۷. عملگر مشتقگیری. فرض کنیم V فضای خطی همه توابع حقیقی f باشد که بر بازه $[a, b]$ مشتق پذیرند. تبدیل خطی که هر تابع f در V را بروی مشتقش f' می نگارد عملگر مشتقگیری نام داشته و با D نموده می شود. بنا بر این داریم $D: V \rightarrow W$ که در آن، بازای هر f در V ، $D(f) = f'$ ، فضای W عبارت است از کلیه f' ها.

مثال ۸. عملگر انتگرالگیری. فرض کنیم V فضای خطی کلیه توابع حقیقی باشد که بر بازه $[a, b]$ پیوسته اند. اگر $f \in V$ تابع $g = T(f)$ را در V این طور تعریف می کنیم:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b$$

این تبدیل T عملگر انتگرالگیری نام دارد.

۲.۱۶ فضای پوچ و برد

در این بخش T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است.

قضیه ۱.۱۶. مجموعه $T(V)$ (برد T) زیر فضائی از W است. بعلاوه، T عنصر صفر V را بروی عنصر صفر W می نگارد.

برهان. برای اینکه ثابت کنیم $T(V)$ زیر فضای W است فقط لازم است اصول موضوع بسته بودن را تحقیق کنیم. دو عنصر دلخواه از $T(V)$ ، مثلاً $T(x)$ و $T(y)$ ، را اختیار می کنیم. در این صورت $T(x) + T(y) = T(x + y)$ ، پس $T(x) + T(y)$ در $T(V)$ است. همچنین بازای هر اسکالر c داریم $cT(x) = T(cx)$ ، در نتیجه $cT(x)$ در $T(V)$ خواهد بود. بنا بر این $T(V)$ یک زیر فضای W است. با فرض $c = 0$ در رابطه $T(cx) = cT(x)$ درمی یابیم که $T(O) = O$.

تعریف. مجموعه کلیه عناصری در V که T آنها را بروی O می نگارد فضای پوچ T نامیده شده و با $N(T)$ نشان داده می شود. لذا خواهیم داشت

$$N(T) = \{x \mid T(x) = O, x \in V\}.$$

فضای پوچ را گاهی هسته T می نامند.

قضیه ۲.۱۶. فضای پوچ T یک زیر فضای V است.

برهان. هرگاه x و y در $N(T)$ باشند آنگاه $x + y$ و cx بازای هر اسکالر c نیز چنین اند زیرا

$$T(cx) = cT(x) = 0 \text{ و } T(x+y) = T(x) + T(y) = 0$$

مثالهای زیر فضاهای پوچ تبدیلات خطی را که در بخش ۱۰۱۶ داده شده توصیف می‌کنند.

مثال ۱. تبدیل همانی. فضای پوچ $\{0\}$ است، یعنی زیرفضائی که فقط از عنصر صفر تشکیل شده است.

مثال ۲. تبدیل صفر. چون هر عنصر V بروی صفر نگاشته می‌شود فضای پوچ خود V خواهد بود.

مثال ۳. ضرب در اسکالر ثابت c . اگر $c \neq 0$ فضای پوچ فقط حاوی 0 است. چنانچه $c = 0$ فضای پوچ V خواهد بود.

مثال ۴. معادلات خطی. فضای پوچ از کلیه بردارهای $(x_1, \dots, x_n)$ در V_n تشکیل شده که

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, i = 1, 2, \dots, m \text{ بازای}$$

مثال ۵. ضرب داخلی در عنصر ثابت z . فضای پوچ از کلیه عناصری در V تشکیل شده که متعامد به z اند.

مثال ۶. تصویر بر یک زیرفضای S . اگر $x \in V$ تجزیه متعامد منحصر بفرد $x = s + s^\perp$ را (بنابرقضیه ۱۵.۱۵) خواهیم داشت. چون $T(x) = 0$ ، $T(x) = s$ اگر و فقط اگر $s = 0$ ، در نتیجه فضای پوچ مساوی $S^\perp$ ، یعنی متمم متعامد S ، خواهد بود.

مثال ۷. عملگر مشتقگیری. فضای پوچ از همه توابعی تشکیل شده که بر بازه مفروض ثابت اند.

مثال ۸. عملگر انتگرالگیری. فضای پوچ فقط حاوی تابع صفر است.

۳۰۱۶ پوچی و رتبه

در این بخش مجدداً T نمایش یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است. می‌خواهیم بدانیم چهار رابطه‌ای بین بعد V ، فضای پوچ $N(T)$ ، و برد $T(V)$ وجود دارد. هرگاه V با بعد متناهی باشد آنگاه فضای پوچ نیز، بدلیل زیرفضای V بودن، با بعد متناهی خواهد بود. بعد $N(T)$ پوچی T نامیده می‌شود. در قضیه بعد ثابت می‌کنیم که برد نیز با بعد

متناهی است؛ بعد آن رتبه T نام دارد.

قضیه ۳.۱۶. پوچی بعلاوه رتبه. هرگاه V با بعد متناهی باشد آنگاه $T(V)$ نیز با بعد متناهی بوده و خواهیم داشت

$$(۱.۱۶) \quad \dim N(T) + \dim T(V) = \dim V.$$

بعبارت دیگر، پوچی بعلاوه رتبه یک تبدیل خطی مساوی بعد قلمرو آن است.

برهان. قرار می‌دهیم $n = \dim V$ و فرض می‌کنیم $e_1, \dots, e_n$ پایه‌ای برای $N(T)$ باشد که در آن $k = \dim N(T) \leq n$. بنابه قضیه ۷.۱۵، این عناصر بخشی از یک پایه برای V ، مثلاً پایه

$$(۲.۱۶) \quad e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+r}$$

که در آن $k + r = n$ هستند. ثابت می‌کنیم r عنصر

$$(۳.۱۶) \quad T(e_{k+1}), \dots, T(e_{k+r})$$

پایه‌ای برای $T(V)$ تشکیل می‌دهند، در نتیجه ثابت می‌شود که $\dim T(V) = r$. چون $k + r = n$ این (۱.۱۶) را نیز ثابت خواهد کرد.

ابتدا نشان می‌دهیم که r عنصر (۳.۱۶) فضای $T(V)$ را می‌پیمایند. اگر $y \in T(V)$ بازای x در V خواهیم داشت $y = T(x)$ ، و می‌توانیم بنویسیم

$$x = c_1 e_1 + \dots + c_{k+r} e_{k+r}.$$

بنابراین، چون $T(e_1) = \dots = T(e_k) = 0$ داریم

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{k+r} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^k c_i T(e_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i).$$

این نشان می‌دهد که عناصر (۳.۱۶) فضای $T(V)$ را می‌پیمایند.

حال نشان می‌دهیم که این عناصرها مستقلند. فرض کنیم اسکالرهای $c_{k+r}, \dots, c_{k+1}$ چنان باشند که

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i) = 0.$$

این ایجاب می‌کند که

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i e_i\right) = 0,$$

پس عنصر $x = c_{k+1} e_{k+1} + \dots + c_{k+r} e_{k+r}$ در فضای پوچ $N(T)$ خواهد بود. این یعنی که اسکالرهای $c_1, \dots, c_k$ وجود دارند بطوری که $x = c_1 e_1 + \dots + c_k e_k$ پس داریم

$$x - x = \sum_{i=1}^k c_i e_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i e_i = 0.$$

اما، از آنجا که عنصرهای (۲۰۱۶) مستقلند، این ایجاب می‌کند که کلیه اسکالرهای c_i صفر می‌باشند. پس عناصر (۳۰۱۶) مستقل خواهند بود.

توجه: هرگاه V با بعد متناهی باشد آنگاه لااقل یکی از $N(T)$ یا $T(V)$ با بعد نامتناهی است. برهانی از این مطلب در تمرین ۳۰ از بخش ۴۰۱۶ مختصراً شرح داده شده است.

۴۰۱۶ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۱۵ تبدیل $T: V_T \rightarrow V_T$ با دستور داده شده برای $T(x, y)$ که در آن (x, y) نقطه دلخواهی در V_T است، تعریف شده است. در هر حالت معین کنید آیا T خطی است یا نه. اگر T خطی باشد فضای پوچ و برد آن را توصیف کرده و پوچی و رتبه آن را محاسبه نمایید.

$$T(x, y) = (e^x, e^y) \cdot ۶ \quad T(x, y) = (y, x) \cdot ۱$$

$$T(x, y) = (x, ۱) \cdot ۷ \quad T(x, y) = (x, -y) \cdot ۲$$

$$T(x, y) = (x + ۱, y + ۱) \cdot ۸ \quad T(x, y) = (x, ۰) \cdot ۳$$

$$T(x, y) = (x - y, x + y) \cdot ۹ \quad T(x, y) = (x, x) \cdot ۴$$

$$T(x, y) = (2x - y, x + y) \cdot ۱۰ \quad T(x, y) = (x^2, y^2) \cdot ۵$$

عمل فوق را برای هر یک از تمرینات ۱۱ تا ۱۵ در صورتی انجام دهید که تبدیل $T: V_T \rightarrow V_T$ بنحوی که ذکر شده توصیف شده باشد.

۱۱. T هر نقطه را حول مبدأ با اندازه زاویه φ می‌چرخاند. یعنی T نقطه‌ای بمختصات قطبی (r, θ) را بروی نقطه‌ای بمختصات قطبی $(r, \theta + \varphi)$ نگاشت، که در آن φ ثابت است، می‌نگارد. همچنین T نقطه O را بروی خودش خواهد نگاشت.

۱۲. T هر نقطه را بروی منعکس نسبت به یک خط ثابت مار برمی‌دارد.

۱۳. T هر نقطه را بروی نقطه $(۱, ۱)$ می‌نگارد.

۱۴. T هر نقطه با مختصات قطبی (r, θ) را بروی نقطه‌ای که مختصات قطبی اش $(2r, \theta)$ است می‌نگارد. همچنین T نقطه O را بروی خودش خواهد نگاشت.

۱۵. T هر نقطه با مختصات قطبی (r, θ) را بروی نقطه‌ای که مختصات قطبی اش $(r, 2\theta)$ است می‌نگارد. همچنین T نقطه O را بروی خودش خواهد نگاشت.

عمل فوق را برای هر یک از تمرینات ۱۶ تا ۲۳ در صورتی انجام دهید که تبدیل

$T: V_3 \rightarrow V_3$ طبق دستور داده شده برای $T(x, y, z)$ که در آن (x, y, z) نقطه دلخواهی از V_3 است، تعریف شده باشد.

$$T(x, y, z) = (z, y, x) \quad ۱۶.$$

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 3z) \quad ۱۸. \quad T(x, y, z) = (x, y, 0) \quad ۱۷.$$

$$T(x, y, z) = (x, y, 1) \quad ۱۹.$$

$$T(x, y, z) = (x+1, y+1, z-1) \quad ۲۰.$$

$$T(x, y, z) = (x+1, y+2, z+3) \quad ۲۱.$$

$$T(x, y, z) = (x+z, 0, x+y) \quad ۲۳. \quad T(x, y, z) = (x, y^2, z^2) \quad ۲۲.$$

در هر یک از تمرینات ۲۴ تا ۲۷ تبدیل $T: V \rightarrow V$ بشرحی که آمده توصیف شده است. در هر حالت معین کنید آیا T خطی است یا نه. اگر T خطی است فضای پوچ و برد آن را وصف کرده و پوچی و رتبه آنرا در صورت متناهی بودن محاسبه نمایید.

۲۴. فرض کنید V فضای خطی همه چندجمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ از درجه نایبتر از n باشد. اگر $q = T(p), p \in V$ ، بازای هر x حقیقی، $q(x) = p(x+1)$.

۲۵. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر بازه $(-1, 1)$ باشد. اگر $g = T(f), f \in V$ ، یعنی، بازای هر x در $(-1, 1)$ ، $g(x) = xf'(x)$.

۲۶. فرض کنید V فضای خطی همه توابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ باشد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ ، یعنی،

$$g(x) = \int_a^b f(t) \sin(x-t) dt, a \leq x \leq b$$

بازای

۲۷. فرض کنید V فضای کلیه توابع حقیقی باشد که بر بازه (a, b) دوبار مشتقپذیرند. اگر $y \in V$ تعریف کنید $T(y) = y'' + Py' + Qy$ که در آن P و Q ثوابت معینی می‌باشند.

۲۸. فرض کنید V فضای خطی همه دنباله‌های حقیقی همگرای $\{x_n\}$ باشد. تبدیل $T: V \rightarrow V$ را این‌طور تعریف کنید: اگر $x = \{x_n\}$ یک دنباله همگرا با حد a باشد قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$ که در آن، بازای $n \geq 1$ ، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید که T خطی است و فضای پوچ و برد آن را توصیف نمایید.

۲۹. فرض کنید V فضای خطی همه توابع حقیقی باشد که بر بازه $[-\pi, \pi]$ پیوسته‌اند. همچنین S زیرمجموعه V مرکب از کلیه توابع f باشد که در سه معادله

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt = 0$$

صدق می‌کنند.

(الف) ثابت کنید S یک زیر فضای V است.

(ب) ثابت کنید S حاوی توابع $f(x) = \cos nx$ و $f(x) = \sin nx$ ، بازای $n = 2, 3, \dots$ می باشد.

(پ) ثابت کنید S با بعد نامتناهی است.

فرض کنید تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ این طور تعریف شده باشد: اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی که

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x-t)\} f(t) dt.$$

(ت) ثابت کنید $T(V)$ ، یعنی برد T ، با بعد متناهی است و پایه ای برای آن بیابید.

(ث) فضای پوچ T را مشخص کنید.

(ج) کلیه $c \neq 0$ های حقیقی و همه f های ناصفر در V را بیابید که $T(f) = cf$ (توجه کنید که هر چنین f ی در برد T جای دارد).

۳۰. فرض کنید $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W باشد. اگر V با بعد نامتناهی باشد ثابت کنید لااقل یکی از $T(V)$ یا $N(T)$ با بعد نامتناهی است.

[دانهائی: فرض کنید $\dim T(V) = r$ ، $\dim N(T) = k$ ، $e_1, \dots, e_k$ یک پایه برای $N(T)$ است، و $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+n}, \dots$ عناصر مستقلی در V می باشند که $n > r$. چون $n > r$ ، $T(e_{k+1}), \dots, T(e_{k+n})$ وابسته خواهند بود با استفاده از این مطالب تناقضی بدست آورید.]

۵.۱۶ اعمال جبری بر تبدیلات خطی

بنابر تعریف زیر، توابعی که مقادیرشان در فضای خطی مفروض W باشند می توانند با هم جمع و یا در اسکالرهای متعلق به W ضرب شوند.

تعریف. فرض کنیم $S: V \rightarrow W$ و $T: V \rightarrow W$ دو تابع با قلمرو مشترک V بوده و مقادیرشان در فضای خطی W باشند. اگر c اسکالر دلخواهی در W باشد مجموع $S + T$ و حاصلضرب cT ، بازای هر x در V ، با معادلات

$$(4.16) \quad (S + T)(x) = S(x) + T(x), \quad (cT)(x) = cT(x)$$

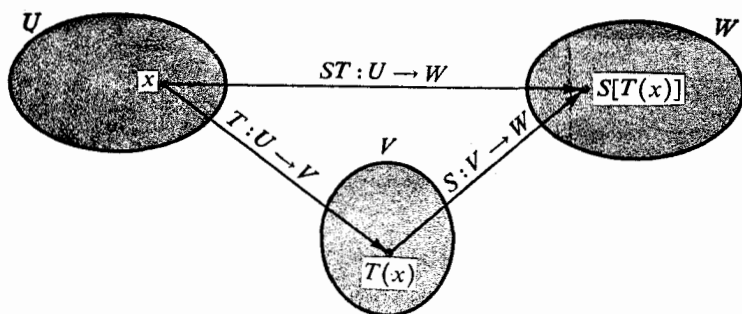
تعریف می کنیم.

برای ما خصوصاً حالتی مورد توجه است که V نیز یک فضای خطی با همان اسکالرهای W باشد. در این حالت مجموعه همه تبدیلات خطی از V بتوی W را با $\mathcal{L}(V, W)$ نشان خواهیم داد.

اگر S و T دو تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ باشند بآسانی می توان تحقیق نمود که $S + T$ نیز تبدیلاتی خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ هستند. از این بیشتر می شود. نتیجه گرفت. با اعمالی که هم اکنون تعریف شدند مجموعه $\mathcal{L}(V, W)$ خود یک فضای خطی جدید می شود. تبدیل صفر بمنزله عنصر صفر این فضا و تبدیل (-1) قرینه T می باشد. تحقیق اینکه تمام ده اصل موضوع برای یک فضای خطی برقرارند عمل سردرستی است. بنا بر این، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۴.۱۶. مجموعه $\mathcal{L}(V, W)$ مرکب از کلیه تبدیلات خطی از V بتوی W ، با اعمال جمع و ضرب در اسکالرهائی که در (۴.۱۶) تعریف شدند، یک فضای خطی خواهد بود.

یک عمل جبری جالبتر بر تبدیلات خطی ترکیب یا ضرب تبدیلات است. این عمل از نهاد جبری یک فضای خطی استفاده ای نمی کند و می توان آن را بطور کاملاً کلی بصورت زیر تعریف کرد.



شکل ۱.۱۶ نمایش ترکیب دو تبدیل.

تعریف. فرض کنیم U, V ، و W مجموعه هائی باشند. همچنین $T: U \rightarrow V$ تابعی با قلمرو U و مقادیر در V بوده و $S: V \rightarrow W$ تابع دیگری با قلمرو V و مقادیر در W باشد. در اینصورت ترکیب ST تابع $ST: U \rightarrow W$ است که با معادله

$$(ST)(x) = S[T(x)]$$

تعریف می شود.

لذا، برای نگاشتن x بوسیله ترکیب ST ، ابتدا x را توسط T می نگاریم و سپس $T(x)$ را بوسیله S خواهیم نگاشت. این مطلب در شکل ۱.۱۶ توضیح داده شده است. ما در مطالعه خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال کراً به ترکیب توابع حقیقی

برخورده‌ایم و دیده‌ایم که این عمل عموماً تعویضپذیر نیست. با اینحال، مثل حالت توابع حقیقی، ترکیب در قانون شرکتپذیری صادق خواهد بود.

قضیه ۵.۱۶. هرگاه $S: V \rightarrow W$ ، $T: U \rightarrow V$ و $R: W \rightarrow X$ سه تابع باشند آنگاه داریم

$$R(ST) = (RS)T.$$

برهان. دو تابع $R(ST)$ و $(RS)T$ هر دو دارای قلمرو U و مقادیر در X اند. بازای هر x در U داریم

$$[R(ST)](x) = R[(ST)(x)] = R[S(T)(x)]$$

و

$$[(RS)T](x) = (RS)[T(x)] = R[S(T(x))]$$

که $R(ST) = (RS)T$ را ثابت خواهد کرد.

تعریف. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ تابعی باشد که V را بتوی خود می‌نگارد. توانهای صحیح T را باستقرا این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$T^0 = I; \text{ بازای } 1, n \geq 1, T^n = TT^{n-1}$$

در اینجا I تبدیل همانی می‌باشد. خواننده می‌تواند تحقیق کند که قانون شرکتپذیری قانون نماها، یعنی $T^m T^n = T^{m+n}$ ، را بازای کلیه اعداد صحیح نامنفی m و n ایجاب خواهد کرد.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که ترکیب تبدیلات خطی مجدداً خطی است.

قضیه ۶.۱۶. هرگاه U, V, W فضاهاى خطی دارای یک اسکالر بوده و $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند آنگاه ترکیب $ST: U \rightarrow W$ خطی است.

برهان. بازای هر x و y در U و کلیه اسکالرهاى a و b داریم

$$\begin{aligned} (ST)(ax + by) &= S[T(ax + by)] = S[aT(x) + bT(y)] \\ &= aST(x) + bST(y). \end{aligned}$$

می‌توان ترکیب را با اعمال جبری جمع و ضرب در اسکالرها در $\mathcal{L}(V, W)$ بهم درآمیخت و قضیه زیر را بدست آورد.

قضیه ۷.۱۶. فرض کنیم U, V, W فضاهاى خطی دارای یک اسکالر بوده و S و T

دو $\ell(V, W)$ باشند، و c اسکالر دلخواهی باشد.

(الف) برای هر تابع R با مقادیرش در V داریم

$$(cS)R = c(SR) \text{ و } (S + T)R = SR + TR$$

(ب) برای هر تبدیل خطی $R: W \rightarrow U$ خواهیم داشت

$$R(cS) = c(RS) \text{ و } R(S + T) = RS + RT$$

اثبات این قضیه نتیجه کاربرد مستقیم تعریف ترکیب بوده و بعنوان تمرین باقی می ماند.

۶.۱۶ معکوسها

ما ضمن مطالعه خود در توابع حقیقی آموختیم که چگونه با معکوس کردن توابع یکتوا توابع جدیدی را بسازیم. اکنون می خواهیم فرایند معکوس سازی را به رده کلیتری از توابع تعمیم دهیم.

اگر تابع T داده شده باشد هدف ما این است که، در صورت امکان، تابع دیگر S را چنان بیابیم که ترکیبش با T تبدیل همانی باشد. چون ترکیب عموماً تعویضپذیر نیست باید میان ST و TS تمایز قائل بشویم. در نتیجه دو نوع معکوس معرفی می کنیم که آنها را معکوسهای چپ و راست خواهیم نامید.

تعریف. دو مجموعه V و W و تابع $T: V \rightarrow W$ داده شده اند، تابع $S: T(V) \rightarrow V$ یک معکوس چپ T نامند هرگاه، برای هر x در V ، $S[T(x)] = x$ ، یعنی هرگاه

$$ST = I_V$$

که در آن I_V تبدیل همانی بر V است. تابع $R: T(V) \rightarrow V$ یک معکوس راست T نام دارد هرگاه، برای هر y در $T(V)$ ، $T[R(y)] = y$ ، یعنی هرگاه

$$TR = I_{T(V)}$$

که در آن $I_{T(V)}$ تبدیل همانی بر $T(V)$ خواهد بود.

مثال. تابعی که معکوس چپ نداشته ولی دو معکوس راست دارد. فرض کنیم $V = \{1, 2\}$ و $W = \{0\}$. $T: V \rightarrow W$ را این طور تعریف می کنیم:

$$T(1) = T(2) = 0.$$

این تابع از دو معکوس راست $R: W \rightarrow V$ و $R': W \rightarrow V$ ، که با

$$R(0) = 1, R'(0) = 2$$

داده می شوند، برخوردار است. این تابع نمی تواند معکوس چپی چون S داشته باشد زیرا

این مستلزم آن است که

$$۰ = S[T(۲)] = S(۰) \text{ و } ۱ = S[T(۱)] = S(۰)$$

این مثال ساده نشان می‌دهد که وجود معکوسهای چپ الزامی نبوده و معکوسهای راست حتماً منحصر بفرد نخواهند بود.

هر تابع $T: V \rightarrow W$ لااقل یک معکوس راست دارد. در واقع هر y در $T(V)$ ، بازای لااقل یک x در V ، از شکل $y = T(x)$ برخوردار است. هرگاه یکی از این x ها را اختیار کرده و تعریف کنیم $R(y) = x$ آنگاه بازای هر y در $T(V)$ ،

$$T[R(y)] = T(x) = y,$$

پس R یک معکوس راست خواهد بود. ممکن است عدم یکتائی پیش بیاید زیرا امکان دارد در V بیش از یک x وجود داشته باشد که بروی y مفروض در $T(V)$ نگاشته شود. بزودی (در قضیه ۹.۱۶) ثابت می‌کنیم که هرگاه هر y در $T(V)$ نقش دقیقاً یک x در V باشد آنگاه معکوسهای راست منحصر بفرد می‌باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یک معکوس چپ وجود داشته باشد منحصر بفرد است و، درعین حال، یک معکوس راست نیز خواهد بود.

قضیه ۹.۱۶. تابع $T: V \rightarrow W$ می‌تواند حداکثر یک معکوس چپ داشته باشد. هرگاه T دارای معکوس چپ S باشد آنگاه S یک معکوس راست نیز خواهد بود.

برهان. فرض کنیم T دو معکوس چپ $S: T(V) \rightarrow V$ و $S': T(V) \rightarrow V$ را داشته باشد. y دلخواهی را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که $S(y) = S'(y)$. گوئیم بازای x در V ، $y = T(x)$ ، پس، چون هر دوی S و S' معکوسهای چپند، داریم

$$S'[T(x)] = x \text{ و } S[T(x)] = x$$

بنابراین $S(y) = x$ و $S'(y) = x$ ، پس، بازای هر y در $T(V)$ ، $S(y) = S'(y)$. در نتیجه $S = S'$ که منحصر بفرد بودن معکوسهای چپ را ثابت می‌کند.

حال ثابت می‌کنیم هر معکوس چپ S معکوس راستی نیز هست. عنصر دلخواه y را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. ثابت می‌کنیم $T[S(y)] = y$. گوئیم چون $y \in T(V)$ بازای x در V داریم $y = T(x)$. اما S یک معکوس چپ است، پس

$$x = S[T(x)] = S(y).$$

با بکار بردن T خواهیم داشت $T(x) = T[S(y)]$. اما $y = T(x)$ ، پس $y = T[S(y)]$ که برهان را تمام خواهد کرد.

قضیه بعدی کلیه توابعی را که معکوس چپ دارند مشخص می‌نماید.

قضیه ۹.۱۶. تابع $T: V \rightarrow W$ معکوس چپ دارد اگر و فقط اگر T عناصر متمایز V را بروی عناصر متمایز W بنگارد، یعنی اگر و فقط اگر بازای هر x و y در V ؛

$$x \neq y \text{ ایجاب کند که } T(x) \neq T(y) \quad (۵.۱۶)$$

توجه: شرط (۵.۱۶) معادل این حکم است:

$$T(x) = T(y) \text{ ایجاب کند که } x = y. \quad (۶.۱۶)$$

تابع T که در (۵.۱۶) یا (۶.۱۶) بازای هر x و y در V صدق کند یک به یک بر V خوانده خواهد شد.

برهان. فرض کنیم T معکوس چپ S را داشته و $T(x) = T(y)$ می‌خواهیم ثابت کنیم $x = y$. با بکار بردن S درمی‌یابیم که $S[T(x)] = S[T(y)]$. چون $S[T(x)] = x$ و $S[T(y)] = y$ این ایجاب می‌کند که $x = y$. این ثابت می‌کند که هر تابع دارای معکوس چپ بر قلمرو خود یک به یک است.

حال عکس این مطلب را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم T بر V یک به یک باشد. تابعی چون $S: T(V) \rightarrow V$ را نشان می‌دهیم که معکوس چپ T باشد. گوئیم هرگاه $y \in T(V)$ آنگاه، بازای x در V ، $y = T(x)$. بنا بر (۶.۱۶) دقیقاً یک x در V هست که بازای آن $y = T(x)$. $S(y) = x$ را مساوی این x تعریف می‌کنیم. یعنی S را بر $T(V)$ این طور تعریف می‌کنیم:

$$S(y) = x \text{ یعنی که } T(x) = y$$

در این صورت بازای هر x در V داریم $S[T(x)] = x$ ، پس $ST = I_V$. بنابراین، تابع S که بدین ترتیب تعریف شود یک معکوس چپ T خواهد بود.

تعریف. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ بر V یک به یک باشد. معکوس چپ منحصر بفرد T (که می‌دانیم معکوس راست هم هست) با T^{-1} نموده می‌شود. می‌گوئیم T معکوسپذیر است و T^{-1} را معکوس T می‌خوانیم.

نتایج این بخش در باب توابع دلخواه می‌باشند. حال این مفاهیم را در مورد تبدیلات خطی بکار می‌بریم.

۷.۱۶ تبدیلات خطی یک به یک

در این بخش V و W فضاهایی خطی دارای یک اسکالر بوده و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ می‌باشد. خطی بودن T ما را قادر می‌سازد تا خاصیت یک به یک بودن را به چند شکل معادل بیان کنیم.

قضیه ۱۰.۱۶. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ باشد. در اینصورت احکام زیر معادل یکدیگرند:

(الف) T بر V یک به یک است؛

(ب) T معکوسپذیر بوده و معکوشش $T^{-1}: T(V) \rightarrow V$ خطی است؛

(پ) بازای هر x در V ، $T(x) = 0$ ایجاب می کند که $x = 0$. یعنی فضای پوچ $N(T)$ فقط حاوی عنصر صفر V می باشد.

برهان. ثابت می کنیم (الف) حکم (ب)، (ب) حکم (پ)، و (پ) حکم (الف) را ایجاب می کند. ابتدا فرض می کنیم (الف) برقرار باشد. پس T (بنابر قضیه ۹.۱۶) معکوس دارد و باید نشان دهیم که T^{-1} خطی است. دو عنصر u و v را در $T(V)$ بدخواه اختیار می کنیم. در اینصورت بازای x و y در V ، $u = T(x)$ و $v = T(y)$. چون T خطی است بازای هراسکالر a و b داریم

$$au + bv = aT(x) + bT(y) = T(ax + by).$$

بنابراین، با بکاربردن T^{-1} ، خواهیم داشت

$$T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v),$$

پس T^{-1} خطی می باشد. در نتیجه (الف) حکم (ب) را ایجاب خواهد کرد.

اینک فرض کنیم (ب) برقرار باشد. x دلخواهی در V اختیار می کنیم که $T(x) = 0$. با بکار بستن T^{-1} درمی یابیم که، چون T^{-1} خطی است، $x = T^{-1}(0) = 0$. بنابراین، (ب) حکم (پ) را ایجاب می کند.

بالاخره فرض می کنیم (پ) برقرار باشد. دو عنصر دلخواه u و v را در V که $T(u) = T(v)$ اختیار می کنیم. بنابر خطی بودن داریم

$$T(u - v) = T(u) - T(v) = 0,$$

پس $u - v = 0$. بنابراین، T بر V یک به یک بوده و برهان قضیه تمام خواهد شد. وقتی V با بعد متناهی باشد، همانطور که قضیه بعدی نشان داده، می توان خاصیت یک به یک بودن را برحسب استقلال و بعد تنظیم کرد.

قضیه ۱۱.۱۶. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ بوده و V با بعد متناهی باشد، مثلاً $\dim V = n$. در اینصورت احکام زیر معادل یکدیگرند:

(الف) T بر V یک به یک است؛

(ب) هرگاه $e_1, \dots, e_p$ عناصر مستقلی در V باشند آنگاه

$$T(e_1), \dots, T(e_p)$$

عناصرهای مستقلی در $T(V)$ خواهند بود؛

$$\dim T(V) = n \quad (\text{پ})$$

(ت) هرگاه $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$$

پایه‌ای برای $T(V)$ خواهد بود.

برهان. ثابت می‌کنیم (الف) حکم (ب)، (ب) حکم (پ)، (پ) حکم (ت)، و (ت) حکم (الف) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (الف) برقرار باشد. همچنین $e_1, \dots, e_p$ عناصر مستقلی از V بوده و عنصرهای $T(e_1), \dots, T(e_p)$ را در $T(V)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم بازای اسکالرهای معین $c_1, \dots, c_p$ داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^p c_i T(e_i) = 0.$$

با توجه به خطی بودن T خواهیم داشت $T(\sum_{i=1}^p c_i e_i) = 0$ و در نتیجه، چون T یک-به-یک است، $\sum_{i=1}^p c_i e_i = 0$. اما $e_1, \dots, e_p$ مستقلند، پس $c_1 = \dots = c_p = 0$. بنا براین (الف) حکم (ب) را ایجاب خواهد کرد.

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. همچنین $\{e_1, \dots, e_n\}$ را پایه‌ای برای V می‌انگاریم. بنا بر (ب)، n عنصر $T(e_1), \dots, T(e_n)$ در $T(V)$ مستقلند. پس $\dim T(V) \geq n$. اما، طبق قضیه ۳.۱۶، داریم $\dim T(V) \leq n$. بنا براین $\dim T(V) = n$ ، در نتیجه (ب) حکم (پ) را ایجاب خواهد کرد.

اینک فرض کنیم (پ) برقرار بوده و $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه برای V باشد. عنصر دلخواه y را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. در اینصورت، بازای $x \in V$ ، $y = T(x)$ ، لذا داریم

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^n c_i T(e_i) \quad \text{و} \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

بنا براین $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ فضای $T(V)$ را می‌پیماید. اما فرض کرده ایم که $\dim T(V) = n$ ، پس $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ یک پایه برای $T(V)$ خواهد بود. در نتیجه (پ) حکم (ت) را ایجاب می‌نماید.

بالاخره فرض می‌کنیم (ت) برقرار باشد. ثابت می‌کنیم $T(x) = 0$ نتیجه می‌دهد که $x = 0$. فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه برای V باشد. چنانچه $x \in V$ می‌توانیم بنویسیم

$$T(x) = \sum_{i=1}^n c_i T(e_i) \quad \text{و} \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

هرگاه $T(x) = 0$ آنگاه، بدلیل مستقل بودن $T(e_1), \dots, T(e_n)$

$$c_1 = \dots = c_n = 0.$$

بنابراین $x = 0$ ، پس T بر V یک به یک خواهد بود. در نتیجه (ت) حکم (الف) را ایجاب کرده و برهان تمام خواهد شد.

۸.۱۶ تمرینات

۱. فرض کنید $V = \{0, 1\}$. همه توابع $T: V \rightarrow V$ را توصیف کنید. رویهم چهار تابع وجود دارند. آنها را با T_0, T_1, T_2, T_3 و T_4 نموده و جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها نشان دهد. مشخص کنید کدامها بر V یک به یک اند و معکوسهای آنها را ارائه دهید.

۲. فرض کنید $V = \{0, 1, 2\}$. کلیه توابع $T: V \rightarrow V$ را که بازای آنها $T(V) = V$ توصیف کنید. رویهم شش تابع وجود دارند. آنها را با $T_0, \dots, T_5$ نموده و جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. مشخص کنید کدامها بر V یک به یک اند و معکوسهای آنها را ارائه دهید.

در هریک از تمرینات ۳ تا ۱۲ تابع $T: V_2 \rightarrow V_2$ طبق دستور داده شده برای $T(x, y)$ تعریف شده که در آن (x, y) نقطه دلخواهی در V_2 است. در هر حالت تعیین کنید آیا T بر V_2 یک به یک هست یا نه. اگر هست برد آن $T(V_2)$ را توصیف کنید؛ بازای هر نقطه (u, v) در $T(V_2)$ فرض کنید $(x, y) = T^{-1}(u, v)$ و دستورهائی برای محاسبه x و y بر حسب u و v ارائه دهید.

$$T(x, y) = (y, x) \cdot 3 \quad T(x, y) = (x, -y) \cdot 4$$

$$T(x, y) = (x, 0) \cdot 5 \quad T(x, y) = (x, x) \cdot 6$$

$$T(x, y) = (x^2, y^2) \cdot 7 \quad T(x, y) = (e^x, e^y) \cdot 8$$

$$T(x, y) = (x, 1) \cdot 9 \quad T(x, y) = (x + 1, y + 1) \cdot 10$$

$$T(x, y) = (2x - y, x + y) \cdot 11 \quad T(x, y) = (2x - y, x + y) \cdot 12$$

در هریک از تمرینات ۱۳ تا ۲۰ تابع $T: V_3 \rightarrow V_3$ طبق دستور داده شده برای $T(x, y, z)$ تعریف شده که در آن (x, y, z) نقطه دلخواهی در V_3 است. در هر حالت تعیین کنید آیا T بر V_3 یک به یک است یا نه. اگر هست برد آن $T(V_3)$ را توصیف نمایید؛ بازای هر نقطه (u, v, w) در $T(V_3)$ فرض کنید $(x, y, z) = T^{-1}(u, v, w)$ و دستورهائی برای محاسبه x, y, z بر حسب u, v, w ارائه دهید.

$$T(x, y, z) = (z, y, x) \cdot 13$$

$$T(x, y, z) = (x, y, 0) \cdot 14$$

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 3z) \cdot 15$$

$$T(x, y, z) = (x, y, x + y + z) \quad ۱۶.$$

$$T(x, y, z) = (x + ۱, y + ۱, z - ۱) \quad ۱۷.$$

$$T(x, y, z) = (x + ۱, y + ۲, z + ۳) \quad ۱۸.$$

$$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z) \quad ۱۹.$$

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z) \quad ۲۰.$$

۲۱. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ تابعی باشد که V را بتوی خود می نگارد. توانها باستقرا طبق این دستورها تعریف می شوند: $T^0 = I$ ؛ برای $n \geq 1$ $T^n = TT^{n-1}$. ثابت کنید که قانون شرکت پذیری برای ترکیب، قانون نماها، یعنی $T^m T^n = T^{m+n}$ ، را ایجاب می کند. اگر T معکوس پذیر باشد ثابت کنید T^n نیز معکوس پذیر بوده و

$$(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n.$$

در تمرینات ۲۲ تا ۲۵، T و S توابعی با قلمرو V و مقادیر در V می باشند. در حالت کلی $ST \neq TS$. اگر $ST = TS$ می گوئیم T و S تعویض می شوند.

۲۲. اگر S و T تعویض شوند ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n \geq 0$ $(ST)^n = S^n T^n$.

۲۳. اگر S و T معکوس پذیر باشند ثابت کنید ST نیز چنین است و $(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$. عبارت دیگر، معکوس ST ترکیب معکوسها، با ترتیب عکس، خواهد بود.

۲۴. اگر S و T معکوس پذیر بوده و تعویض هم بشوند ثابت کنید که معکوسهای آنها نیز تعویض می شوند.

۲۵. فرض کنید V یک فضای خطی باشد. اگر S و T تعویض شوند ثابت کنید که

$$(S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2$$

و

$$(S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3.$$

اگر $ST \neq TS$ نشان دهید که این دستورها چگونه باید تغییر یابند.

۲۶. فرض کنید S و T تبدیلاتی خطی از V_3 بتوی V_3 باشند که طبق دستورهایی

$$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z) \text{ و } S(x, y, z) = (z, y, x)$$

تعریف شده اند که در آنها (x, y, z) نقطه دلخواهی از V_3 است.

(الف) نقش (x, y, z) را تحت هر یک از این تبدیلات تعیین کنید:

$$ST, TS, ST - TS, S^2, T^2, (ST)^2, (TS)^2, (ST - TS)^2.$$

(ب) ثابت کنید که S و T بر V_3 یک به یک هستند و نقش (u, v, w) را تحت هر یک از تبدیلات زیر بیابید:

$$S^{-1}, T^{-1}, (ST)^{-1}, (TS)^{-1}.$$

(پ) نقش (x, y, z) را تحت $(T - I)^n$ ، بازای هر $n \geq 1$ ، بیابید.

۲۷. فرض کنید V فضای خطی همه چندجمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین D عملگر مشتقگیری بوده و T عملگر انتگرالگیری باشد که هر چندجمله‌ای p را طبق $q(x) = \int_x^1 p(t) dt$ بروی چندجمله‌ای q می‌نگارد. ثابت کنید که $DT = I$ ولی $TD \neq I$. فضای پوچ و برد TD را توصیف نمایید.

۲۸. فرض کنید V فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین D عملگر مشتقگیری بوده و T تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $x p'(x)$ می‌نگارد.
(الف) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + 4x^3$ و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر تعیین نمایید:

$$D, T, DT, TD, DT - TD, T^n D^n - D^n T^n.$$

(ب) p هائی را در V تعیین کنید که بازای آنها $T(p) = p$.

(پ) p هائی را در V تعیین کنید که بازای آنها $(DT - 2D)(p) = 0$.

(ت) p هائی را در V تعیین کنید که بازای آنها $(DT - TD)^n(p) = D^n(p)$.

۲۹. فرض کنید D و V همانند تمرین ۲۸ بوده ولی T تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $x p(x)$ می‌نگارد. ثابت کنید

$$DT^n - T^n D = nT^{n-1}, \quad n \geq 2, \quad \text{و} \quad DT - TD = I$$

۳۰. فرض کنید S و T در $\mathcal{L}(V, V)$ بوده و $ST - TS = I$. ثابت کنید بازای هر $n \geq 1$

$$ST^n - T^n S = nT^{n-1}.$$

۳۱. فرض کنید V فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین S, R و T توابعی باشند که چندجمله‌ای دلخواه $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ در V را برتریب بروی چندجمله‌ایهای $r(x)$ ، $s(x)$ ، و $t(x)$ می‌نگارد که

$$r(x) = p(0), \quad s(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}, \quad t(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{k+1}.$$

(الف) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$ و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر معین نمایید:

$$R, S, T, ST, TS, (TS)^2, T^2 S^2, S^2 T^2, TRS, RST.$$

(ب) ثابت کنید S, R و T خطی هستند و فضای پوچ و برد هریک را معین نمایید.

(پ) ثابت کنید T بر V یک به یک است و معکوسش را مشخص نمایید.

(ت) چنانچه $n \geq 1$ و $(TS)^n$ و $S^n T^n$ را بر حسب I و R بیان کنید.

۳۲. به تمرین ۲۸ از بخش ۴۰۱۶ باز می‌گردیم. معین کنید آیا T بر V یک به یک است یا نه. اگر هست معکوسش را توصیف کنید.

۹.۱۶ تبدیلات خطی با مقادیر مقرر

همانطور که در قضیهٔ بعدی توضیف شده، اگر V با بعد متناهی باشد همیشه می‌توان تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ را طوری ساخت که در عناصر پایه‌ای از V مقادیر مقرر داشته باشد.

قضیهٔ ۱۲.۱۶. فرض کنیم $e_1, \dots, e_n$ پایه‌ای برای فضای خطی n بعدی V باشد. همچنین $u_1, \dots, u_n$ n عنصر دلخواه در فضای خطی W باشند. در اینصورت یک و فقط یک تبدیل خطی مانند $T: V \rightarrow W$ هست بطوری که

$$(۷.۱۶) \quad T(e_k) = u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

این T عنصر دلخواه x در V را بشرح زیر می‌نگارد:

$$(۷.۱۶) \quad T(x) = \sum_{k=1}^n x_k u_k \quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \quad \text{هرگاه } x \text{ آنگاه}$$

برهان. هر x در V را می‌توان بطور منحصر بفرد بصورت ترکیبی خطی از $e_1, \dots, e_n$ بیان کرد. ضرائب $x_1, \dots, x_n$ مؤلفه‌های x نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \dots, e_n)$ می‌باشند. اگر T را با (۸.۱۶) تعریف کنیم تحقیق اینکه T خطی است مطلب سراسری خواهد بود. هرگاه بازای k ای $x = e_k$ آنگاه کلیهٔ مؤلفه‌های x صفرند جز مؤلفهٔ k ام، که مساوی یک می‌باشد. پس، همانطور که خواسته شده بود، (۸.۱۶) رابطهٔ $T(e_k) = u_k$ را خواهد داد.

برای آنکه ثابت شود فقط یک تبدیل خطی صادق در (۷.۱۶) وجود دارد فرض می‌کنیم T' تبدیل دیگری بوده و $T'(x)$ را محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت

$$T'(x) = T' \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k T'(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k u_k = T(x).$$

چون بازای هر x در V ، $T'(x) = T(x)$ داریم $T' = T$ که برهان را تمام می‌کند.

مثال. تبدیل خطی $T: V_4 \rightarrow V_4$ را طوری تعیین کنید که عناصر پایهٔ $i = (1, 0, 0, 0)$ و $j = (0, 1, 0, 0)$ را بشرح زیر بنگارد:

$$T(i) = i + j, \quad T(j) = 2i - j.$$

حل. هرگاه $x = x_1 i + x_2 j$ عنصر دلخواهی از V_4 باشد آنگاه $T(x)$ چنین داده می‌شود:

$$\begin{aligned} T(x) &= x_1 T(i) + x_2 T(j) = x_1 (i + j) + x_2 (2i - j) \\ &= (x_1 + 2x_2) i + (x_1 - x_2) j. \end{aligned}$$

۱۰.۱۶ نمایشهای ماتریسی تبدیلات خطی

قضیه ۱۲.۱۶ نشان می‌دهد که تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ از فضای خطی و با بعد متناهی V کاملاً با عملش بر مجموعه مفروضی از عناصر پایه $e_1, \dots, e_n$ مشخص می‌شود. حال فرض می‌کنیم فضای W نیز با بعد متناهی بوده، مثلاً $\dim W = m$ و $w_1, \dots, w_m$ یک پایه برای آن باشد. (ابعاد n و m ممکن است باهم مساوی باشند یا نباشند.) چون مقادیر T در W پس هر عنصر $T(e_k)$ می‌تواند بطور منحصر بفرد بصورت ترکیبی خطی از عناصر پایه $w_1, \dots, w_m$ بیان شود، مثلاً نوشت

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i$$

که در آن $t_{1k}, \dots, t_{mk}$ مؤلفه‌های $T(e_k)$ نسبت به پایه مرتب $(w_1, \dots, w_m)$ می‌باشند. ما m تایی $(t_{1k}, \dots, t_{mk})$ را بطور قائم نشان می‌دهیم، این طور:

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

این آرایه یک بردار ستونی یا یک ماتریس ستونی نامیده می‌شود. برای هر n عنصر $T(e_1), \dots, T(e_n)$ چنین بردار ستونی را خواهیم داشت. این بردارها را کنار هم نهاده و در یک جفت گروهه‌جا می‌دهیم تا آرایه مستطیلی شکل زیر بدست آید:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

این آرایه یک ماتریس مرکب از m سطر و n ستون نامیده می‌شود. ما آن را یک ماتریس m در n یا یک ماتریس $m \times n$ می‌نامیم. اولین سطر ماتریس $1 \times n$

$$(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n})$$

است. ماتریس $1 \times m$ نموده شده در (۹.۱۶) ستون k ام خواهد بود. اسکالرهای t_{ik} طوری نمره‌گذاری شده‌اند که اولین زیرنویس i نمایشگر سطر و دومین زیرنویس k یا نگرستونی است که در آن t_{ik} ظاهر می‌شود. ما t_{ik} را دایه ik یا عنصر ik ی ماتریس می‌خوانیم. نمادهای فشرده‌تر

$$(t_{ik})_{i,k=1}^{m,n} \text{ یا } (t_{ik})$$

نیز برای نمایش ماتریسی که درایه ik ی آن t_{ki} است بکار می‌روند.
بنابراین، هر تبدیل خطی T از فضای n بعدی V بتوی فضای m بعدی W ماتریس $m \times n$ ی چون (t_{ik}) را بدست می‌دهد که ستونهای آن از مؤلفه‌های $T(e_1), \dots, T(e_n)$ نسبت به پایه‌های مرتب $(e_1, \dots, e_n)$ برای V و $(w_1, \dots, w_m)$ برای W می‌نامیم. همچنین ماتریس (t_{ik}) را بدانیم می‌توانیم مؤلفه‌های هر عنصر $T(x)$ را نسبت به پایه $(w_1, \dots, w_m)$ بصورتی که در قضیه بعدی وصف شده مشخص کنیم.

