



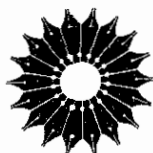
آشنایی با

تاریخ ریاضیات

جلد دوم

هاورد و. ابوز

ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل



آشنایی با

تاریخ ریاضیات

جلد دوم

هاورد و. ایوز

ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل



An Introduction to the History of Mathematics

Howard W. Eves

Fifth Edition

Saunders College Publishing, 1983

آشنایی با تاریخ ریاضیات

جلد دوم

تألیف هاورد و. ایوز

ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

ویراسته دکتر محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۶۸

چاپ دوم ۱۳۷۲ (با تجدید نظر)

چاپ چهارم ۱۳۸۵

تعداد ۲۰۰۰

حروفچینی: هویزه

لیتوگرافی: نور حکمت

چاپ: نوبهار

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Eves, Howard Whitley - ایوز، هوارد ویتلی، ۱۹۱۱ -

آشنایی با تاریخ ریاضیات / تألیف هاورد و. ایوز؛ ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل. -

[ویرایش ۲]. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹ - ۱۳۸۱.

ج ۲. - مصور، نقشه، جدول، عکس، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۵۵۲. ریاضی،

آمار، و کامپیوتر ۵۲.۷۱)

ISBN 964-01-0552-X (ج ۱)

ISBN 964-01-8125-0 (ج ۲)

ISBN 964-01-8044-0 دوره

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

An introduction to the history of mathematics. عنوان اصلی:

واژه نامه.

کتابنامه.

ج ۲ (چاپ چهارم: ۱۳۸۵).

۱. ریاضیات - تاریخ. ۲. ریاضیات - مسائل، تمرینها و غیره. الف. وحیدی اصل،

محمدقاسم، ۱۳۲۶ - مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۰/۹

QA۲۱/الف ۹۷۵

۱۳۶۹

۴۷۹ - ۴۷۰

کتابخانه ملی ایران

فهرست

صفحه	عنوان
یازده	پیشگفتار مترجم
	فصل ۹ سپیده دم ریاضیات جدید
۱	۱-۹ قرن هفدهم
۱	۲-۹ نپر
۲	۳-۹ لگاریتم
۴	۴-۹ کرسیهای استادی ساویلی ولوکاسی
۸	۵-۹ هاریوت و اوترد
۸	۶-۹ گالیله
۱۳	۷-۹ کپلر
۱۷	۸-۹ دزارگ
۲۰	۹-۹ پاسکال
۲۲	
	مطالعه‌های مسئله‌ای
۲۷	۱۰-۹ لگاریتمها
۲۷	۲۰-۹ نپر و مثلثات کروی
۲۹	۳۰-۹ میله‌های نپر
۳۰	۴۰-۹ خط‌کش محاسبه
۳۱	۵۰-۹ سقوط آزاد اجسام
۳۲	۶۰-۹ پرگار تقسیم
۳۲	۷۰-۹ چند پارادوکس ساده از «محاورة دربارهٔ دو علم جدید» گالیله
۳۴	۸۰-۹ قوانین کپلر
۳۵	

۳۵	۹۰۹	موزائیکها
۳۶	۱۰۰۹	اثبات قضایا از طریق عمل تصویر
۳۸	۱۱۰۹	«برهان» تجربی دوران شباب پاسکال
۳۸	۱۲۰۹	قضیه پاسکال
۳۹	۱۳۰۹	مثلت پاسکال
۴۰		عنوان مقاله
۴۱		کتابنامه

فصل ۱۰ هندسه تحلیلی و دیگر مباحث مقدم بر حسابان

۴۳	۱-۱۰	هندسه تحلیلی
۴۳	۲-۱۰	دکارت
۴۴	۳-۱۰	فرما
۵۱	۴-۱۰	روبروال و توریچلی
۵۷	۵-۱۰	هویگنس
۶۰	۶-۱۰	برخی ریاضیدانان فرانسوی و ایتالیایی قرن هفدهم
۶۲	۷-۱۰	برخی ریاضیدانان آلمان و ایالات سفلی در قرن هفدهم
۶۴	۸-۱۰	برخی ریاضیدانان انگلیسی قرن هفدهم

مطالعه‌های مسئله‌ای

۶۹	۱۰۱۰	جبر هندسی
۶۹	۲۰۱۰	«هندسه» دکارت
۶۹	۳۰۱۰	قاعده‌ی علامات دکارت
۷۰	۴۰۱۰	مسائلی از دکارت
۷۱	۵۰۱۰	قضایای فرما
۷۲	۶۰۱۰	مسئله امتیازها
۷۲	۷۰۱۰	مسائلی از هویگنس
۷۳	۸۰۱۰	منحنیهای مسطح از درجات بالا
۷۴	۹۰۱۰	چند مسئله سرگرم کننده از باشه
۷۵	۱۰۰۱۰	مقداری هندسه
۷۶	۱۱۰۱۰	محاسبه لگاریتمها به وسیله سریها
۷۷		عنوان مقاله
۷۷		کتابنامه
۷۸		

فصل ۱۱ حسابان و مفاهیم وابسته به آن

۸۰	۱-۱۱	مقدمه
۸۰		

۸۱	۲-۱۱ پارادوکسهای زنون
۸۱	۳-۱۱ روش افنای اتودوکسوس
۸۵	۴-۱۱ روش تعادل ارشمیدس
۸۷	۵-۱۱ مقدمات انتگرالگیری در اروپای غربی
۸۸	۶-۱۱ روش تقسیم ناپذیرهای کالیری
۹۲	۷-۱۱ آغاز مشتقگیری
۹۴	۸-۱۱ والیس وبرو
۹۹	۹-۱۱ نیوتن
۱۰۶	۱۰-۱۱ لایبنیتز
۱۱۰	مطالعه‌های مسئله‌ای
۱۱۰	۱۰۱۱ روش افنا
۱۱۰	۲۰۱۱ روش تعادل
۱۱۱	۳۰۱۱ چند مسئله از ارشمیدس
۱۱۱	۴۰۱۱ روش تقسیم ناپذیرها
۱۱۲	۵۰۱۱ فرمول منشورگونی
۱۱۳	۶۰۱۱ مشتقگیری
۱۱۴	۷۰۱۱ قضیه دوجمله‌ای
۱۱۴	۸۰۱۱ يك کران بالا