قضیه ۱۳.۱۶. فرض کنیم T یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ باشد که در آن

$$\dim W = m \text{ و } \dim V = n$$

همچنین $(e_1, \dots, e_n)$ و $(w_1, \dots, w_m)$ بترتیب پایه‌های مرتبی برای V و W بوده و (t_{ik}) ماتریس $m \times n$ ی باشد که درایه‌های آن با معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$(10.16) \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

دراینصورت هر عنصر دلخواه

$$(11.16) \quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

در V با مؤلفه‌های $(x_1, \dots, x_n)$ نسبت به $(e_1, \dots, e_n)$ توسط T بردی عنصر

$$(12.16) \quad T(x) = \sum_{i=1}^m y_i w_i$$

در W با مؤلفه‌های $(y_1, \dots, y_m)$ نسبت به $(w_1, \dots, w_m)$ نگاشته می‌شود. y_i ها با معادلات خطی زیر به مؤلفه‌های x مربوط می‌شوند:

$$(13.16) \quad y_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

برهان. با اعمال T در هرطرف (۱۱.۱۶) و استفاده از (۱۰.۱۶) خواهیم داشت

$$T(x) = \sum_{k=1}^n x_k T(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n t_{ik} x_k \right) w_i = \sum_{i=1}^m y_i w_i$$

که در آن هر y_i با (۱۳.۱۶) داده می‌شود. این برهان را تمام خواهد کرد.

اگر یک جفت پایه $(e_1, \dots, e_n)$ و $(w_1, \dots, w_m)$ بترتیب برای V و W انتخاب شوند هر تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ دارای نمایش ماتریسی (t_{ik}) خواهد شد. بعکس، هرگاه

با mn اسکالر دلخواه که بصورت ماتریس مستطیلی شکل (t_{ik}) آرایش یافته‌اند شروع کنیم و یک جفت پایه مرتب برای V و W برگزینیم، آنگاه بآسانی می‌توان ثابت کرد که فقط یک تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ هست که این نمایش ماتریسی را دارد. کافی است T را بر عناصر پایه V با معادلات (۱۰.۱۶) تعریف کنیم. در اینصورت، طبق قضیه ۱۲.۱۶، با این مقادیر مقرر یک و فقط یک تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ وجود خواهد داشت. آنگاه نقش $T(x)$ نقطه دلخواه x در V با معادلات (۱۲.۱۶) و (۱۳.۱۶) داده می‌شوند.

مثال ۱. ساختن یک تبدیل خطی از یک ماتریس مفروض. فرض کنید با ماتریس 2×3

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

شروع کرده باشیم. پایه‌های معمولی مرکب از بردارهای یک‌مختصات برای V_3 و V_2 را اختیار می‌کنیم. در اینصورت ماتریس داده شده تبدیل خطی $T: V_3 \rightarrow V_2$ را نمایش می‌دهد که بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در V_3 را بروی بردار (y_1, y_2) در V_2 طبق معادلات خطی زیر می‌نگارد:

$$y_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = x_1 + 0x_2 + 4x_3.$$

مثال ۲. ساختن نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی مفروض. فرض کنیم فضای خطی همه چندجمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ از درجه نایشتتر از ۳ باشد. این فضا بعدش ۴ است، و ما پایه $(x^3, x^2, x, 1)$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم D عملگر مشتقگیری باشد که هر چندجمله‌ای $p(x)$ در V را بروی مشتقش $p'(x)$ می‌نگارد. می‌توان D را بمنزله یک تبدیل خطی از V بتوی W در نظر گرفت که در آن فضای سه بعدی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی از درجه نایشتتر از ۲ می‌باشد. در W پایه $(x^2, x, 1)$ را برمی‌گزینیم. برای آنکه نمایش ماتریسی D را نسبت به این پایه‌ها بیابیم هر عنصر پایه V را تبدیل می‌کنیم (مشتق می‌گیریم) و آن را بصورت ترکیبی خطی از عناصر پایه W بیان می‌داریم. لذا خواهیم داشت

$$D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \quad D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \quad D(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2.$$

ضرائب این چندجمله‌ایها ستونهای نمایش ماتریسی D را مشخص می‌کنند. در نتیجه نمایش مطلوب با ماتریس 3×4 زیر داده خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

برای تأکید در اینکه نمایش ماتریسی نه تنها به عناصر پایه بلکه به ترتیب آنها نیز

مربوط است، ترتیب عناصر پایه را در W معکوس کرده و بجای آن از پایه مرتب $(1, x, x^2)$ استفاده می‌کنیم. در اینصورت عناصر پایه V بهمان چندجمله‌ایهایی که در بالا بدست آمد تبدیل می‌شوند اما مؤلفه‌های این چندجمله‌ایها نسبت به پایه جدید $(1, x, x^2)$ بترتیب عکس ظاهر خواهند شد. بنا براین، نمایش ماتریسی D در اینجا چنین خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از پایه $(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ برای V و پایه $(1, x, x^2)$ برای W ، سومین نمایش ماتریسی D را محاسبه می‌کنیم. عناصر پایه V مطابق زیر تبدیل می‌شوند:

$$D(1) = 0, D(1+x) = 1, D(1+x+x^2) = 1+2x,$$

$$D(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2,$$

پس نمایش ماتریسی در این حالت چنین خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

۱۱.۱۶ ساختن نمایش ماتریسی بشکل قطری

چون ممکن است با اختیار پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی متفاوتی برای یک تبدیل خطی مفروض بدست آورد، طبیعی است سعی شود پایه‌ها طوری انتخاب شوند که ماتریس حاصل از شکل ساده خاصی برخوردار گردد. قضیه بعد نشان می‌دهد که می‌توان تمام درایه‌ها را بجز احتمالاً در امتداد قطری که از گوشه بالائی سمت چپ ماتریس شروع می‌شود صفر گرداند. در امتداد این قطر رشته‌ای از یک و بدنبال آنها تعدادی صفر آمده‌اند بطوری که عددهای یک‌ها مساوی رتبه تبدیل است. ماتریس (t_{ik}) ای که کلیه درایه‌های t_{ik} ی آن برای $i \neq k$ صفر باشند یک ماتریس قطری نام دارد.

قضیه ۱۴.۱۶. فرض کنیم W و V فضاهائی خطی با بعدمناهی بوده و $\dim V = n$ و $\dim W = m$. همچنین $T \in \mathcal{L}(V, W)$ و $r = \dim T(V)$ (رتبه T) را نشان دهیم. در اینصورت پایه‌ای مانند $(e_1, \dots, e_n)$ برای V و پایه‌ای مثل $(w_1, \dots, w_m)$ برای W وجود دارند بطوری که

$$(14.16) \quad T(e_i) = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{بازای}$$

$$(15.16) \quad T(e_i) = 0, \quad i = r+1, \dots, n \quad \text{بازای}$$

بنابراین، دایه‌های ماتریس (t_{ik}) ی T نسبت به این پایه‌ها همه صفرند مگر r دایه قطری

$$t_{11} = t_{22} = \dots = t_{rr} = 1.$$

برهان. ابتدا پایه‌ای برای W می‌سازیم. چون $T(V)$ یک زیرفضای W بوده و $\dim T(V) = r$ پس فضای $T(V)$ پایه‌ای از r عنصر در W ، مثلاً $w_1, \dots, w_r$ ، را خواهد داشت. بنا بر قضیه ۷.۱۵ این عناصر زیرمجموعه‌ای از یک پایه W را تشکیل می‌دهند. لذا می‌توان عنصرهای $w_{r+1}, \dots, w_m$ را اضافه کرد تا

$$(w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m) \quad (۱۶.۱۶)$$

پایه‌ای برای W بشود.

حال یک پایه برای V می‌سازیم. هریک از r عنصر اول w_i در (۱۶.۱۶) نقش لااقل یک عنصر در V است. یکی از این عناصر را در V اختیار کرده و آن را e_i می‌نامیم. در اینصورت، بازی $1, 2, \dots, r$ ، پس (۱۶.۱۶) برقرار خواهد بود. حال فرض کنیم k بعد فضای بوج $N(T)$ باشد. بنا بر قضیه ۳.۱۶ داریم $n = k + r$. چون $\dim N(T) = k$ فضای $N(T)$ پایه‌ای مرکب از k عنصر در V دارد که آن را $e_{r+k}, \dots, e_{r+1}$ نشان می‌دهیم. معادله (۱۵.۱۶) برای هریک از این عناصر برقرار است. بنابراین، برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم که مجموعه مرتب

$$(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+k}) \quad (۱۷.۱۶)$$

پایه‌ای برای V می‌باشد. چون $\dim V = n = r + k$ فقط کافی است نشان دهیم که این عناصر مستقلند. فرض کنیم ترکیبی خطی از آنها صفر باشد، مثلاً

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i e_i = 0. \quad (۱۸.۱۶)$$

با اعمال T و استفاده از معادلات (۱۶.۱۶) و (۱۵.۱۶) خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

اما $w_1, \dots, w_r$ مستقلند، و در نتیجه $c_1 = \dots = c_r = 0$. بنابراین، r جمله اول در (۱۸.۱۶) صفر می‌باشند، پس (۱۸.۱۶) به

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} c_i e_i = 0$$

تقلیل می‌یابد. اما $e_{r+k}, \dots, e_{r+1}$ ، باین دلیل که پایه‌ای برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند، مستقل می‌باشند، و در نتیجه $c_{r+1} = \dots = c_{r+k} = 0$. بنا بر این کلیه c_i ها در (۱۸.۱۶) صفرند، لذا عنصرهای (۱۷.۱۶) پایه‌ای برای V تشکیل خواهند داد. این برهان را کامل می‌کند.

مثال. به مثال ۲ از بخش ۱۵.۱۶ باز می‌گردیم که در آن D عملگر مشتقگیری است

که فضای V چندجمله‌ایها از درجهٔ نایبتر از ۳ را بتوی فضای W مرکب از چندجمله‌ایهای از درجهٔ نایبتر از ۲ می‌نگارد. در این مثال، چون $T(V) = W$ ، رتبهٔ T مساوی ۳ خواهد بود. با استفاده از روشی که برای اثبات قضیهٔ ۱۴.۱۶ بکار رفت پایه‌ای برای W ، مثلاً $(1, x, x^2)$ ، را اختیار می‌کنیم. مجموعهٔ چندجمله‌ایهایی در V را که بروی این عناصر نگاشته می‌شوند عبارتند از $(x, x/2, x^3/3)$. این مجموعه را با الحاق چندجمله‌ای ثابت ۱، که پایه‌ای برای فضای پوچ D است، وسعت می‌دهیم تا پایه‌ای برای V بدست آوریم. بنابراین، اگر از پایهٔ $(1, x, x^2/2, x^3/3, 1)$ برای V و پایهٔ $(1, x, x^2)$ جهت W استفاده کنیم، نمایش ماتریسی متناظر برای D شکل قطری زیر را خواهد داشت

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

۱۲.۱۶* تمرینات

در همهٔ تمریناتی که به فضای برداری V_n مربوط می‌شوند پایهٔ معمولی بردارهای یک مختصات اختیار می‌شود مگر آنکه صریحاً پایهٔ دیگری قید شده باشد. در تمرینات مربوط به ماتریس تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ ، که $V = W$ ، برای هر دو فضای V و W یک پایه اختیار کنید مگر آنکه به انتخاب دیگری اشاره شده باشد.

۱. ماتریس هر یک از تبدیلات خطی زیر از V_n بتوی V_n را تعیین کنید.

(الف) تبدیل همانی؛

(ب) تبدیل صفر؛

(پ) ضرب در اسکالر ثابت c .

۲. ماتریس هر یک از تصاویر زیر را تعیین کنید.

(الف) $T: V_3 \rightarrow V_4$ که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

(ب) $T: V_3 \rightarrow V_4$ که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$.

(پ) $T: V_5 \rightarrow V_3$ که در آن $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$.

۳. تبدیل خطی $T: V_4 \rightarrow V_4$ بردارهای پایهٔ i و j را مطابق زیر می‌نگارد:

$$T(i) = i + j, T(j) = 2i - j.$$

(الف) $T(3i - 4j)$ و $T(2i - 4j)$ را بر حسب i و j حساب کنید.

(ب) ماتریس T و T^2 را معین نمایید.

(پ) قسمت (ب) را در صورتی حل کنید که پایهٔ (i, j) با (e_1, e_2) ، که

$$e_2 = 3i + j \text{ و } e_1 = i - j$$

عوض شده باشد.

۴. تبدیل خطی $T: V_4 \rightarrow V_4$ چنین تعریف شده است:

هر بردار (x, y) نسبت به محور y منعکس شده و سپس طولش دو برابر می شود تا $T(x, y)$ بدست آید. ماتریس T و ماتریس T^2 را مشخص کنید.

۵. فرض کنید $T: V_3 \rightarrow V_3$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که

$$T(k) = 2i + 3j + 5k, T(j + k) = i, T(i + j + k) = j - k.$$

(الف) $T(i + 2j + 3k)$ را حساب کرده و پوچی و رتبه T را معین نمایید.
(ب) ماتریس T را تعیین کنید.

۶. برای تبدیل خطی تمرین ۵ هر دو پایه را (e_1, e_2, e_3) اختیار کنید که در آن $e_1 = (2, 3, 5)$, $e_2 = (1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 1, -1)$ و ماتریس T را نسبت به پایه های جدید معین نمایید.

۷. تبدیل خطی $T: V_3 \rightarrow V_3$ بردارهای پایه را این طور می نگارد:

$$T(i) = (0, 0), T(j) = (1, 1), T(k) = (1, -1).$$

(الف) $T(2i - j + k)$ را حساب کرده و پوچی و رتبه T را مشخص نمایید.
(ب) ماتریس T را تعیین کنید.

(پ) از پایه (i, j, k) در V_3 و پایه (w_1, w_2) در V_2 که در آن $w_1 = (1, 1)$ و $w_2 = (1, 2)$ استفاده کرده ماتریس T را نسبت به این پایه ها معین نمایید.
(ت) پایه های (e_1, e_2, e_3) را برای V_3 و (w_1, w_2) را برای V_2 طوری بیابید که ماتریس T نسبت به آنها قطری باشد.

۸. تبدیل خطی $T: V_3 \rightarrow V_3$ بردارهای پایه را این طور می نگارد:

$$T(i) = (1, 0, 1), T(j) = (-1, 0, 1).$$

(الف) $T(2i - 3j)$ را حساب کرده و پوچی و رتبه T را معین نمایید.
(ب) ماتریس T را مشخص کنید.

(پ) پایه های (e_1, e_2) برای V_2 و (w_1, w_2, w_3) برای V_3 را طوری بیابید که ماتریس T نسبت به آنها قطری باشد.

۹. تمرین ۸ را در صورتی حل کنید که $T(i) = (1, 0, 1)$ و $T(j) = (1, 1, 1)$.
۱۰. فرض کنید W, V فضاهائی خطی باشند که بعد هر یک ۲ و پایه آنها (e_1, e_2) است. همچنین $T: V \rightarrow W$ را تبدیل خطی بی نگارید که

$$T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 9e_2, T(3e_1 + 2e_2) = 7e_1 + 23e_2.$$

(الف) $T(e_1 - e_2)$ را حساب کرده و پوچی و رتبه T را معین نمایید.
(ب) ماتریس T را نسبت به پایه داده شده مشخص کنید.

(پ) از پایه (e_1, e_2) برای V استفاده کرده پایه جدید $(e_1 + ae_2, 2e_1 + be_2)$ را برای W طوری بیابید که ماتریس T نسبت به آنها قطری باشد.

هر یک از مجموعه های زیر در فضای خطی تمام توابع حقیقی مستقل بوده و یک

زیرفضای V با بعد متناهی V را می‌پیماید. مجموعه داده شده را بعنوان پایه‌ای برای V بکار برده و فرض کنید $D: V \rightarrow V$ عملگر مشتقگیری باشد. در هر حالت ماتریس D و ماتریس D^2 را نسبت به این پایه پیدا کنید.

$$0.11 \quad (\sin x, \cos x) \quad 0.15 \quad (-\cos x, \sin x)$$

$$0.12 \quad (1, x, e^x) \quad 0.16 \quad (\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$$

$$0.13 \quad (1, 1+x, 1+x+e^x) \quad 0.17 \quad (e^x \sin x, e^x \cos x)$$

$$0.14 \quad (e^x, xe^x) \quad 0.18 \quad (e^{2x} \sin 3x, e^{2x} \cos 3x)$$

۱۹. پایه $(1, x, x^2, x^3)$ را در فضای خطی V مرکب از همه چندجمله‌ایهای حقیقی از درجه نایبتر از ۳ اختیار کنید. فرض کنید D عملگر مشتقگیری بوده و $T: V \rightarrow V$ تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $x p'(x)$ می‌نگارد. ماتریس هریک از تبدیلات زیر را نسبت به پایه داده شده مشخص کنید: (الف) T ؛ (ب) DT ؛ (پ) TD ؛ (ت) $TD - DT$ ؛ (ث) T^2 ؛ (ج) $T^2 D^2 - D^2 T^2$.

۲۰. به تمرین ۱۹ باز می‌گردیم. فرض کنید W نقش V تحت TD باشد. برای V و برای W پایه‌هایی یابید که ماتریس TD نسبت به آنها قطری باشد.

۱۳.۱۶ فضاهای خطی ماتریسها

دیدیم که چگونه ماتریسها بطورطبیعی بصورت نمایشهایی از تبدیلات خطی ظاهر می‌شوند. آنها را می‌توان، بدون آنکه الزاماً به تبدیلات خطی مربوط شوند، بعنوان اشیائی قائم بذات نیز در نظر گرفت. ماتریسها باین صورت رده دیگری از اشیاء ریاضی را تشکیل می‌دهند که بر آنها می‌توان اعمال جبری تعریف کرد. گرچه ارتباطشان با تبدیلات خطی انگیزه این تعاریف است ولی این ارتباط فعلاً نادیده گرفته می‌شود.

فرض کنیم m و n دو عدد صحیح مثبت بوده و $I_{m,n}$ مجموعه همه جفتهای (i, j) از اعداد صحیح باشد که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$. هر تابع A که قلمروش $I_{m,n}$ باشد یک ماتریس $m \times n$ نام دارد. مقدار تابعی $A(i, j)$ دایه i, j یا عنصر i ماتریس نامیده شده و با a_{ij} نیز نشان داده می‌شود. رسم این شده که تمام مقادیر تابع را در آرایه‌ای مستطیلی شکل مرکب از m سطر و n ستون مطابق زیر نمایش می‌دهند:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

عناصر a_{ij} می‌توانند اشیائی از هر نوع باشند. این عناصرها معمولاً اعدادی حقیقی یا

مختلط می باشند، اما گاهی مناسب است ماتریسهائی در نظر گرفته شوند که عناصر آنها اشیائی دیگر، مثلاً توابع، باشند. ما ماتریسها را با نمادهای فشرده تر

$$A = (a_{ij}) \text{ یا } A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

نیز نشان خواهیم داد. چنانچه $m = n$ ماتریس را یک ماتریس مربعی می خوانند. هر ماتریس $n \times 1$ یک ماتریس سطری نامیده می شود؛ هر ماتریس $1 \times m$ یک ماتریس ستونی نام خواهد داشت.

دو تابع مساویند اگر و فقط اگر دارای یک قلمرو بوده و در هر عنصر از قلمرو یک مقدار تابعی داشته باشند. چون ماتریسها تابع هستند دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مساویند اگر و فقط اگر دارای یک تعداد سطر و یک تعداد ستون بوده و، برای هر جفت (i, j) ، $a_{ij} = b_{ij}$.

حال فرض کنیم درایه ها اعدادی (حقیقی یا مختلط) باشند و جمع ماتریسها و ضربشان در اسکالر را با همان روشی که برای توابع حقیقی یا مختلط بکار رفت تعریف می کنیم.

تعریف. اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ بوده و c اسکالر دلخواهی باشد ماتریسهای $A + B$ و cA را این طور تعریف می کنیم:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad cA = (ca_{ij}).$$

مجموع فقط وقتی تعریف می شود که A و B یک اندازه داشته باشند.

مثال. هرگاه

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(-1)B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر O را ماتریس $m \times n$ تعریف می کنیم که همه عناصرش صفرند. با این تعاریف، تحقیق اینکه دسته همه ماتریسهای $m \times n$ یک فضای خطی است تمرین سرراستی خواهد بود. این فضای خطی را با $M_{m,n}$ نشان می دهیم. اگر درایه ها حقیقی باشند فضای $M_{m,n}$ یک فضای خطی حقیقی می شود. چنانچه درایه ها مختلط باشند $M_{m,n}$ فضای خطی مختلطی خواهد بود. همچنین اثبات اینکه بعد این فضا mn است آسان می باشد. درواقع یک پایه برای $M_{m,n}$ از mn ماتریس تشکیل شده که هر یک دارای یک درایه مساوی ۱ و بقیه مساوی ۰ است. بعنوان مثال، شش ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای مجموعه همه ماتریسهای 2×3 تشکیل می‌دهند.

۱۴.۱۶ یکرختی بین تبدیلات خطی و ماتریسها

حال به ارتباط بین ماتریسها و تبدیلات خطی باز می‌گردیم. فرض کنیم V و W فضاهایی خطی با بعد متناهی بوده و $\dim V = n$ و $\dim W = m$. پایه $(e_1, \dots, e_n)$ را برای V و پایه $(w_1, \dots, w_m)$ را برای W اختیار می‌کنیم. در این بحث این پایه‌ها ثابت گرفته می‌شوند. فرض کنیم $\mathcal{L}(V, W)$ فضای خطی همه تبدیلات خطی از V بتوی W باشد. اگر $T \in \mathcal{L}(V, W)$ را ماتریس $m(T)$ نسبت به پایه‌های داده شده می‌انگاریم. یادآور شویم که $m(T)$ مطابق زیر تعریف می‌شود:

نقش هر عنصر پایه e_k بصورت یک ترکیب خطی از عناصر پایه در W است:

$$(19.16) \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ برای}$$

ضرائب اسکالر t_{ik} درایه‌های ik می‌اند. لذا خواهیم داشت

$$(20.16) \quad m(T) = (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n}.$$

معادله (۲۰.۱۶) تابع جدید m را تعریف می‌کند که قلمروش $\mathcal{L}(V, W)$ بوده و مقادیرش ماتریسهائی در $M_{m,n}$ اند. چون هر ماتریس $m \times n$ m ماتریسی مثل $m(T)$ ، برای T ای در $\mathcal{L}(V, W)$ است، پس برد m مساوی $M_{m,n}$ خواهد بود. قضیه بعد نشان می‌دهد که تبدیل $m: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{m,n}$ بر $\mathcal{L}(V, W)$ خطی و یک به یک می‌باشد.

قضیه ۱۵.۱۶. قضیه یکرختی. برای هر S و T در $\mathcal{L}(V, W)$ و کلیه اسکالرهایی c داریم

$$m(cT) = cm(T) \text{ و } m(S + T) = m(S) + m(T)$$

بعلاوه،

$$m(S) = m(T) \text{ ایجاب می‌کند که } S = T$$

پس m بر $\mathcal{L}(V, W)$ یک به یک خواهد بود.

برهان. ماتریس $m(T)$ از ضرائب t_{ik} در (۱۹.۱۶) تشکیل یافته‌است. بهمین نحو، ماتریس $m(S)$ از ضریبهای s_{ik} در معادلات زیر تشکیل شده است:

$$(21.16) \quad S(e_k) = \sum_{i=1}^m s_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ برای}$$

چون داریم

$$(cT)(e_k) = \sum_{i=1}^m (ct_{ik}) w_i \text{ و } (S+T)(e_k) = \sum_{i=1}^m (s_{ik} + t_{ik}) w_i$$

پس خواهیم داشت

$$m(cT) = (ct_{ik}) = cm(T) \text{ و } m(S+T) = (s_{ik} + t_{ik}) = m(S) + m(T)$$

این ثابت می‌کند که m خطی است.

برای اثبات یک به یک بودن m فرض می‌کنیم $m(S) = m(T)$ که در آن

$$T = (t_{ik}) \text{ و } S = (s_{ik})$$

معادلات (۱۹.۱۶) و (۲۱.۱۶) نشان می‌دهند که برای هر عنصر پایه e_k ، $S(e_k) = T(e_k)$ ، پس، برای هر x در V ، $S(x) = T(x)$ ، و در نتیجه $S = T$.

توجه: تابع m یک یکریختی نامیده می‌شود. برای هر انتخاب از پایه‌ها، m یک تناظر یک به یک بین مجموعه تبدیلات خطی $\mathcal{L}(V, W)$ و مجموعه ماتریسهای $m \times n$ ، $M_{m,n}$ ایجاد می‌کند. اعمال جمع و ضرب در اسکالر ها تحت این تناظر حفظ خواهند شد. گفته می‌شود که فضاهای خطی $\mathcal{L}(V, W)$ و $M_{m,n}$ یکریخت هستند. ضمناً قضیه ۱۱.۱۶ نشان می‌دهد که قلمرو یک تبدیل خطی یک به یک همبند برد آن است. بنابراین

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M_{m,n} = mn.$$

هرگاه $V = W$ و برای V و W یک پایه اختیار کنیم آنگاه ماتریس $m(I)$ که متناظر تبدیل همانی $I: V \rightarrow V$ است یک ماتریس قطری $n \times n$ می‌باشد که هر درایه قطری آن ۱ و درایه‌های دیگرش صفرند. این ماتریس همانی یا ماتریس یک نامیده شده و با I یا I_n نشان داده می‌شود.

۱۵.۱۶ ضرب ماتریسها

بعضی از تبدیلات خطی را می‌توان بوسیله ترکیب درهم ضرب کرد. حال ضرب ماتریسها را طوری تعریف می‌کنیم که حاصلضرب دوما تریس با ترکیب تبدیلات خطی که دوما تریس نمایشگر آنهاند متناظر باشد.

یادآور می‌شویم که اگر $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند ترکیب آنها $ST: U \rightarrow W$ تبدیلی خطی است که این‌طور داده می‌شود:

$$ST(x) = S[T(x)], U \text{ در } x \text{ برای}$$

فرض کنیم U, V ، و W با بعد متناهی باشند، مثلاً

$$\dim U = n, \dim V = p, \dim W = m.$$

برای U, V ، و W پایه‌هایی اختیار می‌کنیم. نسبت به این پایه‌ها، ماتریس $m(S)$ یک ماتریس $m \times p$ ، ماتریس T یک ماتریس $p \times n$ ، و ماتریس ST یک ماتریس $m \times n$ خواهد بود. تعریف ضرب ماتریسی زیر ما را قادر می‌سازد تا رابطه $m(ST) = m(S)m(T)$ را نتیجه بگیریم. این مطلب خاصیت یکریختی را به حاصلضربها گسترش خواهد داد.

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times p$ و B یک ماتریس $p \times n$ باشد، مثلاً

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,n} \text{ و } A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$$

دو اینصورت حاصلضرب AB مساوی ماتریس $m \times n$ ، $C = (c_{ij})$ تعریف می‌شود که درایه ij آن این طور بدست می‌آید:

$$(22.16) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

توجه: حاصلضرب AB تعریف نمی‌شود، مگر اینکه تعداد ستونهای A مساوی عدده سطرهای B باشد.

هرگاه بجای سطر i از A بنویسیم A_i و بجای ستون j از B بنویسیم B^j و اینها را بردارهایی p بعدی تصور کنیم آنگاه مجموع (22.16) چیزی جز حاصلضرب نقطه‌ای $A_i \cdot B^j$ نخواهد بود. بعبارت دیگر، درایه ij از AB حاصلضرب نقطه‌ای سطر i از A در ستون j از B است:

$$AB = (A_i \cdot B^j)_{i,j=1}^{m,n}.$$

بنابراین می‌توان ضرب ماتریسی را تعمیمی از ضرب نقطه‌ای محسوب کرد.

مثال. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. چون A ماتریسی

2×3 و B ماتریسی 3×2 است پس حاصلضرب AB ماتریس 2×2 ی زیرمی‌باشد:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

درایه‌های AB این طور محاسبه می‌شوند:

$$A_1 \cdot B^1 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 17,$$

$$A_1 \cdot B^2 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 21,$$

$$A_2 \cdot B^1 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_2 \cdot B^2 = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -7.$$

مثال ۲. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

در اینجا A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 3×1 است، لذا AB ماتریس 2×1 زیر خواهد بود:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 \\ A_2 \cdot B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

زیرا $A_1 \cdot B^1 = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -9$ و

$$A_2 \cdot B^1 = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 8.$$

مثال ۳. هرگاه A و B هر دو ماتریسهائی مربعی و دارای یک اندازه باشند آنگاه هم AB و هم BA تعریف شده اند. بعنوان مثال، اگر

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \text{ و } AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ خواهیم داشت}$$

این مثال نشان می دهد که در حالت کلی $AB \neq BA$. چنانچه $AB = BA$ می گوئیم A و B قعویض می شوند.

مثال ۴. هرگاه I_p ماتریس همانی $p \times p$ باشد آنگاه، بازای هر ماتریس A $I_p A = A$ ، $p \times n$ و، بازای هر ماتریس B $B I_p = B$ ، $m \times p$ بعنوان مثال،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

حال ثابت می کنیم ماتریس ترکیب ST حاصل ضرب ماتریسهای $m(S)$ و $m(T)$ است.

قضیه ۱۶.۱۶. فرض کنیم $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند بطوری که U ، V و W فضاهائی خطی با بعدمتهائی می باشند. داینصورت، بازای هر انتخاب ثابتی از پایه ها، ماتریسهای S ، T و ST با معادله

$$m(ST) = m(S)m(T)$$

به هم مربوط می شوند.

برهان. فرض کنیم $\dim U = n$ ، $\dim V = p$ و $\dim W = m$. همچنین $(u_1, \dots, u_n)$ پایه ای برای U ، $(v_1, \dots, v_p)$ پایه ای برای V ، و $(w_1, \dots, w_m)$ پایه ای برای W باشد. نسبت به این پایه ها داریم

$$S(v_k) = \sum_{i=1}^m s_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, p \text{ بازای } m(S) = (s_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$$

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^p t_{kj} v_k, j = 1, 2, \dots, n \text{ بازای } m(T) = (t_{ij})_{i,j=1}^{p,n}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$ST(u_j) = S[T(u_j)] = \sum_{k=1}^p t_{kj} S(v_k) = \sum_{k=1}^p t_{kj} \sum_{i=1}^m s_{ik} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p s_{ik} t_{kj} \right) w_i,$$

لذا درمی یابیم که

$$m(ST) = \left(\sum_{k=1}^p s_{ik} t_{kj} \right)_{i,j=1}^{m,n} = m(S) m(T).$$

قبلا دیدیم که ضرب ماتریسی همیشه قانون تعویضپذیری را برقرار نمی کند. قضیه بعدی نشان می دهد که در قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری صادق می باشد.

قضیه ۱۶.۱۷. قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری برای ضرب ماتریسی. ماتریسهای A, B, C داده شده اند.

(الف) اگر حاصلضربهای $A(BC)$ و $(AB)C$ با معنی باشند داریم

$$A(BC) = (AB)C \text{ (قانون شرکتپذیری).}$$

(ب) فرض کنیم A و B یک اندازه داشته باشند. چنانچه AC و BC با معنی باشند داریم

$$(A+B)C = AC + BC \text{ (قانون پخشپذیری از راست)}$$

حال آنکه، اگر CA و CB معنی داشته باشند، خواهیم داشت

$$C(A+B) = CA + CB \text{ (قانون پخشپذیری از چپ).}$$

برهان. با آنکه این خواص را می توان مستقیماً از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه گرفت اما ما استدلال زیر را ترجیح می دهیم. فضاهای خطی با بعد متناهی U, V, W, X و تبدیلات خطی $T: U \rightarrow V, S: V \rightarrow W, R: W \rightarrow X$ را طوری می گیریم که بازی انتخاب ثابتی از پایه ها داشته باشیم

$$A = m(R), B = m(S), C = m(T).$$

بنابر قضیه ۱۶.۱۶ داریم $m(RS) = AB$ و $m(ST) = BC$. از قانون شرکتپذیری برای ترکیب خواهیم داشت $R(ST) = (RS)T$. اگر بار دیگر قضیه ۱۶.۱۶ را برای این معادله بکاربریم نتیجه می شود که $m(R) m(ST) = m(RS) m(T)$ یا $A(BC) = (AB)C$ که (الف) را ثابت می کند. قسمت (ب) را می توان با استدلال مشابهی ثابت کرد.

تعریف. اگر A یک ماتریس مربعی باشد توانهای صحیح A را باستقرا این طور

تعریف می‌کنیم:

$$A^n = AA^{n-1}, n \geq 1, A^0 = I$$

۱۶.۱۶ تمرینات

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ اگر } ۱.$$

ماتریسهای $A(2B - 3C)$ و $CA, AC, BA, AB, B + C$ را حساب کنید.

$$۲. \text{ فرض کنید } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ کلیه ماتریسهای } 2 \times 2 \text{ ی } B \text{ را بیابید که}$$

$$AB = O \text{ (الف)} \quad BA = O \text{ (ب)}$$

۳. در هر حالت a, b, c و d ای را بیابید که در معادله داده شده صدق کنند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

۴. $AB - BA$ را در هر حالت حساب کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

۵. اگر A یک ماتریس مربعی باشد ثابت کنید بازای کلیه اعداد صحیح

$$A^n A^m = A^{n+m}, n \geq 0 \text{ و } m \geq 0$$

$$۶. \text{ فرض کنید } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ تحقیق کنید که } A^2 \text{ و } A^n \text{ را محاسبه نمایید.}$$

$$۷. \text{ فرض کنید } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \text{ تحقیق کنید که}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \text{ و } A^n \text{ را محاسبه نمایید.}$$

۸. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و A^3 و A^4 را محاسبه نمایید. یک دستور کلی برای A^n حدس زده و آن را باستقرا ثابت کنید.

۹. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ثابت کنید که $A^2 = 2A - I$ و A^{100} را محاسبه نمایید.

۱۰. کلیه ماتریسهای 2×2 ی A را بیابید که $A^2 = O$.

۱۱. (الف) ثابت کنید که ماتریس 2×2 ی A با هر ماتریس 2×2 تعویض می شود اگر و فقط اگر A با هر چهار ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعویض شود.

(ب) کلیه این چنین ماتریسهای A را بیابید.

۱۲. معادله $A^2 = I$ بازای هر یک از ماتریسهای 2×2 ی

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

که در آنها b و c اعداد حقیقی دلخواهی هستند، برقرار است. کلیه ماتریسهای 2×2 ی A را بیابید که $A^2 = I$.

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ ماتریسهای 2×2 ی C و D را طوری بیابید که $AC = B$ و $DA = B$.

۱۴. (الف) تحقیق کنید که اتحادهای جبری

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \text{ و } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

بازای ماتریسهای 2×2 ی $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار نیستند.

(ب) طرفهای راست این اتحادها را طوری اصلاح کنید که برای کلیه ماتریسهای مربعی A و B برقرار شوند.

(پ) اتحادهای مذکور در قسمت (الف) برای چه ماتریسهای A و B معتبرند؟

۱۷.۱۶ دستگاههای معادلات خطی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریس $m \times n$ مفروضی از اعداد بوده و $c_1, \dots, c_m, m$ عدد

دیگر باشند. مجموعه m معادله بشکل

$$(۲۳.۱۶) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ بازاری}$$

یک دستگاه m معادله خطی با n مجهول نسامیده می شود. در اینجا $x_1, \dots, x_n$ بعنوان مجهول در نظر گرفته می شوند. هر جواب دستگاه یک n تایی $(x_1, \dots, x_n)$ از اعداد است که بازاری آن کلیه معادلات برقرار می باشند. ماتریس A ماتریس ضرایب دستگاه نامیده می شود.

دستگاههای خطی را می توان بکمک تبدیلات خطی مطالعه کرد. پایه های معمولی مرکب از بردارهای یکه مختصات در V_n و در V_m را اختیار می کنیم. ماتریس ضرایب A تبدیل خطی $T: V_n \rightarrow V_m$ را مشخص می کند که هر بردار دلخواه $x = (x_1, \dots, x_n)$ در V_n را بروی بردار $y = (y_1, \dots, y_m)$ در V_m می نگارد که با این m معادله خطی داده می شود:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ بازاری}$$

فرض کنیم $c = (c_1, \dots, c_m)$ آن بردار در V_m باشد که مؤلفه های اعداد پدیدار در دستگاه (۲۳.۱۶) هستند. این دستگاه را می توان بطور ساده تر چنین نوشت:

$$T(x) = c.$$

دستگاه دارای جواب است اگر و فقط اگر c در برد T باشد. اگر فقط یک x در V_n بروی c نگاشته شود دستگاه دقیقاً یک جواب دارد. چنانچه بیش از یک x بروی c نگاشته شود دستگاه بیش از یک جواب خواهد داشت.

مثال ۱. دستگاهی که جواب ندارد. دستگاه $x + y = 1, x + y = 2$ جواب $x + y = 1$ ندارد. مجموع دو عدد نمی تواند هم ۱ و هم ۲ باشد.

مثال ۲. دستگاهی که فقط یک جواب دارد. دستگاه $x + y = 1, x - y = 0$ دقیقاً یک جواب دارد: $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

مثال ۳. دستگاهی که بیش از یک جواب دارد. دستگاه $x + y = 1$ ، مرکب از یک معادله با دو مجهول، بیش از یک جواب دارد. هر دو عدد که مجموعشان ۱ باشد یک جواب را خواهند داد.

به هر دستگاه خطی (۲۳.۱۶) می توان دستگاه دیگر زیر را مربوط کرد:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ بازاری}$$

که با گذاردن 0 بجای هر c در (۲۳.۱۶) بدست می آید. این را دستگاه همگن متناظر (۲۳.۱۶) می نامیم. چنانچه $c \neq 0$ دستگاه (۲۳.۱۶) یک دستگاه غیرهمگن نام دارد. بردار x در V_n در دستگاه همگن صدق می کند اگر و فقط اگر

$$T(x) = 0$$

که در آن T تبدیل خطیبی است که بوسیله ماتریس ضرائب تعیین می شود. دستگاه همگن همیشه یک جواب، یعنی $x = 0$ ، را دارد لکن ممکن است جوابهای دیگری هم داشته باشد. مجموعه جوابهای دستگاه همگن فضای پوچ T است. قضیه بعدی رابطه بین جوابهای دستگاه همگن و جوابهای دستگاه غیرهمگن را توصیف می کند.

قضیه ۱۸.۱۶. فرض کنیم دستگاه غیرهمگن (۲۳.۱۶) دارای جوابی، مثلاً b ، باشد. (الف) هرگاه بردار x جوابی از دستگاه غیرهمگن باشد آنگاه بردار $v = x - b$ جواب دستگاه همگن متناظر خواهد بود. (ب) هرگاه بردار v جوابی از دستگاه همگن باشد آنگاه بردار $x = v + b$ جواب دستگاه غیرهمگن خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $T: V_n \rightarrow V_m$ تبدیل خطیبی باشد که بوسیله ماتریس ضرائب، بطوری که در بالا توصیف شد، معین می شود. چون b یک جواب دستگاه غیرهمگن است داریم $T(b) = c$. فرض کنیم x و v دو بردار در V_n باشند بطوری که $v = x - b$. در این صورت داریم

$$T(v) = T(x - b) = T(x) - T(b) = T(x) - c.$$

بنابراین $T(x) = c$ اگر و فقط اگر $T(v) = 0$. این هم (الف) و هم (ب) را ثابت خواهد کرد.

این قضیه نشان می دهد که مسئله یافتن همه جوابهای یک دستگاه غیرهمگن بطور طبیعی به دو بخش تقسیم می شود: (۱) یافتن تمام جوابهای v ی دستگاه همگن، یعنی تعیین فضای پوچ T ؛ و (۲) یافتن یک جواب خصوصی b دستگاه غیرهمگن. با افزودن b به هر بردار v در فضای پوچ T به کلیه جوابهای $x = v + b$ دستگاه غیرهمگن دست خواهیم یافت. فرض کنیم k بعد $N(T)$ (پوچی T) را نشان دهد. اگر بتوان k جواب مستقل $v_1, \dots, v_k$ ی دستگاه همگن را یافت این جوابها پایه ای برای $N(T)$ تشکیل می دهند و می توان هر v در $N(T)$ را با تشکیل کلیه ترکیبات خطی ممکن

$$v = r_1 v_1 + \dots + r_k v_k$$

که در آنها $r_1, \dots, r_k$ اسکارهای دلخواهی هستند، بدست آورد. این ترکیب خطی جواب عمومی دستگاه همگن نامیده می شود. هرگاه b یک جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن باشد آنگاه کلیه جوابهای x این طور داده می شوند:

$$x = b + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k.$$

این ترکیب خطی را جواب عمومی دستگاه غیرهمگن می خوانند.
حال قضیه ۱۸.۱۶ را می توان بصورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱۹.۱۶. فرض کنیم $T: V_n \rightarrow V_m$ تبدیل خطی باشد که $T(x) = y$ که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_m)$

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, i = 1, 2, \dots, m \text{ برای}$$

همچنین k پوچی T را نشان دهد. هرگاه $v_1, \dots, v_k$ جواب مستقل دستگاه همگن $T(x) = 0$ بوده b یک جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن $T(x) = c$ باشد آنگاه جواب عمومی دستگاه غیرهمگن چنین است:

$$x = b + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

که در آن $t_1, \dots, t_k$ اسکلرهای دلخواهی می باشند.

این قضیه نه به ما راه یافتن جواب خصوصی b یک دستگاه غیرهمگن را نشان می دهد و نه نحوه تعیین جوابهای $v_1, \dots, v_k$ دستگاه همگن را بازگو می کند. فقط به ما می گوید که از یک دستگاه غیرهمگن دارای جواب چه می شود انتظار داشت. مثال زیر با همه سادگی این قضیه را روشن خواهد کرد.

مثال. دستگاه همگن مربوط به دستگاه $x + y = 2$ عبارت است از معادله $x + y = 0$. پس فضای پوچ از کلیه بردارهای $(t, -t)$ در V_2 تشکیل شده که در آنها t دلخواه است. چون $(1, -1) = t(1, -1)$ این یک زیرفضای یک بعدی V_2 با پایه $(1, -1)$ می باشد. یک جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن عبارت است از $(0, 2)$. بنا براین جواب عمومی دستگاه غیرهمگن چنین خواهد بود:

$$y = 2 - t, x = t \text{ یا } (x, y) = (0, 2) + t(1, -1)$$

که در آنها t دلخواه است.

۱۸.۱۶ فنون محاسبه

حال عملاً به محاسبه جوابهای یک دستگاه خطی غیرهمگن می پردازیم. اگرچه روشهای زیادی برای حل این مسئله ارائه شده لکن همه آنها در دستگاههای بزرگ به محاسبات قابل ملاحظه ای نیاز دارند. مثلاً حل دستگاهی مرکب از ده معادله و با همین تعداد مجهول بوسیله دست و یا حتی ماشین حساب رومیزی چندین ساعت وقت خواهد گرفت.

ما روش متداولی را مطرح می‌کنیم، بنام روش حذف گاوس - ژردان^۱، که نسبتاً ساده بوده و می‌توان آن را با آسانی برای ماتریسهای کامپیوترالکترونیکی با سرعت بالا برنامه‌ریزی کرد. این روش از سه نوع عمل اساسی زیر تشکیل شده که بر معادلات یک دستگاه خطی اعمال می‌شوند:

- (۱) قعویض دومعادله؛
 (۲) ضرب کلیه جملات یک معادله در یک اسکالر ناصفر؛
 (۳) افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر.

هر بار که یکی از این اعمال را بردستگاه انجام می‌دهیم دستگاه جدیدی بدست می‌آید که دقیقاً همان جوابها را دارد. هر دو دستگاه باین صورت معادل نامیده می‌شوند. چنانچه این اعمال را بارها و بنحوی اصولی انجام دهیم مآلاً به دستگاه معادلی می‌رسیم که می‌توان آن را با معاینه حل کرد.

این روش را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم. آنگاه روشن می‌شود که چگونه این روش در حالت کلی بکار برده خواهد شد.

مثال ۱. دستگاهی که جواب منحصر بفرد دارد. دستگاه

$$2x - 5y + 4z = -3$$

$$x - 2y + z = 5$$

$$x - 4y + 6z = 10$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه خاص جواب منحصر بفرد $x = 124$ ، $y = 75$ ، $z = 31$ را دارد که آن را با فرایند حذف گاوس - ژردان بدست خواهیم آورد. برای آنکه زحمت کار کم شود از نوشتن مکرر حروف x و y و z و علامات تساوی صرف نظر کرده و در عوض با ماتریس افزوده

$$(24.16) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array} \right),$$

که با الحاق طرفهای راست دستگاه به ماتریس ضرائب بدست می‌آید، کار می‌کنیم. سه عمل اساسی مذکور در بالا بر سطرهای ماتریس افزوده صورت می‌گیرند و اعمال سطری نام دارند. در هر مرحله از فرایند می‌توان حروف x و y و z را دوباره در جایشان گذارد و، با درج علامات تساوی در امتداد خط قائم، معادلات را بدست آورد. هدف غائی ما رسیدن به ماتریس افزوده

$$(25.16) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array} \right)$$

پس از یک سری اعمال سطری می‌باشد. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از $x = ۱۲۴$ ، $y = ۷۵$ ، $z = ۳۱$ ، که جواب مطلوب را می‌دهد.

گام اول بدست آوردن یک ۱ در گوشهٔ چپ ماتریس است. این را می‌توان از تعویض سطر اول ماتریس مفروض (۲۴.۱۶) با سطر دوم یا سوم انجام داد، یا اینکه می‌توان سطر اول را در $۱/۲$ ضرب کرد. از تعویض سطرهاى اول و دوم خواهیم داشت

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۲ & -۵ & ۴ & -۳ \\ ۱ & -۴ & ۶ & ۱۵ \end{array} \right)$$

قدم بعدی صفر کردن کلیهٔ درایه‌های باقیمانده در ستون اول است ضمن اینکه سطر اول دست نخورده می‌ماند. برای این کار سطر اول را در ۲ - ضرب کرده و نتیجه را به سطر دوم می‌افزاییم. آنگاه سطر اول را در ۱ - ضرب کرده و حاصل را به سطر سوم اضافه می‌کنیم. پس از این دو عمل خواهیم داشت

$$(۲۶.۱۶) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱۳ \\ ۰ & -۲ & ۵ & ۰ \end{array} \right)$$

حال این فرایند را برای ماتریس کوچکتر $\left[\begin{array}{cc|c} -۱ & ۲ & -۱۳ \\ -۲ & ۵ & ۰ \end{array} \right]$ ، که در مجاورت دو صفر قرار دارد، تکرار می‌کنیم. می‌توان با ضرب سطر دوم (۲۶.۱۶) در ۱ - در گوشهٔ بالائی چپ آن یک ۱ بدست آورد. این عمل ماتریس

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱۳ \\ ۰ & -۲ & ۵ & ۰ \end{array} \right)$$

را به ما خواهد داد. با ضرب سطر دوم در ۲ و افزودن حاصل به سطر سوم خواهیم داشت

$$(۲۷.۱۶) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳۱ \end{array} \right)$$

در این مرحله دستگاه معادلات متناظر چنین خواهند بود:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ y - 2z &= 13 \\ z &= 31. \end{aligned}$$

این معادلات را می‌توان بتوالی، با شروع از معادلهٔ سوم و برگشتن به عقب، حل کرد و نتیجه گرفت که

$$z = 31, y = 13 + 2z = 13 + 62 = 75, x = 5 + 2y - z = 5 + 150 - 31 = 124.$$

یا اینکه می‌توان، با صفرکردن همه درایه‌های بالای مختصر قطاری در ستونهای دوم و سوم، فرایند گاوس-ژردان را ادامه داد. با ضرب سطر دوم (۲۷.۱۶) در ۲ و اضافه کردن نتیجه به سطر اول خواهیم داشت

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array} \right).$$

بالاخره سطر سوم را در ۳ ضرب نموده و حاصل را به سطر اول می‌افزاییم و بعد، با ضرب سطر سوم در ۲ و اضافه کردن نتیجه به سطر دوم، ماتریس (۲۵.۱۶) را بدست خواهیم آورد.

مثال ۲. دستگاهی که بیش از یک جواب داد. دستگاه ۳ معادله و ۵ مجهول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + u - v &= -3 \\ (28.16) \quad x - 2y + z - u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v &= 10. \end{aligned}$$

ماتریس افزوده نظیر چنین است:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & 10 \end{array} \right).$$

ضرائب x, y, z و طرفهای راست همانهایی هستند که در مثال ۱ بودند. اگر همان اعمال سطری مثال ۱ را اجرا کنیم سرانجام به ماتریس افزوده

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 31 \end{array} \right)$$

خواهیم رسید. دستگاه معادلات متناظر را می‌توان نسبت به x, y, z و بر حسب u و v حل کرد تا نتیجه شود که

$$x = 124 + 16u - 19v$$

$$y = 75 + 9u - 11v$$

$$z = 31 + 3u - 4v.$$

چنانچه قرار دهیم $u = t_1$ و $v = t_2$ که در آنها t_1 و t_2 اعداد حقیقی دلخواهی هستند، و x, y, z را با این معادلات تعیین کنیم بردار (x, y, z, u, v) در V_5 که این طور داده می‌شود:

$$(x, y, z, u, v) = (124 + 16t_1 - 19t_2, 75 + 9t_1 - 11t_2, 31 + 3t_1 - 4t_2, t_1, t_2)$$

یک جواب خواهد بود. با جدا کردن قسمتهای شامل t_1 و t_2 می توان جواب را بصورت زیر نوشت:

$$(x, y, z, u, v) = (124, 75, 31, 0, 0) + t_1(16, 9, 3, 1, 0) + t_2(-19, -11, -4, 0, 1).$$

این معادله جواب عمومی دستگاه را می دهد. بردار $(124, 75, 31, 0, 0)$ یک جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن (280.16) است. دوبردار

$$(-19, -11, -4, 0, 1) \text{ و } (16, 9, 3, 1, 0)$$

جوابهای دستگاه همگن متناظر می باشند. چون این بردارها مستقلند پایه ای برای فضای تمام جوابهای دستگاه همگن تشکیل خواهند داد.

مثال ۳. دستگاهی که جواب ندارد. دستگاه

$$2x - 5y + 4z = -3$$

$$(290.16) \quad x - 2y + z = 5$$

$$x - 4y + 5z = 10$$

را در نظر می گیریم. این دستگاه تقریباً همان دستگاه مثال یک است جز آنکه ضریب z در معادله سوم از ۶ به ۵ تغییر کرده است. ماتریس افزوده متناظر چنین خواهد بود:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array} \right].$$

با استفاده از همان اعمال سطری مثال ۱ ماتریس (24.16) را به (27.16) تبدیل کرده و به ماتریس افزوده

$$(30.16) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array} \right]$$

می رسم. وقتی سطر پائینی بصورت یک معادله بیان می شود مبین آن است که $0 = 31$. بنابراین دستگاه اصلی، بسبب دلیل معادل بودن دو دستگاه (29.16) و (30.16) ، جواب نخواهد داشت.

در هر یک از مثالهای پیش تعداد معادلات از عدده مجهولات تجاوز نمی کرد. چنانچه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد هنوز هم فرایند گاوس - ژردان قابل اجرا

است. برای مثال، فرض کنیم دستگاه مثال ۱ را در نظر گرفته باشیم که دارای جواب $x = ۱۲۴$ ، $y = ۷۵$ ، $z = ۳۱$ است. هرگاه به این دستگاه معادله جدیدی بیفزاییم که توسط همین سه تایی برقرار باشد، مثلا معادله $۵۴ = ۳y + z - ۲x$ ، آنگاه فرایند حذف به ماتریس افزوده

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۱۲۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۷۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array} \right]$$

منجر می شود که سطری از صفر در پائین خود دارد. اما، هرگاه معادله جدید افزوده شده توسط سه تایی (۳۱، ۷۵، ۱۲۴) برقرار نشود، مثلا معادله $x + y + z = ۱$ ، آنگاه فرایند حذف به ماتریس افزوده ای بشکل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۱۲۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۷۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & a \end{array} \right]$$

منتهی می گردد که در آن $a \neq ۰$. در اینجا سطر آخر معادله متناقض $a = ۰$ را می دهد که نشانگر بی بهره بودن دستگاه از جواب خواهد بود.

۱۹.۱۶ معکوسهای ماتریسهای مربعی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ مربعی باشد. هرگاه ماتریس $n \times n$ دیگر B چنان باشد که $BA = I$ ، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است، آنگاه A را غیراستثنائی و B را معکوس چپ A می نامند.

بایه معمولی مرکب از بردارهای یکه مختصات را در V_n اختیار کرده و فرض می کنیم $T: V_n \rightarrow V_n$ تبدیل خطی با ماتریس $m(T) = A$ باشد. در این صورت قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲۰.۱۶. ماتریس A غیراستثنائی است اگر و فقط اگر T معکوسپذیر باشد. هرگاه $BA = I$ آنگاه $B = m(T^{-1})$.

برهان. فرض کنیم A غیراستثنائی بوده و $BA = I$. ثابت می کنیم $T(x) = O$ رابطه $x = O$ را ایجاب می کند. چنانچه x طوری باشد که $T(x) = O$ را ماتریس ستونی $۱ \times n$ می گیریم که از مؤلفه های x تشکیل شده است. چون $T(x) = O$ ماتریس حاصلضرب AX یک ماتریس ستونی $۱ \times n$ با درایه های صفر خواهد بود، پس $B(AX)$ نیز یک ماتریس ستونی از صفرها می شود. اما $BA = I$ پس $B(AX) = (BA)X = IX = X$ پس هر مؤلفه x صفر می باشد. در نتیجه T معکوسپذیر است و معادله $TT^{-1} = I$ ایجاب

می‌کند که $m(T)m(T^{-1}) = I$ یا $Am(T^{-1}) = I$. با ضرب این معادله از چپ در B خواهیم داشت $m(T^{-1}) = B$. بعکس، هرگاه T معکوسپذیر باشد، آنگاه $T^{-1}T$ تبدیل همانی است، در نتیجه $m(T^{-1})m(T)$ ماتریس همانی می‌باشد. بنابراین، A غیراستثنائی بوده و $m(T^{-1})A = I$.

کلیه خواص تبدیلات خطی معکوسپذیر دارای همتاهائی برای ماتریسهای غیراستثنائی هستند. بخصوص، معکوسهای چپ (در صورت وجود) منحصر بفردند و هر معکوس چپ یک معکوس راست نیز هست. بعبارت دیگر، هرگاه A غیراستثنائی بوده و $BA = I$ آنگاه $AB = I$. ما B را معکوس A نامیده و با A^{-1} می‌نمایانیم. معکوس A^{-1} نیز غیراستثنائی است و معکوسش مساوی A خواهد بود.

حال نشان می‌دهیم که مسئله تعیین درایه‌های معکوس یک ماتریس غیراستثنائی عملاً معادل حل n دستگاه خطی غیرهمگن مجزا می‌باشد.

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ غیراستثنائی بوده و $A^{-1} = (b_{ij})$ معکوس آن باشد. درایه‌های A و A^{-1} توسط n^2 معادله

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \quad (31.16)$$

بهم مربوطند که در آنها اگر $i = j$ ، $\delta_{ij} = 1$ ، و اگر $i \neq j$ ، $\delta_{ij} = 0$. بازای هر انتخاب ثابتی از j می‌توان این را بعنوان دستگاه غیرهمگنی از n معادله خطی با n مجهول $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ در نظر گرفت. چون A غیراستثنائی است هر یک از این دستگاهها جواب منحصر بفردی دارد که همان ستون j م B است. همه این دستگاهها یک ماتریس ضرائب A را داشته و فقط در طرفهای راست با هم فرق دارند. بعنوان مثال، اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، ۹ معادله در (31.16) وجود دارند که می‌توان آنها را بصورت سه دستگاه خطی مجزا که دارای این ماتریسهای افزوده‌اند بیان کرد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array} \right].$$

چنانچه فرایند گاوس - ژردان را بکار ببریم بترتیب به ماتریسهای افزوده زیر می‌رسیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array} \right].$$

در عمل از این مطلب استفاده می‌کنیم که هر سه دستگاه دارای یک ماتریس ضرائب بوده و هر سه دستگاه را یکجا با کار کردن روی ماتریس بزرگ شده

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

حل می‌نمائیم. در این صورت فرایند حذف ماتریس

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right)$$

را بدست می‌دهد. ماتریس سمت راست خط قائم معکوس مطلوب است. ماتریس سمت چپ این خط ماتریس همانی 3×3 می‌باشد.

لازم نیست که غیراستثنائی بودن A را از قبل بدانیم. اگر A استثنائی باشد (یعنی غیراستثنائی نباشد) هنوز هم می‌توان روش گاوس - ژردان را بکار برد، اما جایی در این فرایند یکی از عناصر قطری صفر می‌شود و تبدیل A به ماتریس همانی ممکن نخواهد بود.

۲۰.۱۶ تمرینات

برای هریک از دستگاههای زیر فرایند حذف گاوس - ژردان را بکار برید. در صورت وجود جواب، جواب عمومی را تعیین کنید.

$$3x + 2y + z = 1.2$$

$$x + y + 3z = 5.1$$

$$5x + 3y + 3z = 2$$

$$2x - y + 2z = 11$$

$$x + y - z = 1.$$

$$-y + z = 3.$$

$$3x + 2y + z = 1.4$$

$$3x + 2y + z = 1.3$$

$$5x + 3y + 3z = 2$$

$$5x + 3y + 3z = 2$$

$$7x + 4y + 5z = 3$$

$$7x + 4y + 5z = 3.$$

$$x + y - z = 0.$$

$$x + y - 3z + u = 5.6$$

$$3x - 2y + 5z + u = 1.5$$

$$2x - y + z - 2u = 2$$

$$x + y - 3z + 2u = 2$$

$$7x + y - 7z + 3u = 3.$$

$$6x + y - 4z + 3u = 7.$$

$$x - 2y + z + 2u = -2.8$$

$$x + y + 2z + 3u + 4v = 0.7$$

$$2x + 3y - z - 5u = 9$$

$$2x + 2y + 7z + 11u + 14v = 0$$

$$4x - y + z - u = 5$$

$$3x + 3y + 6z + 10u + 15v = 0.$$

$$5x - 3y + 2z + u = 3.$$

۹. ثابت کنید دستگاه

$$x + y + 2z = 2, 2x - y + 3z = 2, 5x - y + az = 6$$

جواب منحصر بفرد دارد اگر که $a \neq 8$. کلیه جوابها را وقتی $a = 8$ پیدا کنید.

۱۰. (الف) کلیه جوابهای دستگاه

$$5x + 2y - 6z + 2u = -1$$

$$x - y + z - u = -2$$

را بیابید.

(ب) کلیه جوابهای دستگاه

$$5x + 2y - 6z + 2u = -1$$

$$x - y + z - u = -2$$

$$x + y + z = 6$$

را پیدا کنید.

۱۱. این تمرین به ما نحوه تعیین کلیه ماتریسهای 2×2 غیراستثنائی را باز می‌گوید.

ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I.$$

نتیجه بگیرید که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ غیراستثنائی است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$ ، که در

این حالت معکوسش چنین خواهد بود:

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

معکوس هر یک از ماتریسهای تمرینات ۱۲ تا ۱۶ را معین کنید.

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot 13$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 12$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 15$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot 14$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot 16$$

۲۱.۱۶ تمرینات متفرقه دربارهٔ ماتریسها

۱. اگر یک ماتریس مربعی یک سطرش یا یک ستونش صفر باشد ثابت کنید این ماتریس استثنائی است.

۲. برای هر یک از احکام زیر در باب ماتریسهای $n \times n$ یا برهانی ارائه دهید یا مثال نقضی.

(الف) هرگاه $AB + BA = O$ آنگاه $A^2 B^2 = B^2 A^2$.

(ب) هرگاه A و B غیر استثنائی باشند آنگاه $A + B$ نیز چنین است.

(پ) هرگاه A و B غیر استثنائی باشند آنگاه AB نیز چنین است.

(ت) هرگاه A, B ، و $A + B$ غیر استثنائی باشند آنگاه $A - B$ نیز چنین است.

(ث) هرگاه $A^2 = O$ آنگاه $A - I$ غیر استثنائی خواهد بود.

(ج) هرگاه حاصلضرب k ماتریس $A_1 \dots A_k$ غیر استثنائی باشد آنگاه هر ماتریس A_i غیر استثنائی است.

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ماتریس غیر استثنائی P را طوری پیدا کنید که

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & i \\ i & b \end{bmatrix}$ ، که در آن

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{5}), a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{5}), i^2 = -1$$

دارای این خاصیت است که $A^2 = A$. همهٔ ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط را که $A^2 = A$ بطور کامل توصیف نمایید.

۵. اگر $A^2 = A$ ثابت کنید که $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$.

۶. نظریهٔ خصوصی نسبیت از یک مجموعه معادلات بشکل $x' = a(x - vt)$ ، $y' = y$ ،

$z' = z$ ، $t' = a(t - vx/c^2)$ استفاده می‌کند. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c

تندی نور، و $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$ ، که $|v| < c$. تبدیل خطی که بردار دو بعدی

(x, t) را بروی (x', t') می‌نگارد یک تبدیل لودنتس نام دارد. ماتریس آن نسبت

به پایه‌های معمولی با $L(v)$ نموده شده و با رابطهٔ

$$L(v) = a \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -vc^{-2} & 1 \end{bmatrix}$$

داده می‌شود. توجه کنید که $L(v)$ غیر استثنائی بوده و $L(0) = I$. ثابت کنید

$L(v)L(u) = L(w)$ که در آن $w = (u + v)c^2/(uv + c^2)$. بعبارت دیگر،

حاصلضرب دو تبدیل لورنتس تبدیل لورنتس دیگری است.

۷. اگر سطرها و ستونهای ماتریس مستطیلی شکل A را با هم عوض کنیم ماتریس جدید ترانهادۀ A نامیده شده و با A' نشان داده می شود. بعنوان مثال، هرگاه داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ آنگاه } A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ثابت کنید که ترانهادۀها از خواص زیر بهره مندند:

(الف) $(A')' = A$ ؛ (ب) $(A + B)' = A' + B'$ ؛ (پ) $(cA)' = cA'$ ؛ (ت) $(AB)' = B'A'$ ؛ (ث) اگر A غیر استثنائی باشد $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

۸. ماتریس مربعی A را یک ماتریس متعامد خوانند هرگاه $AA' = I$. تحقیق کنید که

ماتریس 2×2 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ، بازای هر θ حقیقی، متعامد است. اگر A یک ماتریس متعامد $n \times n$ دلخواهی باشد ثابت کنید که سطرهای آن، بعنوان، بردارهای در V_n ، یک مجموعه متعامدیکه را تشکیل می دهند.

۹. برای هر یک از احکام زیر در باب ماتریسهای $n \times n$ یا برهانی ارائه دهید یا یک مثال نقض.

(الف) هرگاه A و B متعامد باشند آنگاه $A + B$ نیز چنین است.

(ب) هرگاه A و B متعامد باشند آنگاه AB نیز چنین است.

(پ) هرگاه A و AB متعامد باشند آنگاه B نیز چنین خواهد بود.

۱۰. ماتریسهای هادامارد^۱، که بافتخار ژاک هادامارد (۱۸۶۳-۱۸۶۵) نامگذاری شده،

ماتریسهای $n \times n$ هستند با این خواص:

یکم. هر درایه مساوی ۱ یا -۱ است؛

دوم. هر سطر، که بصورت برداری در V_n در نظر گرفته شود، طولش $\sqrt{n}$ است؛

سوم. حاصلضرب نقطه‌ای هر دو سطر متمایز ۰ است.

ماتریسهای هادامارد در بعضی مسائل درهندسه و نظریۀ اعداد پیش می آیند، و اخیراً در ساختن کلمات رمزی بهینه در ارتباطات فضائی بکاررفته اند. علیرغم ظاهر ساده‌ای که دارند مسائل حل نشده بسیاری را بیار آورده اند. مسئله حل نشده اصلی فعلاً تعیین کلیۀ n هایی است که بازای آنها ماتریس هادامارد $n \times n$ وجود داشته باشد. این تمرین حل ناقصی از آن را مختصراً شرح می دهد.

(الف) کلیۀ ماتریسهای هادامارد 2×2 را تعیین کنید (دقیقاً ۸ ماتریس وجود دارند).

(ب) این بخش از تمرین برهان ساده‌ای از قضیۀ زیر را مختصراً شرح می دهد: هرگاه

A یک ماتریس هادامارد $n \times n$ باشد که $n > 2$ آنگاه n مضرب ۴ خواهد بود.

برهان بر دو لم بسیار ساده مربوط به بردارها در فضای n بعدی استوار است. هریک از این لمها را ثابت کرده و، با اعمال آنها بر سطرهاى ماتریس هادامار، قضیه را ثابت نمائید.

لم ۱. هرگاه X, Y, Z بردارهای متعامدی در V_n باشند آنگاه خواهیم داشت

$$(X + Y) \cdot (X + Z) = \|X\|^2.$$

لم ۲. می نویسیم

$Z = (z_1, \dots, z_n)$ و $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ، $X = (x_1, \dots, x_n)$
 هرگاه هر مؤلفه x_i, y_i, z_i یا ۱ یا -۱ باشد آنگاه حاصلضرب $(x_i + y_i)(x_i + z_i)$
 یا ۰ است یا ۴.

جواب تمرینات

مقدمه

م ۴.۱ تمرینات (صفحه ۸)

$$۱. \text{الف) } \frac{2b^3}{3}; \text{ب) } \frac{b^3}{12}; \text{ت) } \frac{2b^3}{3} + b; \text{ث) } ab^3/3 + bc$$

$$۲. \text{ب) } \frac{1}{4}ab^4 + bc$$

$$۳. \text{ب) } S_n < \frac{b^{k+1}}{k+1} < S_n + \frac{ab^{k+1}}{k+1} + bc$$

م ۵.۲ تمرینات (صفحه ۱۸)

$$۱. A = \{1, -1\}, B = \{1\}, C = \{1\}, D = \{2\}, E = \{1, -1\}$$

$$F = \{1, -1, -8 + \sqrt{47}, -8 - \sqrt{47}\}$$

$$۲. C \subseteq B, C \subseteq A, B \subseteq F, B \subseteq E, B \subseteq C, B \subseteq B, B \subseteq A, A \subseteq A$$

$$F \subseteq F, E \subseteq F, E \subseteq E, D \subseteq D, C \subseteq F, C \subseteq E, C \subseteq C$$

(شمولهای حقیقی)

$$۳. \text{الف) درست؛ ب) درست؛ پ) نادرست؛ ت) درست؛ ث) نادرست؛ ج) نادرست}$$

$$۴. \text{الف) درست؛ ب) درست؛ پ) درست؛ ت) درست؛ ث) نادرست؛ ج) نادرست}$$

$$۵. \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, S$$

$$۶. \text{الف) درست؛ ب) نادرست؛ پ) نادرست؛ ت) درست؛ ث) نادرست؛ ج) درست}$$

نادرست؛ ج) درست؛ ح) غلط؛ خ) درست.

$$۱۷. \text{پ) } A \subset C; \text{ت) بلی؛ ث) خیر}$$

م ۴.۴ تمرينات (صفحة ۴۵)

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 = \quad .2$$

$$(-1)^{n+1} (1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

$$.1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} .3$$

$$\frac{n+1}{2n} .5 \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} .4$$

$$.1 + 2 + \dots + n < \frac{(2n+1)^2}{8} \text{ (ب) } A(1) \text{ نادرست است؛ (پ) } .6$$

$$.n_1 = 3.7$$

م ۷.۴ تمرينات (صفحة ۵۱)

$$.1 \quad \text{(الف) } 10; \text{(ب) } 15; \text{(پ) } 170; \text{(ت) } 288; \text{(ث) } 36; \text{(ج) } \frac{5}{6}$$

$$.n + 1 \text{ (ب) } .8$$

$$.20 = \text{ثابت} .9$$

$$.11 \quad \text{(الف) درست؛ (ب) غلط؛ (پ) غلط؛ (ت) غلط؛ (ث) غلط؛ (ج) غلط} .$$

$$\frac{n}{n+1} .12$$

م ۹.۴ تمرينات (صفحة ۵۵)

$$.(a_8, b_4), (a_7, b_4), (a_6, b_8), (a_5, b_3), (a_4, b_1), (a_3, b_7), (a_2, b_5), (a_1, b_2) .2$$

$$.(a_{10}, b_1), (a_9, b_6)$$

$$.3 \quad \text{(الف) غلط؛ (ب) درست؛ (پ) درست؛ (ت) غلط؛ (ث) غلط} .$$

*م ۱۰.۴ تمرينات متفرقه در باب استقرا (صفحة ۵۶)

$$.1 \quad \text{(الف) } 10; \text{(ب) } 1; \text{(پ) } 7; \text{(ت) } 21; \text{(ث) } 680; \text{(ج) } 1 .$$

$$.2 \quad \text{(ب) } 17; \text{(پ) } 9; \text{(ت) خير} .$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^n a_k ; \prod_{k=1}^{\infty} a_k = 1 .5$$

$$-۰.۲^n \cdot ۸$$

$$۰.۹ \text{ درست است اگر هر } ۰ \geq a_k$$

$$۰.۱۱ \geq n$$

فصل ۱

۵.۱ تمرینات (صفحة ۷۱)

$$f(1/2) = 3/2, -f(2) = -3, f(-2) = -1, f(2) = 3 \cdot ۱$$

$$f(a) + f(b) = a + b + 2, f(a+b) = a + b + 1, 1/f(2) = 1/3$$

$$f(a)f(b) = ab + a + b + 1$$

$$f(2)g(2) = -3, f(2) - g(2) = 4, f(2) + g(2) = 2 \cdot 2$$

$$g[f(2)] = -2, f[g(2)] = 0, f(2)/g(2) = -3$$

$$f(t)g(-t) = (1+t)^2, f(a) + g(-a) = 2 + 2a$$

$$\varphi(-1) = 6, \varphi(3) = 2, \varphi(2) = 2, \varphi(1) = 2, \varphi(0) = 4 \cdot 3$$

$$t = 1, \varphi(-2) = 8$$

$$۴. (الف) \text{ کلیه } x \text{ ها؛ } (ب) \text{ کلیه } x \text{ ها و } y \text{ ها؛ } (پ) \text{ کلیه } x \text{ ها و } h \text{ ها؛ } (ت) \text{ کلیه } y \text{ ها؛ } (ث) \text{ کلیه } t \text{ ها؛ } (ج) \text{ کلیه } a \text{ ها.}$$

$$۵. (الف) |x| \leq 2؛ (ب) |x| \leq 1؛ (پ) |y| \leq 1/2؛ (ت) 0 \leq a \leq 4؛ (ث) |t| \geq 1$$

$$(ث) |s| \leq 4؛ (ج) |x| \leq 2, x \neq 0$$

$$۶. (ب) \{x | 0 \leq x \leq 1\}؛ (پ) \{x | 2 \leq x \leq 4\}؛ (ت) \text{ قلمرو تهی است.}$$

$$۷. \text{ وقتی قطع می کنند که } 1, -1, x = 0$$

$$۸. \text{ وقتی قطع می کنند که } -3, -1, x = 0$$

$$۱۰. (الف) p(x) = 1؛ (ب) p(x) = x(x-1)/2 + 1$$

$$(پ) p(x) = ax(x-1) + 1, a \text{ دلخواه؛ } (ت) p(x) = ax(x-1) + b, a \text{ و } b \text{ دلخواه.}$$

$$۱۱. (الف) p(x) = ax(1-x) + b, a \text{ و } b \text{ دلخواه؛ } (ب) p(x) = c, c \text{ دلخواه؛}$$

$$(پ) p(x) = ax, a \text{ دلخواه؛ } (ت) p(x) = c, c \text{ دلخواه.}$$

$$۱۲. (الف) \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} x^k؛ (ب) \sum_{k=0}^n x^k؛ (پ) \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k$$

۱۱.۱ تمرینات (صفحة ۸۰)

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] \cdot ۵$$

۱۵.۱ تمرینات (صفحة ۸۸)

۱. (الف) ۲؛ (ب) ۴؛ (پ) ۶؛ (ت) ۴؛ (ث) ۶؛ (ج) ۶ -

۲. یک نمونه: $s(x) = ۵/۲$ اگر $x < ۲$ ، $s(x) = -۱$ اگر $۰ \leq x \leq ۵$ ، $s(x) = ۲$ اگر $x \leq ۲$.

۳. $\sum_{k=1}^n k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) =$ (ب) ۵

$۲(۲۱ - ۳\sqrt{۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۵} - \sqrt{۶} - \sqrt{۷})$.

۴. (ب) $x = ۱$ ، $x = ۵/۲$.

۵. (الف) ۱۳.

۶. (الف) $f(۳) = ۱$ ، $f(۴) = -۱$ ، $f[f(۳)] = ۰$.

۷. (ب) $p = ۱۴$ ، $p = ۱۵$.

۸. (الف)، (ت)، (ث).

۹. (الف)، (ب)، (پ).

۲۶.۱ تمرینات (صفحة ۱۰۴)

۱. ۹۰ ۲۰ ۶ ۲۱/۸ ۱۶ ۶۲/۲۷ ۱۶

۲. ۱۸۰ ۵۰ ۷ ۱۸ ۱۲ ۷۸ ۱۷

۳. ۱۶۰ ۵۰ ۸ ۱/۳ ۱۳ ۲۵۹۲/۳۵ ۱۸

۴. ۵۰ ۶۰ ۹ ۱/۳ ۱۴ ۵۶/۲۱ ۱۹

۵. ۱۰ ۱۱ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۲۱/۱۱ ۲۰

۶. (الف) $۵/۲$ ، (ب) ۰.

۷. (الف) $۵/۶$ ؛ (ب) $c/۲$.

۸. $p(x) = ۶x - ۶x^۲$.

۹. $p(x) = ۴x + ۸x^۲ + ۳x^۳$.

۱۰. $A \neq ۰$ اگر $(1/A) \int_{Aa+B}^{Ab+B} f(x) dx$ ، $A = ۰$ اگر $(b-a)f(B)$.

فصل ۲

۴.۲ تمرینات (صفحه ۱۱۷)

- $۱. ۳۲/۳۰$ $۹. (\sqrt{5} - ۳)/۴۰$
 $۲. ۳۲/۳۰$ $۱۰. ۷/۴$
 $۳. ۴/۳۰$ $۱۱. ۷/۳$
 $۴. ۴/۳۰$ $۱۲. ۷/۳$
 $۵. ۱/۱۲۰$ $۱۳. (۹\sqrt{۳} - ۱)/۲۷$
 $۶. ۴\sqrt{۲}/۳ - ۳\sqrt{۲}/۲ + ۱/۱۲۰$ $۱۴. ۵$
 $۷. ۴\sqrt{۲}/۳ - ۳\sqrt{۲}/۲ + ۱/۶۰$ $۱۵. c = ۱/۲$
 $۸. (۱۰ - ۴\sqrt{۲})/۳$ $۱۶. a = -۲$
 $۱۷. (الف) ۹\pi/۲؛ (ب) \pi/۲؛ (پ) ۶\pi$

۸.۲ تمرینات (صفحه ۱۳۱)

توجه: در تمرینات ۱ تا ۱۳، n عدد صحیح دلخواهی است.

- $۱. (ب) \pi/۲ + n\pi$
 $۲. (الف) \pi/۲ + ۲n\pi؛ (ب) ۲n\pi؛ (پ) ۲n\pi + ۳\pi/۲؛ (ت) (۲n + ۱)\pi$
 $۶. \cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - ۱}{\cot x + \cot y}؛ \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{۱ - \tan x \tan y}$
 $۷. B = ۳\sqrt{۳}/۲، A = ۳/۲$
 $۸. B = C \sin \alpha، A = C \cos \alpha$
 $۹. C = (A^x + B^x)^{1/x}$ اگر $A^x + B^x \neq 0$ ، α را طوری اختیار کنید که $\sin \alpha = B/C، \cos \alpha = A/C$ چنانچه $A = B = 0$ هر α را می‌توانید اختیار نمایید.
 $۱۰. \alpha = ۵\pi/۴، C = ۲\sqrt{۲}$
 $۱۱. \alpha = -\pi/۴، C = \sqrt{۲}$
 $۱۲. \pi/۴ + n\pi$
 $۱۳. \pi + ۲n\pi؛ \pi/۲ + ۲n\pi$
 $۱۷. (الف) ۱ - \sqrt{۳}/۲؛ (ب) ۱ - \sqrt{۲}/۲؛ (پ) ۱/۲؛ (ت) ۱؛ (ث) ۲؛ (ج) ۵؛ (ح) (۱/۳ - ۱/۲)/۲$

$$\begin{aligned}
 & \pi^2/2 + 2 \cdot 18 \quad .1 + \pi^2/24 \cdot 19 \\
 & .0 \cdot 20 \quad .2\sqrt{2} - 2 \cdot 21 \\
 & \pi/2 \cdot 22 \quad \sqrt{3} + \pi/6 \cdot 23 \\
 & .24 \quad 0 \leq x \leq 2\pi/3 \text{ اگر } \sqrt{3} + x/2 + \sin x + \pi/6 \\
 & .2\pi/3 \leq x \leq \pi \text{ اگر } 2\sqrt{3} - x/2 - \sin x + \pi/6 \\
 & .25 \quad (x^2 - x^3)/3 + \cos x - \cos(x^2) \\
 & .1 \cdot 26 \quad .1 \cdot 27
 \end{aligned}$$

۱۱.۲ تمرینات (صفحة ۱۳۹)

$$\begin{aligned}
 & .4\pi^2/3 \cdot 5 \quad .\pi \cdot 6 \quad .2\pi \cdot 7 \\
 & .4\pi \cdot 8 \quad .8\pi \cdot 9 \quad .\pi/8 \cdot 10 \\
 & .\pi/2 \cdot 11 \quad .2 \cdot 12 \quad .2 \cdot 13 \\
 & .3\pi/2 \cdot 14 \quad .9\pi/2 \cdot 15
 \end{aligned}$$

۱۳.۲ تمرینات (صفحة ۱۴۳)

$$\begin{aligned}
 & .\pi c^2 b^2/3 \cdot 1 \quad .\pi/2 \cdot 2 \quad .2\pi/3 \cdot 3 \\
 & .33\pi/5 \cdot 4 \quad .\pi^2/2 \cdot 5 \quad .\pi^2/4 \cdot 6 \\
 & .\pi^2 \cdot 7 \quad .\pi/2 \cdot 8 \quad .3\pi/10 \cdot 9 \\
 & .\pi/2 \cdot 10 \quad .2\pi\sqrt{3} \cdot 11 \quad .6/5 \cdot 12 \\
 & .13 \quad .(32/3 - 4\sqrt{3})\pi r^2 \cdot 14 \quad .a = 4/3 \cdot 15 \quad .16\sqrt{3}/3 \cdot 15 \\
 & .4a^5/5 \cdot 16 \quad .h(B_1 + 4M + B_2)/6 \cdot 17 \\
 & .18 \quad (الف) 8\pi/5؛ (ب) 2\pi؛ (ب) 10\pi/3؛ (ت) 16\pi/15
 \end{aligned}$$

۱۵.۲ تمرینات (صفحة ۱۴۷)

$$\begin{aligned}
 & .1 \quad 60 \text{ فوت} - \text{پوند} \quad .2 \quad 125 \text{ ژول؛ } 8 \text{ متر} \\
 & .3 \quad (الف) 441 \text{ ژول؛ (ب) } 425 \text{ ژول} \quad .4 \quad a = 3, b = -2 \\
 & .5 \quad 3750 \text{ فوت} - \text{پوند} \quad .6 \quad 5000 \text{ فوت} - \text{پوند} \\
 & .7 \quad 20000 \text{ فوت} - \text{پوند} \quad .8 \quad 21800 \text{ فوت} - \text{پوند}
 \end{aligned}$$

۱۷.۲ تمرینات (صفحه ۱۵۰)

۱. $(a^2 + ab + b^2)/3$. ۲/۱۲ . ۲
۳. $4/3$. ۴۵/۲۸ . ۴
۵. $2/\pi$. ۲/۲۰
۷. $2/\pi$. ۱/۲۰
۹. $1/2$. ۱/۲۰
۱۱. $c = a/(n+1)^{1/n}$ ؛ $c = a/\sqrt{3}$. ۱۱
۱۲. $w(x) = x^2$ (الف) ؛ $w(x) = x^2$ (ب) ؛ $w(x) = x^2$ (پ) . ۱۲
۱۴. هر سه . ۱۴
۱۶. (الف) $L/2$ ؛ (ب) $L^3/3$ ؛ (پ) $L/\sqrt{3}$. ۱۶
۱۷. (الف) $7L/12$ ؛ (ب) $5L^3/8$ ؛ (پ) $\sqrt{15}L/6$. ۱۷
۱۸. (الف) $2L/3$ ؛ (ب) $L^4/4$ ؛ (پ) $\sqrt{2}L/2$. ۱۸
۱۹. (الف) $11L/18$ ؛ (ب) $31L^4/192$ ؛ (پ) $\sqrt{62}L/12$. ۱۹
۲۰. (الف) $3L/4$ ؛ (ب) $L^5/5$ ؛ (پ) $\sqrt{15}L/5$. ۲۰
۲۱. (الف) $21L/32$ ؛ (ب) $19L^5/240$ ؛ (پ) $\sqrt{190}L/20$. ۲۱
۲۲. $\rho(x) = x^2$ بازای $0 \leq x \leq L$ نتیجه می‌دهد که $\bar{x} = 3L/4$. ۲۲
۲۳. (الف) $6/\pi$ ؛ (ب) $3\sqrt{2}/2$. ۲۳
۲۴. 2π ثانیه $T = 80\sqrt{3}$. ۲۴

۱۹.۲ تمرینات (صفحه ۱۵۶)

۱. $x + x^2/2 + x^3/3$. ۱
۲. $2y + 2y^2 + 8y^3/3$. ۲
۳. $5/6 + 2x + 2x^2 + 8x^3/3$. ۳
۴. $-2x + 2x^2 - x^3$. ۴
۵. $(3x^5 + 5x^2 + 136)/15$. ۵
۶. $x^{10}/5 + 2x^6/3 - x^5/5 - 2x^3/3 + x^2 - x$. ۶
۷. $x + \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{5}{3}$. ۷
۸. $\frac{2}{3}(x^3 - x^{3/2}) + \frac{4}{5}(x^{5/2} - x^{5/4})$. ۸
۹. $\sin x$. ۹

$$\frac{1}{y} x^2 + \sin(x^2) \cdot 10$$

$$\frac{1}{y} x^2 - \frac{1}{y} x + \cos(x^2) - \cos x \cdot 11$$

$$\frac{1}{3}(x^3 - \cos 3x + 1) \cdot 12$$

$$\frac{1}{3}(x^6 - x^3 + \cos 3x - \cos(3x^2)) \cdot 13$$

$$\frac{1}{y} y^2 + \frac{1}{y} y - \frac{1}{y} \sin 2y \cdot 14$$

$$2 \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 15$$

$$\frac{3}{4}(x + \pi) + \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot 16$$

$$\pm \sqrt{2}, 0 \cdot 17$$

$$\frac{1}{12} (ت) \quad P(x) = \frac{1}{2}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x]) (ب) \cdot 18$$

$$A = 0 (ب) \quad g(\delta) = \delta A, g(2) = 2A (ب) \cdot 20$$

فصل ۳

۶.۳ تمرینات (صفحة ۱۷۲)

$$.4.3 \quad .-1.2 \quad .1/4.1$$

$$.-1.6 \quad .21.5 \quad .1.4$$

$$.0.9 \quad .0.8 \quad .1.7$$

$$.-1.14 \quad .1.13 \quad .-1.12 \quad .1.11 \quad .0.10$$

۲۲. $a = (\sin c - b)/c$ اگر $c \neq 0$ ؛ چنانچه $c = 0$ جوابی وجود ندارد مگر آنکه $b = 0$ ، که در این حالت هر a ای مناسب خواهد بود.

۲۳. $a = (2 \cos c - b)/c^2$ اگر $c \neq 0$ ؛ چنانچه $c = 0$ جوابی موجود نیست مگر آنکه $b = 2$ ، که در این صورت هر a ای مناسب خواهد بود.

۲۴. تانژانت همهجا پیوسته است جز در $x = \pi/2 + n\pi$ که در آن n هر عدد صحیح است؛ کتانژانت همهجا پیوسته است جز در $x = n\pi$ که در آن n عدد صحیح

دلخواهی می باشد.

۲۵. وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow 1$ برای پیوسته بودن در ۰ تعریف کنید $f(0) = 1$.

۲۸. خیر. ۲۹. خیر.

۳۰. وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow 0$ برای پیوسته بودن در ۰ تعریف کنید $f(0) = 0$.

۳۲. وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow 0$ برای پیوسته بودن در ۰ تعریف کنید $f(0) = 0$.

۸.۳ تمرینات (صفحه ۱۷۷)

$$۱. \quad x^2 - 1 \text{ هر } x. \quad ۲. \quad (x-1)^2 \text{ هر } x.$$

$$۳. \quad |x| \text{ هر } x. \quad ۴. \quad 0, 0 \text{ فقط در } x = 0 \text{ تعریف شده است.}$$

$$۵. \quad x \geq 0, x. \quad ۶. \quad x \geq 0, -x.$$

$$۷. \quad \sin \sqrt{x} \text{ هر } x \geq 0.$$

$$۸. \quad \sqrt{\sin x} \text{ هر } x \text{ که } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, k \text{ عدد صحیحی است.}$$

$$۹. \quad \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ هر } x > 0.$$

$$۱۰. \quad \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \text{ هر } x > 0.$$

$$۱۱. \quad -3 \quad ۱۲. \quad \sqrt{3} \quad ۱۳. \quad 1 \quad ۱۴. \quad 1$$

$$۱۵. \quad 1 \quad ۱۶. \quad 2 \quad ۱۷. \quad 0.5 \quad ۱۸. \quad 2$$

$$۱۹. \quad 1 \quad ۲۰. \quad 1/2 \quad ۲۱. \quad x^2 \text{ اگر } x \geq 0; 0 \text{ اگر } x < 0.$$

$$۲۲. \quad 1 \text{ اگر } |x| \leq \sqrt{3}; 0 \text{ در غیر این صورت.}$$

$$۲۳. \quad x^2 \text{ اگر } x \geq 0; 0 \text{ در غیر این صورت.}$$

۱۵.۳ تمرینات (صفحه ۱۸۶)

$$۱. \quad g(y) = y - 1 \text{ هر } y.$$

$$۲. \quad g(y) = (y - 5)/2 \text{ هر } y.$$

$$۳. \quad g(y) = 1 - y \text{ هر } y.$$

$$۴. \quad g(y) = y^{1/3} \text{ هر } y.$$

$$۵. \quad g(y) = y \text{ اگر } y < 1; \sqrt{y} \text{ اگر } 1 \leq y \leq 16; (y/8)^2 \text{ اگر } y > 16.$$

۲۰.۳ تمرینات (صفحه ۱۹۳)

$$۳. \quad ۰.۹۹۹۹۹۹۹۹ \text{ گرد شده در رقم ششم اعشاری.}$$

فصل ۴

۶.۴ تمرینات (صفحه ۲۰۷)

$$f'(-10) = -19, f'(1) = -1, f'(1/2) = 0, f'(0) = 1. \quad ۱$$

$$۲. (الف) ۱, ۲; (ب) ۱, ۰; (پ) ۳, ۴. -$$

$$۳. 2x + 3.$$

$$۴. 4x^2 + \cos x.$$

$$۵. 4x^2 \sin x + x^4 \cos x.$$

$$۶. -1/(x+1)^2.$$

$$۷. -2x/(x^2+1)^2 + 5x^4 \cos x - x^5 \sin x.$$

$$۸. -1/(x-1)^2.$$

$$۹. \sin x / (2 + \cos x)^2.$$

$$۱۰. -\frac{2x^5 + 9x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + x^2 + 1)^2}.$$

$$۱۱. \frac{1 - 2(\sin x + \cos x)}{(2 - \cos x)^2}.$$

$$۱۲. \frac{\sin x + x \cos x}{1 + x^2} - \frac{2x^2 \sin x}{(1 + x^2)^2}.$$

$$۱۳. (ب) ۳۲/۵؛ (پ) $v_0 -$ فوت بر ثانیه؛ (ت) ۱۶ فوت بر ثانیه؛ ۱۶۰ فوت$$

$$\text{بر ثانیه؛ } T ۱۶ \text{ فوت بر ثانیه؛ (ج) } f(t) = v_0 t - 10t^2 \text{ یک نمونه است.}$$

$$۱۴. 3x^2 \text{ که در آن } x \text{ طول یک ضلع است.}$$

$$۱۶. \frac{1}{2} x^{-1/2}.$$

$$۱۷. \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

$$۱۸. \frac{3}{2} x^{1/2}.$$

$$۱۹. -\frac{3}{2} x^{-5/2}.$$

$$۲۰. \frac{1}{2} x^{-1/2} + \frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{4} x^{-3/4}.$$

$$۲۱. -\frac{1}{2} x^{-3/2} - \frac{1}{3} x^{-4/3} - \frac{1}{4} x^{-5/4}.$$

$$۲۲. \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}.$$

$$۲۳. \frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}.$$

$$x \sec^2 x + \tan x \cdot ۲۷ \quad \sec x (1 + 2 \tan^2 x) \cdot ۲۶$$

$$\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \cdot ۲۹ \quad -(x^{-2} + 2x^{-2} + 9x^{-4}) \cdot ۲۸$$

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \cdot ۳۱ \quad \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2} \cdot ۳۰$$

$$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \cdot ۳۳ \quad -\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2} \cdot ۳۲$$

$$-\frac{(2x^2+3)\sin x + 2x \cos x}{(2x^2+3)^2} \cdot ۳۴$$

$$\frac{(2ax+b)(\sin x + \cos x) + (ax^2+bx+c)(\sin x - \cos x)}{1 + \sin 2x} \cdot ۳۵$$

$$b=c=0 \quad ; \quad a=d=1 \cdot ۳۶$$

$$d=-1 \quad ; \quad b=f=2 \quad ; \quad a=c=e=0 \cdot ۳۷$$

$$\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \text{ (الف)} \cdot ۳۸$$

$$\frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^2} \text{ (ب)} \cdot ۳۹$$

۹.۴ تمرینات (صفحة ۲۱۵)

$$۳, ۱, ۱$$

$$\frac{3}{2}, -2 \text{ (ب)} ; 0, -\frac{1}{2} \text{ (ب)} ; \frac{1}{2}, -1 \text{ (الف)} \cdot ۲$$

$$(2n+1)\pi \cdot ۳ \text{ که در آن } n \text{ هر عدد صحیح است.}$$

$$b=4, a=-2 \cdot ۴$$

$$c=-1, b=0, a=1 \cdot ۵$$

$$(x_1 + x_2)/2 \text{ (ب)} ; x_1 + x_2 + a \text{ (الف)} \cdot ۶$$

$$۷ \text{ مماس در } (3, -3) ; \text{ همچنین آن را در } (0, 0) \text{ قطع می‌کند.}$$

$$c=3/8, a=1/2, b=-2, m=-2 \cdot ۸$$

$$b=-c^2, a=2c \cdot ۹$$

$$b=-\frac{1}{2c^2}, a=\frac{3}{2c} \cdot ۱۰$$

$$b=\sin c - c \cos c, a=\cos c \cdot ۱۱$$

$$-\frac{3}{4} \frac{1 + 2\sqrt{x} + 5x}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2} ; \frac{1 + 2\sqrt{x}}{2(x + \sqrt{x})^2} ; -\frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} \cdot ۱۲$$

$$d = -2, c = -1, b = 5, a = -4 \cdot ۱۳$$

$$۱/2 \text{ (ب)} ; 2 \text{ (ب)} ; ۱۵/4 \text{ (الف)} \cdot ۱۴$$

۱۵ (الف) درست؛ (ب) درست؛ (پ) نادرست اگر $f'(a) \neq 0$ ، حد مساوی $f'(a)$ است؛
(ت) نادرست اگر $f'(a) \neq 0$ ، حد برابر $f'(a)/2$ می باشد.

$$۱۶ \text{ (الف)} D^*(f + g) = (1 + g/f) D^*f + (1 + f/g) D^*g \text{ وقتی } f(x) \text{ و } g(x) \text{ صفر نیستند؛}$$

$$D^*(f/g) = (g^2 D^*f - f^2 D^*g)/g^3 ; D^*(f \cdot g) = g^2 D^*f + f^2 D^*g$$

$$\text{وقتی } g(x) \neq 0$$

$$D^*f(x) = 2f(x) Df(x) \text{ (ب)}$$

$$\text{(ب)} f(x) = c \text{ بازای هر } x$$

۱۲۰۴ تمرینات (صفحة ۲۲۲)

$$-2 \cos x (1 + 2 \sin x) \cdot ۱$$

$$x/\sqrt{1+x^2} \cdot ۲$$

$$(2x^2 - 4x) \sin x^2 - 2x \cos x^2 + 2 \sin x^2 + 6x^2 \cos x^2 \cdot ۳$$

$$-\sin 2x \cos (\cos 2x) \cdot ۴$$

$$n \sin^{n-1} x \cos (n+1)x \cdot ۵$$

$$\cos x \cos (\sin x) \cos [\sin (\sin x)] \cdot ۶$$

$$\frac{2 \sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2} \cdot ۷$$

$$2/(\sin^2 x) \cdot ۸$$

$$-\frac{16 \cos 2x}{\sin^2 2x} \cdot ۹$$

$$\frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot ۱۰$$

$$4(4 - x^2)^{-3/2} \cdot ۱۱$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^{1/2} \cdot ۱۲$$

$$-(1+x^2)^{-3/2} \cdot 13$$

$$g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad \text{که در آن} \quad \frac{1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}g(x)}{8\sqrt{x}g(x)\sqrt{x+g(x)}} \cdot 14$$

$$\frac{6 + 3x + 8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 3x^5}{(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{2/3}} \cdot 15$$

$$g'(x) = (2x+1)^{-2}; f'(x) = (x+1)^{-2} \cdot 16$$

۱۷

x	$h(x)$	$h'(x)$	$k(x)$	$k'(x)$
۰	۰	-۱۰	۰	۵
۱	۱	۵	۱	۱۲
۲	۲	۴	۲	-۱۰
۳	۳	۱۲	۳	۴

۱۸

x	$g'(x)$	$g''(x)$
۰	۰	۰
۱	۳	۱۰
۲	۳۰	۳۶

$$2xf'(x^2) \text{ (الف)} \cdot 19$$

$$[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)] \sin 2x \text{ (ب)}$$

$$f'[f(x)] f'(x) \text{ (پ)}$$

$$f'(x) f'[f(x)] f'\{f[f(x)]\} \text{ (ت)}$$

۲۰. (الف) ۷۵ سانتیمتر مکعب بر ثانیه؛ (ب) ۳۰۰ سانتیمتر مکعب بر ثانیه؛ (پ) $3x^2$ سانتیمتر مکعب بر ثانیه.

۲۱. ۴۰۰ میل در ساعت.

۲۲. (الف) $20\sqrt{5}$ فوت در ثانیه؛ (ب) $50\sqrt{2}$ فوت در ثانیه.

۲۳. ۷۲ میل در ساعت.

۲۴. (الف) و (ب) $5/(4\pi)$ فوت در دقیقه.

۲۵. $c = 1 + 36\pi$

۲۶. 75π فوت مکعب بر فوت؛ $dV/dh = 1/(15\pi)$ فوت بر ثانیه؛ $dr/dt =$

۲۷. $66/7$ سانتیمتر مربع بر ثانیه.

۲۸. $n = 33$

۲۹. (الف) $x = \frac{1}{4}$ ، $y = \frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

۱۵.۴ تمرینات (صفحه ۲۳۱)

۳. (ب) $c = 1/2$, $c = \sqrt{2}$.

۶. (الف) $\theta = 1/2$, $\theta \rightarrow 1/2$.

(ب) $\theta = \frac{\dot{x} + h/3}{x + \sqrt{x^2 + xh + h^2/3}}$ اگر $\theta \rightarrow 1/2$ اگر $x > 0$.

۷. (ب) f حداکثر $k + r$ صفر در $[a, b]$ دارد.

۱۹.۴ تمرینات (صفحه ۲۳۷)

۱. (الف) $3/2$; (ب) f نزولی است اگر $x < 3/2$ ، صعودی است اگر $x > 3/2$ ؛
(پ) f' بازای کلیه x ها صعودی است.

۲. (الف) $\pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ؛

(ب) f صعودی است اگر $|x| > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ، نزولی است اگر $|x| < \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

(پ) f' صعودی است اگر $x > 0$ ؛ نزولی است اگر $x < 0$.

۳. (الف) $1 \pm$ ؛ (ب) f صعودی است اگر $|x| > 1$ ، نزولی است اگر $|x| < 1$ ؛

(پ) f' صعودی است اگر $x > 0$ ، نزولی است اگر $x < 0$.

۴. (الف) $1, 3$ ؛

(ب) f صعودی است اگر $x < 1$ یا $x > 3$ ، نزولی است اگر $1 < x < 3$ ؛

(پ) f' صعودی است اگر $x > 2$ ، نزولی است اگر $x < 2$.

۵. (الف) 1 ؛ (ب) f صعودی است اگر $x > 1$ ، نزولی است اگر $x < 1$ ؛

(پ) f' بازای کلیه x ها صعودی است.

۶. (الف) هیچکدام؛ (ب) f صعودی است اگر $x < 0$ ، نزولی است اگر $x > 0$ ؛

(پ) f' صعودی است اگر $x < 0$ یا $x > 0$.

۷. (الف) $2^{1/3}$ ؛ (ب) f صعودی است اگر $x < 0$ یا $x > 2^{1/3}$ ، نزولی است اگر

$0 < x < 2^{1/3}$ ؛ (پ) f' صعودی است اگر $x < 0$ یا $x > 0$.

۸. (الف) 2 ؛ (ب) f صعودی است اگر $x < 1$ یا $x > 2$ ، نزولی است اگر

$1 < x < 2$ یا $x > 3$ ؛ (پ) f' صعودی است اگر $x < 1$ یا $x > 3$ ، نزولی

است اگر $1 < x < 3$.

۹. (الف) $1 \pm$ ؛ (ب) f صعودی است اگر $|x| < 1$ ، نزولی است اگر $|x| > 1$ ؛

(پ) f' صعودی است اگر $x < -\sqrt{3}$ یا $x > \sqrt{3}$ ، نزولی است اگر

$$- \sqrt{3} < x < \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \text{ یا } 0 < x < \sqrt{3}$$

۱۰. (الف) ۰؛ (ب) f صعودی است اگر $x < -3$ یا $0 < x < 3$ ، نزولی است اگر $3 < x < 0$ یا $x > 3$ ؛ (پ) f' صعودی است اگر $|x| > 3$ ، نزولی است اگر $|x| < 3$.

توجه: در تمرینات ۱۱، ۱۲، و ۱۳، n عدد صحیح دلخواهی است.

۱۱. (الف) $n\pi/2$ ؛ (ب) f صعودی است اگر $n\pi < x < (n+1/2)\pi$ ، نزولی است اگر $(n-1/2)\pi < x < n\pi$ ؛ (پ) f' صعودی است اگر $(n+1/4)\pi < x < (n+3/4)\pi$ ، نزولی است اگر

$$\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi < x < \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi.$$

۱۲. (الف) $2n\pi$ ؛ (ب) f بازای کلیه x ها صعودی است؛ (پ) f' صعودی است اگر $(2n+1)\pi < x < 2n\pi$ ، نزولی است اگر $(2n-1)\pi < x < 2n\pi$.

۱۳. (الف) $(2n+1/2)\pi$ ؛ (ب) f بازای کلیه x ها صعودی است. (پ) f' صعودی است اگر $(2n+3/2)\pi < x < (2n+1/2)\pi$ ، نزولی است اگر $(2n-1/2)\pi < x < (2n+1/2)\pi$.

۱۴. (الف) ۰؛ (ب) f صعودی است اگر $x > 0$ ، نزولی است اگر $x < 0$ ؛ (پ) f' بازای کلیه x ها صعودی است.

۲۱.۴ تمرینات (صفحة ۲۴۱)

۲. عرض $L/4$ فوت، طول $L/2$ فوت.

۳. عرض $(1/2)\sqrt{2A}$ ، طول $\sqrt{2A}$.

$$\sqrt{2}L \cdot \sqrt{2}$$

$$r = h/2 = R/\sqrt{2} \cdot 10$$

$$h = H/2, r = R/2 \cdot 12$$

$$h = H/3, r = 2R/3 \cdot 13$$

$$r = 2\sqrt{2}R/3, h = 4R/3 \cdot 14$$

۱۵. مستطیلی که قاعده‌اش دو برابر ارتفاعش است.

۱۶. دوزنقه متساوی الساقین، قاعده پایینی‌اش قطر است، قاعده بالایی‌اش مساوی شعاع می باشد.

$$\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \text{ (الف) } \cdot 17$$

$$-5 - \sqrt{7}, 2 + 2\sqrt{7}, 8 + 2\sqrt{7} \quad (\text{ب})$$

$$\cdot \sqrt{5} \cdot 18$$

$$19. \quad (\text{الف}) \quad 20\sqrt{3} \text{ میل در ساعت؛ } 1039 \text{ دلار.}$$

$$(\text{ب}) \quad 40\sqrt{2} \text{ میل در ساعت؛ } 1697 \text{ دلار.}$$

$$(\text{پ}) \quad 60 \text{ میل در ساعت؛ } 22 \text{ دلار.}$$

$$(\text{ت}) \quad 60 \text{ میل در ساعت؛ } 27 \text{ دلار.}$$

$$(\text{ث}) \quad 60 \text{ میل در ساعت؛ } 32 \text{ دلار.}$$

$$\pi/4 \cdot 20$$

$$21. \quad 9\sqrt{3}/2 \text{ اینچ} = \arctan(\sqrt{2}/2) = \text{زاویه.}$$

$$22. \quad \min = 4r \quad \max = 3\sqrt{3}r \quad (\text{الف})$$

$$(\text{ب}) \quad L/4$$

$$23. \quad \text{مستطیل دارای قاعده } 4P/(3\pi + 8) \text{ و ارتفاع } 4P/(6\pi + 16) \text{ است.}$$

$$24. \quad V = 48\pi \text{ برای } 0 \leq h < 2 \text{؛ } V = 4\pi(4+h)^3/(9h) \text{ برای } h \geq 2.$$

$$26. \quad A = 2(24/v)^{2/3}$$

$$27. \quad m(t) = 0 \text{ اگر } t \geq 1/3 \text{؛ } m(t) = t^2 - 1/3 \text{ اگر } t \leq 1/3.$$

۲۳.۴۰ تمرینات (صفحه ۲۴۹)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \quad .1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$$

$$; f_y = x \cos(x+y) \quad ; f_x = \sin(x+y) + x \cos(x+y) \quad .2$$

$$; f_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y) \quad ; f_{yy} = -x \sin(x+y)$$

$$. f_{xy} = f_{yx} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$$

$$; D_{x,y} f = 2xy^{-2} \quad ; D_{y,y} f = 0 \quad ; D_y f = x - xy^{-2} \quad ; D_x f = y + y^{-1} \quad .3$$

$$. D_{x,y} f = D_{y,x} f = 1 - y^{-2}$$

$$; f_y = y(x^2 + y^2)^{-1/2} \quad ; f_x = x(x^2 + y^2)^{-1/2} \quad .4$$

$$; f_{yy} = x^2(x^2 + y^2)^{-3/2} \quad ; f_{xx} = y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$$

$$. f_{xy} = f_{yx} = -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$$

$$f_{yy} = 6x^2y \cos(x^2y^3) - 9x^5y^2 \sin(x^2y^3) \quad .5$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2 \cos(x^2y^3) - 6x^3y^5 \sin(x^2y^3)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 6 \cos(2x - 3y) \cos[\cos(2x - 3y)] \quad .6$$

$$+ 6 \sin(2x - 3y) \sin[\cos(2x - 3y)].$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2(x+y)(x-y)^{-2} \quad .7$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x(x-y)^{-2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y(x-y)^{-2}$$

$$f_{yy} = -x(x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2)^{-5/2} \quad ; \quad f_{xx} = -3xy^2(x^2 + y^2)^{-5/2} \quad .8$$

$$f_{xy} = f_{yx} = y(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$$

فصل ٥

٥.٥ تمرينات (صفحة ٢٥٦)

$$\frac{\Delta}{4}(b^4 - a^4) \quad .1$$

$$\frac{4}{\Delta}(b^5 - a^5) + 6(a^2 - b^2) \quad .2$$

$$\frac{1}{\Delta}(b^5 - a^5) + \frac{1}{4}(b^4 - a^4) - (b^2 - a^2) - 2(b - a) \quad .3$$

$$\frac{1}{4}(b^2 - a^2) - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \quad .4$$

$$(b - a) + \frac{4}{3}(b^{3/2} - a^{3/2}) + \frac{1}{4}(b^2 - a^2) \quad .5$$

$$\sqrt{2}(b^{3/2} - a^{3/2}) \quad .6$$

$$\frac{2}{\Delta}(b^{5/2} - a^{5/2}) - 2(b^{3/2} - a^{3/2}) + 4(b^{1/2} - a^{1/2}) \quad .7$$

$$\frac{3}{4}(b^{4/3} - a^{4/3} - b^{2/3} + a^{2/3}) \quad .8$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - 3(\cos b - \cos a) \quad .9$$

$$\frac{3}{y}(b^{y/2} - a^{y/2}) - \Delta(\sin b - \sin a) \cdot 10$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 - \pi ; f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi \cdot 14$$

$$c = \pi/3 ; f(t) = -\sin t \cdot 15$$

$$c = 0 ; f(t) = \sin t - 1 \cdot 16$$

$$c = -\frac{1}{9} ; f(x) = 2x^{15} \cdot 17$$

$$p(x) = 3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 \cdot 18$$

$$f'''(1) = 5 ; f''(1) = 2 \cdot 19$$

$$2x(1+x^2)^{-2} (ب) ; (1+x^2)^{-2} (الف) \cdot 20$$

$$2x(1+x^2)^{-2} - 3x^3(1+x^2)^{-2} (پ)$$

$$\frac{2x^{12}}{1+x^4} - \frac{3x^{20}}{1+x^{12}} \cdot 21$$

$$\frac{1}{5} (ت) ; (36)^{1/2} (پ) ; 1 + \sqrt[3]{2} (ب) (الف) 16 \cdot 22$$

$$f(a) = a(3 - \cos a)^{1/2} \cdot 23$$

$$3\pi/2 (ث) ; -\pi^2 (ت) ; 0 (پ) ; 1 - \pi (ب) ; -\pi (الف) \cdot 24$$

$$\frac{1}{4} + \left(\pi - \frac{1}{4}\right)(t-1) (پ) ; \frac{1}{4} (ب) ; \pi - \frac{1}{4} (الف) \cdot 25$$

$$\frac{1}{4}(t-1) + \left(\pi - \frac{1}{4}\right)(t-1)^2/2 (ت)$$

$$(الف) هیچکدام؛ (ب) یک نمونه $f(x) = x + x^2$ است؛ (پ) هیچکدام؛$$

$$(ت) یک مثال عبارت است از $f(x) = 1 + x + x^2$ بازای $x \geq 0$$$

$$x \leq 0 \text{ بازای } f(x) = 1/(1-x)$$

$$28. (a) \text{ گزاره‌های } (\alpha) \text{ و } (\delta) \text{ را ایجاب می‌کند؛ } (b) \text{ گزاره } (\alpha) \text{ را ایجاب می‌کند؛}$$

$$(c) \text{ گزاره‌های } (\alpha) \text{ و } (\gamma) \text{ را ایجاب می‌کند؛ } (d) \text{ گزاره‌های } (\alpha) \text{ و } (\delta) \text{ را ایجاب}$$

$$\text{می‌کند؛ } (e) \text{ گزاره‌های } (\alpha), (\delta), \text{ و } (\varepsilon) \text{ را نتیجه می‌دهد.}$$

$$\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C : 1$$

$$\cdot \left(\frac{2}{25} \right) (1 + 3x)^{5/2} - \left(\frac{2}{27} \right) (1 + 3x)^{3/2} + C \cdot 2$$

$$\cdot \frac{2}{5} (x+1)^{5/2} - \frac{2}{5} (x+1)^{3/2} + \frac{2}{3} (x+1)^{1/2} + C \cdot 3$$

$$\cdot - \frac{1}{4(x^2 + 2x + 2)^2} + C \cdot 5 \quad \cdot - \frac{2}{27} \cdot 4$$

$$\cdot \frac{2}{5} (z-1)^{5/2} + \frac{2}{5} (z-1)^{3/2} + C \cdot 7 \quad \cdot \frac{1}{3} \cos^2 x - \cos x + C \cdot 6$$

$$\cdot \frac{1}{3} - \sqrt{3} \cdot 9 \quad \cdot - \frac{1}{2} \csc^2 x + C \cdot 8$$

$$\cdot \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C \cdot 11 \quad \cdot \frac{1}{3 + \cos x} + C \cdot 10$$

$$\cdot - \frac{\cos x^n}{n} + C \cdot 13 \quad \cdot 2(\cos 2 - \cos 3) \cdot 12$$

$$\cdot \frac{2}{9} (1+t)^{3/2} - \frac{2}{5} (1+t)^{5/2} + C \cdot 15 \quad \cdot - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + C \cdot 14$$

$$\cdot \frac{1}{40} (12x^2 + 22)^{5/2} + C \cdot 17 \quad \cdot x(x^2 + 1)^{-1/2} + C \cdot 16$$

$$\cdot 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C \cdot 19 \quad \cdot \frac{2}{3} (\sin x - \cos x)^{3/2} + C \cdot 18$$

$$\cdot - \frac{5}{2} (x-1)^{2/5} + C \cdot 20$$

١٠.٥ تمرينات (صفحة ٢٧٢)

$$\cdot \sin x - x \cos x + C \cdot 1$$

$$\cdot 2x \sin x + 2 \cos x - x^2 \cos x + C \cdot 2$$

$$\cdot x^2 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C \cdot 3$$

$$\cdot - x^2 \cos x + 2x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C \cdot 4$$

$$\cdot \frac{1}{2} \sin^2 x + C \cdot 5$$

$$\cdot \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + C \cdot 6$$

$$\cdot (\frac{5\pi}{32})a^{\circ} (ب) \cdot ۱۵$$

$$\cdot \frac{2}{3}(3\sqrt{31} + \sqrt{3} - ۱۱۳۵) \cdot ۱۷$$

$$\cdot \frac{1}{3} \tan^2 x - \tan x + x ; \tan x - x \cdot ۱۸$$

$$- \frac{1}{3} \cot^2 x + \cot x + x ; - \cot x - x \cdot ۱۹$$

$$\cdot ۲ (ب) ; n = ۲ (الف) \cdot ۲۰$$

$$۱۱۰۰ \text{ تمرینات متفرقه برای دوره (صفحه ۲۷۵)}$$

$$\cdot g^{(n)}(0) = n! ; 0 \leq k \leq n-1 \text{ اگر } g^{(k)}(0) = 0 \cdot ۱$$

$$\cdot ۶x^5 - ۱۵x^4 + ۱۰x^3 + ۱ \cdot ۲$$

$$\cdot ۳ : ۶$$

$$\cdot \frac{۶۷}{۵} \cdot ۷$$

$$\cdot y = ۱۶x^2/9 \cdot ۹$$

$$\cdot f'(0) = 0 (ب) \cdot ۱۰$$

$$\cdot - \frac{2}{5} \cos 5x + \frac{3}{25} \sin 5x - \frac{3}{5} x \cos 5x \cdot ۱۱$$

$$\cdot \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \cdot ۱۲$$

$$\cdot - 3^{10}/20 \cdot ۱۳$$

$$\cdot 37/8281 \cdot ۱۴$$

$$\cdot \frac{1}{30} (1+x^5)^6 \cdot ۱۵$$

$$\cdot 1/265650 \cdot ۱۶$$

$$\cdot \cos \frac{1}{2} - \cos 1 \cdot ۱۷$$

$$[12(x-1)^{1/2} - 24] \sin(x-1)^{1/2} - 2[(x-1)^{3/2} - 6(x-1)^{1/2}] \cos(x-1)^{1/2} \cdot ۱۸$$

$$(\sin^2 x^2)/4 \cdot 19$$

$$- 2(1 + 3\cos^2 x)^{3/2}/9 \cdot 20$$

$$b = 27/2, a = 9 \cdot 22$$

$$.256/693, 128/315, 16/35, 8/15 \cdot 23$$

$$x^{13}/13 + x^{12}/6 + x^{11}/11 \cdot 24$$

$$.3 \cdot 26$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi + 2} - A \right) \cdot 27$$

$$p(x) = -x^2 + x - 1 \text{ (الف)} \cdot 28$$

$$P_7(x) = x^7 - x + 1/6; P_1(x) = x - 1/2 \text{ (الف)} \cdot 29$$

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2/2 + x/2$$

$$P_4(x) = x^4 - 2x^2 + x^2 - 1/30$$

$$P_5(x) = x^5 - 5x^4/2 + 5x^3/3 - x/6$$

فصل ۶

۹.۶ تمرینات (صفحه ۲۹۲)

$$(a+b)/(1+ab) \text{ (ب)}; 1 \text{ (الف)} \cdot 1$$

$$\frac{(e^2 - 1)^2}{4e^2} \text{ (ت)}; 4 \text{ (ب)}; \frac{e-1}{e+1} \text{ (ب)}; 0 \text{ (الف)} \cdot 2$$

۳. صعودی است اگر $e < x < 5$ ، نزولی است اگر $x > e$ ؛ محدب است اگر $x > e^{3/2}$ ، مقعر است اگر $e^{3/2} < x < 5$.

$$\frac{n(x + \sqrt{1+x^2})^n}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 10 \quad (2x)/(1+x^2) \cdot 4$$

$$1/[2(1 + \sqrt{x+1})] \cdot 11 \quad x/(1+x^2) \cdot 5$$

$$\log(x + \sqrt{x^2+1}) \cdot 12 \quad x/(x^2-4) \cdot 6$$

$$1/(a-bx^2) \cdot 13 \quad 1/(x \log x) \cdot 7$$

$$2 \sin(\log x) \cdot 14 \quad (2/x) + 1/(x \log x) \cdot 8$$

$$-1/(x \log^2 x) \cdot 15 \quad x/(x^4-1) \cdot 9$$

$$\log |2 + 3x| / 3 + C \cdot ۱۶$$

$$x \log^2 |x| - 2x \log |x| + 2x + C \cdot ۱۷$$

$$x^2 \log |x| / 2 - x^2 / 4 + C \cdot ۱۸$$

$$x^2 \log^2 |x| / 2 - x^2 \log |x| / 2 + x^2 / 4 + C \cdot ۱۹$$

$$\cdot 3 \cdot 20$$

$$\log |\sin x| + C \cdot 21$$

$$\frac{1}{2} \log^2 |ax| + C \text{ اگر } n \neq -1 \text{ و } \frac{x^{n+1}}{n+1} \log |ax| - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \cdot 22$$

$$n = -1$$

$$\frac{x^2}{3} \left(\log^2 |x| - \frac{2}{3} \log |x| + \frac{2}{9} \right) + C \cdot 23$$

$$\log |\log x| + C \cdot 24$$

$$\cdot 2 \cdot 25$$

$$\frac{2}{3} (-2 + \log |x|) \sqrt{1 + \log |x|} + C \cdot 26$$

$$\frac{x^2}{2} \log^2 |x| - \frac{3}{16} x^2 \log^2 |x| + \frac{3}{32} x^2 \log |x| - \frac{3}{128} x^2 + C \cdot 27$$

$$\cdot 4 \log x \cdot 34$$

$$\cdot 3 + 2 \log x \cdot 35$$

$$\cdot a \log a \cdot 36$$

$$۱۷.۶ \text{ تمرینات (صفحه ۳۰۷)}$$

$$\cdot 3e^{2x-1} \cdot ۱$$

$$\cdot 21 + x^2 x \log 2 \cdot ۷$$

$$\cdot \lambda x e^{2x^2} \cdot ۲$$

$$\cdot (\cos x) e^{\sin x} \cdot ۸$$

$$\cdot -2xe^{-x^2} \cdot ۳$$

$$\cdot -(\sin 2x) e^{\cos 2x} \cdot ۹$$

$$\cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot ۴$$

$$\cdot 1 \cdot 10$$

$$\cdot -\frac{e^{1/x}}{x^2} \cdot ۵$$

$$\cdot e^x e^{e^x} \cdot ۱۱$$

$$\cdot 2^x \log 2 \cdot ۶$$

$$e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}} \cdot ۱۲$$

$$- \frac{1}{r}(x^r + 1)e^{-x^r} + C \cdot ۱۸ \quad e^x(x-1) + C \cdot ۱۳$$

$$a, b = e^a \cdot ۱۹ \quad -e^{-x}(x+1) + C \cdot ۱۴$$

$$x^x(1 + \log x) \cdot ۲۱ \quad e^x(x^r - 2x + 2) + C \cdot ۱۵$$

$$1 + (1 + 2x + 2x^2)e^{x^2} \cdot ۲۲ \quad -\frac{1}{r}e^{-x^r}\left(x^r + x + \frac{1}{r}\right) + C \cdot ۱۶$$

$$2(e^x + e^{-x})^{-2} \cdot ۲۳ \quad 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C \cdot ۱۷$$

$$a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1} a^{x^a} \log a + a^x a^{a^x} (\log a)^2 \cdot ۲۴$$

$$1/[x \log x \log(\log x)] \cdot ۲۵$$

$$e^x(1 + e^{x^2})^{-1/2} \cdot ۲۶$$

$$x^x x^{x^x} \left[\frac{1}{x} + \log x + (\log x)^2 \right] \cdot ۲۷$$

$$(\log x)^x \left(\log \log x + \frac{1}{\log x} \right) \cdot ۲۸$$

$$2x^{-1+\log x} \log x \cdot ۲۹$$

$$\frac{(\log x)^{x-1}}{x^{1+\log x}} [x - 2(\log x)^2 + x \log x \log(\log x)] \cdot ۳۰$$

$$(\sin x)^{1+\cos x} [\cot^2 x - \log(\sin x)] \cdot ۳۱$$

$$-(\cos x)^{1+\sin x} [\tan^2 x - \log(\cos x)] \cdot$$

$$x^{-2+1/x}(1 - \log x) \cdot ۳۲$$

$$\frac{54x - 36x^2 + 2x^3 + 2x^4}{2(1-x)^2(3-x)^{2/3}(3+x)^{5/3}} \cdot ۳۳$$

$$\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{b_i} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x - a_k} \cdot ۳۴$$

$$- (۳۱۱ \text{ تمرینات (صفحة ۳۱۱)}) \cdot ۱۹۰۶$$

$$5/3 \cdot ۱۶$$

$$3/4 \cdot ۱۷$$

$$\cosh x = ۱۳/۱۲, \sinh x = ۵/۱۲ \cdot ۱۸$$

$$\cdot ۳۷/۱۲ \cdot ۱۹$$

$$\cdot ۲۴/۲۵ \cdot ۲۰$$

$$۲۲.۶ \quad \text{تمرینات (صفحه ۳۱۷)}$$

$$\cdot ۱۲ \quad \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ اگر } |x| < ۲$$

$$\cdot ۱۳ \quad \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \text{ اگر } |x-1| < \sqrt{2}$$

$$\cdot ۱۴ \quad \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \text{ اگر } |x| > ۱$$

$$\cdot ۱۵ \quad \frac{\cos x}{|\cos x|} \text{ اگر } x \neq (k + ۱/۲)\pi, k \text{ عددی صحیح است.}$$

$$\cdot ۱۶ \quad \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \text{ اگر } x \geq 0$$

$$\cdot ۱۷ \quad \frac{1+x^4}{1+x^6}$$

$$\cdot ۱۸ \quad -\frac{2x}{|x|(1+x^2)} \text{ اگر } x \neq 0$$

$$\cdot ۱۹ \quad \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \text{ اگر } x \neq (k + ۱/۲)\pi$$

$$\cdot ۲۰ \quad \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\cdot ۲۱ \quad \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}} \text{ اگر } k\pi < x < (k + ۱/۲)\pi$$

$$\cdot ۲۲ \quad \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \text{ اگر } |x| < ۱, ۰ < ۱/(1+x^2) \cdot ۲۳ \text{ اگر } x \neq ۱$$

$$\cdot ۲۴ \quad \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x^2)^2} \text{ اگر } |x| < ۱$$

$$\cdot ۲۵ \quad \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \arccos(1/\sqrt{x})} \text{ اگر } x > ۱$$

$$\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+x^2) \arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}} \cdot 27$$

$$\arcsin \frac{x}{|a|} + C \cdot 29$$

$$\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \cdot 30$$

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \cdot 31$$

$$ab > 0 \text{ اگر } \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + C \cdot 32$$

$$ab < 0 \text{ اگر } \frac{a}{2|a|\sqrt{-ab}} \log \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right| + C$$

$$\frac{2}{\sqrt{y}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{y}} + C \cdot 33$$

$$[(1+x^2) \arctan x - x] / 2 + C \cdot 34$$

$$\frac{x^2}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + C \cdot 35$$

$$\frac{1}{2} (1+x^2) (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C \cdot 36$$

$$(1+x) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C \cdot 37$$

$$\frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right) + C \cdot 38 \quad (\arctan \sqrt{x})^2 + C \cdot 39$$

$$\frac{(x+1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C \cdot 40 \quad \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C \cdot 41$$

$$\arctan e^x + C \cdot 42 \quad \frac{1}{2} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) + C \cdot 43$$

$$\frac{1}{2} \log(1+e^{-2x}) - \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} + C \cdot 44$$

$$a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \cdot 45$$

$$\frac{2(b-a)}{|b-a|} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad .46$$

$$\frac{1}{4} |b-a| (b-a) \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + \quad .47$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} [2x - (a+b)] + C.$$

٢٥.٦ تمرينات (صفحة ٣٣٥)

$$\log |x-2| + \log |x+5| + C \quad .1$$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+3)^2} \right| + C \quad .2$$

$$-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad .3$$

$$\frac{1}{2} x^2 - x + \log \left| \frac{x^2(x+2)}{x-1} \right| + C \quad .4$$

$$\log |x+1| - \frac{3}{(2x+1)^2} + \frac{3}{2x+1} + C \quad .5$$

$$2 \log |x-1| + \log (x^2 + x + 1) + C \quad .6$$

$$x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + C \quad .7$$

$$2 \log |x| - \log |x+1| + C \quad .8$$

$$\log |x| - \frac{1}{2} \log (x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \quad .9$$

$$\frac{9x^2 + 50x + 68}{2(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \log \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{12}} \right| + C \quad .10$$

$$\frac{1}{x+1} + \log |x+1| + C \quad .11$$

$$\frac{1}{2} \log |x^2 - 1| - \log |x| + C \quad .12$$

$$x + \frac{2}{\Delta} \log |x-2| - \frac{9}{\Delta} \log |x+3| + C \quad .13$$

$$\log |x-2| - \frac{2}{x-2} + C \quad .14$$

$$\frac{1}{y-x} - \arctan(x-y) + C \cdot ١٥$$

$$y \log|x+1| - \frac{y}{y} \log|x| - \frac{\delta}{y} \log|x+y| + C \cdot ١٦$$

$$\frac{1}{y} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{x}{y(x^2-1)} + C \cdot ١٧$$

$$\frac{1}{y} \log \frac{(x-1)^y}{x^2+x+1} + C \cdot ١٨$$

$$\log|x| + \frac{1}{x^2+1} + C \cdot ١٩$$

$$\frac{1}{yx} + \frac{1}{yx^2} + \frac{1}{\lambda} \log \left| \frac{x-y}{x} \right| + C \cdot ٢٠$$

$$\log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - x + \arctan x + C \cdot ٢١$$

$$\frac{1}{y} \log|(x-1)/(x+1)| - \frac{1}{y} \arctan x + C \cdot ٢٢$$

$$\frac{1}{y\sqrt{y}} \log \frac{x^2+x\sqrt{y}+1}{x^2-x\sqrt{y}+1} + \frac{1}{y\sqrt{y}} \arctan \frac{x\sqrt{y}}{1-x^2} + C \cdot ٢٣$$

$$\cdot (x^2+2x+2)^{-1} + \arctan(x+1) + C \cdot ٢٤$$

$$\cdot -x/(x^{\delta}+x+1) + C \cdot ٢٥$$

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} \arctan \frac{1+y \tan(x/y)}{\sqrt{\delta}} + C \cdot ٢٦$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \tan \frac{x}{y} \right) + C \cdot ٢٧$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \log \left| \frac{a + \cos x + \sqrt{a^2-1} \sin x}{1 + a \cos x} \right| + C \cdot ٢٨$$

$$\cdot x - \frac{1}{y} \sqrt{y} \arctan(\sqrt{y} \tan x) + C \cdot ٢٩$$

$$\cdot \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{a}{b} \tan x \right) + C \cdot ٣٠$$

$$-\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C \quad ۳۱$$

$$(\pi/4) - \frac{1}{y} \log y \quad ۳۲$$

$$\frac{1}{y} x \sqrt{3-x^2} + \frac{3}{y} \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C \quad ۳۳$$

$$-\sqrt{3-x^2} + C \quad ۳۴$$

$$\sqrt{3-x^2} - \sqrt{3} \log\left(\frac{\sqrt{3-x^2} + \sqrt{3}}{x}\right) + C \quad ۳۵$$

$$\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{y} \log(2\sqrt{x^2+x} + 2x + 1) + C \quad ۳۶$$

$$\frac{1}{y} x \sqrt{x^2+\delta} + \frac{\delta}{y} \log(x + \sqrt{x^2+\delta}) + C \quad ۳۷$$

$$\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{y} \log(2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1}) + C \quad ۳۸$$

$$\log(2x+1 + 2\sqrt{x^2+1}) + C \quad ۳۹$$

$$-\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{y} \log\left(\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{y}\right) \quad ۴۰$$

$$-\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$$

۲۶.۶ تمرینات متفرقه برای دوره (صفحه ۳۳۲)

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{y} (\log x)^2 \quad ۱$$

$$f(x) = \log \sqrt{2/(2+\cos x)} \quad ۲$$

۱.۴

$$V = \int_1^x \frac{\pi(4x+2)}{x(x+1)(x+2)} dx \quad (ب) \quad -\frac{y}{12} \quad (الف) \quad ۵$$

$$x \geq 1 \quad (الف) \quad ۶$$

$$xe^{1/x} - e - F\left(\frac{1}{x}\right), F(x) - \frac{e^x}{x} + e, F(ax) - F(a) \quad (پ)$$

۷. (الف) چنین تابعی وجود ندارد؛ (ب) $2^x \log 2$ ؛ (پ) $x/2 \pm 1$.

۹. (الف) $g(3x) = 3e^{2x} g(x)$ ؛ (ب) $g(nx) = ne^{(n-1)x} g(x)$ ؛

(پ) 2 ؛ (ت) $C = 2$.

۱۰. $f(x) = b^{x/a} g(x)$ که در آن g متناوب با دوره تناوب a است.

۱۲. (الف) $-Ae^{-a}$ ؛ (ب) $A/2$ ؛

(پ) $1 - e/2 + A$ ؛ (ت) $A \log 2 - A$.

۱۳. (ب) $c_0 + nc_1 + n(n-1)c_2 + n(n-1)(n-2)c_3$ ؛

(پ) هرگاه $p(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$ آنگاه $f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^m k! \binom{n}{k} c_k$.

۱۶. (الف) $\frac{2}{3}x^2(x + |x|)$ ؛

(ب) $x - \frac{1}{3}x^3$ اگر $|x| \leq 1$ ؛ $x - \frac{1}{3}x|x| + \frac{1}{6}\frac{|x|}{x}$ اگر $|x| > 1$ ؛

(پ) $1 - e^{-x}$ اگر $x \geq 0$ ؛ $e^x - 1$ اگر $x < 0$ ؛

(ت) x اگر $|x| \leq 1$ ؛ $\frac{2}{3}\frac{|x|}{x} + \frac{1}{3}x^3$ اگر $|x| > 1$.

۱۷. $f(x) = \sqrt{(2x+1)/\pi}$.

۱۸. (الف) $(1 - e^{-2t})/2$ ؛ (ب) $(1 - e^{-2t})/4$ ؛

(پ) $\pi[1 - e^{-2t}(2t+1)]/2$ ؛ (ت) π .

۱۹. (الف) $2 \log 2 - \log 3$ ؛ (ب) هیچ x حقیقی وجود ندارد.

۲۰. (الف) درست؛ (ب) غلط؛ (پ) درست؛ (ت) غلط اگر $x < 0$.

۲۵. (ت) $\int_0^x e^{-t} t^n dt = n! e^{-x} \left(e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$ ؛

۲۷. (الف) $2\sqrt{t} - 1$ اگر $t > 0$ ؛

(ب) $1/2 + t - t^2/2$ اگر $0 \leq t \leq 1$ ؛

(پ) $1/3 + t - t^2/3$ اگر $|t| \leq 1$ ؛

(ت) $f(t) = t$ اگر $t \leq 0$ ؛ $f(t) = e^t - 1$ اگر $t > 0$.

۲۸. (ب) $C_n = -2 \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{\log^k 2}$ ؛ (پ) $b = \log 2$ ؛ (ت) $e^x Li(e^{2x-2})$.

۲۹. هر y ؛ $g(y) = -e^y$.

۳۰. (ب) $3/2 =$ ثابت.

فصل ۷

۸۰۷ تمرینات (صفحة ۳۵۳)

۸. (ب) $R + \frac{55\sqrt{2}}{672}$ که در آن $2.10^{-4} < \frac{\sqrt{2}}{7680} \leq |R|$

۹. $R + 9461$ که در آن $2.10^{-4} < |R|$

۱۱۰۷ تمرینات (صفحة ۳۶۱)

۱. $1 + x \log 2 + \frac{1}{2} x^2 \log^2 2$

۲. $\cos 1 + (\cos 1 - \sin 1)(x - 1)$

$-\frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1)(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(\sin 1 - 3\cos 1)(x - 1)^3$

۳. $x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{59x^5}{120} + \frac{x^6}{8}$

۴. $c = -1/2, b = 1, a = 0$

۵. $2/3, a/b = 7, 0.2/3, 0.8/6, 0.1/2, 0.10, 0.11, 0.1$

۱۲. $\log a / \log b, 0.13/3, 0.14/2, 0.15/6, 0.16, 0.17, 0.1$

۱۸. $0.18/6, 0.19, 0.20, 0.21, 0.22/6, 0.23/e, 0.24, e^3$

۲۵. $e/2, 0.26, e^{-1/2}, 0.27, e^{1/6}, 0.28, 0.29/2, 0.30, a = 2, 3/2 = \text{حد}$

۳۳. $f(0) = 0, f'(0) = 4, f''(0) = e^2 = \text{حد}$

۱۳۰۷ تمرینات (صفحة ۳۶۷)

۱. $0.14/3, 0.2, 0.3, 0.4/6, 0.5, (a/b)^2, 0.6, 0.1/6$

۷. $0.9, 0.10, 0.1/3, 0.11/2, n(n+1)$

۱۲. $(a^2 - b^2)/(3a^2b^2)$

۱۳. $x \rightarrow 0$ وقتی $x \rightarrow \pi/2$ وقتی $x \rightarrow \pi/2$

۱۴. $a = -3, b = 9/2, a = 4, b = 1$

$$\begin{aligned} ۱۶. S(x) &= x/2 - \sin x/2 \quad (ب) \quad T(x) = \tan(x/2) - \sin x/2 \quad (الف) \\ &۳/۲ \quad (پ) \\ &۱۷. tE/L \\ &۱۸. - \frac{At \cos kt}{2k} \end{aligned}$$

۱۷.۷ تمرینات (صفحة ۳۷۶)

$$\begin{aligned} &e/2 \cdot ۸.۰۰ \cdot ۷.۱ \cdot ۶.۱/24 \cdot ۵.۱/\sqrt{b} \cdot ۴.۱/3 \cdot ۳.۱ \cdot ۲.۰۰ \cdot ۱ \\ &- ۱.۱۷.۱.۱۶.۰.۱۵.۰.۱۴.۱/2 \cdot ۱۳.۰.۱۲.۰.۱۱.۱.۱۰.۰ + \infty \cdot ۹ \\ &- ۱/2 \cdot ۲۵ \cdot e^{1/\pi} \cdot ۲۴ \cdot e^e \cdot ۲۳.۱ \cdot ۲۲.۱/e \cdot ۲۱.۱ \cdot ۲۰ \cdot e \cdot ۱۹.۱ \cdot ۱۸ \\ &۱/2 \cdot ۲۹ \cdot \text{حد} = ۷/۵ \quad c = ۱/۵ \cdot ۲۸.۱/2 \cdot ۲۷ \cdot \log 2 \cdot ۲۶ \\ &\text{حد} = \sqrt{3}/2 \quad c = ۱.۳۰ \\ &۳۲. (ب) ۱۱۵۵ سال؛ (پ) ۱۱۶۷ سال. \end{aligned}$$

فصل ۸

۵.۸ تمرینات (صفحة ۳۸۷)

$$\begin{aligned} &y = 2x^2/3 + x^5/3 \cdot ۲ \quad y = e^{2x} - e^{2x} \cdot ۱ \\ &y = x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2} \cdot ۴ \quad y = 2\cos x - 2\cos^2 x \cdot ۳ \\ &y = (x + C)/\sin x \cdot ۶ \quad x = e^{2t}/3 + 2e^{-t}/3 \cdot ۵ \\ &y = \sin x + C/\sin x \cdot ۸ \quad y = (1 + 1/x)(C - e^{-x^2})/2 \cdot ۷ \\ &y = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x-2} + C\right) \cdot ۹ \\ &f(x) = 1 + \log x \cdot ۱۱ \quad y = xT(x) + Cx \cdot ۱۰ \\ &۱۲. فقط تابع داده شده. \\ &y = (\sqrt{2}e^{2x} + e^{2x} - e^x)^2 \cdot ۱۴ \\ &y = 1/(x^2 - x + 2 - e^{-x}) \cdot ۱۵ \\ &y = (x^2 - x)^2 \cdot ۱۶ \end{aligned}$$

$$y = 1/(x^2 + x - x^2 \log x) \cdot ۱۷$$

$$y = \left(\frac{e^x + e^{x-x}}{2x} \right)^{1/2} \text{ (الف)} \cdot ۱۸$$

$$y^2 = \frac{\sinh x}{x} \text{ (ب)} ; y = - \left(\frac{e^x + e^{x-x}}{2x} \right)^{1/2} \text{ (ب)}$$

$$C = \frac{b+2}{b-1} \text{ با } y = \frac{Ce^{rx} + 2}{Ce^{rx} - 1} \text{ (الف)} \cdot ۲۰$$

$$C = \frac{b-1}{b+2} \text{ با } y = \frac{e^{rx} + 2C}{e^{rx} - C} \text{ (ب)}$$

۷.۸ تمرینات (صفحه ۳۹۶)

$$۴۲.۰۱ = ۲^{-1/16} (1 - ۱۰۵) \cdot ۱$$

۲. چهار برابر مقدار اولیه.

$$w(t) = (b-t)/(b-a) \text{ (ب)} ; T = (\log n)/k \text{ (الف)} \cdot ۳$$

$$۰ \leq t \leq ۱۰ \text{ اگر } ۲۵۶(1 - e^{-t/۱۰}) \leq ۱۶ + ۱۶۶e^{t-۲۰} \cdot ۴$$

$$v \rightarrow \sqrt{mg/k} \cdot ۶$$

$$۰.۷ \text{ (ب)} ۵۴۵ \text{ دقیقه؛}$$

$$T = \frac{1}{10k} [1 + (600 - t)k + (1400k - 1)e^{-kt}] \text{ (ت)}$$

$$۵۵^\circ \cdot ۸$$

$$۱۹۵۰ \text{ پوند.}$$

$$۵۴۷.۱۰ \text{ پوند.}$$

$$۱۳: \text{ برای معادله } (۲۰.۸), x = x_0 e^{k(t-t_0)} ; \text{ برای معادله } (۲۲.۸), \alpha = Mk$$

$$x = M \left[1 + \exp \left(-M \int_{t_0}^t k(u) du \right) \right]^{-1} \cdot ۱۵$$

$$۱۶: \text{ (الف)} ۲۰۰ \text{ میلیون؛ (ب)} ۲۱۷ \text{ میلیون.}$$

$$۱۷: \text{ (الف)} ۲۶ \text{ دره در سال؛ (ب)} ۱۱ \text{ دره در سال، } ۲۶۰ \text{ میلیون، } ۴۵۰ \text{ میلیون.}$$

$$۱۸: dx/dt = kx(1 - at) ; x = x_0 e^{k(t-at^2/2)} \text{ منحنی (ت).}$$

۱۴.۸ تمرینات (صفحه ۴۰۸)

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \cdot ۲$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \cdot ۱$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} \cdot ۴ \quad y = c_1 + c_2 e^{x^2} \cdot ۳$$

$$y = e^x (c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x) \cdot ۵$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \cdot ۶$$

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \cdot ۸ \quad y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \cdot ۷$$

$$y = e^x (c_1 + c_2 x) \cdot ۱۰ \quad y = e^{-x} (c_1 + c_2 x) \cdot ۹$$

$$y = \frac{\delta}{3} - \frac{2}{3} e^{-x^2/2} \cdot ۱۱$$

$$y = -\cos(\delta x - ۱\delta) \cdot ۱۲$$

$$b = 2 + \sqrt{\delta}, a = 2 - \sqrt{\delta} \text{ که در آن } y = \frac{a}{\gamma} e^{b(x-1)} + \frac{b}{\gamma} e^{a(x-1)} \cdot ۱۳$$

$$y = 2e^{-x^2} (\cos x + \sin x) \cdot ۱۴$$

$$v(x) = \frac{\delta}{\epsilon} e^{-ix-\pi} \sin 3x \quad u(x) = \frac{1}{\gamma} e^{ix-\pi} \sin \delta x \cdot ۱۵$$

$$v(x) = e^x - e^{-\delta x} \quad u(x) = \epsilon (e^{x^2} - e^{-x}) / \delta \cdot ۱۶$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots) f_k(x) = C \sin n\pi x \quad k = n^2 \pi^2 \cdot ۱۷$$

$$(ب) \text{ خیر؛ } (پ) \text{ اگر } k \neq 0 \text{ شرط } a_1 - a_2 \neq n\pi/k \text{ است.} \cdot ۱۹$$

$$y'' - y = 0 \text{ (الف)؛} \cdot ۲۰$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ (ب)؛}$$

$$y'' + y' + \frac{\delta}{\gamma} y = 0 \text{ (پ)؛}$$

$$y'' + 4y = 0 \text{ (ت)؛}$$

$$y'' - y = 0 \text{ (ث)؛}$$

۱۷.۸ تمرینات (صفحة ۴۱۵)

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x \cdot ۱$$

$$y = c_1 e^x + c_2 - 2x - x^2 - \frac{1}{\gamma} x^2 \cdot ۲$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 + \frac{1}{\gamma} x^2 \cdot ۳$$

$$y = e^x (c_1 \cos \sqrt{r}x + c_2 \sin \sqrt{r}x) - \frac{\lambda}{r\sqrt{r}} + \frac{r}{q}x + \frac{r}{r}x^r + \frac{1}{r}x^r. \text{ ٢}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{rx} + \frac{q}{r\sqrt{r}} + \frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{r}x^r. \text{ ٣}$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx} - \frac{r}{1\sqrt{r}} + \frac{1}{r}x - x^r - \frac{1}{r}x^r. \text{ ٤}$$

$$y = \left(c_1 + \frac{1}{r}x\right)e^{rx} + c_2 e^{-rx}. \text{ ٥}$$

$$y = c_1 \cos rx + c_2 \sin rx + \frac{1}{\lambda}e^{-rx}. \text{ ٦}$$

$$y = c_1 e^{-rx} + \left(c_2 + \frac{1}{r}x\right)e^x. \text{ ٧}$$

$$y = c_1 e^{-rx} + c_2 e^x + \frac{1}{r}e^{rx}. \text{ ٨}$$

$$y = c_1 e^{-rx} + \left(c_2 + \frac{1}{r}x\right)e^x + \frac{1}{r}e^{rx}. \text{ ٩}$$

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{r}x^r\right)e^x + x + r. \text{ ١٠}$$

$$y = (c_1 + c_2 x - \log|x|)e^{-x}. \text{ ١١}$$

$$y = c_1 \sin x + (c_1 + \log|\csc x + \cot x|)\cos x - r. \text{ ١٢}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (e^x - e^{-x})\log(1 + e^x) - x e^x - 1. \text{ ١٣}$$

$$y = \left(c_1 + \frac{1}{r}x\right)e^x + \frac{1}{r}e^{-x} + c_2 e^{-rx} - \frac{1}{r}. \text{ ١٤}$$

$$- \frac{1}{r}(e^x + e^{-rx})\log(1 + e^x).$$

$$y = \begin{cases} (c_1 + c_2 x)e^{-rx} & x > r \text{ و } x < 1 \\ (a + bx)e^{-rx} + \frac{1}{q} & 1 \leq x \leq r \end{cases}. \text{ ١٥}$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx} + \frac{1}{r}x e^{rx}. \text{ ١٦}$$

$$y = \left(c_1 - \frac{1}{r}x\right)\cos rx + \left(c_2 - \frac{1}{r\lambda}\right)\sin rx. \text{ ١٧}$$

$$y = \left(c_1 - \frac{1}{r}x\right)\cos x + c_2 \sin x. \text{ ١٨}$$

$$y = c_1 \cos x + \left(c_2 + \frac{1}{4}x \right) \sin x \quad ۲۱$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x \cos x + \frac{2}{3} \sin x \quad ۲۲$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x \sin x - \frac{2}{3} \cos x \quad ۲۳$$

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{5} e^{2x} (3 \sin x + \cos x) \quad ۲۴$$

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{40} e^{2x} (3 \sin 3x - \cos 3x) \quad ۲۵$$

۱۹.۸ تمرینات (صفحة ۴۲۲)

$$2\sqrt{2} \cdot ۱$$

$$\pm ۱۴۰\pi \cdot ۲$$

$$\beta = \alpha - \frac{1}{4}\pi, m = k, A = C \quad ۳$$

$$y = 2 \cos 2\pi x \cdot ۴$$

$$C = (y_0^2 + v_0^2)^{1/2} \cdot ۵$$

$$y'' = -۱۲y = -۴\sqrt{6}, y = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot ۶$$

$$y = -A \sin \frac{\pi x}{3} \quad ۷ \text{ که در آن } A \text{ مثبت است.}$$

$$I(t) = \begin{cases} \sin t + 1 - \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi \text{ اگر } ۱ \\ \sin t, & t \geq 2\pi \text{ اگر } ۲ \end{cases} \cdot ۸$$

$$R < \sqrt{2} \quad (ب) \quad ۱/(2\pi\sqrt{2}) \quad (الف) \cdot ۹$$

$$r(t) = \frac{1}{\gamma} g t^2 - ct + C \left(t - \frac{w}{k} \right) \log \left(1 - \frac{kt}{w} \right) \cdot ۱۰$$

$$r(t) = ct + c \left(\frac{w}{k} - t \right) \log \left(1 - \frac{kt}{w} \right) \cdot ۱۱$$

$$r(t) = \frac{wv_0}{k} \log \frac{w}{w - kt} \cdot ۱۲$$

۲۲۰۸ تمرینات (صفحه ۴۲۹)

- $$\begin{aligned} & y' + 2y = 0 \quad ۲ \qquad y' + \frac{y}{x} = 0 \quad ۱ \\ & xy' + y = 0 \quad ۴ \qquad yy' - x = 0 \quad ۳ \\ & (x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0 \quad ۶ \qquad 2xy' - y = 0 \quad ۵ \\ & (x^2 - 4)y' - y = 0 \quad ۸ \qquad (x - 1)y' - xy = 0 \quad ۷ \\ & \sqrt{1 - x^2}y' + y^2 + 1 = 0 \quad ۱۰ \qquad y' + y \tan x = 0 \quad ۹ \\ & (x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0 \quad ۱۱ \\ & (x^2 + 2xy - y^2 - 2)y' - y^2 - 2xy + x^2 + 2 = 0 \quad ۱۲ \\ & x + y = -1 \quad ۱۴ \text{ هم یک منحنی انتگرال است هم یک یکشبه.} \\ & y = -\frac{1}{4}x^2 \text{ پوش؛ } y = Cx + C^2 \quad ۱۵ \end{aligned}$$

۲۴۰۸ تمرینات (صفحه ۴۳۲)

- $$\begin{aligned} & \cos x = Ce^{1/\cos x} \quad ۲ \qquad y^2 = \frac{3}{4}x^4 + C \quad ۱ \\ & y - 2 = C(y - 1)e^x \quad ۴ \qquad y(C + \log|x + 1|) = 1 \quad ۳ \\ & y = C(x - 1)e^x \quad ۶ \qquad y^2 + 2\sqrt{1 - x^2} = C \quad ۵ \\ & (1 + y^2)(1 + x^2) = Cx^2 \quad ۸ \qquad \arctan y + \arcsin x = C \quad ۷ \\ & 1 + y^2 = Cx^2e^{x^2} \quad ۱۰ \qquad y^2(x + 2) = C(x - 2) \quad ۹ \\ & \left(y + \frac{1}{y}\right)e^{-2y} = e^x(\cos x - \sin x) + C \quad ۱۱ \\ & x^2 - 1 = C(y^2 + 1) \quad ۱۲ \\ & f(x) = 2e^{x-1} \quad ۱۳ \\ & f(x) = \sqrt{5x^2 + 1} \quad ۱۴ \\ & f(x) = -\log(1 + x^2) \quad ۱۵ \\ & f(x) = \sin(x + C)؛ f(x) = \pm 1 \quad ۱۶ \end{aligned}$$
- هایشان با اتصال قسمتهائی از منحنیهای $y = \sin(x + C)$ با قسمتهائی از خطوط $y = \pm 1$ بدست می آیند. یک نمونه $f(x) = -1$ برای $x \leq 0$

$x \geq 3\pi$ برای $f(x) = 1$ ، $0 \leq x \leq 3\pi$ برای $f(x) = \sin(x - \pi/2)$ می‌باشد.

$$f(x) = C \quad ۱۷$$

$$f(x) = Ae^{x/C} \quad ۱۸$$

$$f(x) = 0 \quad ۱۹$$

$$f(x) = 0 \quad ۲۰$$

۲۶.۸ تمرینات (صفحه ۴۳۶)

$$x^2 + y^2 = C \quad ۲$$

$$y = x \log |Cx| \quad ۳$$

$$y^2 = C(x^2 + y^2)^2 \quad ۵$$

$$x^2 + y^2 = Cx^2 \quad ۴$$

$$y(Cx^2 - 1) = x \quad ۷ \quad C > 0, x^2 + 2Cy = C^2 \quad ۶$$

$$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \log \frac{y^2}{x} = C \quad ۹ \quad \arctan \frac{x}{y} + \log |y| = C \quad ۸$$

$$(x + y)^2 = Cx^2 y^2 \quad ۱۱ \quad \tan \frac{y}{2x} = Cx \quad ۱۰$$

۲۸.۸ تمرینات متفرقه برای دوره (صفحه ۴۴۲)

$$x^2 - y^2 = C \quad ۲ \quad 3x - 2y = C \quad ۱$$

$$2x^2 + y^2 = C \quad ۴ \quad x^2 + y^2 - Cx + 1 = 0 \quad ۳$$

$$y^2 = x + C \quad ۶ \quad 2y^2 - x^2 = C \quad ۵$$

$$y^2 - \log(\sin^2 x) = C \quad ۸ \quad xy = C \quad ۷$$

$$x^2 + y^2 - C(x + y) + 2 = 0 \quad ۱۰ \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1 \quad ۹$$

$$y = -\frac{1}{k}x \log x \quad ۱۲ \quad y = -2x \log x \quad ۱۱$$

$$f(x) = Cx^{1/(2n)} \text{ یا } f(x) = Cx^{n/2} \quad ۱۴ \quad f(x) = Cx^{1/n} \text{ یا } f(x) = Cx^n \quad ۱۳$$

$$b = \frac{r}{2e} - r; y = \frac{r}{2}(1 - e^{x-1}) \quad ۱۶ \quad y = \frac{e}{\pi} \frac{x}{x^2 + 2} \quad ۱۵$$

$$y = -6x^2 + 5x + 1 \quad ۱۷$$

$$۲۰. \frac{2\pi R^2 \sqrt{h}}{9A_0} \text{ ثانیه که در آن شعاع قاعده و } h \text{ ارتفاع مخروط (به فوت) است.}$$

$$۲۱. y = e^x$$

$$۲۲. y^3 = -x/3 + Cx^{-1/2} \text{ یا } y^3 = -x/3 \text{ برای } x > 0$$

$$۲۳. y^2 \log |y| = e^{-x^2/2} + Cy^2; m = -1$$

$$۲۴. f(x) = 2x^{1/2} \text{ (ب) } ; b = 1/4, a = 0 \text{ (الف)}$$

$$۲۵. y = e^{2x} - e^{-x^2/2}$$

$$۲۶. \text{(الف)} (t+1)/1 \text{ گرم در } t \text{ سال؛ (ب) } 1 \text{ گرم }^{-1} \text{ سال}$$

$$۲۷. [1 - (2 - \sqrt{2})t/2]^2 \text{ گرم در } t \text{ سال؛ } 2 + \sqrt{2} \text{ سال}$$

$$۲۸. \text{(الف)} e^{-2.65t} \text{ شهرنشین در } t \text{ سال؛ (ب) } (1 - e^{-2.65t}) \text{ تلفات در } t \text{ سال}$$

$$۲۹. 25056 \text{ میل در ساعت} = 96 \text{ میل در ثانیه}$$

$$۳۰. \text{(الف) مینیمم نسبی در } 0; \text{ (ب) } a = \frac{2}{3}, b = \frac{20}{9} \text{ (ت) } \frac{2}{3}$$

$$۳۱. \text{(ب) مینیمم؛ (پ) } 1/2$$

فصل ۹

۹.۶ تمرینات (صفحه ۴۵۴)

$$۱. \text{(الف) } 2i; \text{(ب) } -i; \text{(پ) } \frac{1}{y} - \frac{1}{y}i; \text{(ت) } 18 + i$$

$$\text{(ث) } -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i; \text{(ج) } 1 + i; \text{(ج) } 0; \text{(ح) } 1 + i$$

$$۲. \text{(الف) } \sqrt{2}; \text{(ب) } 5; \text{(پ) } 1; \text{(ت) } 1; \text{(ث) } \sqrt{2}; \text{(ج) } \sqrt{65}$$

$$۳. \text{(الف) } \theta = \pi/2, r = 2; \text{(ب) } \theta = -\pi/2, r = 3$$

$$\text{(پ) } \theta = \pi, r = 1; \text{(ث) } \theta = 0, r = 1$$

$$\text{(ث) } \theta = 5\pi/6, r = 2\sqrt{3}; \text{(ج) } \theta = \pi/4, r = 1$$

$$\text{(ج) } \theta = \pi/4, r = 2\sqrt{2}; \text{(ح) } \theta = -\pi/4, r = 2\sqrt{2}$$

$$\text{(خ) } \theta = -\pi/4, r = \sqrt{2}/2; \text{(د) } \theta = -\pi/2, r = 1/2$$

۴. الف) $y = 0, x > 0$ دلخواه؛ ب) $y = 0, x > 0$ ؛
 پ) کلیه x و y ها؛ ت) $y, x = 0$ دلخواه یا $x, y = 0$ دلخواه؛
 ث) $y = 0, x = 1$ ؛ ج) $y = 0, x = 1$.

۱۰.۹ تمرینات (صفحة ۴۶۱)

۱. الف) i ؛ ب) $-2i$ ؛ پ) -3 ؛ ت) 1 ؛ ث) $1+i$ ؛
 ج) $(1+i)/\sqrt{2}$ ؛ ج) $\sqrt{2}i$ ؛ ح) $-i$.
 ۲. الف) $y = 0, x = 0$ دلخواه؛ ب) $x = y = 0$ ؛ پ) $y = (2n+1)\pi, x = 0$ ؛
 که در آن n عدد صحیح دلخواهی است؛ ت) $x = 1, y = \pi/2 + 2n\pi$ ؛
 در آن n عدد صحیح دلخواهی است.
 ۳. ب) $z = 2n\pi i$ که در آن n عدد صحیح دلخواهی است.
 ۶. $c_k = (a_k + ib_k)/2, k = 1, 2, \dots, n$.
 ۸. ب) $-i, -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i, \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$ ؛
 ت) $a+bi, -a-bi, -b+ai, b-ai$ که در آنها
 $a = \frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ و $b = \frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
 ث) $a-bi, -a+bi, b+ai, -b-ai$ که در آنها a و b همان a و b های (ت) اند.
 ۱۱. الف) $1, e^{-\pi/2}, e^{-\pi}$ ؛ ب) $-\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq \pi$.
 ۱۳. $B = A/(b - \omega^2 + a\omega i)$.

فصل ۱۰

۴.۱۰ تمرینات (صفحة ۴۷۴)

۱. الف) همگرا است؛ ب) ۰.۵.
 ۳. الف) واگرا است.
 ۵. الف) همگرا است؛ ب) ۰.۵.
 ۷. الف) همگرا است؛ ب) ۰.۵.
 ۲. الف) همگرا است؛ ب) ۱-.
 ۴. الف) همگرا است؛ ب) ۱/۵.
 ۶. الف) واگرا است.
 ۸. الف) واگرا است.

۹. (الف) همگرا است؛ (ب) ۱. ۱۱. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۱۳. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۱۵. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۱۷. (الف) همگرا است؛ (ب) e^2 . ۱۹. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۲۱. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۱۰. (الف) واگرا است. ۱۲. (الف) همگرا است؛ (ب) $1/3$. ۱۴. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۱۶. (الف) همگرا است؛ (ب) ۵. ۱۸. (الف) واگرا است. ۲۰. (الف) واگرا است. ۲۲. (الف) واگرا است. ۲۴. $N > 1/\varepsilon$. ۲۶. $N > 1/\varepsilon$. ۲۸. $N > \frac{\log \varepsilon}{\log(9/10)}$. ۲۷. $N > \sqrt{2/\varepsilon}$. ۳۴. (ب) فرض کنید $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ و t_n را بهمین نحو بصورت $\int_a^b f(x) dx$ مجموعه‌ی از ۱ تا n تعریف نمائید. هر دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ به انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ همگرا خواهند بود.

۹۰۱۰ تمرینات (صفحة ۴۸۵)

۲۲. (الف) ۱؛ (ب) $3 - 2e$ ؛ (پ) $e + 1$. ۲۳. (ب) ۵. ۲۴. (الف) یکی هستند؛ (ب) یکی نیستند؛ (پ) یکی نیستند؛ (ت) یکی هستند.

۱۰۰۱۰ تمرینات مربوط به بسطهای اعشاری (صفحة ۴۸۸)

$$۰.۱ \frac{۴}{۹}$$

$$۰.۲ \frac{۵۱}{۹۹}$$

$$۰.۳ \frac{۲۵۰}{۹۹}$$

$$۰.۴ \frac{۴۱}{۳۳۳}$$

$$۰.۵ \frac{۱}{۷}$$

۱۴.۱۰ تمرینات (صفحه ۴۹۵)

۱. واگرا. ۲. همگرا.
۳. همگرا. ۴. همگرا.
۵. همگرا. ۶. همگرا.
۷. همگرا. ۸. همگرا.
۹. واگرا. ۱۰. همگرا.
۱۱. واگرا. ۱۲. همگرا.
۱۳. واگرا. ۱۴. همگرا.
۱۵. همگرا بازاری $1 < s$ ، واگرا بازاری $1 \leq s$.
۱۶. همگرا. ۱۷. همگرا.
۱۸. همگرا.

۱۶.۱۰ تمرینات (صفحه ۴۹۹)

۱. همگرا. ۲. همگرا.
۳. همگرا. ۴. واگرا.
۵. واگرا. ۶. واگرا.
۷. واگرا. ۸. همگرا.
۹. همگرا. ۱۰. واگرا.
۱۱. همگرا. ۱۲. واگرا.
۱۳. همگرا.

۱۴. همگرا است اگر $0 < r < 1$ یا وقتی $x = k\pi$ که در آن k عدد صحیح دلخواهی است.

۲۰.۱۰ تمرینات (صفحه ۵۰۸)

۱. بطور مشروط همگرا. ۲. بطور مشروط همگرا.
۳. واگرا بازاری $0 \leq s$ ؛ بطور مشروط همگرا بازاری $1 \leq s < \infty$ ؛ بطور مطلق همگرا بازاری $1 > s$.
۴. بطور مطلق همگرا. ۵. بطور مطلق همگرا.
۶. بطور مطلق همگرا. ۷. واگرا.
۸. واگرا. ۹. واگرا.

۱۰. بطورمشروط همگرا. ۱۱. بطورمطلق همگرا.
 ۱۲. واگرا. ۱۳. بطورمطلق همگرا.
 ۱۴. بطورمطلق همگرا. ۱۵. واگرا.
 ۱۶. بطورمطلق همگرا. ۱۷. بطورمطلق همگرا.
 ۱۸. بطورمطلق همگرا. ۱۹. بطورمشروط همگرا.
 ۲۰. بطورمشروط همگرا. ۲۱. واگرا.
 ۲۲. بطورمشروط همگرا. ۲۳. واگرا.
 ۲۴. بطورمشروط همگرا.
 ۲۵. واگرا بازای $0 \leq y$ ، بطورمشروط همگرا بازای $1 \leq y < \infty$ ، بطورمطلق همگرا بازای $y > 1$.
 ۲۶. بطورمطلق همگرا. ۲۷. بطورمطلق همگرا.
 ۲۸. واگرا. ۲۹. بطورمطلق همگرا.
 ۳۰. بطورمطلق همگرا. ۳۱. بطورمطلق همگرا.
 ۳۲. بطورمطلق همگرا. ۳۳. $z = 0$.
 ۳۴. تمام z ها.
 ۳۵. تمام z هائی که در $|z| < 3$ صدق می کنند.
 ۳۶. تمام z ها. ۳۷. تمام z ها بجز اعداد صحیح منفی.
 ۳۸. تمام $z \neq 1$ هائی که در $|z| \leq 1$ صدق می کنند.
 ۳۹. $|z| < e^{-1/85}$. ۴۰. تمام z ها.
 ۴۱. تمام $z \neq 0$ هائی که در $1 \leq |z - 1| \leq \infty$ صدق می کنند.
 ۴۲. تمام $z \neq -1$ هائی که در $1 \leq |2z + 3| \leq \infty$ صدق می کنند.
 ۴۳. تمام $z = x + iy$ ها با $x \geq 0$.
 ۴۴. تمام z هائی که در $1 < |2 + 1/z|$ صدق می کنند.
 ۴۵. تمام z هائی که در $1 < |2 + 1/z|$ صدق می کنند.
 ۴۶. تمام $z \neq 0$ ها.
 ۴۷. k عدد صحیح دلخواهی است. $|x - k\pi| \leq \pi/4$.
 ۴۸. k عدد صحیح دلخواهی است. $|x - k\pi| \leq \pi/6$.

۲۲.۱۰ تمرینات متفرقه برای دوره (صفحه ۵۱۴)

۱. (الف) ۰.

(ب) همگرا است اگر $1 \leq c$ ؛ حد ۰ است اگر $1 < c$ ؛ حد یک است اگر

۱. $c = 1$ ؛ و اگر a است اگر $c > 1$.

۲. (الف) ۱؛ (ب) ماکزیمم a و b .

$$3. \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2$$

$$4. \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

۵. ۰.۵

۷. و اگر.

۸. همگرا است اگر $s < 1/2$ ؛ و اگر $s \geq 1/2$.

۹. همگرا.

۱۰. و اگر.

۱۱. و اگر.

$$14. c \leq 3$$

$$15. a \geq 3$$

۱۷. وقتی $a \geq -1$ حد مساوی $(a+1)/(a+2)$ است؛ زمانی که $a \leq -1$ حد 0 خواهد بود.

۲۴.۱۰ تمرینات (صفحه ۵۲۲)

۱. و اگر. ۲. همگرا.

۳. همگرا. ۴. همگرا.

۵. همگرا. ۶. همگرا.

۷. همگرا. ۸. همگرا.

۹. و اگر.

۱۰. همگرا است اگر $s > 1$ ؛ و اگر $s \leq 1$.

$$11. C = \frac{1}{4} \log \frac{5}{4} \text{؛ انتگرال مقدار } \frac{1}{4} \log \frac{5}{4} \text{ را دارد.}$$

$$12. C = \frac{1}{4} \log \frac{8}{3} \text{؛ انتگرال مقدار } \frac{1}{4} \log \frac{8}{3} \text{ را دارد.}$$

$$13. C = \frac{1}{4} \log \sqrt{2} \text{؛ انتگرال مقدار } \frac{1}{4} \log \sqrt{2} \text{ را دارد.}$$

$$14. a = b = 2e - 2$$

$$15. a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \text{؛ } b = 1$$

۱۶. (ب) هردو واگرایند.

۱۷. (پ) واگرا است.

فصل ۱۱

۷.۱۱ تمرینات (صفحه ۵۳۴)

$$۱. \quad r = ۲. \quad \text{همگرا بازای } ۲ < |z|$$

$$۲. \quad r = ۲. \quad \text{همگرا بازای } ۲ \leq |z|, z \neq ۲$$

$$۳. \quad r = ۲. \quad \text{همگرا بازای } ۲ \leq |z + ۳|, z \neq -۱$$

$$۴. \quad r = ۱/۲. \quad \text{همگرا بازای } ۱/۲ \leq |z|$$

$$۵. \quad r = ۱/۲. \quad \text{همگرا بازای } ۱/۲ < |z|$$

$$۶. \quad r = e. \quad \text{همگرا بازای } e < |z|$$

$$۷. \quad r = ۱. \quad \text{همگرا بازای } ۱ \leq |z + ۱|$$

$$۸. \quad r = +\infty$$

$$۹. \quad r = ۴. \quad \text{همگرا بازای } ۴ < |z|$$

$$۱۰. \quad r = ۱. \quad \text{همگرا بازای } ۱ < |z|$$

$$۱۱. \quad r = ۱$$

$$۱۲. \quad r = ۱/e$$

$$۱۳. \quad r = +\infty \quad \text{اگر } a = k\pi, \quad k \text{ عددی صحیح است؛ } r = ۱ \quad \text{اگر } a \neq k\pi$$

$$۱۴. \quad r = e^{-a}$$

$$۱۵. \quad r = \max(a, b)$$

$$۱۶. \quad r = \min(1/a, 1/b)$$

۱۳.۱۱ تمرینات (صفحه ۵۴۴)

$$۱. \quad |x| < ۱ : ۱/(1+x^2)$$

$$۲. \quad |x| < ۳ : ۱/(3-x)$$

$$۳. \quad |x| < ۱ : x/(1-x)^2$$

$$-x/(1+x)^2: |x| < 1 \quad ۴$$

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{\log(1+2x)}{2x}: |x| < \frac{1}{2} \quad ۵$$

$$-\log(1-2x): -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \quad ۶$$

$$\frac{2}{x} \arctan \frac{x}{2}: -2 \leq x < 2 \quad ۷$$

$$e^{-x^2}: x \text{ هر} \quad ۸$$

$$x = 0 \text{ اگر } 0, x \neq 0 \text{ اگر } x^{-2}(e^x - 1 - x - x^2/2): x \text{ هر} \quad ۹$$

$$x = 1 \text{ اگر } \frac{1}{2}, x \neq 1 \text{ اگر } \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}: x \text{ هر} \quad ۱۰$$

$$-\frac{\sqrt{2} 2^{97}}{981} \quad ۲۲$$

$$a_4 = 15\sqrt{2}/8, a_7 = 0, a_9 = 5\sqrt{2}, a_{11} = 0, a_{13} = 4\sqrt{2} \quad ۲۳$$

۱۶.۱۱ تمرینات (صفحة ۵۴۹)

$$f(x) = 1 - 3x^2: n \geq 0 \text{ بازای } a_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad ۱$$

$$f(x) = 2x - \frac{10}{3} x^3: n \geq 0 \text{ بازای } a_{n+2} = \frac{(n+4)(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad ۲$$

$$\text{۳. کلیه } x \text{ ها.}$$

$$\text{۴. کلیه } x \text{ ها.}$$

$$b = 0, a = 1: x \text{ هر} \quad ۵$$

$$f(x) = e^{x^2}: x \text{ هر} \quad ۶$$

$$f(x) = e^x - x - 1: x \text{ هر} \quad ۷$$

$$f(x) = \cos 2x: x \text{ هر} \quad ۸$$

$$f(x) = x + \sinh 3x: x \text{ هر} \quad ۹$$

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \dots \quad ۱۲$$

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \dots \quad ۱۳$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{160}x^4 + \frac{1}{8800}x^5 + \dots \quad ۱۴$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!} \quad ۱۵$$

$$y = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots [(3n-1) \cdot (3n)]} \right) \quad ۱۶$$

$$+ c_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \dots [(3n) \cdot (3n+1)]} \right)$$

$$y = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \right) + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \quad ۱۷$$

$$f(x) = (x+1)e^{-2x}; a_2 = 2/3, a_1 = 0, a_0 = -1 \quad ۱۸$$

$$x \neq 0, f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2}; a_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = 0, a_0 = 0 \quad ۱۹$$

$$f(\pi) = -2/\pi^2; f(0) = 1/2$$

$$\sqrt{2} = ۱.۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳ \quad (ب) \quad ۲۰$$

$$\sqrt{3} = ۱.۷۳۲۰۵۰۸۰۷۵۶۸۸۷۷ \quad (ب) \quad ۲۱$$

فصل ۱۲

۴.۱۲ تمرينات (صفحة ۵۵۹)

$$(۳, -۱, ۴) \quad (ب) \quad (-۳, ۶, ۳) \quad (ب) \quad (۵, ۰, ۹) \quad (الف) \quad ۱$$

$$(۰, ۰, ۰) \quad (ث) \quad (-۷, ۲۴, ۲۱) \quad (ت) \quad ۲$$

$$y = \frac{1}{\delta}(2c_2 - c_1), x = \frac{1}{\delta}(3c_1 - c_2) \quad ۵$$

$$(x+z, x+y+z, x+y) \quad (الف) \quad ۶$$

$$z = -1, y = 1, x = 2 \quad (ب) \quad ۷$$

$$(x+2z, x+y+z, x+y+z) \quad (الف) \quad ۷$$

$$y = z = 1, x = -2 \quad (ب) \quad ۸$$

۸. الف) $(x+z, x+y+z, x+y, y)$ ؛ (ب) $x = -1, y = 4, z = 2$.
۱۲. اقطار یک متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

۸.۱۲ تمرینات (صفحه ۵۶۶)

۱. الف) -6 ؛ (ب) 2 ؛ (پ) 6 ؛ (ت) 0 ؛ (ث) 4 .

۲. الف) $(21, 28, -35)$ ؛ (ب) 64 ؛ $A(B+C)$.

(پ) 72 ؛ $(A+B) \cdot C = (30, 60, -105)$ ؛ (ت) $A(B \cdot C)$.

(ث) $A/(B \cdot C) = \left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{7}{15}\right)$.

۵. یک مثال: $(1, -5, -3)$.

۶. یک مثال: $x = -2, y = 1$.

۷. $D = (22, -1, 10)/9$ ، $C = 4(-1, -2, 2)/9$.

۸. $\dot{C} = (1, 2, 3, 4, 5)/11$ ؛ $D = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{44}, \frac{1}{33}, \frac{-5}{88}, \frac{-7}{55}\right)$.

۹. الف) $\sqrt{74}$ ؛ (ب) $\sqrt{14}$ ؛ (پ) $\sqrt{53}$ ؛ (ت) 5 .

۱۰. الف) $(1, -1)$ یا $(-1, 1)$ ؛ (ب) $(1, 1)$ یا $(-1, -1)$ ؛ (پ) $(3, 2)$ یا

$(-3, -2)$ ؛ (ت) $(b, -a)$ یا $(-b, a)$.

۱۱. الف) $(4, -1, 5)$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{42}}$ ؛ (ب) $(-2, -3, 1)$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{14}}$ ؛ (پ) $(1, 0, 1)$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛

(ت) $(-5, -4, -1)$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{42}}$ ؛ (ث) $(-1, -5, 4)$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{42}}$.

۱۲. A, B, C, D و E ؛ C, D و E ؛ D و E .

۱۳. الف) $(2, -1)$ و $(-2, 1)$ ؛ (ب) $(2, 1)$ و $(-2, -1)$ ؛ (پ) $(1, 2)$ و

$(-1, -2)$ ؛ (ت) $(1, 2)$ و $(-1, -2)$.

۱۴. یک مثال: $C = (8, 1, 1)$.

۱۵. یک مثال: $C = (1, -5, -3)$.

۱۶. $P = \frac{1}{5}(3, 2)$ ، $Q = \frac{2}{5}(-4, 3)$.

۱۷. $P = \frac{5}{7}(1, 1, 1)$ ، $Q = \frac{1}{7}(-3, -1, 1)$.

$$\pm \frac{2}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \cdot 18$$

۲۵. مجموع مربعات اضلاع هر متوازی‌الاضلاع مساوی مجموع مربعات اقطار آن است.

$$0.22 \sqrt{2} : 4$$

$$D = \frac{1}{11} \left(10, \frac{7}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{14}{5} \right), C = \frac{1}{11} (1, 2, 3, 4, 5) \cdot 23$$

$$t = (A \cdot B) / (A \cdot A) \text{ که در آن } D = B - tA, C = tA \cdot 24$$

۱۱.۱۲ تمرینات (صفحه ۵۷۲)

$$\frac{11}{9} B \cdot 1$$

$$\frac{5}{2} B \cdot 2$$

$$\left(-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7} \right) \text{ و } \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7} \right) \text{ (ب)؛ } \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) \text{ (الف) } \cdot 3$$

$$\sqrt{\frac{6}{41}}, \sqrt{\frac{35}{41}}, 0 \cdot 5$$

$$7\pi/8 \cdot 6$$

$$\pi/6 \cdot 8$$

$$0 \cdot 9$$

۱۵. (ب) اگر $\cos \theta = 1$ معادله بازای هر x و y برقرار است؛ چنانچه $\cos \theta \neq 1$

تنها جواب $x = y = 0$ خواهد بود.

۱۴. همه بجز (ب).

۱۷. همه بجز قضیه ۴.۱۲ (الف).

۱۸. (الف) همه.

۱۵.۱۲ تمرینات (صفحه ۵۸۰)

$$x = 4 \text{ (پ)؛ } y = 1/2, x = -1/2 \text{ (ب)؛ } x = y = 1/2 \text{ (الف) } \cdot 1$$

$$y = -1 \text{ (ت)؛ } x = 6 \cdot y$$

$$y = 7/8, x = 1/4 \cdot 2$$

$$y = -4, x = 3 \quad ۳$$

$$۷. تمام \neq ۰ ها.$$

$$۹. (پ) \quad yi - 4(i + j)$$

$$۱۰. (ب) \quad j = B - A, k = (C - B)/3; (پ) \quad (15A - 14B + 5C)/3$$

$$۱۱. \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{C, D\}$$

$$۱۲. (الف) \text{ مستقل}; (ب) \text{ یک مثال: } D = A; (پ) \text{ یک مثال: } E = (0, 0, 0, 1)$$

$$(ت) \text{ برای انتخاب } E = (0, 0, 0, 1) \text{ داریم } X = 2A + B - C + 3E$$

$$۱۳. (ب) \quad -\sqrt{2}, \sqrt{2}, t = 0$$

$$۱۴. (الف) \quad \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\} \text{ (ب) مجموعه داده شده؛ (پ) مجموعه داده شده.}$$

$$۱۷. \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}, \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

$$۱۸. \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\},$$

$$\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}.$$

$$۱۹. L(U) = L(T) = L(S)$$

$$۲۰. \text{یک مثال: } A = \{E_1, \dots, E_n\}$$

$$B = \{E_1 + E_2, E_2 + E_3, \dots, E_{n-1} + E_n, E_n + E_1\}.$$

$$۱۷.۱۲ \text{ تمرینات (صفحه ۵۸۵)}$$

$$۱. (الف) \quad -1 - i; (ب) \quad -1 + i; (پ) \quad -1 - i; (ت) \quad -1 + i$$

$$(ث) \quad -1 - i; (ج) \quad 2 - i; (چ) \quad -i; (ح) \quad -1 + 2i; (خ) \quad -3 - 2i; (د) \quad 2i.$$

$$۲. \text{یک مثال: } (1 + i, -5 - 3i, 1 - 3i).$$

$$۸. \pi/3$$

$$۹. 3A - B + 2C$$

فصل ۱۳

$$۵.۱۳ \text{ تمرینات (صفحه ۵۹۵)}$$

$$۱. (ب), (ت), و (ث).$$

۲. (الف) و (ث).
 ۳. (پ)، (ت)، و (ث).
 ۴. (ب)، (ث)، و (ج).
 ۵. (الف) خیر؛ (ب) خیر؛ (پ) خیر.
 ۶. A, B, C, D و F هر یک استقامتند.
 ۷. در $(5, 9, 13)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.
 ۸. (ب) خیر.
 ۹. (الف) $9t^2 + 8t + 9$ ؛ (ب) $\sqrt{65}/3$.

۸.۱۳ تمرینات (صفحه ۶۰۲)

۱. (پ) و (ث).
 ۲. (الف)، (ب)، و (پ).
 ۳. (الف) $x = 1 + t, y = 2 + s + t, z = 1 + 4t$ ؛
 (ب) $x = s + t, y = 1 + s, z = s + 4t$.
 ۴. (الف) $(1, 2, 0)$ و $(2, -3, -3)$ ؛
 (ب) $M = \{(1, 2, 0) + s(1, 1, 2) + t(-2, 4, 1)\}$.
 ۵. (الف)، (ب)، و (پ) $x - 2y + z = -3$.
 ۷. (الف) $(0, -2, -1)$ و $(-1, -2, 2)$ ؛
 (ب) $M = \{(0, -2, -1) + s(-1, 0, 3) + t(3, 3, 6)\}$.
 ۸. دو مثال: $(-5, 2, 6)$ و $(-14, 3, 17)$.
 ۹. (الف) بلی؛ (ب) دو مثال: $(1, 0, -1)$ و $(-1, 0, 1)$.
 ۱۰. $\left(-2, \frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.
 ۱۱. (الف)، (ب)، و (پ) خیر.
 ۱۳. $x - y = -1$.

۱۱.۱۳ تمرینات (صفحه ۶۰۸)

۱. (الف) $(-2, 3, -1)$ ؛ (ب) $(4, -5, 3)$ ؛ (پ) $(4, -4, 2)$.

$$(ت) (۸, ۱۵, ۴)؛ (ث) (۸, ۳, -۷)؛ (ج) (۱۰, ۱۱, ۵)$$

$$(ج) (-۲, -۸, -۱۲)؛ (ح) (۲, -۲, ۵)؛ (خ) (-۲, ۵, ۴)$$

$$۲. (الف) \pm \frac{1}{\sqrt{۲۶}} (-۴, ۳, ۱)؛ (ب) \pm \frac{1}{\sqrt{۲۵۵۴}} (-۴۱, -۱۸, ۷)$$

$$(پ) \pm \frac{1}{\sqrt{۶}} (۱, ۲, ۱)$$

$$۳. (الف) \frac{۱۵}{۲}؛ (ب) \frac{۳}{۲}\sqrt{۳۵}؛ (پ) \frac{1}{۲}\sqrt{۳}$$

$$۴. ۸i + j - ۲k$$

$$۶. (ب) \cos \theta \text{ منفی است؛ } \sqrt{۵} (پ)$$

$$۹. (الف) \text{ یک جواب } B = -i - ۳k \text{ است؛ } (ب) i - j - k \text{ تنها جواب است.}$$

$$۱۱. (الف) \text{ سه امکان؛ } D = A + C - B = (۴, -۲, ۲), D = B + C - A = (۵, ۵, ۲)$$

$$(ب) \sqrt{۶}/۲؛ D = A + B - C = (-۲, ۲, ۵)$$

$$۱۲. -\sqrt{۳}/۲؛ ۸\sqrt{۳}؛ -۴$$

۱۴.۱۳ تمرینات (صفحه ۶۱۴)

$$۱. (الف) ۹۶؛ (ب) ۲۷؛ (پ) ۸۲-$$

$$۲. -\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۵$$

$$۳. ۲$$

$$۶. (الف) i + bj + ck (۲b - ۱) که در آن b و c دلخواهند؛ (ب) -i/۵ + ۲j/۵$$

$$۱۱. -۳i + ۲j + ۵k$$

$$۱۴. (ب) ۲$$

$$۱۵. \sqrt{۲۰۰۵/۴۱} (ب)$$

$$۱۷. z = ۲, y = -۱, x = ۱$$

$$۱۸. z = ۲, y = -۱, x = ۱$$

$$۱۹. z = ۱, y = ۲, x = ۱$$

۱۷.۱۳ تمرینات (صفحه ۶۲۵)

$$۱. (الف) (-۷, ۲, -۲)؛ (ب) -۷x + ۲y - ۲z = ۰$$

$$-7x + 2y - 2z = -9 \quad (\text{ب})$$

$$\left(-\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{14}{9}\right) (\text{ت}) : \frac{7}{3} (\text{ب}) : \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, -7 (\text{ب}) : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) (\text{الف}) \cdot 2$$

$$9/\sqrt{14} : 3x - y + 2z = -5 \cdot 3$$

$$\frac{19}{18}\sqrt{6} (\text{ب}) \cdot 4$$

$$5/3 (\text{ب}) : x + 2y - 2z = 5 (\text{ب}) : (1, 2, -2) (\text{الف}) \cdot 5$$

$$10x - 3y - 7z + 17 = 0 \cdot 6$$

$$2\pi/3 \text{ و } \pi/3 : \text{دو زاويه} \cdot 7$$

$$x + 2y + 9z + 55 = 0 \cdot 8$$

$$X(t) = (2, 1, -3) + t(4, -3, 1) \cdot 9$$

$$2x + 3y + 2z + 15 = 0 (\text{ت}) : t = 1 (\text{ب}) : N = (1, 3, -2) (\text{ب}) \cdot 10$$

$$x + 3y - 2z + 19 = 0 (\text{ث})$$

$$x + \sqrt{2}y + z = 2 + \sqrt{2} \cdot 11$$

$$6 \cdot 12$$

$$\frac{1}{\sqrt{122}} (7, -8, -3) \cdot 13$$

$$x - y + z = 2 \cdot 14$$

$$\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot 15$$

$$X(t) = (1, 2, 3) + t(1, -2, 1) \cdot 17$$

$$P = -(\Delta, -14, 2)/25 (\text{ب}) \cdot 19$$

$$21.13 \quad \text{تمرينات (صفحة ٢٢٩)}$$

$$r = -ed/(1 + e \sin \theta) : r = ed/(1 - e \sin \theta) \cdot 3$$

$$d = 2, e = 1 \cdot 4$$

$$d = 6, e = 1/2 \cdot 5$$

$$d = 6, e = 1/3 \cdot 6$$

$$d = 1, e = 2 \cdot 7$$

$$d = 2, e = 2 \cdot 8$$

$$.d = ۴, e = ۱۰.۹$$

$$.r = ۲۵/(۱۰ + ۳\cos\theta + ۴\sin\theta), d = ۵.۱۰$$

$$.r = ۲۵/(۵ + ۴\cos\theta + ۳\sin\theta), d = ۵.۱۱$$

$$.r = ۱/(\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{۲}/۲), d = \sqrt{۲}/۲.۱۲$$

$$r = ۱/(\cos\theta + \sin\theta - \sqrt{۲}/۲).$$

$$.۱۳ (الف) (۱ + \cos\theta) \times ۱۰^۷ \times ۱۵۷, r = ۲۵ \times ۱۰^۷$$

$$(ب) (۱ - \cos\theta) \times ۱۰^۷ \times ۵, r = ۲۵ \times ۱۰^۷ \text{ میل}$$

۲۴.۱۳ تمرینات (صفحة ۶۳۶)

$$۱. \text{ مرکز در } (۰, ۰); \text{ کانونها در } (\pm ۸, ۰); \text{ رئوس در } (\pm ۱۰, ۰); e = ۴/۵$$

$$۲. \text{ مرکز در } (۰, ۰); \text{ کانونها در } (۰, \pm ۸); \text{ رئوس در } (۰, \pm ۱۰); e = ۴/۵$$

$$۳. \text{ مرکز در } (۲, -۳); \text{ کانونها در } (۲ \pm \sqrt{۷}, -۳); \text{ رئوس در } (۶, -۳); e = \sqrt{۷}/۴; (-۲, -۳)$$

$$۴. \text{ مرکز در } (۰, ۰); \text{ کانونها در } (\pm ۴/۳, ۰); \text{ رئوس در } (\pm ۵/۳, ۰); e = ۴/۵$$

$$۵. \text{ مرکز در } (۰, ۰); \text{ کانونها در } (\pm \sqrt{۳}/۶, ۰); \text{ رئوس در } (\pm \sqrt{۳}/۳, ۰); e = ۱/۲$$

$$۶. \text{ مرکز در } (-۱, -۲); \text{ کانونها در } (-۱, ۱), (-۱, -۵); \text{ رئوس در } (-۱, ۳); e = ۳/۵; (-۱, -۷)$$

$$۷. ۷x^2 + ۱۶y^2 = ۷۰$$

$$۸. \frac{(x+۳)^2}{۱۶} + \frac{(y-۴)^2}{۹} = ۱$$

$$۹. \frac{(x+۳)^2}{۹} + \frac{(y-۴)^2}{۱۶} = ۱$$

$$۱۰. \frac{(x+۴)^2}{۹} + (y-۲)^2 = ۱$$

$$۱۱. \frac{(x-۸)^2}{۲۵} + \frac{(y+۲)^2}{۹} = ۱$$

$$۱۲. \frac{(x-۲)^2}{۱۶} + \frac{(y-۱)^2}{۴} = ۱$$

$$۱۳. \text{ مرکز در } (۰, ۰); \text{ کانونها در } (\pm ۲\sqrt{۴۱}, ۰); \text{ رئوس در } (\pm ۱۰, ۰); e = \sqrt{۴۱}/۵$$

$$۱۴. \text{ مرکز در } (۰, ۰); \text{ کانونها در } (۰, \pm ۲\sqrt{۴۱}); \text{ رئوس در } (۰, \pm ۱۰); e = \sqrt{۴۱}/۵$$

۱۵. مرکز در $(-3, 3)$ ؛ کانونها در $(-3 \pm \sqrt{5}, 3)$ ؛ رئوس در $(-1, 3)$ ؛ $(-5, 3)$ ؛
 $e = \sqrt{5}/2$

۱۶. مرکز در $(0, 0)$ ؛ کانونها در $(\pm 5, 0)$ ؛ رئوس در $(\pm 4, 0)$ ؛
 $e = 5/4$

۱۷. مرکز در $(0, 0)$ ؛ کانونها در $(0, \pm 3)$ ؛ رئوس در $(0, \pm 2)$ ؛
 $e = 3/2$

۱۸. مرکز در $(1, -2)$ ؛ کانونها در $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$ ؛ رئوس در $(3, -2)$ ؛
 $e = \sqrt{13}/2$ ؛ $(-1, -2)$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad ۱۹.$$

$$y^2 - x^2 = 1 \quad ۲۰.$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad ۲۱.$$

$$(y-4)^2 - \frac{(x+1)^2}{3} = 1 \quad ۲۲.$$

$$\frac{8(y+3)^2}{27} - \frac{5(x-2)^2}{27} = 1 \quad ۲۳.$$

$$\pm \sqrt{\frac{23}{3}} \quad ۲۴.$$

$$4x^2 - y^2 = 11 \quad ۲۵.$$

۲۶. رأس در $(0, 0)$ ؛ خط هادی $x = 2$ ؛ محور $y = 0$

۲۷. رأس در $(0, 0)$ ؛ خط هادی $x = -3/4$ ؛ محور $y = 0$

۲۸. رأس در $(1/2, 1)$ ؛ خط هادی $x = -5/2$ ؛ محور $y = 1$

۲۹. رأس در $(0, 0)$ ؛ خط هادی $y = -3/2$ ؛ محور $x = 0$

۳۰. رأس در $(0, 0)$ ؛ خط هادی $y = 2$ ؛ محور $x = 0$

۳۱. رأس در $(-2, -9/4)$ ؛ خط هادی $y = -13/4$ ؛ محور $x = -2$

$$x^2 = -y \quad ۳۲.$$

$$y^2 = 8x \quad ۳۳.$$

$$(x+4)^2 = -8(y-3) \quad ۳۴.$$

$$(y+1)^2 = 5(x-7/4) \quad ۳۵.$$

$$(x-3/2)^2 = 2(y+1/8) \quad ۳۶.$$

$$(y-3)^2 = -8(x-1) \quad ۳۷.$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 40x + 20y - 100 = 0 \quad ۳۸.$$

$$۲۵.۱۳ \quad \text{تمرینات متفرقه در باب مقاطع مخروطی (صفحه ۶۳۷)}$$

$$A = (1 + \sqrt{5})B/2, B > 0 \quad ۳.$$

$$.2bh/3 \quad ۴.$$

$$.16\pi \quad ۵.$$

$$.48\pi/5 \quad (\text{ب}) \quad 2\pi \quad (\text{ب}) \quad 8/3 \quad (\text{الف}) \quad ۶.$$

$$.x^2/12 + y^2/16 = 1 \quad ۷.$$

$$.x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 1 \quad ۸.$$

$$.y^2 - 4x^2 - 4y + 4x = 0 \quad ۹.$$

$$۱۰. \quad (\text{الف}) \quad e = \sqrt{2/(p+2)} \quad \text{؛ کانونها در } (\sqrt{2}, 0) \text{ و } (-\sqrt{2}, 0)$$

$$.6x^2 - 3y^2 = 4 \quad (\text{ب}) \quad ۱۰.$$

$$.C \neq 0, y = Cx^2 \quad (\text{ب}) \quad ۱۵.$$

$$.(4, 8) \quad ۱۶.$$

$$.27pq^2 = 4a^2 \quad (\text{ب}) \quad x = 4a/3 \quad (\text{الف}) \quad ۱۷.$$

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \quad ۱۸.$$

فصل ۱۴

$$۴.۱۴ \quad \text{تمرینات (صفحه ۶۴۵)}$$

$$.F''(t) = (0, 2, 6t, 16t^2) \quad ; F'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 4t^3) \quad ۱.$$

$$; F'(t) = (-\sin t, \sin 2t, 2\cos 2t, \sec^2 t) \quad ۲.$$

$$F''(t) = (-\cos t, 2\cos 2t, -2\sin 2t, 2\sec^2 t \tan t).$$

$$; F'(t) = ((1-t^2)^{-1/2}, -(1-t^2)^{-1/2}) \quad ۳.$$

$$F''(t) = (t(1+t^2)^{-3/2}, -t(1+t^2)^{-3/2}).$$

$$.F''(t) = (2e^t, 3e^t) \quad ; F'(t) = (2e^t, 3e^t) \quad ۴.$$

$$; F'(t) = (\sinh t, 2\cosh 2t, -3e^{-2t}) \quad ۵.$$

$$F''(t) = (\cosh t, 4\sinh 2t, 6e^{-2t}).$$

$$\{F'(t) = (2t/(1+t^2), 1/(1+t^2), -2t/(1+t^2))\} \cdot ٩$$

$$F''(t) = ((2-2t^2)/(1+t^2)^2, -2t/(1+t^2)^2, (2t^2-2)/(1+t^2)^2).$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{e}}{e}, e-1\right) \cdot ٨$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}, \log \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cdot ٩$$

$$\cdot \left(\log \frac{1+e}{\sqrt{e}}, 1 - \log \frac{1+e}{\sqrt{e}}\right) \cdot ١٠$$

$$\cdot (1, e-2, 1-2/e) \cdot ١١$$

$$\cdot ٠ \cdot ١٢$$

$$\cdot G'(t) = F(t) \times F''(t) \cdot ١٥$$

$$\cdot F(t) = \frac{1}{e} t^2 A + \frac{1}{\sqrt{e}} t^2 B + tC + D \cdot ٢٠$$

$$\cdot F(3) = (6 + 3 \log 3)A, F''(1) = A \cdot ٢٢$$

$$\cdot F(x) = e^x(x+1)A - eA \cdot ٢٣$$

$$٧.١٤ \quad \text{تمرينات (صفحة ٥٥٥)}$$

$$\{a(t) = -\epsilon t i + \epsilon j + \epsilon t k \quad v(t) = (3 - 3t^2)i + \epsilon t j + (3 + 3t^2)k \cdot ١$$

$$v(t) = 3\sqrt{e}(1+t^2).$$

$$\{a(t) = -\cos t i - \sin t j + e^t k \quad v(t) = -\sin t i + \cos t j + e^t k \cdot ٢$$

$$v(t) = (1 + e^t)^{1/2}.$$

$$\{v(t) = 3(\cos t - t \sin t)i + 3(\sin t + t \cos t)j + t k \cdot ٣$$

$$a(t) = -3(2 \sin t + t \cos t)i + 3(2 \cos t - t \sin t)j;$$

$$v(t) = (9t^2 + 25)^{1/2}.$$

$$\{v(t) = (1 - \cos t)i + \sin t j + 2 \cos(t/2)k \cdot ٤$$

$$\cdot v(t) = 2 \quad a(t) = \sin t i + \cos t j - \sin(t/2)k$$

$$\cdot v(t) = \epsilon t^2 + 3 \quad a(t) = \epsilon i + 12t j \quad v(t) = \epsilon t i + \epsilon t^2 j + t k \cdot ٥$$

$$\cdot v(t) = \sqrt{e} \quad a(t) = -\sin t j + \cos t k \quad v(t) = i + \cos t j + \sin t k \cdot ٦$$

$$\cdot B = a^x \omega^x \quad A = ab \omega^x \cdot ٩$$

$$\cdot Ae^{x^2}/\cos^2 \theta \quad (ب) \cdot ١١$$

$$.x^2/16 + y^2/9 = 1 \quad (ب) \quad y(t) = 3 \sin 2t, x(t) = 4 \cos 2t \quad (الف) \quad ۰.۱۵$$

$$.3T/4 \quad ۰.۱۶$$

۹.۱۴ تمرینات (صفحه ۶۶۰)

$$N = -\frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j, T = \frac{1}{10}\sqrt{2}(-3i + 4j + 5k) \quad (الف) \quad ۱$$

$$.a = 12\sqrt{2}T + 6N \quad (ب)$$

$$.T = -(1 + e^{2\pi})^{-1/2}j + e^{\pi}(1 + e^{2\pi})^{-1/2}k \quad (الف) \quad ۲$$

$$N = \frac{(1 + e^{2\pi})i + e^{2\pi}j + e^{\pi}k}{(1 + e^{2\pi})^{1/2}(1 + 2e^{2\pi})^{1/2}};$$

$$.a = (1 + e^{2\pi})^{-1/2}[e^{2\pi}T + (1 + 2e^{2\pi})^{1/2}N] \quad (ب)$$

$$.a = 6N \quad (ب) \quad N = j, T = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k \quad (الف) \quad ۳$$

$$.a = \sqrt{2}N \quad (ب) \quad N = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}(j + k), T = i \quad (الف) \quad ۴$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + 2j - 2k), T = \frac{1}{\sqrt{3}}(2i + 2j + k) \quad (الف) \quad ۵$$

$$.a = 12T + 6N \quad (ب)$$

$$N = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}j + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}k, T = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \quad (الف) \quad ۶$$

$$.a = N \quad (ب)$$

۹. مثال نقض برای (ب) و (ت): حرکت بربیک مارپیچ.

$$۱۱. \text{یک مثال: } r(t) = 2 \int e^{it} \cos t dt i + 2 \int e^{it} \sin t dt j + e^{it} k; v(t)$$

k زاویه ثابت می‌سازد ولی $a(t)$ نه هرگز صفر بوده و نه با $v(t)$ موازی است.

$$.۲\pi/\sqrt{3} \quad (پ) \quad ۳ \quad (ب) \quad ۱۲. \text{خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت؛} \quad (ب) \quad ۳$$

$$.x^2/3 + y^2/4 = 1 \quad ۱۳.$$

$$.y^2 = 8 - 4x; y^2 = 4x \quad ۱۴.$$

$$\|A\| \|B\| \sin \theta \quad (ب) \quad ۱۵.$$

۱۳.۱۴ تمرینات (صفحه ۶۶۸)

$$\sqrt{r}(e^r - 1) \cdot ۲$$

$$2\pi^2 a \cdot ۳$$

$$2(a^2 - b^2)/(ab) \cdot ۴$$

$$2a \left(\cosh \frac{T}{2} \sqrt{\cosh T - 1} \right) \cdot ۵$$

$$- \sqrt{r} a \log \left(\frac{\sqrt{r} \cosh(T/2) + \sqrt{\cosh T}}{1 + \sqrt{r}} \right).$$

$$2\sqrt{r}\pi \cdot ۶$$

$$.50 \cdot ۷$$

$$\sqrt{r} \log(1 + \sqrt{r}) \cdot ۸$$

$$|\omega| \sqrt{a^2 + b^2} (t_1 - t_0) \cdot ۹$$

$$\cdot \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \cdot ۱۰$$

$$\frac{26\sqrt{13} - 16}{27} \cdot ۱۱$$

$$\int_1^e \sqrt{2 + (2/t^2)} dt \text{ (ب)} \quad ; \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx \text{ (الف)} \cdot ۱۳$$

$$c \sinh \frac{r}{c} \text{ (ب)} \cdot ۱۴$$

$$f(x) = k \text{ یا } f(x) = k \cosh(x/k + C) \cdot ۱۶$$

$$v(t) = 1 + 2t \cdot ۱۹$$

۱۵.۱۴ تمرينات (صفحة ۶۷۳)

$$\frac{6}{r^5} (3) \quad ; (1 + 2e^{2\pi})^{1/2} (1 + e^{2\pi})^{-2/2} (2) \quad ; \frac{1}{r^5} (1) \cdot ۱$$

$$\frac{1}{r} (6) \quad ; \frac{2}{r^2} (5) \quad ; \frac{1}{r} \sqrt{r} (4)$$

$$1/\|B\| \sin \theta \cdot ۳$$

$$x = z \text{ (الف)} \cdot ۴$$

$$k = \|a\|/\|v\|^2 \cdot ۷$$

۹. $a = 1/4$ ، $b = 2$ ؛ در $(0, 0)$ همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۰. رأس در $(\cos^2 \theta/4)B + (-\cos \theta/2)A$.

۱۱. (الف) $\alpha(t) = \pi/2 - \delta t^2$ ؛ (ب) $\mathbf{v}(t) = \delta \sin \delta t^2 \mathbf{i} + \delta \cos \delta t^2 \mathbf{j}$

۱۲. $\sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j}$

۱۴. ۱۹. تمرینات (صفحه ۶۷۹)

$\mathbf{a}(t) = -t\mathbf{u}_r + 2t\mathbf{u}_\theta$ $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_r + t\mathbf{u}_\theta$ ۱

$\kappa(t) = (2 + t^2)(1 + t^2)^{-3/2}$.

$\mathbf{a}(t) = -t\mathbf{u}_r + 2t\mathbf{u}_\theta$ $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_r + t\mathbf{u}_\theta + \mathbf{k}$ (الف) ۲

$\kappa(t) = (t^4 + \delta t^2 + 8)^{1/2} (2 + t^2)^{-3/2}$.

(ب) $\arccos \sqrt{2/(2 + t^2)}$

۳. (ب) $\pi/2 - t$

۵. ۳۲.

۶. (ب) $L(c) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} (e^{\pi c} - 1)$ اگر $c \neq 0$ $L(0) = 2\pi$

$a(c) = \frac{e^{4\pi c} - 1}{4c}$ اگر $c \neq 0$ $a(0) = \pi$

۷. (الف) $3\pi/16$ ؛ (ب) $2 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3})$

۸. $\frac{1}{4}\pi(\pi^2 + 1)^{1/2} + \frac{1}{4}\log(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$

۹. $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

۱۰. ۴.

۱۱. ۸.

۱۳. (الف) $(\theta^2 + 2)/(\theta^2 + 1)^{3/2}$ ؛ (ب) $\sqrt{2}e^\theta$

(پ) $\frac{2}{3}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ؛ (ت) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

۱۵. $r = r_0 e^{-\theta \cot \alpha}$ ؛ هدف در مبدأ، موشک در لحظه‌ای که $r = r_0$ و $\theta = 0$ شروع

به حرکت می‌کند؛ α ($0 < \alpha < \pi$) زاویه را نشان می‌دهد که با $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ — مشخص

می‌شود؛ بازای $0 < \alpha < \pi/2$ مسیر مارپیچ است که، وقتی θ بطور نامحدود صعود

کند، $r \rightarrow 0$ ؛ بازای $\alpha = \pi/2$ مسیر دایره‌ای حول مبدأ خواهد بود؛ برای $\pi/2 < \alpha < \pi$ مسیر مارپیچ است که، وقتی θ بطور نامحدود صعود کند، r بطور نامحدود صعود خواهد کرد.

۱۶. خط واصل بین جای موشک که در ۴ میلی گروه زمینی دیده شده تا خود گروه را قسمت مثبت محور x بگیرد. سه میل در امتداد این خط پیش برود (برای در نظر گرفتن این امکان که موشک در حال بازگشت به پایگاه است) و سپس روی مارپیچ $r = e^{\theta/\sqrt{2}}$ حرکت کنید.

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} + \arctan(y/x) = C \quad ۱۷.$$

۲۱۰۱۴ تمرینات متفرقه برای دوره (صفحه ۶۸۶)

$$\tan \alpha = \tan \theta / (2 + \tan^2 \theta) \quad ۱.$$

$$(c/m^2, 2c/m) \quad ۳.$$

$$(الف) \quad y - y_0 = m(x - x_0) + c/m, \text{ مماس در} \quad ۴$$

$$(x_0 + c/m^2, y_0 + 2c/m);$$

$$(ب) \quad y - y_0 = m(x - x_0) - cm^2, \text{ مماس در}$$

$$(x_0 + 2cm, y_0 + cm^2).$$

$$x_1 y = 2 y_1 x - x_1 y_1; (y_1 - y_0)(y - y_0) = 2c(x + x_1 - 2x_0) \quad ۶$$

$$(x_1 - x_0)(y - y_0) = 2(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y_1 - y_0).$$

$$(الف) (0, 1/2) \quad ۷$$

$$(ب) \text{ بنویسید } Q = (0, b(x)). \text{ هرگاه } f'''(0) \neq 0 \text{ آنگاه، وقتی } x \rightarrow 0,$$

$$b(x) \rightarrow f(0) + 1/f''(0) \text{ در غیر این صورت، وقتی } x \rightarrow 0, |b(x)| \rightarrow +\infty$$

$$۸. \text{ وقتی } c \rightarrow 0, r = (1+c)/2 \rightarrow 1/2$$

$$۱۳. (-2, -1), (2, 1).$$

$$۱۴. \sqrt{2}/2$$

$$۱۵. A(r)/r^2 \rightarrow 1/36a; 3x^2 - y^2 = 3a^2$$

$$۲۱. (الف) f(\theta) = k \text{ یا } f(\theta) = k \sin(\theta + C)$$

$$(ب) f(\theta) = Ce^{\theta/\sqrt{k^2-1}} \text{ که در آن } k^2 > 1$$

$$(پ) f(\theta) = (2/k) \sec(\theta + C) \text{ یا } f(\theta) = 2/k$$

فصل ۱۵

۵.۱۵ تمرینات (صفحه ۶۹۴)

۱. بلی.	۲. بلی.	۳. بلی.
۴. بلی.	۵. خیر.	۶. بلی.
۷. بلی.	۸. بلی.	۹. بلی.
۱۰. بلی.	۱۱. خیر.	۱۲. بلی.
۱۳. بلی.	۱۴. خیر.	۱۵. بلی.
۱۶. بلی.	۱۷. بلی.	۱۸. بلی.
۱۹. بلی.	۲۰. بلی.	۲۱. بلی.
۲۲. بلی.	۲۳. خیر.	۲۴. بلی.
۲۵. خیر.	۲۶. بلی.	۲۷. بلی.
۲۸. بلی.		

۳۱. (الف) خیر؛ (ب) خیر؛ (پ) خیر؛ (ت) خیر.

۹.۱۵ تمرینات (صفحه ۷۰۱)

۱. بلی؛ ۲.	۲. بلی؛ ۲.	۳. بلی؛ ۲.
۴. بلی؛ ۲.	۵. بلی؛ ۱.	۶. خیر.
۷. خیر.	۸. خیر.	۹. بلی؛ ۱.
۱۰. بلی؛ ۱.	۱۱. بلی؛ n .	۱۲. بلی؛ n .
۱۳. بلی؛ n .	۱۴. بلی؛ n .	۱۵. بلی؛ n .
۱۶. بلی؛ n .		

۱۷. بلی؛ $\dim = 1 + n/2$ اگر n زوج باشد، مساوی $(n+1)/2$ است اگر n فرد باشد.

۱۸. بلی؛ $\dim = n/2$ اگر n زوج باشد، مساوی $(n+1)/2$ است اگر n فرد باشد.

۱۹. بلی؛ $1 + k$.

۲۰. خیر.

۲۱. (الف) $\dim = 3$ ؛ (ب) $\dim = 3$ ؛ (پ) $\dim = 2$ ؛ (ت) $\dim = 2$.

۲۳. (الف) اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ مجموعه مستقل است و $\dim = 3$ ، چنانچه a یا b صفر باشد

مجموعه وابسته خواهد بود و $\dim = 2$ ؛ (ب) مستقل، $\dim = 2$ ؛ (پ) اگر $a \neq 0$

مستقل است و $\dim = ۳$ ، چنانچه $a = ۰$ وابسته است و $\dim = ۲$ ؛ (ت) مستقل،
 $\dim = ۳$ ؛ (ث) وابسته، $\dim = ۲$ ؛ (ج) مستقل، $\dim = ۲$ ؛ (ج) مستقل، $\dim = ۲$ ؛
 (ح) وابسته، $\dim = ۲$ ؛ (خ) مستقل، $\dim = ۲$ ؛ (د) مستقل، $\dim = ۲$.

۱۲.۱۵ تمرینات (صفحه ۷۰۹)

۱. (الف) خیر؛ (ب) خیر؛ (پ) خیر؛ (ت) خیر؛ (ث) بلی.

۸. (الف) $\frac{1}{y} \sqrt{e^x + 1}$ ؛ (ب) $b \left(x - \frac{e^x + 1}{x} \right)$ ؛ $g(x) = b$ دلخواه.

۱۰. (ب) $a + \frac{n+1}{2} b$ ؛ $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ ؛ (پ) $a \left(t - \frac{2n+1}{3n} \right)$ ؛ $g(t) = a$ دلخواه.

۱۱. (پ) ۴۳؛ (ت) $a \left(1 - \frac{2}{3} t \right)$ ؛ $g(t) = a$ دلخواه.

۱۲. (الف) خیر؛ (ب) خیر؛ (پ) خیر؛ (ت) خیر.

۱۳. (پ) ۱؛ (ت) $e^2 - 1$.

۱۴. (پ) $n! / 2^{n+1}$.

۱۶.۱۵ تمرینات (صفحه ۷۲۲)

۱. (الف) و (ب) $\frac{1}{3} \sqrt{3} (1, 1, 1)$ ، $\frac{1}{6} \sqrt{6} (1, -2, 1)$.

۲. (الف) $\frac{1}{6} \sqrt{3} (1, -1, 1, 3)$ ، $\frac{1}{6} \sqrt{6} (-1, 1, 2, 0)$ ، $\frac{1}{4} \sqrt{2} (1, 1, 0, 0)$.

(ب) $\frac{1}{4\sqrt{2}} (1, -2, 6, 1)$ ، $\frac{1}{3} \sqrt{3} (1, 1, 0, 1)$.

۶. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \log^2 3$.

۷. $e^2 - 1$.

۸. $1 - 7e^{-2}$ ؛ $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) + \frac{3}{e}x$.

۹. $\pi - 2 \sin x$.

۱۰. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$.

فصل ۱۶

۴.۱۶ تمرینات (صفحه ۷۳۰)

۱. خطی؛ پوچی ۱، رتبه ۲.
۲. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۲.
۳. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۱.
۴. خطی؛ پوچی ۱، رتبه ۱.
۵. غیر خطی.
۶. غیر خطی.
۷. غیر خطی.
۸. غیر خطی.
۹. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۲.
۱۰. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۲.
۱۱. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۲.
۱۲. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۲.
۱۳. ناخطی.
۱۴. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۲.
۱۵. غیر خطی.
۱۶. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۳.
۱۷. خطی؛ پوچی ۱، رتبه ۲.
۱۸. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۳.
۱۹. غیر خطی.
۲۰. غیر خطی.
۲۱. غیر خطی.
۲۲. غیر خطی.
۲۳. خطی؛ پوچی ۱، رتبه ۲.
۲۴. خطی؛ پوچی ۵، رتبه ۱ + n .
۲۵. خطی؛ پوچی ۱، رتبه نامتناهی.
۲۶. خطی؛ پوچی نامتناهی، رتبه ۲.
۲۷. خطی؛ پوچی ۲، رتبه نامتناهی.
۲۸. $N(T)$ مجموعه دنباله‌های ثابت است؛ $T(V)$ مجموعه دنباله‌ها با حد ۰ است.

۲۹. (ت) $\{1, \cos x, \sin x\}$ پایه‌ای برای $T(V)$ است، $\dim T(V) = 3$ ؛

(ث) $N(T) = S$ ؛ (ج) هرگاه $T(f) = cf$ با $c \neq 0$ آنگاه $c \in T(V)$ ، پس

داریم $f(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ ؛ هرگاه $c_1 = 0$ آنگاه $c = \pi$

و $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ که در آن c_1 و c_2 دلخواه ولی هر دو صفر نیستند؛

هرگاه $c_1 \neq 0$ آنگاه $c = 2\pi$ و $c = c_1$ که در آن c_1 دلخواه ولی صفر نیست.

۸.۱۶ تمرینات (صفحه ۷۴۰)

۳. بلی؛ $y = u, x = v$.

۴. بلی؛ $y = -v, x = u$.

۵. خیر.

۶. خیر.

۷. خیر.

$$۸. \cdot y = \log v, x = \log u \text{؛ بلی}$$

$$۹. \cdot \text{خير}$$

$$۱۰. \cdot y = v - ۱, x = u - ۱ \text{؛ بلی}$$

$$۱۱. \cdot y = (v - u)/۲, x = (v + u)/۲ \text{؛ بلی}$$

$$۱۲. \cdot y = (۲v - u)/۳, x = (v + u)/۳ \text{؛ بلی}$$

$$۱۳. \cdot z = u, y = v, x = w \text{؛ بلی}$$

$$۱۴. \cdot \text{خير}$$

$$۱۵. \cdot z = w/۳, y = v/۲, x = u \text{؛ بلی}$$

$$۱۶. \cdot z = w - u - v, y = v, x = u \text{؛ بلی}$$

$$۱۷. \cdot z = w + ۱, y = v - ۱, x = u - ۱ \text{؛ بلی}$$

$$۱۸. \cdot z = w - ۳, y = v - ۲, x = u - ۱ \text{؛ بلی}$$

$$۱۹. \cdot z = w - v, y = v - u, x = u \text{؛ بلی}$$

$$۲۰. \cdot z = (w - u + v)/۲, y = (v - w + u)/۲, x = (u - v + w)/۲ \text{؛ بلی}$$

$$۲۵. \cdot (S + T)^r = S^r + ST + TS + T^r$$

$$(S + T)^r = S^r + TS^r + STS + S^rT + ST^r + TST + T^rS + T^r$$

$$۲۶. \cdot (ST)(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x) \text{ (الف)}$$

$$(TS)(x, y, z) = (z, z + y, z + y + x),$$

$$(ST - TS)(x, y, z) = (x + y, x - z, -y - z),$$

$$S^r(x, y, z) = (x, y, z),$$

$$T^r(x, y, z) = (x, ۲x + y, ۳x + ۲y + z),$$

$$(ST)^r(x, y, z) = (۳x + ۲y + z, ۲x + ۲y + z, x + y + z),$$

$$(TS)^r(x, y, z) = (x + y + z, x + ۲y + ۲z, x + ۲y + ۳z),$$

$$(ST - TS)^r = (۲x + y - z, x + ۲y + z, -x + y + ۲z);$$

$$T^{-۱}(u, v, w) = (u, v - u, w - v) : S^{-۱}(u, v, w) = (w, v, u) \text{ (ب)}$$

$$(ST)^{-۱}(u, v, w) = (w, v - w, u - v),$$

$$(TS)^{-۱}(u, v, w) = (w - v, v - u, u);$$

$$(T - I)(x, y, z) = (۰, x, x + y) \text{ (ب)}$$

$$(T - I)^r(x, y, z) = (۰, ۰, x),$$

$$n \geq ۳ \text{؛ } (T - I)^n(x, y, z) = (۰, ۰, ۰)$$

$$Tp(x) = 3x - 2x^2 + 12x^3, Dp(x) = 3 - 2x + 12x^2 \text{ (الف) } ۲۸$$

$$(TD)p(x) = -2x + 24x^2, (DT)p(x) = 3 - 4x + 36x^2$$

$$(DT - TD)p(x) = 3 - 2x + 12x^2$$

$$(T^2D^2 - D^2T^2)p(x) = 8 - 192x$$

(ب) $p(x) = ax^2 + b$ اسکالر دلخواهی است؛ (پ) $p(x) = ax^2 + b$ اسکالرهایی دلخواهی هستند؛ (ت) کلیه p ها در V .

$$Sp(x) = 3 - x + x^2, Rp(x) = 2 \text{ (الف) } ۳۱$$

$$(ST)p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3, Tp(x) = 2x + 3x^2 - x^3 + x^4$$

$$(TS)^2p(x) = 3x - x^2 + x^3, (TS)p(x) = 3x - x^2 + x^3$$

$$(S^2T^2)p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3, (T^2S^2)p(x) = -x^2 + x^3$$

$$(RST)p(x) = 2, (TRS)p(x) = 3x$$

$$R(V) = \{p \mid p \text{ ثابت است}\}, N(R) = \{p \mid p(0) = 0\} \text{ (ب) } ۳۲$$

$$N(T) = \{0\}, S(V) = V, N(S) = \{p \mid p \text{ ثابت است}\}$$

$$(TS)^n = I - R \text{ (ت) } ; T^{-1} = S \text{ (پ) } ; T(V) = \{p \mid p(0) = 0\}$$

$$S^n T^n = I$$

۳۲. T بر V یک به یک نیست زیرا کلیه دنباله‌های ثابت را بروی یک دنباله می‌نگارد.

۱۲.۱۶ تمرینات (صفحه ۷۴۹)

۱. (الف) ماتریس همانی $I = (\delta_{jk})$ که در آن $\delta_{jk} = 1$ اگر $j = k$ و $\delta_{jk} = 0$ اگر $j \neq k$

(ب) ماتریس صفر $O = (a_{jk})$ که در آن هر درایه $a_{jk} = 0$

(پ) ماتریس $(c\delta_{jk})$ که در آن ماتریس همانی قسمت (الف) است.

$$۲. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (پ) } ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب) } ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (الف) } ۳$$

$$۳. \text{ (الف) } 9i - 12j, -5i + 7j$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ (پ) } ; \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ب) } ۴$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ۴$$

$$۵. \begin{pmatrix} -۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۳ & ۳ \\ -۱ & -۵ & ۵ \end{pmatrix} \quad (ب) \quad ؛ \quad ۳ \text{ رتبه } ۵، \text{ پوچی } ۲؛ \quad ۲i + ۲j + ۲k \text{ (الف)}$$

$$۶. \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$۷. \quad T(۲i - j + k) = (۰, -۲) \text{ (الف)}، \quad ۱، \text{ پوچی } ۲، \text{ رتبه } ۲؛$$

$$؛ \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} \quad (ب) \quad ؛ \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$.w_2 = (۱, -۱), w_1 = (۱, ۱), e_2 = i, e_2 = k, e_1 = j \quad (ت)$$

$$۸. \quad \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \quad (ب) \quad ؛ \quad ۲، \text{ پوچی } ۵، \text{ رتبه } ۲؛ \quad (۵, ۰, -۱) \text{ (الف)}$$

$$.w_2 = (۰, ۰, ۲), w_1 = (۱, ۰, ۱), e_2 = i + j, e_1 = i \quad (ب)$$

$$.w_2 = (۰, ۱, ۰).$$

$$۹. \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \quad (ب) \quad ؛ \quad ۲، \text{ پوچی } ۵، \text{ رتبه } ۲؛ \quad (-۱, -۳, -۱) \text{ (الف)}$$

$$.w_2 = (۰, ۱, ۰), w_1 = (۱, ۰, ۱), e_2 = j - i, e_1 = i \quad (ب)$$

$$.w_2 = (۰, ۰, ۱)$$

$$۱۰. \quad b = ۲, a = ۵ \quad (ب) \quad ؛ \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \quad (ب) \quad ؛ \quad ۲، \text{ پوچی } ۵، \text{ رتبه } ۲؛ \quad e_1 - e_2 \text{ (الف)}$$

$$۱۱. \quad \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$۱۲. \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$۱۳. \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$۱۴. \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$۱۵. \quad \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot ۱۶$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot ۱۷$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot ۱۸$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \cdot ۱۹$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ (ث)} ; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ت)}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

۲۰. $(1, x, x^2, x^3)$ را بعنوان پایه‌ای برای V و (x, x^2) را بعنوان پایه‌ای برای W

اختیار کنید. در این صورت ماتریس TD عبارت خواهد بود از $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۶۰۱۶ تمرینات (صفحه ۷۵۸)

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}, B + C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot ۱$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A(2B - 3C) = \begin{bmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{bmatrix}, CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

۲. (الف) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و a, b دلخواه؛ (ب) $\begin{bmatrix} -2a & a \\ -2b & b \end{bmatrix}$ و a, b دلخواه.

۳. (الف) $d = 5, c = 1, b = 6, a = 9$

(ب) $d = -2, c = 0, b = 6, a = 1$

۴. (الف) $\begin{bmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$

۶. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۷. $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

۸. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۹. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{bmatrix}$

۱۰. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ که در آن b و c دلخواهند و a یک جواب است.

۱۱. (ب) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ که در آن a دلخواه است.

۱۲. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ که در آنها b و c دلخواهند و $a^2 = 1 - bc$ می باشد.

۱۳. $D = \begin{bmatrix} \frac{33}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{43}{4} & \frac{25}{4} \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 2 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

۱۴. (ب) $(A+B)^T = A^T + AB + BA + B^T$

$(A+B)(A-B) = A^T + BA - AB - B^T$;

(پ) برای آنهایی که تعویض می شوند.

۲۰.۱۶ تمرینات (صفحه ۷۶۹)

۱. $(x, y, z) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5} \right)$

۲. جواب ندارد.

$$\cdot (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-3, 4, 1) \cdot 3$$

$$\cdot (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-3, 4, 1) \cdot 4$$

$$\cdot (x, y, z, u) = (1, 1, 0, 0) + t(1, 14, 5, 0) \cdot 5$$

$$\cdot (x, y, z, u) = (1, 8, 0, -4) + t(2, 7, 3, 0) \cdot 6$$

$$\cdot (x, y, z, u, v) = t_1(-1, 1, 0, 0, 0) + t_2(-1, 0, 3, -3, 1) \cdot 7$$

$$\cdot (x, y, z, u) = (1, 1, 1, -1) + t_1(-1, 3, 7, 0) + t_2(4, 9, 0, 7) \cdot 8$$

$$\cdot (x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + t(5, 1, -3) \cdot 9$$

$$\cdot (x, y, z, u) = (1, 6, 3, 0) + t_1(4, 11, 7, 0) + t_2(0, 0, 0, 1) \text{ (الف)} \cdot 10$$

$$\cdot (x, y, z, u) = \left(\frac{3}{11}, 4, \frac{19}{11}, 0\right) + t(4, -11, 7, 22) \text{ (ب)}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot 13$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot 12$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 15$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot 14$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 16$$

۲۱.۱۶ تمرینات متفرقه دربارهٔ ماتریسها (صفحه ۷۷۱)

$$\cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot 3$$

$$\cdot \text{که در آنها } b \text{ و } c \text{ دلخواهند و } a \text{ یک جواب} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4$$

دليخواه معادله درجه دوم $a^2 - a + bc = 0$ می باشد.

۱۰. الف) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

واژه‌نامه

فارسی به انگلیسی

array	آرایه
arc	آرک
tangent	تانژانت
secant	سکانت
sine	سینوس
cotangent	کوتانژانت
cosecant	کسکانت
cosine	کسینوس
test	آزمون
Weierstrass M—	M وایراشتراس
integral	انتگرال
root	ریشه
limit comparison	مقایسه‌ای حدی
ratio	نسبت
tests	آزمون‌ها
comparison	مقایسه‌ای
convergence	همگرایی
analysis	آنالیز
reflector	آینه
elliptical	بیضوی
parabolic	سهموی
hyperbolic	هذلولوی
identity	اتحاد
algebraic	جبری

pythagorean	فیثاغورس
trigonometric	مثلثاتی
proof	اثبات
by induction	باستقرا
ice — cream — cone	قیف بستنی
union	اجتماع
probability	احتمال
space communication	ارتباطات فضائی
vibrations	ارتعاشات
damped	میرا
altitude	ارتفاع
elevation	ارتفاع
z — intercept	ارتفاع از مبدأ
erg	ارگ
unbounded above	از بالا بی کران
bounded above	از بالا کراندار
bounded below	از پایین کراندار
singular	استثنائی
deductive reasoning	استدلال استنتاجی
induction	استقرا
proof by	اثبات به —
definition by	تعریف به —
mathematical induction	استقرای ریاضی
linear independence	استقلال خطی
scalar	اسکالر
exhaustion	اشباع
property of area	خاصیت مساحت
method of	روش
intersection	اشتراک
friction	اصطکاک
principle	اصل
of mathematical induction	استقرای ریاضی
constant — product, minimum — sum	حاصلضرب ثابت — مجموع مینیم
well — ordering	خوش ترتیبی
squeezing	فشار

constant — sum, maximum — product	مجموع ثابت — حاصلضرب ماکزیمم
postulate	اصل مسلم (اصل)
axiom	اصل موضوع
continuity	پیوستگی
completeness	تامیت
least — upper — bound	کوچکترین کران بالائی
axioms	اصول موضوع
closure	بسته بودن
order	ترتیب
field	میدان
decimal	اعشاری
operations	اعمال
row	سطری
partition	افراز
horizontal	افقی
extremum	اکسترمم
strictly	اکیداً
increasing	صعودی
decreasing	نزولی
monotonic	یکنوا
if and only if	اگر و فقط اگر
expectation	امید ریاضی
expansion	انبساط
n — tuple	n تائی
integral	انتگرال
test	آزمون
upper	بالائی
elliptic	بیضوی
lower	پائینی
logarithm	لگاریتمی
improper	مجازی
definite	معین
curve	منحنی
infinite	نامتناهی
indefinite	نامعین

integrable	انتگرال‌پذیر
integrability	انتگرال‌پذیری
integrand	انتگرال‌ده
integration	انتگرال‌گیری
by parts	بطریقه جزء به جزء
by substitution	بوسیله جانشانی
by partial fractions	بوسیله کسرهاى جزئى
curvature	انحناء
momentum	اندازه حرکت
angular measure	اندازه زاویه
energy	انرژی
contraction	انقباض
prime	اول
primitive	اولیه
infimum	اینفیمم
finite dimensional	با بعد متناهی
infinite dimensional	با بعد نامتناهی
interval	بازه
of integration	انتگرال‌گیری
open	باز
closed	بسته
unbounded	بی‌کران
parametric	پارامتری
period	تناوب
of constancy	ثبات
bounded	کراندار
half — open	نیم‌باز
of convergence	همگرایی
nested intervals	بازه‌های تودرتو
remainder	باقیمانده
in Taylor formula	در دستور تیلور
divisible	بخشپذیر
intercepts	برخورد با محورها
range	برد

of a function	یک تابع
vector	بردار
curvature	انحناء
column	ستونی
zero	صفر
normal	قائم
position	مکان
direction	هادی
geometric	هندسی
unit coordinate vectors	بردارهای یکه مختصات
greatest integer in x	بزرگترین عدد صحیح در x
largest member	بزرگترین عضو
greatest lower bound	بزرگترین کران پائینی
expansion	بسط
decimal	اعشاری
power series ... of f	f بصورت سری توانی
dimension	بعد
plus infinity	بعلاوه بی نهایت
icosahedron	بیست وجهی
ellipse	بیضی
unbounded	بی کران
infinity	بی نهایت
infinitely differentiable	بی نهایت بار مشتقپذیر
infinitesimal	بی نهایت کوچک
antilogarithm	پادلگاریتم
antiderivative	پادمشتق
paradox	پارادکس
Zeno's	زنو
racecourse	مسابقه
parameter	پارامتر
line segment	پاره خط
directed	جهتدار
invariance	پایایی
under translation	تحت انتقال

under similarity transformation	تحت تبدیل تشابه
stable	پایدار
pitch of the helix	پای مارپیچ
base	پایه
horizontal	افقی
for logarithm	برای لگاریتم
finite	متناهی
orthonormal basis	پایه متعامد یکه
variance	پراش
rose petal	پررز
leap	پرش
nullity	پوچی
envelope	پوش
span	پیما
linear	خطی
spanned	پیموده شده
continuity	پیوستگی
left — hand	سمت چپ
right — hand	سمت راست
uniform	یکشکل
continuous	پیوسته
function	تابع
prime — number	اعداد اول
primitive	اولیه
vector — valued	برداری
postage	پستی
step	پله ای
continuous	پیوسته
power	توانی
positive integer power	توانی با توان عدد صحیح مثبت
constant	ثابت
polynomial	چندجمله ای
volume	حجم

limit	حد
real	حقیقی
linear	خطی
double — valued	دو مقداری
nth — root	ریشه n م
square — root	ریشه دوم
Riemann zeta	زتای ریمان
even	زوج
velocity	سرعت
arc — length	طول قوس
factorial	فاکتوریل
odd	فرد
absolute — value	قدر مطلق
piecewise constant	قطعه قطعه ثابت
piecewise linear	قطعه قطعه خطی
piecewise monotonic	قطعه قطعه یکنوا
gamma	گاما
rational	گویا
proper rational	گویای حقیقی
trigonometric	مثلثاتی
sum	مجموع
set	مجموعه‌ای
convex	محدب
complex — valued	مختلط
composite	مرکب
cross — sectional area	مساحت مقطع عرضی
characteristic	مشخص
concave	مقعر
position	مکان
exponential	نمایی
weight	وزن
hyperbolic	هذلولوی
identity	همانی
monotonic	یکنوا
successor	تالی

tangent	تاوانت
hyperbolic	هذلولوی
transformation	تبدیل
similarity	تشابه
linear	خطی
one — to — one	یک به یک
rearrangement	تجدید آرایش
convexity	تحدب
radioactive decay	تحلیل رادیواکتیو
irreducible	تحویل ناپذیر
transpose	ترانواده
order	ترتیب
pseudo — ordering	ترتینما
composition	ترکیب
linear combination	ترکیب خطی
progression	تصاعد
arithmetic	حسابی
geometric	هندسی
projection	تصویر
of x along y	x در امتداد y
refinement	تطریف
definition	تعریف
recursive	بازگشتی
by induction	باستقرا
extension	تعمیم
commutative	تعویضپذیر
variation of parameter	تغییر پارامتر
change of variable	تغییر متغیر
displacement	تغییر مکان
difference	تفاضل
difference	تفریق
reciprocal	تقابل
approximate	تقریب
from above	از بالا
from below	از پایین

polynomial	چند جمله‌ای
correspondence	تناظر
one — to — one	یک به یک
contradiction	تناقض
speed	تندی
angular	زاویه‌ای
extension	توسیع
constant	ثابت
of integration	انتگرال‌گیری
Euler's	اویلر
decay	تحلیل
of proportionality	تناسب
fixed	ثابت
permutation	جابجاشت
algebra	جبر
of o — symbols	ها
vector	برداری
elementary	مقدما تی
root mean square	جذر میانگین مربعات
mass density	جرم مخصوص
particle	جسم
solid	جسم
right cylindrical	استوانه‌ای قائم
Cavalieri	کاوالیری
pair	جفت
ordered	مرتب
summation	جمع‌بندی
additivity	جمع‌پذیری
direct addition	جمع مستقیم
term	جمله
nth	n
error	خطا
solution	جواب

trivial	بدیهی
algebraic	جبری
particular	خصوصی
general	عمومی
nontrivial	غیر بدیهی
dense	چگال
density	چگالی
polynomial	چند جمله ای
quartic	درجه چهارم
quadratic	درجه دوم
cubic	درجه سوم
in two variables	دو متغیره
normalized	نرمیده شده
quadruple	چهار تایی
quadrilateral	چهار ضلعی
tetrahedron	چهار وجهی
product	حاصل ضرب
cross	خارجی
scalar triple	سه گانه اسکالر
volume	حجم
limit	حد
upper	بالائی
lower	پائینی
left — hand	سمت چپ
right — hand	سمت راست
limits	حدود
of integration	انتگرال گیری
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
one — sided	یک طرفه
motion	حرکت
simple harmonic	توافقی ساده
rigid	جسم صلب

linear	خطی
planetary	سیارات
periodic	متناوب
circular	مستدیر
rectilinear	مستقیم الخط
curvilinear	منحنی الخط
wave	موجی
integral calculus	حساب انتگرال
differential calculus	حساب دیفرانسیل
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
solution	حل
loop	حلقه
annulus	حلقه دایره
napkin — ring	حلقه دستمال سفره
quotient	خارج قسمت
difference	تفاضلی
differential	دیفرانسیلی
property	خاصیت
archimedean	ارشمیدسی
exhaustion	اشباع
reflection	انعکاسی
difference	تفاضلی
telescoping	توی هم روی
substitution	جانشانی
additive	جمعپذیری
linearity	خطی
multiplicative	ضربپذیری
sign — preserving	محفوظ ماندن علامت
nonnegative	نامنفی بودن
homogeneous	همگنی
monotone	یکنوائی
one — parameter family	خانواده یک پارامتری
eccentricity	خروج از مرکز
line	خط

real	حقیقی
slope of	شیب
straight	مستقیم
tangent	مماس
round — off error	خطای ناشی از گرد شدن
lines	خطوط
contour	پیرامنی
of flow	جریان
stream	سیلان
equipotential	هم پتانسیل
isothermal	همدما
directrix	خط هادی
linearity with respect to the integrand	خطی بودن نسبت به انتگرالده
nappe	دامنه
amplitude	دامنهٔ نوسان
circle	دایره
osculating	بوسان
of convergence	همگرایی
determinant	دترمینان
entry	درایه
degree	درجه
interior	درون
system	دستگاه
deductive	استنتاجی
real — number	اعداد حقیقی
nonhomogeneous	غیر همگن
left — handed coordinate	مختصات دست چپی
right — handed coordinate	مختصات دست راستی
homogeneous	همگن
formula	دستور
recursion	بازگشتی
partial summation	جمع بندی جزئی
duplication	دو برابر
double — angle	زاویهٔ مضاعف

cab minus bac	کب منهای بک
mean — value	مقدار میانگین
prismoid	منشورگون
collection	دسته
sequence	دنباله
unbounded	بی کران
of functions	توابع
increasing	صعودی
bounded	کراندار
infinite	نامتناهی
decreasing	نزولی
monotonic	یکنوا
revolution	دوار
dodecagon	دوازده ضلعی
twelve — sided polygon	دوازده ضلعی
dodecahedron	دوازده وجهی
concentric circles	دوایر متحد المركز
cycloid	دورگون
period	دوره تناوب
differential	دیفرانسیل
trapezoid	ذوزنقه
relation	رابطه
companion	لنگه
geometric	هندسی
radian	رادیان
direction field	راستای میدان
vertex	رأس
quadrant	ربع
rank	رتبه
class	رده
four — leaved rose	رز چهاربرگ
digit	رقم

orthogonality relations	روابط تعامد
method	روش
of exhaustion	اشباع
elimination	حذف
of successive bisection	دو نیم سازی متوالی
of undetermined coefficients	ضرایب نامعلوم
mathematics	ریاضیات
applied	کار بسته
pure	محض
root	ریشه
nth	n
isolated real	حقیقی منزوی
square	دوم
angle	زاویه
eccentric	خروج از مرکز
of inclination	شیب
phase	فاز
polar	قطبی
Earth	زمین
geology	زمین شناسی
Venus	زهره
subinterval	زیر بازه
subspace	زیر فضا
subset	زیر مجموعه
proper	حقیقی
index	زیر نویس
of summation	جمع بندی
dummy	ظاهری
biology	زیست شناسی
saddle — shaped	زینی شکل
factor	سازه
linear	خطی
common	مشترک

comet	ستاره دنباله دار
speed	سرعت
velocity	سرعت
initial	اولیه
angular	زاویه ای
instantaneous	لحظه ای
average	متوسط
series	سری
harmonic	توافقی
real power	توانی حقیقی
telescoping	توی هم رو
binomial	دوجمله ای
logarithmic	لگاریتمی
alternating	متناوب
infinite	نامتناهی
geometric	هندسی
surface	سطح
lateral	جانبی
row	سطر (ی)
operations	اعمال
matrix	ماتریس
secant	سکانت
inductor	سلف
supremum	سوپرمم
triple	سه تایی
parabola	سه می
hyperbolic paraboloid	سه می گون هذلولی
sine	سینوس
hyperbolic	هذلولوی
four — leaf clover	شبدر چهار برگ
skew — symmetry	شبه تقارن
acceleration	شتاب
angular	زاویه ای
radial	شعاعی

current	شدت جریان
steady — state	حالت پایدار
transient	گذرا
condition	شرط
initial	اولیه
necessary and sufficient	لازم و کافی
associative	شرکتپذیر
radius	شعاع
of curvature	انحناء
of gyration	چرخش
of convergence	همگرایی
set inclusion	شمول مجموعه‌ها
argument	شناسه
principal	عمده
slope	شیب
steepness	شیب
chemistry	شیمی
increasing	صعودی
monotonic increasing	صعودی
plane	صفحه
xy—	xy
osculating	بوسان
zero	صفر
of multiplicity m	از تکرار m
technology	صنعت
indeterminate forms	صور مبهم
formal	صوری
coefficients	ضرائب
binomial	دوجمله‌ای
Fourier	فوریه
undetermined	نامعلوم
product	ضرب
scalar	اسکالر

cross	خارجی
scalar triple	سه گانه اسکالر
dot	نقطه ای
coefficient	ضریب
of friction	اصطکاک
inductance	ضریب سلف
center — seeking	طالب مرکز
abscissa	طول
x — intercept	طول از مبدأ
arc length	طول قوس
capacitance	ظرفیت
finer than	ظریفتر
number	عدد
Euler	اویلر
real	حقیقی
irrational	گنگ
rational	گویا
complex	مختلط
imaginary	موهومی
integer	عدد صحیح
even	زوج
odd	فرد
y — intercept	عرض از مبدأ
Mercury	عطارد
sign	علامت
social sciences	علوم اجتماعی
operator	عملگر
integration	انتگرال گیری
difference	تفاضلی
differentiation	مشتق گیری
perpendicular	عمود بر هم
element	عنصر

maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
identiy	همانی
nonsingular	غیر استثنائی
nonhomogeneous	غیر همگن
distance	فاصله
radial	شعاعی
mean	میانگینی
unit	یکه
factorial	فاکتوریل
process	فرایند
elimination	حذف
orthogonalization	عمود سازی
frequency	فرکانس
resonance	رزنانس
intersection	فصل مشترک
space	فضا
euclidean	اقلیدسی
n —	n بعدی
vector	برداری
null	پوچ
function	تابعی
unitary	یکه ای
elastic spring	فنر قابل ارتجاع
physics	فیزیک
mathematical physics	فیزیک ریاضی
normal	قائم
S perpendicular	قائم بر S
base	قاعده
rule	قاعده
right — hand	دست راست

chain	زنجیره‌ای
law	قانون
conservation	بقا
of conservation of momentum	بقای اندازه حرکت
distributive	پخشپذیری
of cooling	تبرید
trichotomy	تثلیث
transitive	تعدی
commutative	تعویضپذیری
cancellation	حذف
associative	شرکتپذیری
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
of Pascal's triangle	مثلث پاسکال
absolute value	قدر مطلق
disk	قرص
circular	مستدیر
unit	یکه
negative	قرینه
part	قسمت
real	حقیقی
imaginary	موهومی
theorem	قضیه
fundamental... of algebra	اساسی جبر
nullity plus rank	پوچی بعلاوه رتبه
small — span	پیمای کوچک
rearrangement	تجدید آرایش
orthogonal decomposition	تجزیه متعامد
approximation	تقریب
binomial	دوجمله‌ای
two — sided	دوطرفه
orthogonalization	عمودسازی
boundedness	کران‌داری
zero — derivative	مشتق صفر
comparison	مقایسه‌ای
extreme — value	مقدار اکسترمیم

mean — value	مقدار میانگین
weighted mean — value	مقدار میانگین وزندار
intermediate — value	مقدار میانی
fixed — point	نقطه ثابت
existence — uniqueness	وجودی — یکتائی
sector	قطاع
circular	مستدیر
diameter	قطر
parabolic segment	قطعه سهمی
piecewise	قطعه قطعه
continuous	پیوسته
linear	خطی
monotone	یکنوا
domain	قلمرو
work	کار
modulus	کالبد
computer	کامپیوتر
analog	قیاسی
focus	کانون
cotangent	کتانژانت
bound	کران
upper	بالائی
greatest lower	بزرگترین ... پائینی
lower	پائینی
least upper	کوچکترین ... بالائی
bounded	کراندار
boundary	کرانه
sphere	کره
solid	توپر
partial fractions	کسرهای جزئی
cosecant	کسکانت
cosine	کسینوس
direction	هادی
hyperbolic	هذلولوی

tractrix	کشاننده
quaternion	کوترنیون
smallest member	کوچکترین عضو
centrifugal	گریز از مرکز
moment	گشتاور
of inertia	ماند
logarithm	لگاریتم
natural	طبیعی
napierian	نپر
rhombus	لوزی
limacon	لیماسون
matrix	ماتریس
singular	استثنائی
augmented	افزوده
column	ستونی
zero	صفر
coefficient	ضرائب
nonsingular	غیر استثنائی
diagonal	قطری
orthogonal	متعامد
square	مربعی
identity	همانی
unit	یکه
helix	مارپیچ
conical	مخروطی
circular	مستدیر
spiral of Archimedes	مارپیچ ارشمیدسی
maximum	ماکزیمم
absolute	مطلق
relative	نسبی
centripetal	مایل به مرکز
discriminant	مین
similar	متشابه

orthogonal	متعامد
variable	متغیر
dummy	ظاهری
reciprocal	متقابل
symmetric about the origin	متقارن نسبت به مبدأ
complement	متمم
orthogonal	متعامد
of a set	یک مجموعه
periodic	متناوب
finite	متناهی
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
parallelepiped	متوازی‌السطوح
average	متوسط
velocity	سرعت
rate of change	میزان تغییر
weighted	وزندار
triangle	مثلث
right	قائم‌الزاویه
equilateral	متساوی‌الاضلاع
isosceles	متساوی‌الساقین
improper	مجازی
asymptote	مجانِب
vertical	قائم
asymptotically equal	مجانِباً مساوی
sum	مجموع
partial	جزئی
outer	خارجی
inner	داخلی
summand	مجموعه
set	مجموعه
inductive	استقرائی
measurable	اندازه‌پذیر
one — element	تک‌عنصری
empty	تهی
void	خالی

radial	شعاعی
ordinate	عرضی
universal	عمومی
bounded	کراندار
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یک‌به‌یک
abstract	مجرد
convex	محدب
linearly independent	مستقل خطی
bounded plane	مسطح کراندار
disjoint sets	مجموعه‌های از هم جدا
contained in	محتوا در
axis	محور
major	اطول
minor	اقصر
$x -$	x
$y -$	y
real	حقیقی
transverse	متقاطع
imaginary	موهومی
primeter	محیط
coordinate	مختص
$x -$	x
$y -$	y
coordinates	مختصات
cylindrical	استوانه‌ای
polar	قطبی
denominator	مخرج
cone	مخروط
right circular	مستدیر قائم
square	مربع
ordered	مرتب
order	مرتبه
center	مرکز
of mass	جرم

complex conjugate	مزدوج مختلط
area	مساحت
problem	مسئله
initial - value	با مقدار اولیه
cooling	تبرید
dilution	ترقیق
pursuit	تعقیب
rectangle	مستطیل
orthogonal trajectories	مسیرهای قائم
Jupiter	مشتری
derivative	مشتق
nth	n
partial... with respect to	جزئی نسبت به
differentiation	مشتقگیری
implicit	ضمنی
logarithmic	لگاریتمی
scalar multiple	مضرب اسکالر
equivalent	معادل
equation	معادله
vector	برداری
parametric	پارامتری
functional	تابعی
reduced	تقلیل یافته
separable	جدائی پذیر
linear	خطی
quartic	درجه چهارم
cubic	درجه سوم
cartesian	دکارتی
partial differential	دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ordinary differential	دیفرانسیل معمولی
nonhomogeneous	غیرهمگن
characteristic	مفسر
of the harmonic oscillator	نوسانگر توافقی
homogeneous	همگن
inverse	معکوس

left	چپ
right	راست
values	مقادیر
prescribed	مقرر
mean	میانگین
conic sections	مقاطع مخروطی
resistor	مقاومت
value	مقدار
extreme	اکستریم
average	متوسط
divisor	مقسوم علیه
cross — sectional	مقطع عرضی
concave	مقعر
scale	مقیاس
duodecimal	دوازدهی
binary	دوئی
radian measure	مقیاس رادیان
position	مکان
locus	مکان هندسی
mechanics	مکانیک
fluid	سیالات
cube	مکعب
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل
tangent	مماس
unit	یکه
curve	منحنی
integral	انتگرال
rectifiable	با طول متناهی
nonrectifiable	با طول نامتناهی
of pursuit	تعقیب
cubic	درجه سوم
figure — eight	شکل هشت
space	فضائی
plane	مسطح
level curves	منحنیهای تراز

bisect in area	منصف درمساحت
symbolic logic	منطق صوری
minus infinity	منهای بی نهایت
parallel	موازی
component	مؤلفه
radial	شعاعی
normal	قائم
transverse	متقاطع
tangential	مماسی
rocket	موشک
generator	مولد
engineering	مهندسی
average	میانگین
mean	میانگین
harmonic	توافقی
pth — power	توانی p ام
arithmetic	حسابی
geometric	هندسی
ordered field	میدان مرتب
damping	میرائی
critical	بحرانی
under critical	تحت بحرانی
over critical	فوق بحرانی
rate	میزان
change	تغییر
of growth	رشد
related rates	میزانهای وابسته
minimum	مینیمم
absolute	مطلق
relative	نسبی
unstable	نا پایدار
discontinuity	نا پیوستگی
jump	جهشی
removable	رفع شدنی

infinite	نامتناهی
nonempty	نا تهی
region	ناحیه
step	پله ای
infinite	نامتناهی
inequality	نامساوی
strict	اکید
triangle	مثلثی
simultaneous inequalities	نامساویهای همزمان
nonnegative	نامنفی
disconnected	ناهمبند
norm	نرم
decreasing	نزولی
monotonic decreasing	نزولی
test ratio	نسبت آزمونی
theory	نظریه
of electricity	الکتریسته
of integration	انتگرالگیری
copernican	کپرنیکی
of sets	مجموعه ها
set	مجموعه ها
of magnetism	مغناطیس
image of x under f	نقش x تحت f
chart	نقشه
point	نقطه
initial	ابتدائی
n - dimensional	n بعدی
terminal	انتھائی
critical	بحرانی
of tangency	تماس
isolated	تنها
fixed	ثابت
lattice	شبکه ای
of inflection	عطف
midpoint	نقطه میانی

point — slope form	نقطه نما — شیب نما
mapping	نگاشت
one — to — one	یک به یک
exponent	نما
notation	نماد
o —	o
summation	جمع بندی
product	ضرب
roster notation	نماد گذاری نوبتی
representation	نمایش
decimal	اعشاری
trivial	بدیهی
matrix	ماتریسی
diagram	نمودار
graph	نمودار
mathematical model	نمونه ریاضی
strip	نوار
oscillation	نوسان
force	نیرو
normal	قائم
electro motive	محرکه
semicircle	نیمدایره
half — life	نیمه عمر
hemispherical	نیمه کروی
semicircular	نیمه مستدیر
dependence	وابستگی
linear	خطی
dependent	وابسته
divergent	واگرا
chord	وتر (دایره)
hypotenuse	وتر (مثلث قائم الزاویه)
latus rectum	وتر کانونی
kernel	هسته

lazy eight	هشت تنبل
octahedron	هشت وجهی
equivalent	هم ارز
identity	همانی
neighborhood	همسایگی
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
conditional	مشروط
absolute	مطلق
pointwise	نقطه به نقطه
uniform	یکشکل
homogeneous	همگن
congruent	همنهشت
geometry	هندسه
euclidean	اقلیدسی
analytic	تحلیلی
cartesian	دکارتی
noneuclidean	غیر اقلیدسی
astronomy	هیت
one — to — one	یک به یک
isothermals	یکدمائیها
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
uniform	یکشکل
isocline	یکشیبه
monotone	یکنوا
unit	یکه
imaginary	موهومی

واژه نامه

انگلیسی به فارسی

abscissa	طول
absolute	مطلق
convergence	همگرایی
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
value	قدر
absolute — value function	تابع قدر مطلق
abstract set	مجموعه مجرد
acceleration	شتاب
additive property	خاصیت جمع پذیری
algebra	جبر
of o — symbols	o ها
algebraic	جبری
identity	اتحاد
solution	جواب
alternating series	سری متناوب
altitude	ارتفاع
amplitude	دامنه نوسان
analog computer	کامپیوتر قیاسی
analysis	آنالیز
analytic	تحلیلی
geometry	هندسه
model	نمونه
angle of inclination	زاویه شیب

angular	زاویه‌ای
acceleration	شتاب
speed	تندی
velocity	سرعت
angular measure	اندازه زاویه
annulus	حلقه دایره
antiderivative	پاد مشتق
antilogarithm	پادلگاریتم
applied mathematics	ریاضیات کاربرده
approximation	تقریب
from above	از بالا
from below	از پایین
theorem	قضیه
arc	آرک
cosecant	کسکانت
cosine	کسینوس
cotangent	کتانزانت
secant	سکانت
sine	سینوس
tangent	تانزانت
archimedean property	خاصیت ارشمیدسی
arc — length function	تابع طول قوس
area	مساحت
argument	شناسه
arithmetic	حسابی
mean	میانگین
progression	تصاعد
array	آرایه
associative	شرکتپذیر (ی)
law	قانون
astronomy	هیئت
asymptote	مجاننب
asymptotically equal	مجانناً مساوی
augmented matrix	ماتریس افزوده
average	متوسط

rate of change	میزان تغییر
value	مقدار
velocity	سرعت
average	میانگین
base	پایه
for logarithm	برای لگاریتم
base	قاعده
binary scale	مقیاس دویی
binomial	دوجمله‌ای
coefficients	ضرائب
series	سری
theorem	قضیه
biology	زیست‌شناسی
bisect in area	منصف در مساحت
boundary	کرانه
bounded	کراندار
above	از بالا
below	از پایین
interval	بازه
sequence	دنباله
set	مجموعه
boundedness theorem	قضیه کرانداری
cab minus bac formula	دستور کب منهای بک
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
cancellation law	قانون حذف
capacitance	ظرفیت
cartesian	دکارتی
equation	معادله
geometry	هندسه
center	مرکز
of mass	جرم
- seeking	طالب
centrifugal	گریز از مرکز

centripetal	مایل به مرکز
chain rule	قاعده زنجیره‌ای
change of variable	تغییر متغیر
characteristic equation	معادله مفسر
characteristic function	تابع مشخص
chart	نقشه
chemistry	شیمی
chord	وتر (دایره)
circle	دایره
of convergence	همگرایی
circular	مستدیر
disk	قرص
helix	مارپیچ
motion	حرکت
sector	قطاع
class	رده
closed	بسته
closure axioms	اصول موضوع بسته بودن
coefficient matrix	ماتریس ضرائب
coefficient of friction	ضریب اصطکاک
collection	دسته
column	ستون (ی)
matrix	ماتریس
vector	بردار
comet	ستاره دنباله‌دار
common factor	سازه مشترک
commutative	تعویضپذیر (ی)
law	قانون
companion relation	رابطه لنگه
comparison	مقایسه‌ای
test	آزمون
theorem	قضیه
complement	متمم
completeness axiom	اصل موضوع تامیت
complex	مختلط

conjugate	مزدوج
number	عدد
complex - valued function	تابع مختلط
component	مؤلفه
composite function	تابع مرکب
composition	ترکیب
concave	مقعر
function	تابع
concentric circles	دوایر متحدالمركز
conditional convergence	همگرایی مشروط
cone	مخروط
congruent	همنهشت
conical helix	مارپیچ مخروطی
conic sections	مقاطع مخروطی
conservation law	قانون بقا
constant	ثابت
function	تابع
of integration	انتگرالگیری
of proportionality	تناسب
constant - product, minimum - sum principle	اصل حاصلضرب ثابت - مجموع مینیمم
constant - sum, maximum - product principle	اصل مجموع ثابت - حاصلضرب ماکزیمم
contained in	محتوا در
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
contour lines	خطوط پیرامنی
contraction	انقباض
contradiction	تناقض
convergence	همگرایی
convergent	همگرا
convex	محدب
function	تابع
set	مجموعه
convexity	تحدب

cooling problem	مسئله تبرید
coordinates	مختصات
copernican theory	نظریه کپرنیکی
correspondence	تناظر
cosecant	کسکانت
cosine	کسینوس
cotangent	کتانژانت
critical	بحرانی
damping	میرائی
point	نقطه
cross product	حاصلضرب (ضرب) خارجی
cross — sectional area function	تابع مساحت مقطع عرضی
cube	مکعب
cubic	درجه سوم
curve	منحنی
equation	معادله
polynomial	چند جمله ای
current	شدت جریان
curvature	انحناء
vector	بردار
curve	منحنی
of pursuit	تعقیب
curvilinear motion	حرکت منحنی الخط
cycloid	دورگون
cylindrical	استوانه ای
coordinates	مختصات
damped vibrations	ارتعاشات میرا
decay constant	ثابت تحلیل
decimal	اعشاری
expansion	بسط
representation	نمایش
decreasing	نزولی
sequence	دنباله
deductive	استنتاجی

reasoning	استدلال
system	دستگاه
definite integral	انتگرال معین
definition by induction	تعریف باستقرا
degree	درجه
denominator	مخرج
dense	چگال
density	چگالی
dependent	وابسته
derivative	مشق
determinant	دترمینان
diagonal	قطری
form	شکل
matrix	ماتریس
diagram	نمودار
diameter	قطر
difference	تفاضل (ی)
operator	عملگر
property	خاصیت
quotient	خارج قسمت
difference	تفریق
differential	دیفرانسیل
calculus	حساب
differential quotient	خارج قسمت دیفرانسیلی
differentiation	مشتقگیری
operator	عملگر
digit	رقم
dilution problem	مسئله ترقیق
dimension	بعد
direct addition	جمع مستقیم
directed line segment	پاره خط جهتدار
direction	هادی
cosine	کسینوس
vector	بردار
direction field	راستای میدان

directrix	خط هادی
disconnected	ناهمبند
discontinuity	نا پیوستگی
discriminant	مبین
disjoint	از هم جدا
sets	مجموعه‌های
displacement	تغییر مکان
distance	فاصله
distributive	پخش پذیری
divergent	واگرا
divisible	بخش پذیر
divisor	مقسوم علیه
dodecagon	دوازده ضلعی
dodecahedron	دوازده وجهی
domain	قلمرو
dot product	حاصل ضرب (ضرب) نقطه‌ای
double — angle formulas	دستورهای زاویه مضاعف
double — valued function	تابع دومقداری
dummy	ظاهری
index	زیر نویس
variable	متغیر
duodecimal scale	مقیاس دوازدهی
duplication formulas	دستورهای دوبرابر
Earth	زمین
eccentric angle	زاویه خروج از مرکز
eccentricity	خروج از مرکز
elastic spring	فنر قابل ارتجاع
electromotive force	نیروی محرکه
elementary algebra	جبر مقدماتی
elevation	ارتفاع
elimination	حذف
method	روش
process	فرایند
ellipse	بیضی

elliptical reflector	آینه بیضوی
elliptic integral	انتگرال بیضوی
empty	تهی
set	مجموعه
endpoint	نقطه انتهائی
energy	انرژی
engineering	مهندسی
entry	درایه
envelope	پوش
equation	معادله
equilateral triangle	مثلث متساوی‌الاضلاع
equipotential lines	خطوط هم پتانسیل
equivalent	معادل، هم ارز
erg	ارگ
error term	جمله خطا
euclidean	اقلیدسی
geometry	هندسه
space	فضای
even	زوج
function	تابع
integer	عدد
exhaustion	اشباع
property	خاصیت
existence — uniqueness theorem	قضیه وجودی — یکتائی
expansion	انبساط، بسط
expectation	امید ریاضی
exponent	نما
exponential function	تابع نمائی
extension	تعمیم، توسیع
extreme value	مقدار اکستریم
theorem	قضیه
extremum	اکسترمم
factor	سازه
factorial	فاکتوریل

function	تابع
figure — eight curve	منحنی شکل هشت
finer than	ظریفتر از
finite	متناهی
base	پایه
dimensional	با بعد
linear combination	ترکیب خطی
fixed	ثابت
fixed point	نقطه ثابت
theorem	قضیه
fluid mechanics	مکانیک سیالات
focus	کانون
force	نیرو
formal	صوری
four - leaf clover	شبدر چهاربرگ
four - leaved rose	رز چهاربرگ
frequency	فرکانس
friction	اصطکاک
functional equation	معادله تابعی
function space	فضای تابعی
gamma function	تابع گاما
general solution	جواب عمومی
generator	مولد
geology	زمین شناسی
geometric	هندسی
mean	میانگین
progression	تصاعد
relationship	رابطه
series	سری
vector	بردار
graph	نمودار
greatest	بزرگترین
integer in x	عدد صحیح در x
lower bound	کران پائینی

half — life	نیمه عمر
half — open	نیمباز
interval	بازه
harmonic	توافقی
mean	میانگین
series	سری
helix	مارپیچ
hemispherical	نیمه کروی
homogeneous	همگن
equation	معادله
system	دستگاه
homogeneous property	خاصیت همگنی
horizontal	افقی
base	پایه
hyperbolic	هذلولوی
cosine	کسینوس
function	تابع
paraboloid	سه‌می‌گون
reflector	آینه
sine	سینوس
tangent	تانژانت
hypotenuse	وتر (مثلث قائم‌الزاویه)

ice — cream — cone proof	اثبات قیف بستنی
icosahedron	بیست وجهی
identity	اتحاد
identity	همانی
element	عنصر
function	تابع
matrix	ماتریس
if and only if	اگر و فقط اگر
image of x under f	نقش x تحت f
imaginary	موهومی
axis	محور
number	عدد

part	قسمت
unit	یکه
implicit	ضمنی
differentiation	مشتقگیری
improper	مجازی
integral	انتگرال
increasing	صعودی
sequence	دنباله
indefinite integral	انتگرال نامعین
indeterminate forms	صور مبهم
index of summation	زیر نویس جمعبندی
inductance	ضریب سلف
induction	استقرا
inductive set	مجموعه استقرائی
inductor	سلف
infimum	اینفیمم
infinite	نامتناهی
dimensional	با بعد
discontinuity	ناپوستگی
integral	انتگرال
series	سری
limit	حد
infinitely differentiable	بی نهایت بار مشتقپذیر
infinitesimal	بی نهایت کوچک
infinity	بی نهایت
initial	اولیه
condition	شرط
point	نقطه
— value problem	مسئله با مقدار
velocity	سرعت
inner sum	مجموع داخلی
instantaneous velocity	سرعت لحظه‌ای
integer	عدد صحیح
integrability	انتگرالپذیری
integrable	انتگرالپذیر

integral	انتگرال
calculus	حساب
curve	منحنی
logarithm	لگاریتمی
test	آزمون
integrand	انتگرالده
integration	انتگرالگیری
by partial fractions	بوسیله کسره‌های جزئی
by parts	بطریقه جزء به جزء
by substitution	بوسیله جانشانی
operator	عملگر
intercepts	برخورد با محورها
interior	درون
intermediate — value theorem	قضیه مقدار میانی
intersection	اشترک، فصل مشترک
interval	بازه
of constancy	ثبات
of convergence	همگرایی
of integration	انتگرالگیری
invariance	پایایی
under similarity transformation	تحت تبدیل تشابه
under translation	تحت انتقال
inverse	معکوس
irrational	گنگ
number	عدد
irreducible	تحویل ناپذیر
isocline	یکشیبه
isolated point	نقطه تنها
isolated real root	ریشه حقیقی منزوی
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
isosceles triangle	مثلث متساوی الساقین
isothermal lines	خطوط همدمای
isothermals	یکدمایها

jump discontinuity	نا پیوستگی جهشی
Jupiter	مشتری
kernel	هسته
largest member	بزرگترین عضو
lateral surface	سطح جانبی
lattice point	نقطه شبکه‌ای
latus rectum	وتر کانونی
law	قانون
of conservation	بقا
of cooling	تبرید
Pascal's triangle	مثلث پاسکال
lazy eight	هشت تنبل
leap	پرش
least upper bound	کوچکترین کران بالائی
axiom	اصل
left — hand	سمت چپ
continuity	پیوستگی
limit	حد
left — handed coordinate system	دستگاه مختصات دست چپی
left inverse	معکوس چپ
level curves	منحنیهای تراز
limacon	لیماسون
limit	حد
function	تابع
limit comparison test	آزمون مقایسه‌ای حدی
limits of integration	حدود انتگرالگیری
linear	خطی
combination	ترکیب
dependence	وابستگی
equation	معادله
factor	سازه
function	تابع
independence	استقلال

motion	حرکت
span	پیمای
transformation	تبدیل
linearity property	خاصیت خطی
linearity with respect to the integrand	خطی بودن نسبت به انتگرالده
linearly independent	مستقل خطی
set	مجموعه
line segment	پاره خط
lines of flow	خطوط جریان
locus	مکان هندسی
logarithmic	لگاریتمی
differentiation	مشتقگیری
series	سری
loop	حلقه
lower	پائینی
bound	کران
integral	انتگرال
limit	حد
major axis	محور اطول
mass density	جرم مخصوص
mathematical	ریاضی
induction	استقرای
model	نمونه
physics	فیزیک
mathematics	ریاضیات
matrix	ماتریس (ی)
representation	نمایش
maximum element	عنصر ماکزیمم
mean distance	فاصله میانگینی
mean value	مقدار میانگین
formula	دستور
theorem	قضیه
measurable	اندازه پذیر
set	مجموعه

mechanics	مکانیک
Mercury	عطارد
method	روش
of exhaustion	اشباع
of successive bisection	دو نیم سازی متوالی
of undetermined coefficients	ضرائب نامعلوم
midpoint	نقطه میانی
minimum element	عنصر مینیمم
minor axis	محور اقصی
minus infinity	منهای بی نهایت
modulus	کابلد
moment	گشتاور
of inertia	ماند
momentum	اندازه حرکت
monotone	یکنوا (ئی)
property	خاصیت
monotonic decreasing	نزولی
monotonic function	تابع یکنوا
monotonic increasing	صعودی
monotonic sequence	دنباله یکنوا
multiplicative property	خاصیت ضرب پذیری
napierian logarithm	لگاریتم نپر
napkin — ring	حلقه دستمال سفره
nappe	دامنه
natural logarithm	لگاریتم طبیعی
n — dimensional	n بعدی
point	نقطه
vector	بردار
necessary and sufficient condition	شرط لازم و کافی
negative	قرینه، منفی
neighborhood	همسایگی
nested intervals	بازه های تو در تو
nonempty	نا تهی
non — euclidean geometry	هندسه غیر اقلیدسی

nonhomogeneous	غیر هم‌گن
equation	معادله
system	دستگاه
nonnegative	نامنفی (بودن)
property	خاصیت
nonrectifiable	با طول نامتناهی
curve	منحنی
nonsingular	غیر استثنائی
matrix	ماتریس
nontrivial	غیر بدیهی
solution	جواب
norm	نرم
normal	قائم
component	مؤلفه
force	نیروی
vector	بردار
normalized	نرمیده شده
polynomial	چند جمله‌ای
notation	نماد
n - space	فضای n بعدی
n th	n م
derivative	مشتق
root	ریشه
- root function	تابع ریشه
term	جمله
n - tuple	n تایی
nullity	پوچی
nullity plus rank theorem	قضیه پوچی بعلاوه رتبه
null space	فضای پوچ
number	عدد
octahedron	هشت وجهی
odd	فرد
function	تابع
integer	عدد

one — element set	مجموعه تک عنصری
one — parameter family	خانواده یک پارامتری
one — sided limits	حدود یکطرفه
one — to — one	یک به یک
mapping	نگاشت
transformation	تبدیل
o — notation	نماد o
open	باز
interval	بازه
order	ترتیب
axioms	اصول موضوع
order	مرتبه
ordered	مرتب
field	میدان
pair	جفت
ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
ordinate set	مجموعه عرضی
orthogonal	متعامد
complement	متمم
decomposition theorem	قضیه تجزیه
matrix	ماتریس
set	مجموعه
orthogonality relations	روابط تعامد
orthogonalization	عمود سازی
process	فرایند
theorem	قضیه
orthogonal trajectories	مسیرهای قائم
orthonormal	متعامد یکه
basis	پایه
set	مجموعه
oscillation	نوسان
osculating	بوسان
circle	دایره
plane	صفحه
outer sum	مجموع خارجی

pair	جفت
parabola	پارهیمی
parabolic reflector	آینه سهمی
parabolic segment	قطعه سهمی
parallel	موازی
parallellepipiped	متوازی السطوح
parallelogram	متوازی الاضلاع
law	قانون
parameter	پارامتر
parametric	پارامتری
equation	معادله
interval	بازه
partial	جزئی
fractions	کسرها
summation formula	دستور جمع بندی
partial derivative with respect to	مشتق جزئی نسبت به
partial differential equation	معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
particle	جسم
particular solution	جواب خصوصی
partition	افراز
perimeter	محیط
period	دوره تناوب
periodic	متناوب
motion	حرکت
period - interval	بازه تناوب
permutation	جابجایی
perpendicular	عمود برهم
phase angle	زاویه فاز
physics	فیزیک
piecewise	قطعه قطعه
constant	ثابت
continuous	پیوسته
linear	خطی

monotone	یکنوا
pitch	پا
of the helix	مارپیچ
plane	صفحه
plane curve	منحنی مسطح
planetary motion	حرکت سیارات
plus infinity	بعلاوه بی نهایت
point	نقطه
of inflection	عطف
of tangency	تماس
point - slope form	نقطه نما - شیب نما
pointwise convergence	همگرایی نقطه به نقطه
polar	قطبی
angle	زاویه
coordinates	مختصات
form	شکل
polynomial	چندجمله‌ای
approximation	تقریب
function	تابع
in two variables	دومتغیره
position	مکان
function	تابع
vector	بردار
positive integer power - function	تابع توانی با توان عدد صحیح مثبت
postage function	تابع پستی
postulate	اصل مسلم (اصل)
power function	تابع توانی
power - series expansion	بسط بصورت سری توانی
prime	اول
- number function	تابع اعداد
primitive	اولیه
function	تابع
principal argument	شناسه عمده
principal normal	قائم اصلی
principle of mathematical induction	اصل استقرای ریاضی

prescribed values	مقادیر مقرر
prismoid formula	دستور منشورگون
probability	احتمال
product	ضرب (حاصلضرب)
notation	نماد
projection	تصویر •
of x along y	xy در امتداد y
proof by induction	اثبات باستقرا
proper	حقیقی
rational function	تابع گویای
subset	زیر مجموعه
pseudo — ordering	ترتیب نامی
pth — power mean	میانگین توانی p ام
pure mathematics	ریاضیات محض
pursuit problem	مسئله تعقیب
pythagorean identity	اتحاد فیثاغورس
quadrant	ربع
quadratic	درجه دوم
polynomial	چند جمله‌ای
quadrilateral	چهار ضلعی
quadruple	چهار تایی
quartic	درجه چهارم
equation	معادله
polynomial	چند جمله‌ای
quaternion	کوترنیون
quotient	خارج قسمت
racecourse paradox	پارادکس مسابقه
radial	شعاعی
acceleration	شتاب
component	مؤلفه
distance	فاصله
set	مجموعه
radian	رادیان

measure	مقیاس
radioactive decay	تحلیل رادیواکتیو
radius	شعاع
of convergence	همگرایی
of curvature	انحناء
of gyration	چرخش
range	برد
of a function	یک تابع
rank	رتبه
rate	میزان
of change	تغییر
of growth	رشد
rational	گویا
function	تابع
number	عدد
ratio test	آزمون نسبت
real	حقیقی
axis	محور
function	تابع
line	خط
number	عدد
— number system	دستگاه اعداد
part	قسمت
power series	سری توانی
real — valued function	تابع حقیقی
rearrangement	تجدید آرایش
theorem	قضیه
reciprocal	معکوس، متقابل
rectangle parallelepiped	مکعب مستطیل
rectifiable curve	منحنی با طول متناهی
rectilinear motion	حرکت مستقیم الخط
recursion formula	دستور بازگشتی
recursive definition	تعریف بازگشتی
reduced equation	معادلهٔ تقلیل یافته

refinement	تظریف
reflection property	خاصیت انعکاسی
region	ناحیه
related rates	میزانهای وابسته
relative	نسبی
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
remainder	باقیمانده
in Taylor's formula	در دستور تیلور
removable discontinuity	ناپوستگی رفع شدنی
resistor	مقاومت
resonance frequency	فرکانس رزونانس
revolution	دوار
rhombus	لوزی
Riemann zeta - function	تابع زتای ریمان
right circular cone	مخروط مستدیر قائم
right cylindrical solid	جسم استوانه‌ای قائم
right - hand	سمت راست
continuity	پیوستگی
limit	حد
rule	قاعده
right - handed coordinate system	دستگاه مختصات دست راستی
right inverse	معکوس راست
right triangle	مثلث قائم الزاویه
rigid motion	حرکت جسم صلب
rocket	موشک
root mean square	جذر میانگین مربعات
root test	آزمون ریشه
rose petal	پررز
roster notation	نمادگذاری نوبتی
round - off error	خطای ناشی از گرد شدن
row	سطر (ی)
matrix	ماتریس
operations	اعمال
rule	قاعده

saddle — shaped	زینی شکل
scalar	اسکالر
multiple	مضرب
product	ضرب
triple product	حاصلضرب سه گانه
scale	مقیاس
science	علم
secant	سکانت
sector	قطاع
semicircle	نیمدایره
semicircular	نیمه مستدیر
separable	جدائی پذیر
equation	معادله
sequence	دنباله
of functions	توابع
series	سری
set	مجموعه
set function	تابع مجموعه‌ای
set inclusion	شمول مجموعه‌ها
set theory	نظریه مجموعه‌ها
sign	علامت
— preserving property	خاصیت محفوظ ماندن
similar	متشابه
similarity transformation	تبدیل تشابه
simple harmonic motion	حرکت توافقی ساده
simultaneous inequalities	نامساویهای همزمان
sine	سینوس
singular	استثنائی
matrix	ماتریس
skew symmetry	شبه تقارن
slope	شیب
of a line	یک خط
smallest member	کوچکترین عضو
small — span theorem	قضیه پیدای کوچک

social sciences	علوم اجتماعی
solid	جسم
Cavalieri	کاوالیری
solid sphere	کره توپر
solution	جواب، حل
space communication	ارتباطات فضائی
space curve	منحنی فضائی
span	پیمای
spanned	پیموده شده
speed	تندی، سرعت
S perpendicular	قائم بر S
sphere	کره
spiral of Archimedes	مارپیچ ارشمیدس
square	مربع (ی)
matrix	ماتریس
square root	ریشه دوم
function	تابع
squeezing principle	اصل فشار
stable	پایدار
standard form	شکل متعارف
steady — state current	شدت جریان حالت پایدار
steepness	شیب
step	پله‌ای
function	تابع
region	ناحیه
straight line	خط مستقیم
stream lines	خطوط سیلان
strict inequality	نامساوی اکید
strictly	اکیداً
decreasing	نزولی
increasing	صعودی
monotonic	یکنوا
strip	نوار
subinterval	زیر بازه
subset	زیر مجموعه

subspace	زیر فضا
substitution property	خاصیت جانشانی
successor	تالی
sum	مجموع
function	تابع
summand	مجموعه
summation	جمع‌بندی
notation	نماد
supremum	سوپریمم
surface	سطح
symbolic logic	منطق صوری
symmetric about the origin	متقارن نسبت به مبدأ
system	دستگاه
tangent	تانژانت
tangent	مماس
line	خط
tangential component	مؤلفه مماسی
technology	صنعت
telescoping property	خاصیت توی هم روی
telescoping series	سری توی هم روی
term	جمله
terminal point	نقطه انتهائی
terminology	اصطلاح
test ratio	نسبت آزمونی
tetrahedron	چهاروجهی
theory	نظریه
of electricity	الکتریسته
of integration	انتگرالگیری
of magnetism	مغناطیس
of sets	مجموعه‌ها
tractrix	کشاننده
transient current	شدت جریان گذرا
transitive law	قانون تعدی
transpose	ترانهاد

transverse	مقاطع
axis	محور
component	مؤلفه
trapezoid.	ذوزنقه
triangle inequality	نامساوی مثلثی
trichotomy law	قانون تثلیث
trigonometric	مثلثاتی
function	تابع
identity	اتحاد
triple	سه تایی
trivial	بدیهی
representation	نمایش
solution	جواب
twelve - sided polygon	دوازده ضلعی منتظم
two - sided theorem	قضیه دو طرفه
unbounded	بی کران
above	از بالا
interval	بازه
sequence	دنباله
undercritical damping	میراثی تحت بحرانی
undetermined coefficients	ضرائب نامعلوم
uniform	یکشکل
continuity	پیوستگی
convergence	همگرایی
union	اجتماع
unit	یکه
disk	قرص
distance	فاصله
matrix	ماتریس
tangent	مماس
unitary space	فضای یکه‌ای
unit coordinate vectors	بردارهای یکه مختصات
universal set	مجموعه عمومی
unstable	ناپایدار

upper	بالائی
bound	کران
integral	انتگرال
limit	حد
variance	پراش
variation of parameter	تغییر پارامتر
vector	بردار (ی)
algebra	جبر
equation	معادله
space	فضای
vector — valued function	تابع برداری
velocity	سرعت
function	تابع
Venus	زهره
vertex	رأس
vertical	قائم
asymptote	مجانِب
vibrations	ارتعاشات
void set	مجموعه خالی
volume	حجم
function	تابع
wave motion	حرکت موجی
Weierstrass M — test	آزمون M وایر اشتراس
weighted	وزندار
average	متوسط
mean — value theorem	قضیه مقدار میانگین
weight function	تابع وزن
well — ordering principle	اصل خوش ترتیبی
work	کار
x — axis	محور x
x — coordinate	مختص x
x — intercept	طول از مبدأ

xy - plane

صفحه xy

y - intercept

عرض از مبدأ

Zeno's paradox

پارادکس زنو

zero

صفر

- derivative theorem

قضیه مشتق

matrix

ماتریس

of multiplicity m

از تکرار m

vector

بردار

z - intercept

ارتفاع از مبدأ

فهرست راهنما

Abel (Niels Henrik)	آبل، ۵۰۵
Appolonius	آپولونیوس، ۶۲۴
Arbogast (Louis)	آربوگاست، ۲۱۳
arc	آرک
tangent	تانژانت، ۳۱۶
sine	سینوس، ۳۱۴
cosine	کسینوس، ۳۱۴
test	آزمون
root	ریشه، ۴۹۶
ratio	نسبت، ۴۹۷
Weierstrass M - test for uniform convergence	آزمون M وایراشتراس برای همگرایی یکشکل، ۵۳۱
test(s) for convergence	آزمون(ها) برای همگرایی، ۴۸۹-۵۰۶
Abel's	آبل، ۵۰۶
Dirichlet's	دیریکله، ۵۰۶
Gauss'	گوس، ۵۰۰ (تمرین ۱۷)
comparison tests for convergence	آزمونهای مقایسه‌ای برای همگرایی
of improper integral	انتگرالهای مجازی، ۵۱۹
of series	سریها، ۴۹۱-۴۹۲
Raabe's convergence test	آزمون همگرایی راآب، ۵۰۰ (تمرین ۱۶)
elliptic reflector	آینه بیضوی، ۶۵۰
parabolic mirrors	آینه‌های سهموی، ۶۵۰
identity	اتحاد
pythagorean	فیثاغورس، ۷۱۹، ۵۸۴، ۵۶۶، ۱۲۰
Lagrange	لاگرانژ، ۶۰۴
proof by induction	اثبات باستقراء، ۴۸-۴۲

union of sets	اجتماع مجموعه‌ها، ۱۶
vibrations	ارتعاشات، ۴۱۷
damped	میرا، ۴۱۷
Archimedes	ارشمیدس، ۳-۸، ۳۳
induction	استقرا
definition by	تعریف به، ۵۰
proof by	اثبات به، ۴۸-۴۲
mathematical induction	استقرای ریاضی، ۴۸-۴۲
Stokes (George Gabriel)	استوکس، ۵۲۷
scalar	اسکالر، ۵۵۵، ۵۸۳
exhaustion	اشباع
property of area	خاصیت مساحت، ۷۵
method of	روش، ۸-۳
intersection of sets	اشتراک مجموعه‌ها، ۱۷
Schmidt (Erhard)	اشمیت، ۷۱۳
principle	اصل
well - ordering	خوش ترتیبی، ۴۴
squeezing... for limits	فشار برای حدود، ۱۶۷
Cavalieri's	کاوالیری، ۱۴۰-۱۴۱
axiom(s)	اصل موضوع(ها)
for volume	برای حجم، ۱۴۱
for real - number system	برای دستگاه اعداد حقیقی، ۳۳-۲۱
for area	برای مساحت، ۷۴، ۷۵
for a linear space	برای یک فضای خطی، ۶۸۹، ۶۹۰
closure	بسته بودن، ۶۸۹
completeness (continuity)	تامیت (پیوستگی)، ۳۲
order	ترتیب، ۲۵
least - upper - bound	کوچکترین کران بالائی، ۳۲
field	میدان، ۲۱
Peano postulates for the integers	اصول پئانو برای اعداد صحیح، ۲۱
numbers	اعداد
axioms for real	اصول موضوع برای... حقیقی، ۳۳-۲۱
prime	اول، ۴۷ (تمرین ۱۱)، ۶۴
real	حقیقی، ۲۱
Fibonacci	فیبوناچی، ۵۹ (تمرین ۱۶)، ۴۷۱

irrational	گنگ، ۲۱، ۲۹، ۳۶، ۴۰، ۳۵۰
complex	مختلط، ۴۶۵-۴۴۶
algebraic operations on matrix	اعمال جبری بر ماتریس، ۷۵۲، ۷۵۵
partition	افراز، ۷۸
Euclid	اقلیدس، ۱۰، ۵۸۷
extremum	اکسترمم
tests for	آزمون‌نهایی برای، ۲۳۳، ۲۳۴
definition of	تعریف، ۲۲۶
integral	انتگرال
test	آزمون، ۴۹۳
elliptic	بیضوی، ۶۶۹ (تمرین ۱۷)
lower and upper	پائینی و بالائی، ۹۴
of exponential function	تابع نمائی، ۳۰۴
improper	مجازی، ۵۲۲-۵۱۷
definite	معین، ۹۳، ۲۶۱
curve	منحنی، ۴۲۵
indefinite	نامعین، ۱۵۲، ۱۶۷
of a vector - valued function	یک تابع برداری، ۶۴۲
of a step function	یک تابع پله‌ای، ۸۳
of a bounded function	یک تابع کراندار، ۹۳
of a complex - valued function	یک تابع مختلط، ۴۵۹
integrability	انتگرالپذیری
of a continuous function	یک تابع پیوسته، ۱۹۰
of a monotonic function	یک تابع یکنوا، ۹۸
integrand	انتگرالده، ۹۴
integration	انتگرالگیری
of logarithmic function	ازتابع لگاریتمی، ۲۸۸
of rational functions	ازتوابع گویا، ۳۲۸-۳۲۰
of trigonometric functions	ازتوابع مثلثاتی، ۱۲۲، ۲۵۵، ۳۲۸
of monotonic functions	ازتوابع یکنوا، ۱۰۰
of polynomials	ازچندجمله‌ایها، ۱۰۰، ۱۰۳
of series	ازسریها، ۵۳۷
by parts	بطریقۀ جزء به جزء، ۲۷۲-۲۶۸
by substitution	بوسیلهٔ جانشانی، ۲۶۷-۲۶۲

by partial fractions	بوسیله کسرهاى جزئى، ۳۲۸-۳۲۰
improper integral	انتگرال مجازى
of the first kind	نوع اول، ۵۱۷
of the second kind	نوع دوم، ۵۲۰
divergent	واگرا، ۵۱۷، ۵۲۰
curvature	انحناء، ۶۷۱
primitive (antiderivative)	اوليه (پاد مشتق)، ۲۵۲، ۲۶۷-۲۶۰
Euler (Leonard)	اويلر، ۲۸۶، ۴۶۹، ۴۹۳، ۵۰۳، ۵۲۲
e	اى (پايۀ لگارىتم طبيعى)
definition of	تعريف، ۲۸۶
irrationality of	گنگ بودن، ۳۵۰
computation of	محاسبه، ۳۴۹
infimum	اينفيمم، ۳۲
Barrow (Isaac)	بارو، ۱۹۶
interval(s)	بازه (ها)، ۷۷، ۳۸۵
open	باز، ۷۷
closed	بسته، ۷۷
of convergence of power series	همگرائى سري توانى، ۵۳۶
remainder	باقيمانده
in Taylor's formula	در دستور تيلور، ۳۵۹-۳۴۶
Cauchy's... in Taylor's formula	كشى در دستور تيلور، ۳۵۳
Lagrange's... in Taylor's formula	لاگرانژ در دستور تيلور، ۳۵۲
intercepts	برخورد با محورها، ۲۳۵، ۶۲۰
vector(s)	بردار(ها)
equality of	تساوى، ۵۵۵
orthogonality of	تعامد، ۵۶۵
parallelism of	توازى، ۵۵۹
addition and subtraction	جمع و تفریق، ۵۵۷
direction of	جهت، ۵۵۹
angle between	زاویه بين، ۵۶۹، ۵۸۵ (تمرین ۷)
length (norm) of	طول (نرم)، ۵۶۲
zero	صفر، ۵۵۶
multiplication by scalars	ضرب در اسكالرها، ۵۵۶

dot product (inner product) of	ضرب نقطه‌ای (ضرب داخلی)، ۵۶۱
cross products of	ضرب‌های خارجی، ۶۰۴
normal ... to line	قائم بر خط، ۵۹۳
components of	مؤلفه‌های، ۵۵۵
tangent	مماس، ۶۴۸
unit tangent	مماس یکه، ۶۵۷
geometric	هندسی، ۵۵۷
unit coordinate	یکه مختصات، ۵۷۰
range of a function	برد یک تابع، ۶۸، ۷۲۷
Bernstein (Sergei)	برنشتاین، ۵۴۲
Bernoulli (Johann)	برنولی، ۲۹۱، ۳۴۳، ۳۸۰، ۴۱۲
Bernoulli	برنولی
polynomials	چندجمله‌ای‌های، ۲۷۸ (تمرین ۳۵)
differential equation	معادله دیفرانسیل، ۳۸۸
inequality	نامساوی، ۵۹ (تمرین ۱۴)
Brouncker (William)	برونکر، ۴۶۹، ۴۸۴
greatest lower bound	بزرگترین کران پائینی، ۳۲
axiomatic development	بسط اصل موضوعی
of vector algebra	جبر برداری، ۶۸۹، ۶۹۰
of volume	حجم، ۱۴۳-۱۳۹
of real - number system	دستگاه اعداد حقیقی، ۳۳-۲۱
of inner products	ضرب‌های داخلی، ۷۰۲
of area	مساحت، ۷۶-۷۳
decimal expansion of real numbers	بسط اعشاری اعداد حقیقی، ۳۰، ۳۹۳
dimension of a linear space	بعد یک فضای خطی، ۶۹۹
Boole (George)	بول، ۱۳
Bolzano (Bernard)	بولتزانو، ۱۷۸
Bolyai (Johann)	بویوئی، ۵۹۱
ellipse	بیضی، ۶۲۳، ۵۲۶، ۶۳۴
infinity	بی نهایت، ۳۶۹
Peano (Guiseppe)	پتانو، ۲۱
antiderivative (primitive)	پادمشتق (اولیه)، ۲۵۳
Zeno's paradox	پارادکس زنو، ۴۷۰-۴۶۵
parameter	پارامتر، ۶۴۸

Parseval (Mark — Antoine)	پارسوال، ۷۰۹
Pascal (Blaise)	پاسکال، ۳
basis	پایه، ۴۰۷، ۵۷۹
orthogonal	متعامد، ۵۷۹، ۷۱۳
base of logarithms	پایهٔ لگاریتمها، ۲۸۷
nullity	پوچی، ۷۲۸
envelope	پوش، ۴۲۶
π (pi)	پی
definition of	تعریف، ۱۱۵
computation of	محاسبه، ۳۵۴ (تمرین ۱۰)
linear span	پیمای خطی، ۵۷۴، ۶۹۷
continuity	پیوستگی
of composite function	تابع مرکب، ۱۷۵
of polynomial functions	توابع چند جمله‌ای، ۱۳۳
of trigonometric functions	توابع مثلثاتی، ۱۶۸، ۱۷۳
left — hand	سمت چپ، ۱۵۹
right — hand	سمت راست، ۱۵۹، ۱۶۴
function. (s)	تابع (ها)
integrable	انتگرالپذیر، ۹۴
range of	برد، ۶۷
vector — valued	بردار، ۶۴۱
greatest — integer	بزرگترین عدد صحیح، ۸۰
Bessel	بسل، ۵۵۰ (تمرین ۱۰)
unbounded	بی‌کران، ۹۳، ۵۱۷
step	پله‌ای، ۶۶
continuous	پیوسته، ۱۶۳
tangent	تانژانت، ۱۲۹
equality of	تساوی، ۶۸
defined by an integral	تعریف شده بوسیلهٔ یک انتگرال، ۱۵۲
formal definition of	تعریف صوری، ۶۷
difference of	تفاضل، ۱۶۶
division of	تقسیم، ۷۰
power	توانی، ۶۹، ۱۰۱
informal description of	توصیف غیر صوری، ۶۶-۶۳
constant	ثابت، ۶۸

polynomial	چند جمله‌ای، ۶۹
of several variables	چند متغیره، ۲۴۴
real (real — valued)	حقیقی، ۶۵
linear	خطی، ۶۸
Riemann zeta	زتای ریمان، ۴۹۳
even	زوج، ۱۰۵ (تمرین ۲۵)
increasing	صعودی، ۹۷
implicit	ضمنی، ۲۲۲
arc length	طول قوس، ۶۶۶
factorial	فاکتوریل، ۶۶
odd	فرد، ۱۰۵ (تمرین ۲۵)
piecewise linear	قطعه قطعه خطی، ۱۵۵
piecewise monotonic	قطعه قطعه یکنوا، ۹۷
domain of	قلمرو، ۶۸
cotangent	کتانژانت، ۱۲۹
bounded	کراندار، ۹۳
gamma	گاما، ۵۲۱، ۵۲۳ (تمرین ۱۹)
rational	گویا، ۲۰۷، ۳۳۰-۳۲۰
logarithmic	لگاریتمی، ۲۹۱-۲۸۴
periodic	متناوب، ۱۱۹
trigonometric	مثلثاتی، ۱۳۱-۱۱۹
set	مجموعه‌ای، ۷۳
convex	محدب، ۱۵۴، ۲۳۴
complex — valued	مختلط، ۴۵۸
composite	مرکب، ۱۷۵، ۷۳۴
characteristic	مشخص، ۸۲ (تمرین ۸)
inverse	معکوس، ۱۸۲، ۳۱۲
elementary	مقدماتی، ۳۵۱
concave	مقعر، ۱۵۴، ۲۳۴
position	مکان، ۶۵۱، ۶۷۵
decreasing	نزولی، ۹۷
exponential	نمایی، ۲۹۹، ۴۵۵
notation for	نمادهائی برای، ۶۴، ۲۴۴، ۶۴۱
hyperbolic	هذلولوی، ۳۱۰
identity	همانی، ۶۵

monotonic	یکنوا، ۹۷
step function	تابع پله‌ای، ۷۹
integral of	انتگرال، ۸۳
sine function	تابع سینوس
integration of	انتگرالگیری از، ۱۲۵، ۲۵۵
continuity of	پیوستگی، ۱۶۸، ۱۷۳
properties of	خواص، ۱۲۰
power series for	سری توانی برای، ۵۴۱
complex - valued	مختلط، ۴۶۳ (تمرین ۹)
differentiation of	مشتقگیری از، ۲۰۲
differential equation for	معادله دیفرانسیل برای، ۴۰۲
cosine function	تابع کسینوس
integration of	انتگرالگیری از، ۱۲۵، ۲۵۵
continuity of	پیوستگی، ۱۶۸، ۱۷۳
properties of	خواص، ۱۲۰
power series for	سری توانی برای، ۵۴۱
complex - valued	مختلط، ۴۶۳ (تمرین ۹)
differentiation of	مشتقگیری از، ۲۰۲
differential equation for	معادله دیفرانسیل برای، ۴۰۲
rational function	تابع گویا
proper	حقیقی، ۳۲۲
of two variables	دومتغیره، ۳۲۸
improper	مجازی، ۳۲۲
logarithmic function	تابع لگاریتمی
integration of	انتگرالگیری از، ۲۹۰
definition of	تعریف، ۲۸۱
power series for	سری توانی برای، ۴۸۴، ۵۳۸
calculation	محاسبه، ۲۹۵-۲۹۸
exponential function	تابع نمایی
integral of	انتگرال، ۳۰۴
definition of	تعریف، ۲۹۹
power series for	سری توانی برای، ۵۴۱
complex - valued	مختلط، ۴۵۷
derivative of	مشتق، ۳۰۳
Tartaglia	تارتاگلیا، ۳

transformation (s)	تبدیل (ها)
composite of	ترکیب، ۷۳۳
similarity	تشابه، ۱۱۵، ۴۳۵
linear	خطی، ۷۲۵
zero	صفر، ۷۲۶
Lorentz	لورنتس، ۷۷۱ (تمرین ۶)
inverse	معکوس، ۷۳۵، ۵۳۶
invertible	معکوسپذیر، ۷۳۷-۷۳۵
one — to — one	یک به یک، ۷۳۶
rearrangements of series	تجدید آرایشهای سریها، ۵۱۴-۵۱۰
radioactive decay	تحلیل رادیواکتیو، ۳۸۹
transpose of a matrix	ترانزپوزیته یک ماتریس، ۷۷۲ (تمرین ۷)
equality	تساوی
of complex numbers	اعداد مختلط، ۴۴۷
of vectors	بردارها، ۵۵۷، ۵۸۳
of functions	توابع، ۶۸
of sets	مجموعهها، ۱۴
projections	تصاویر، ۵۶۸، ۵۶۹، ۷۲۰
refinement of a partition	تقریف یک افراز، ۷۹
orthogonality (perpendicularity)	تعامد
of vectors	بردارها، ۵۶۵
of lines	خطوط، ۲۱۲
in a euclidean space	در یک فضای اقلیدسی، ۷۰۷
of sine and cosine	سینوس و کسینوس، ۱۳۳ (تمرین ۳۱)
of planes	صفحات، ۶۲۰
of curves	منحنیها، ۴۳۷
geometric interpretation	تعبیر هندسی
of integral as area	انتگرال بعنوان مساحت، ۸۳، ۹۵، ۱۱۱
of derivative as slope	مشتق بعنوان شیب، ۲۱۰
definition	تعریف
axiomatic ... of area	اصل موضوعی مساحت، ۷۶-۷۴
of extremum	اکسترمم، ۲۲۶
of definite integral	انتگرال معین، ۹۳
recursive	بازگشتی، ۵۱
of continuous function	تابع پیوسته، ۱۶۳، ۴۵۹، ۶۴۳

- of logarithmic function تابع لگاریتمی، ۲۸۱
- of exponential function تابع نمائی، ۲۹۹
- of line خط، ۵۸۸
- of arc length طول قوس، ۶۶۲، ۶۶۳
- of matrix ماتریس، ۷۴۴، ۷۵۱
- of curve منحنی، ۶۴۷
- Cauchy's extension of mean — value theorem
- تعمیم کنشی قضیه مقدار میانگین، ۲۳۵
- variation of parameters تغییر پارامترها، ۴۱۲
- difference تفاضل
- of real numbers اعداد حقیقی، ۲۲
- of vectors بردارها، ۵۵۶
- of functions توابع، ۱۶۶
- of sets مجموعه‌ها، ۱۷
- approximations تقریبه‌ها
- by polynomials بوسیله چندجمله‌ایها، ۳۳۸-۳۷۶، ۷۲۱
- by trigonometric polynomials بوسیله چندجمله‌ایهای مثلثاتی، ۷۲۱
- in a euclidean space در یک فضای اقلیدسی، ۷۲۵
- division تقسیم
- of numbers اعداد، ۲۳، ۴۴۸
- of functions توابع، ۷۵
- one — to — one correspondence تناظر یک به یک، ۴۴۹، ۵۱۲
- speed
- angular زاویه‌ای، ۶۵۲، ۶۸۱ (تمرین ۱۹)
- continuous functions توابع پیوسته
- integrability of انتگرالپذیری، ۱۹۵
- definition of تعریف، ۱۶۳، ۴۵۹، ۶۴۳
- theorems on قضایائی در باب، ۱۶۵، ۱۹۲-۱۷۵
- polynomial functions توابع چندجمله‌ای، ۶۹
- integration of انتگرالگیری از، ۱۰۵، ۱۰۲
- continuity of پیوستگی، ۱۶۶
- of two variables دو متغیره، ۳۲۸
- differentiation of مشتقگیری از، ۲۵۶
- trigonometric functions توابع مثلثاتی
- integration of انتگرالگیری از، ۱۲۵

continuity of	پیوستگی، ۱۶۸، ۱۷۳
geometric description of	توصیف هندسی، ۱۳۰-۱۲۷
fundamental properties of	خواص اساسی، ۱۱۹
power series for	سریهای توانی برای، ۵۴۱
complex — valued	مختلط، ۴۶۳ (تمرین ۹)
differentiation of	مشتقگیری از، ۲۰۲
graphs of	نمودارهای، ۱۳۵
parallelism	توازی
of vectors	بردارها، ۵۵۹
of lines	خطوط، ۵۹۰
of planes	صفحات، ۵۹۸
rational powers	توانهای گویا، ۳۸، ۱۶۹، ۲۰۷، ۲۵۴
Toricelli (Evangelista)	توریچلی، ۳
Taylor (Brook)	تیلور، ۳۳۹
constant	ثابت
Euler	اوایلر، ۵۰۳
arbitrary	دلخواه، ۲۶۰، ۳۸۱
permutation	جایگشت، ۵۱۲
root mean square	جذر میانگین مربعات، ۵۹ (تمرین ۱۶)
mass density	جرم مخصوص، ۱۴۹
Cavalieri solid	جسم کاوالیری، ۱۴۰
ordered pairs	جفت‌های مرتب، ۶۲، ۶۷، ۴۴۷
addition and subtraction of vectors	جمع و تفریق بردارها، ۵۵۵
solutions of differential equations	جوابهای معادلات دیفرانسیل، ۳۸۰
direction of vector	جهت بردار، ۵۵۹
polynomial (s)	چندجمله‌ای (ها)
Bernoulli	برنولی، ۲۷۸ (تمرین ۳۵)
Taylor	تیلور، ۳۳۵-۳۴۲
quadratic	درجه دوم، ۶۹
Legendre	لواندار، ۷۱۶

- solids of known cross section ۱۴۲ اجسام با مقطع عرضی معلوم،
 solids of revolution ۱۴۳ اجسام دوار، ۱۴۲،
 axiomatic definition of ۱۴۱ تعریف اصل موضوعی،
 limit(s) حد(ها)
 of integration ۹۴، ۱۱۱ انتگرالگیری،
 left— and right— hand سمت چپ و سمت راست، ۱۶۲
 theorems on قضایائی درباره، ۱۶۵
 infinite نامتناهی، ۳۷۱—۳۷۳
 of a function یک تابع، ۱۶۰
 of a sequence یک دنباله، ۴۷۱
 one— sided یکطرفه، ۱۶۲
 motion حرکت
 harmonic توافقی، ۴۱۶
 simple harmonic توافقی ساده، ۴۱۶
 along a curve در امتداد یک منحنی، ۶۵۱
 periodic متناوب، ۴۱۷، ۴۲۲، ۶۸۳
 circular مستدیر، ۶۵۱
 of a rocket یک موشک، ۴۱۹
 calculus حساب دیفرانسیل و انتگرال
 fundamental theorems of قضایای اساسی، ۲۵۰، ۲۵۳، ۶۴۴
 solution of a differential equation حل یک معادله دیفرانسیل، ۳۸۰
 quotient خارج قسمت
 of numbers اعداد، ۲۳، ۴۴۹
 difference تفاضلی، ۱۹۷، ۱۹۹، ۶۴۸
 of functions توابع، ۷۰
 archimedean property of real numbers ۳۳ خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی،
 telescoping property خاصیت توی هم روی
 of products حاصلضربها، ۵۸
 of infinite series سریهای نامتناهی، ۴۸۰
 of finite sums مجموعههای متناهی، ۵۱
 additive property خاصیت جمعپذیری
 of the integral انتگرال، ۸۴، ۸۶، ۱۰۲، ۶۴۴
 of volume حجم، ۱۴۱
 foconvergent series سریهای همگرا، ۴۷۹

of the supremum and infimum	سوپریمم و اینفیمم، ۳۵
of arc length	طول قوس، ۶۶۵
of work	کار، ۱۴۶
of averages	متوسطها، ۱۵۱ (تمرین ۱۳)
of finite sums	مجموعهای متناهی، ۵۱
of area	مساحت، ۷۴
of derivatives	مشتقات، ۲۰۴
linearity property	خاصیت خطی
of integrals	انتگرالها، ۸۶، ۱۰۲
of convergent series	سریهای همگرا، ۴۷۹
of Taylor operators	عملگرهای تیلور، ۳۴۲
of derivatives	مشتقات، ۲۰۴
homogeneous property	خاصیت همگنی
of integrals	انتگرالها، ۸۴
of infinite series	سریهای نامتناهی، ۴۷۹
of finite sums	مجموعهای متناهی، ۵۱
family of curves	خانواده منحنیها، ۴۲۵، ۴۳۷
eccentricity of conic sections	خروج از مرکز مقاطع مخروطی، ۶۲۶
line(s)	خط(ها)
normal vector to	بردار قائم بر، ۵۹۳
contour	پیرامنی، ۲۴۵
definition of	تعریف، ۵۸۸
parallelism of	توازی، ۵۹۰
real (real axis)	حقیقی (محور حقیقی)، ۲۹
slope of	شیب، ۲۱۱، ۵۹۳
straight... in n -space	مستقیم در فضای n بعدی، ۵۸۸
vector equation of	معادله برداری، ۵۹۲
cartesian equation of	معادله دکارتی، ۵۹۳
tangent	مماس، ۲۱۱، ۶۴۸
equipotential	هم پتانسیل، ۴۳۷
error in Taylor's formula	خطا در دستور تیلور، ۳۴۶، ۳۴۸
directrix of conic sections	خط هادی مقاطع مخروطی، ۶۲۶
properties	خواص
of definite integral	انتگرال معین، ۱۰۱، ۱۰۲
of cosine function	تابع کسینوس، ۱۲۰

Dandelin (Cerminal P.)	داندلن، ۶۲۵
circle	دایره، ۶۲، ۶۵۲
of convergence	همگرایی، ۵۳۲
determinant	دترمینان، ۶۰۷
Dedekind (Richard)	ددکیند، ۲۱
system (s)	دستگاه (ها)
deductive	استنتاجی، ۱۰
left — hand coordinate	مختصات دست چپ، ۶۰۶
right — hand coordinate	مختصات دست راست، ۶۰۶
of linear equations	معادلات خطی، ۷۵۹
homogeneous ... of equations	معادلات همگن، ۷۶۰
formula(s)	دستور (ها)
recursion	بازگشتی، ۲۷۲ (تمرین ۸)، ۳۲۷، ۴۷۱
Parseval's	پارسوال، ۷۰۹
Taylor's ... with remainder	تیلور با باقیمانده، ۳۴۶
addition ... for sine and cosine	جمع برای سینوس و کسینوس، ۱۲۱
Abel's partial summation	جمع‌بندی جزئی آبل، ۵۰۵
Leibniz's ... for the nth derivative of a product	لایب‌نیتز برای مشتق n یک حاصلضرب، ۲۷۵ (تمرین ۴)
Cauchy's mean — value	مقدار میانگین کشی، ۲۳۰
Heron's	هرون، ۶۱۶
Descartes (Rene)	دکارت، ۵۵۴، ۶۱
sequence	دنباله، ۴۷۳ — ۴۷۰، ۵۳۱ — ۵۲۵
unbounded	بی‌کران، ۴۷۳
increasing	صعودی، ۴۷۳
bounded	کراندار، ۴۷۳
decreasing	نزولی، ۴۷۳
monotonic	یکنوا، ۴۷۳
cycloid	دورگون، ۶۷۰ (تمرین ۲۰)
Dirichlet (Peter Gustav Lejeune)	دیریکله، ۵۰۵
Raabe (Josef Ludvig)	راآب، ۴۹۹
vertex	رأس
of ellipse or hyperbola	بیضی یا هذلولی، ۶۳۲
of parabola	سهمی، ۶۳۵

Robinson (Abraham)	راینسون، ۲۱۴
direction field	راستای میدان، ۴۲۸
Roberval (Giles Persone De)	ربروال، ۳
quadrant	ربع، ۶۱
rank	رتبه، ۷۲۸
class of sets	ردهٔ مجموعه‌ها، ۱۸
population growth	رشد جمعیت، ۳۹۸، ۳۹۹
Rolle (Michel)	رول، ۲۲۸
Wronski (J. M. Hoene)	رونسکی، ۴۰۹
wronskian	رونسکیی، ۴۰۹ (تمرین ۲۱)، ۴۱۱
nth root	ریشهٔ n ، ۳۸، ۱۸۱
roots of complex numbers	ریشه‌های اعداد مختلط، ۴۶۳ (تمرین ۸)
square roots	ریشه‌های دوم، ۳۷
computation of	محاسبهٔ ۵۵۱ (تمرینات ۲۰، ۲۱)
Riemann (Georg Friedrich Bernhard)	ریمان، ۳، ۴۹۳، ۵۱۴
angle between vectors	زاویهٔ بین بردارها، ۵۵۵، ۵۶۹ (تمرین ۷)
earth	زمین، ۶۸۲
Zeno	زنو، ۴۶۵
angles	زوایا
in euclidean space	در فضای اقلیدسی، ۷۰۶
in n - space	در فضای n بعدی، ۵۶۹
radian measurment of	مقیاس رادیان، ۱۲۸
Venus	زهره، ۶۸۲
subspace of a linear space	زیرفضای یک فضای خطی، ۶۹۶
subsets	زیرمجموعه‌ها، ۱۵
velocity	سرعت، ۱۹۸، ۶۵۱
in polar coordinates	در مختصات قطبی، ۶۷۶
angular	زاویه‌ای، ۶۸۱ (تمرین ۱۹)
average	متوسط، ۱۹۷
series	سری
integration of	انتگرال‌گیری از، ۵۳۷
conditionally convergent	بطور مشروط همگرا، ۵۰۴
absolutely convergent	بطور مطلق همگرا، ۵۰۴

uniformly convergent	بطور یک‌شکل همگرا، ۵۲۹
harmonic	توافقی، ۴۷۷
power	توانی، ۴۸۴، ۵۳۲
telescoping	توی هم رو، ۴۸۵
Taylor's	تیلور، ۵۳۹
binomial	دوجمله‌ای، ۴۶۹، ۵۴۸
sine and cosine	سینوس و کسینوس، ۵۴۱
Gregory's	گرگوری، ۵۰۱
logarithmic	لگاریتمی، ۵۳۸
alternating	متناوب، ۵۰۰
differentiation of	مشتق‌گیری از، ۵۳۱، ۵۳۷
exponential	نمایی، ۵۴۲
pointwise convergence of	همگرایی نقطه به نقطه، ۵۲۸
convergent and divergent	همگرا و واگرا، ۴۷۷
geometric	هندسی، ۴۸۵-۴۸۲
power series for sine function	سری توانی برای تابع سینوس، ۵۴۱
power series for trigonometric functions	سری توانی برای توابع مثلثاتی، ۵۴۱
Taylor's series of a function	سری تیلور یک تابع، ۵۳۹
surface	سطح، ۲۴۵
row	سطر(ی)
operations	اعمال، ۷۶۳
matrix (row vector)	ماتریس (بردار سطری)، ۷۵۲
parabola	سه‌می، ۲، ۶۹، ۶۲۳، ۶۲۶، ۶۳۴
hyperbolic paraboloid	سه‌می‌گون هذلولوی، ۲۴۶
Siedel (phillipp Ludvig Von)	سیدل، ۵۲۷
skew — symmetry	شبه تقارن، ۶۰۴
acceleration	شتاب، ۲۰۰، ۶۵۱
in polar coordinates	در مختصات قطبی، ۶۷۵
angular	زاویه‌ای، ۶۸۱ (تمرین ۱۹)
radial	شعاعی، ۶۷۷، ۶۸۳
normal and tangential components	مؤلفه‌های قائم و مماس، ۶۵۹
necessary and sufficient conditions	شرایط لازم و کافی، ۴۹۰
initial condition	شرط اولیه، ۳۸۲

radius	شعاع
of curvature	انحناء، ۶۷۲
of gyration	چرخش، ۱۵۰
of convergence	همگرایی، ۵۳۲
polar form of complex numbers	شکل قطبی اعداد مختلط، ۴۵۷
argument of a complex number	شناسهٔ یک عدد مختلط، ۴۵۲
slope	شیب
of a line	یک خط، ۲۱۱، ۵۹۳
of a curve	یک منحنی، ۲۱۱
planes	صفحات، ۶۰۲-۵۹۷
osculating plane	صفحهٔ بوسان، ۶۵۸
zero	صفر، ۲۲
vector	بردار، ۵۵۶
transformation	تبدیل، ۷۲۶
complex number	عدد مختلط، ۴۴۸
element in a linear space	عنصر... در یک فضای خطی، ۶۹۰
matrix	ماتریس، ۷۵۲
indeterminate forms	صور مبهم، ۳۶۳-۳۵۹
coefficient(s)	ضریب(ها)
binomial	دوجمله‌ای، ۵۶، ۴۷۶، ۵۴۸
Fourier	فوریه، ۷۲۱
undetermined	نامعلوم، ۴۱۳، ۴۱۴، ۵۴۷
multiplication	ضرب
of numbers	اعداد، ۲۱، ۵۷، ۴۴۷
of vectors (cross product)	بردارها (ضرب خارجی)، ۶۰۴
of vectors (inner product)	بردارها (ضرب داخلی)، ۵۶۱، ۵۸۳، ۶۹۰
of vectors by scalars	بردارها در اسکالر، ۵۵۵، ۶۸۹
of transformations	تبدیلات، ۷۳۳
of functions	توابع، ۷۰، ۸۰، ۱۶۶
of matrices	ماتریسها، ۷۵۴
product(s)	ضرب(ها)
scalar (dot)	اسکالر (نقطه‌ای)، ۵۶
of numbers	اعداد، ۲۱، ۵۷، ۴۴۷

of functions	توابع، ۷۰
cross	خارجی (برداری)، ۶۰۴
scalar triple	سه گانه اسکالر، ۶۱۰
dot (inner)	نقطه ای (داخلی)، ۵۶۱، ۵۸۳، ۶۹۰
notation for	نماد برای، ۵۷
abscissa	طول، ۶۲
length	طول
other definition of	تعاریف دیگر، ۵۷۳ (تمرینات ۱۷، ۱۸)
of a vector	یک بردار، ۵۶۲
of a curve	یک منحنی، ۶۶۳، ۶۶۴
arc length	طول قوس
as an integral	بصورت یک انتگرال، ۶۶۸
function	تابع، ۶۶۶
definition	تعریف، ۶۶۳، ۶۶۴
in polar coordinates	در مختصات قطبی، ۶۷۹ (تمرین ۴)
number	عدد
real	حقیقی، ۲۰
irrational	گنگ، ۲۱، ۲۹
rational	گویا، ۲۱، ۲۸، ۴۸۹
complex	مختلط، ۴۴۶
conjugate complex	مختلط مزدوج، ۴۵۳
even integer	عدد زوج، ۳۶ (تمرین ۱۰)
integer	عدد صحیح، ۲۸
odd integer	عدد فرد، ۳۶ (تمرین ۱۰)
ordinate	عرضی، ۶۲
Mercury	عطارد، ۶۸۲
operator	عملگر
integration	انتگرال گیری، ۷۲۷
difference	تفاضلی، ۲۱۴
Taylor	تیلور، ۳۴۱
linear	خطی، ۷۲۵
differentiation	مشتق گیری، ۲۱۳، ۴۱۰، ۷۲۷
element	عنصر
zero... in a linear space	صفر در یک فضای خطی، ۶۹۰

maximum	ماکزیمم، ۳۰
minimum	مینیمم، ۳۲
of a determinant	یک دترمینان، ۵۰۷
of a matrix	یک ماتریس، ۷۴۴، ۷۵۱
of a set	یک مجموعه، ۱۳
identity element	عنصر همانی
for addition	برای جمع، ۲۲
for multiplication	برای ضرب، ۲۲
distance	فاصله
between two planes	بین دو صفحه، ۶۲۰
between two points	بین دو نقطه، ۴۵۳، ۵۷۴
from a point to a line	یک نقطه تا یک خط، ۵۹۴، ۵۹۵
from a point to a plane	یک نقطه تا یک صفحه، ۶۱۹
mean distance from the sun	فاصله میانگینی از خورشید، ۶۸۲
factorials	فاکتوریالها، ۵۶، ۶۶
Ferrari (Lodovico)	فراری، ۳
Gauss — Jordan elimination process	فرایند حذف گاوس — ژردان، ۷۶۳
Gram — Schmidt process	فرایند گرام — اشمیت، ۷۱۳
frequency of simple harmonic motion	فرکانس حرکت توافق ساده، ۴۲۲
Fermat (Pierre De)	فرما، ۳، ۱۹۵
space	فضا (ی)
n —	n بعدی، ۵۵۵
null	پوچ، ۷۲۷
spanned by a set of vectors	پیموده شده بوسیله مجموعه‌ای از بردارها، ۶۹۷
function	تابعی، ۶۹۱
unitary	یکه‌ای، ۷۰۴
euclidean space	فضای اقلیدسی، ۵۸۸، ۷۰۳
complex	مختلط، ۷۰۴
vector space (linear space)	فضای برداری (فضای خطی)، ۶۹۱
complex	مختلط، ۵۸۳
linear space (vector space)	فضای خطی (فضای برداری)، ۶۸۹، ۶۹۱
real	حقیقی، ۶۹۱
complex	مختلط، ۶۹۱
Fourier (Joseph)	فوریه، ۱۵۹، ۷۲۱

Fibonacci (Leonardo of Pisa)

فیوناچی، ۴۷۱

normal

قائم

to a line

به یک خط، ۵۹۳

to a plane

به یک صفحه، ۶۱۷

to a space curve

به یک منحنی فضائی، ۶۵۸

to a plane curve

به یک منحنی مسطح، ۶۶۱ (تمرین ۱۴)

rule

قاعده

chain

زنجیره‌ای، ۲۱۷، ۶۴۴

Cramer's

کرامر، ۶۱۳

Leibniz's ... for alternating series

لایب‌نیتز برای سریهای متناوب، ۵۰۱

L'Hopital's

هوپیتال، ۳۷۱-۳۶۳

distributive law

قانون پخشپذیری

for numbers

برای اعداد، ۲۲، ۴۴۷

for set operations

برای اعمال مجموعه‌ای، ۱۹ (تمرین ۱۰)

for cross products

برای ضربهای خارجی، ۶۰۴

for inner products

برای ضربهای داخلی، ۵۶۱، ۷۰۳

in a linear space

در یک فضای خطی، ۶۹۰

commutative law

قانون تعویضپذیری

for union and intersection of sets

برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، ۱۷

for addition of numbers

برای جمع اعداد، ۲۲، ۴۴۷

for addition of vectors

برای جمع بردارها، ۵۵۶

for multiplication of numbers

برای ضرب اعداد، ۲۲، ۴۴۷

for inner products

برای ضربهای داخلی، ۷۰۳

for dot products

برای ضربهای نقطه‌ای، ۵۶۱

in a linear space

در یک فضای خطی، ۶۹۰

associative law

قانون شرکتپذیری

for union and intersection of sets

برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، ۱۷

for composition of functions

برای ترکیب توابع، ۱۷۶، ۷۳۴

for addition of numbers

برای جمع اعداد، ۲۲، ۴۴۷

for addition of vectors

برای جمع بردارها، ۵۵۶

for multiplication of numbers

برای ضرب اعداد، ۲۲، ۴۴۷

in a linear space

در یک فضای خطی، ۶۹۰

parallelogram law

قانون متوازی‌الاضلاع، ۴۵۲، ۵۵۸

Newton's law

قانون نیوتن

of cooling	تبرید، ۳۹۲
of universal gravitation	جاذبه عمومی، ۶۸۲
of notion	حرکت، ۳۹۱، ۶۸۲
Hooke's law	قانون هوک، ۶۴، ۱۴۷
theorems on limits	قضایائی درباره حدود، ۱۶۵
theorems on derivatives	قضایائی درباره مشتقات، ۲۰۴
theorems	قضایا (ی)
اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۲۵۵، ۲۵۴، ۶۴۴	
fundamental... of calculus	
existence	وجودی، ۳۸۲، ۴۰۵
uniqueness	یکتائی، ۳۸۲، ۴۰۵
theorem	قضیه
fundamental... of algebra	اساسی جبر، ۴۵۱
Bernstein's	برنشتاین، ۵۴۲
Bolzano's	بولتزانو، ۱۷۸
small — span (uniform continuity)	پیمای کوچک (پیوستگی یکشکل)، ۱۸۹
uniform continuity	پیوستگی یکشکل، ۱۸۹
Riemann's rearrangement	تجدید آرایش ریمان، ۵۱۳
binomial	دوجمله‌ای، ۵۷ (تمرین ۴)، ۴۶۹، ۵۴۸
De Moivre's	دمو آور، ۴۶۲ (تمرین ۵)
Roll's	رل، ۲۲۸
pythagorean	فیثاغورس، ۶۳، ۲۴۴
zero — derivative	مشتق صفر، ۲۵۳، ۴۵۹
comparison... for integrals	مقایسه‌ای برای انتگرالها، ۸۵، ۱۰۲
	مقدار اکستریم برای توابع پیوسته، ۱۸۹
extreme — value... for continuous functions	
mean — value theorem	قضیه مقدار میانگین
for integrals	برای انتگرالها، ۱۹۲، ۲۸۱
for derivatives	برای مشتقات، ۲۲۹
Cauchy's extension of	تعمیم کشی، ۲۳۰
weighted	وزندار، ۱۹۲
intermediate — value theorem	قضیه مقدار میانی
for continuous functions	برای توابع پیوسته، ۱۸۰
for derivatives	برای مشتقات، ۲۳۲ (تمرین ۱۰)
parabolic segment, area of	قطعه سهمی، مساحت، ۳

domain of a function	قلمرو یک تابع، ۶۴، ۶۸، ۲۴۴، ۶۴۱، ۷۲۵
growth laws	قوانین رشد، ۳۹۸، ۳۹۹
kepler's laws	قوانین کپلر، ۶۸۲
work	کار، ۱۴۵، ۱۴۶
Cardano (Hieronimo)	کاردانو، ۳
Cantor (Georg)	کانتور، ۱۳، ۲۱
focus of a conic section	کانون یک مقطع مخروطی، ۶۲۴
Cavalieri (Bonaventura)	کاوالیری، ۳، ۱۴۰
Kepler (Johannes)	کپلر، ۶۲۴، ۶۸۱
bound	کران
upper	بالائی، ۳۰
greatest lower	بزرگترین ... پائینی، ۳۲
lower	پائینی، ۳۲
least upper	کوچکترین ... بالائی، ۳۱
boundedness of continuous functions	کراندار بودن توابع پیوسته، ۱۸۸
sphere, volume of	کره، حجم، ۱۴۳
	کسره‌های جزئی، انتگرالگیری بوسیله، ۳۲۷ - ۳۲۰
partial fractions, integration by	
tractrix	کشاننده، ۴۳۹
	کشی، ۳، ۵۵، ۱۵۹، ۲۱۴، ۲۳۰، ۳۵۲، ۴۵۹، ۴۷۰، ۴۹۴، ۴۹۶، ۵۱۰، ۵۶۲
Cauchy (Augustin - Louis)	
least squares, method of	کوچکترین مربعات، روش، ۲۴۳ (تمرین ۲۵)
Cayley (Arthur)	کیلی، ۵۵۴
Galileo	گالیله، ۶۲۴
Gauss (Karl Friedrich)	گوس، ۴۴۶، ۴۵۱، ۴۷۰، ۴۹۱
Grassmann (Hermann)	گراسمان، ۵۵۴
Gram (Jørgen Pederson)	گرام، ۷۱۳
Gregory (James)	گرگوری، ۴۸۴، ۵۰۱
centrifugal	گریز از مرکز، ۶۵۳
moment	گشتاور، ۱۴۹
of inertia	مانند، ۱۵۰
Gibbs (Josiah Willard)	گیبس، ۵۵۳
Leonardo of pisa (Fibonacci)	لئوناردوی پیزا (فیوناچی)، ۴۷۱

Laplace	لاپلاس، ۳۷۹
Lagrange (Joseph Louis)	لاگرانژ، ۲۱۳، ۴۱۲، ۵۵۳
	لایب نیتزه، ۳، ۱۱، ۱۹۶، ۲۱۳، ۲۶۰، ۲۷۵، ۳۷۹، ۵۰۱
Leibniz (Gottfried Wilhelm)	
Lobatchevski (Nikolai Ivanovich)	لواچفسکی، ۵۹۱
Legendre (Adrien — Marie)	لژاندر، ۷۱۶
logarithms	لگاریتمها
	پایه e (نبری یا لگاریتمهای طبیعی)، ۲۸۷—۲۸۴
base (napierian or natural logarithms)	
base b	پایه b ، ۲۸۷
matrix	ماتریس
singular	استثنائی، ۷۶۹
algebraic operations on	اعمال جبری بر، ۷۵۲، ۷۵۵
definition of	تعریف، ۷۴۴، ۷۵۱
column (column vector)	ستونی (بردار ستونی)، ۷۴۴، ۷۵۲
zero	صفر، ۷۵۲
coefficient	ضرائب، ۷۶۰
nonsingular	غیر استثنائی، ۷۶۷
diagonal	قطری، ۷۴۷
orthogonal	متعامد، ۷۷۲ (تمرین ۸)
representation	نمایش، ۷۴۴
identity	همانی، ۷۵۴
Hadamard matrices	ماتریسهای هادامار، ۷۷۲ (تمرین ۱۰)
helix	مارپیچ، ۶۵۴
circular	مستدیر، ۶۵۴
Machin (John)	ماشن، ۳۵۵
maximum and minimum	ماکزیمم و مینیمم
absolute	مطلق، ۱۸۷
relative	نسبی، ۲۲۶
maximum of a function	ماکزیمم یک تابع
absolute	مطلق، ۱۸۷
relative	نسبی، ۲۲۶
centripetal	مایل به مرکز، ۶۵۳
origin of coordinates	مبدأ مختصات، ۶۱

reciprocal	متقابل (مکوس)، ۲۲، ۴۴۹
complement	متمم
orthogonal	متعامد، ۷۱۸
of a set	یک مجموعه، ۱۷
average	متوسط، ۱۸۶
velocity	سرعت، ۱۹۷
rate of change	میزان تغییر، ۱۹۹
weighted	وزندار، ۱۴۹
of a function	یک تابع، ۱۵۰-۱۴۸
Pascal's triangle	مثلث پاسکال، ۵۷ (تمرین ۳)
asymptote	مجانِب، ۲۳۶
of a hyperbola	یک هذلولی، ۶۳۳، ۶۳۴
asymptotically equal	مجانِباً مساوی، ۴۹۲
sum	مجموع
of numbers	اعداد، ۲۱، ۴۴۶
of vectors	بردارها، ۵۵۵، ۶۸۹
of functions	توابع، ۷۰، ۸۰، ۱۶۶
of a convergent series	یک سری همگرا، ۴۷۷
set	مجموعه
inductive	استقرائی، ۲۸
measurable	اندازه پذیر، ۷۳، ۱۴۰
empty	تهی، ۱۶
radial	شعاعی، ۱۳۷
ordinate	عرضی، ۷۴، ۷۷، ۷۸، ۹۵
bounded	کراندار، ۳۰
orthonormal	متعامدیکه، ۵۷۹، ۷۰۷
convex	محدب، ۱۴۰
theory	نظریه، ۱۸-۱۳
partial sums	مجموعه‌های جزئی، ۴۶۷، ۴۷۷
disjoint sets	مجموعه‌های از هم جدا، ۱۷
calculation	محاسبه
of e	ای (بایه لگاریتم طبیعی)، ۳۴۹
of π	پی، ۳۵۴ (تمرین ۱۰)
of square roots	ریشه‌های دوم، ۵۵۱ (تمرین ۲۰، ۲۱)
of logarithms	لگاریتمها، ۲۹۸-۲۹۶

axis	محور
major... of an ellipse	اطول یک بیضی، ۶۳۲
minor... of an ellipse	اقصر یک بیضی، ۶۳۲
transverse... of a hyperbola	مقاطع یک هذلولی، ۶۳۲
axes	محورها، ۶۱، ۲۴۵
coordinates	مختصات
cylindrical	استوانه‌ای، ۶۷۸
rectangular	قائم، ۶۱، ۲۴۵
polar	قطبی، ۱۳۵، ۶۷۵
electric circuits	مدارهای الکتریکی، ۳۹۴، ۴۱۹
orbits of planets	مدارهای سیارات، ۶۸۶-۶۸۲
Mercator (Nicholas)	مرکاتور، ۴۶۹، ۴۸۴
center of mass	مرکز جرم، ۱۴۹
initial - value problem	مسئله با مقدار اولیه، ۳۸۲
pursuit problems	مسائل تعقیب، ۴۳۸
area	مساحت
axiomatic definition of	تعریف اصل موضوعی، ۷۶-۷۳
in polar coordinates	در مختصات قطبی، ۱۳۷
of a region between two graphs	ناحیه بین دو نمودار، ۱۱۱
and similarity transformations	و تبدیلات تشابه، ۱۱۵
of a radial set	یک مجموعه شعاعی، ۱۳۸
of an ordinate set	یک مجموعه عرضی، ۹۵
orthogonal trajectory	مسیر قائم، ۴۳۷
Jupiter	مشتری، ۶۸۲
n th derivative	مشق n ، ۲۰۰
derivatives	مشتقات
of exponential function	تابع نمائی، ۳۰۱
of vector - valued functions	توابع برداری، ۶۴۲
functions of several variables	توابع چند متغیره، ۲۴۸-۲۴۴
of complex - valued functions	توابع مختلط، ۴۵۹
functions of one variable	توابع یک متغیره، ۱۹۹
partial	جزئی، ۲۴۸-۲۴۴
theorems on	قضایائی درباره، ۲۰۴
of higher order	مراتب بالاتر، ۲۰۰، ۲۴۸
notations for	نمادهائی برای، ۱۹۹، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۴۴، ۲۴۸

and continuity	و پیوستگی، ۲۴۴
differentiation	مشتقگیری
of sine function	از تابع سینوس، ۲۰۲
of cosine function	از تابع کسینوس، ۲۰۲
of composite function	از تابع مرکب، ۲۱۷، ۶۴۴
of polynomial functions	از توابع چند جمله‌ای، ۲۰۶
of trigonometric functions	از توابع مثلثاتی، ۲۰۲
of series	از سریها، ۵۳۱، ۵۳۷
implicit	ضمنی، ۲۱۹
logarithmic	لگاریتمی، ۲۹۱
and integration of series	و انتگرالگیری از سریها، ۵۳۷
parametric equations	معادلات پارامتری، ۵۹۲، ۶۴۷
of an ellipse	یک بیضی، ۶۵۳
of a line	یک خط، ۵۹۲
of a circle	یک دایره، ۶۵۲
of a helix	یک مارپیچ، ۶۵۴
of a hyperbola	یک هذلولی، ۶۵۶ (تمرین ۱۲)
simultaneous linear equations	معادلات خطی همزمان، ۶۱۳، ۷۶۰
differential equations	معادلات دیفرانسیل، ۴۴۵-۳۷۹
separable	جدائی پذیر، ۴۳۰
	جوابهای... بصورت سریهای توانی، ۵۴۹-۵۴۵
power — series solutions of	
first — order linear	خطی مرتبه اول، ۳۸۳
second — order linear	خطی مرتبه دوم، ۴۰۱
homogeneous first — order	مرتبه اول همگن، ۴۳۶-۴۳۳
equation	معادله
vector... of line	بردار خط، ۵۹۲
quadratic	درجه دوم، ۴۵۱
cartesian	دکارتی، ۶۳، ۵۹۳، ۶۱۹
cartesian... of line	دکارتی خط، ۵۹۳
Laplace's	لاپلاس، ۳۷۹
characteristic	مفسر، ۴۰۷
functional equation	معادله تابعی، ۲۸۲
for the exponential function	برای تابع نمائی، ۳۰۰
for logarithm	برای لگاریتم، ۲۸۲

differential equation	معادله دیفرانسیل
for sine function	برای تابع سینوس، ۴۰۲
for cosine function	برای تابع کسینوس، ۴۰۲
Bernoulli	برنولی، ۳۸۸
linear	خطی، ۴۰۱، ۳۸۳
Ricatti	ریکاتی، ۳۸۹ (تمرین ۱۹)
homogeneous	همگن، ۴۳۳-۴۳۶
inverse	معکوس
function	تابع، ۳۱۲، ۱۸۲
transformation	تبدیل، ۷۳۵، ۷۳۶
trigonometric functions	توابع مثلثاتی، ۳۱۷-۳۱۳
left	چپ، ۷۳۵، ۷۶۷
right	راست، ۷۳۵
matrix	ماتریس، ۷۶۷
inversion	معکوس سازی، ۱۸۲، ۳۱۳
absolute values	مقادیر مطلق، ۵۳، ۴۵۳
sections	مقاطع
conic	مخروطی، ۶۳۵-۶۲۳
of a cone	یک مخروط، ۶۲۳
scale	مقیاس
binary	دوئی، ۴۸۹
duodecimal	دوازدهی، ۴۸۹
radian measure	مقیاس رادیان، ۱۲۸
radian measurement of angles	مقیاس رادیان زوایا، ۱۲۸
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل، ۱۴۰
curve	منحنی
integral	انتگرال، ۴۲۵
rectifiable	با طول متناهی، ۶۶۳
nonrectifiable	با طول نامتناهی، ۶۶۳، ۶۷۱ (تمرین ۲۲)
level	تراز، ۲۴۵
definition of	تعریف، ۶۴۷
length of	طول، ۶۶۲-۶۶۸
rocket with variable mass	موشک با جرم متغیر، ۴۱۹
components	مؤلفه‌ها (ی)
tangential... of acceleration	مماسی، شتاب، ۶۵۹

of a vector	یک بردار، ۵۵۵
mean	میانگین، ۱۸۶، ۵۹
harmonic	توافقی، ۶۰
pth — power	توانی p ام، ۱۸۷، ۵۹
arithmetic	حسابی، ۱۴۸، ۶۰
geometric	هندسی، ۶۰ (تمرین ۲۰)
rate of change	میزان تغییر، ۱۹۹
related rates	میزانهای وابسته، ۲۲۰
minimum of a function	مینیمم یک تابع
absolute	مطلق، ۱۸۷
relative	نسبی، ۲۲۶
discontinuity	ناپیوستگی
jump	جهشی، ۱۶۲
removable	رفع شدنی، ۱۶۵
infinite	نامتناهی، ۱۶۴
step region	ناحیه پله‌ای، ۷۴
inequality	نامساوی، ۲۵
for the sine and cosine	برای سینوس و کسینوس، ۱۲۰
Bernoulli	برنولی، ۵۹ (تمرین ۱۴)
Cauchy — Schwarz	کشی — شوارتز، ۵۵، ۵۶۱، ۷۰۵
triangle inequality	نامساوی مثلثی
for real numbers	برای اعداد حقیقی، ۵۴
for complex numbers	برای اعداد مختلط، ۴۵۳
for vectors	برای بردارها، ۵۶۴
in an euclidean space	در یک فضای اقلیدسی، ۷۰۶
Napier (John)	نپر، ۲۸۷
copernican theory	نظریهٔ کپرنیکی، ۶۸۲
endpoints of an interval	نقاط انتهائی یک بازه، ۷۷
lattice points	نقاط شبکه‌ای، ۷۶ (تمرین ۴)
point	نقطه
critical	بحرانی، ۲۳۴
fixed	ثابت، ۱۸۲ (تمرین ۵)
inflection	عطف، ۲۳۷

notation(s)	نماد (ها)
o —	۳۵۶، ۵
summation	جمع‌بندی، ۴۸
for integrals	برای انتگرال‌ها، ۱۱، ۸۳، ۸۸، ۲۶۰، ۲۶۱، ۶۴۲
for vectors	برای بردارها، ۵۵۵، ۶۴۱
for functions	برای توابع، ۶۴، ۲۴۴، ۶۴۲
for products	برای ضربها، ۵۷
for sets	برای مجموعه‌ها، ۱۴
for derivatives	برای مشتقات، ۱۹۹، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۴۸
Leibniz's notation	نماد لایب‌نیتز
for primitives	برای اولیه‌ها، ۲۶۰
for derivatives	برای مشتقات، ۲۱۴
matrix representation	نمایش ماتریسی، ۵۹۲
Venn diagram	نمودارون، ۱۶
graphs of trigonometric functions	نمودارهای توابع مثلثاتی، ۱۳۵
graph of a function	نمودار یک تابع، ۶۵
analytic model of euclidean geometry	نمونه تحلیلی هندسه اقلیدسی، ۵۸۸
mathematical model	نمونه ریاضی، ۳۸۹
	نیروی جاذبه ثقلی، قوانین نیوتن، ۶۸۲
gravitational attraction, Newton's law of	
half — life	نیمه عمر، ۳۹۰
Newton (Isaac)	نیوتن، ۳، ۱۹۶، ۲۱۳، ۳۸۰، ۴۶۹، ۶۲۴، ۶۵۳
linear dependence and independence	وابستگی و استقلال خطی، ۵۷۶، ۶۹۷
Wallis (John)	والیس، ۳
Weirstrass (Karl)	وایراشتراس، ۲۱، ۵۲۷، ۵۳۱
Hadamard (Jacques)	هادامار، ۷۷۲
Hamilton (William Rowan)	هامیلتون، ۴۴۶، ۵۵۳
identity, function	همانی، تابع، ۶۵
transformation	تبدیل، ۷۲۶
matrix	ماتریس، ۷۵۴
neighborhood	همسایگی، ۱۶۰
convergence	همگرایی
of improper integrals	انتگرال‌های مجازی، ۵۱۷، ۵۱۹

of sequences	دنباله‌ها، ۴۷۱
of series	سریها، ۴۷۷-۵۲۹
conditional	مشروط، ۵۰۴
pointwise	نقطه به نقطه، ۵۲۵
uniform	یکشکل، ۵۲۷
absolute convergence of series	همگرایی مطلق سریها، ۵۰۴
pointwise convergence of series	همگرایی نقطه به نقطه سریها، ۵۲۸
congruence of sets	همنهشتی مجموعه‌ها، ۷۴
geometry(s)	هندسه (ها)
euclidean	اقلیدسی، ۱۰، ۵۸۷
analytic	تحلیلی، ۶۱، ۵۸۷
cartesian	دکارتی، ۶۱
non — archimedean	غیرارشمیدسی، ۳۴
non — euclidean	غیراقلیدسی، ۵۹۱
L'Hopital (Guillaume Francois Antoine)	هوپیتال، ۳۶۳
Hooke (Robert)	هوک، ربرت، ۶۴
Holmes (Sherlock)	هولمز، ۸
Heaviside (Oliver)	هوایساید، ۵۵۳
Hilbert (David)	هیلبرت، ۵۸۷
isothermals	یکدمائیها، ۴۳۷، ۲۴۵
isomorphism	یکریختی، ۴۴۹، ۷۵۴
isoclines	یکشیبه‌ها، ۴۳۴، ۴۲۹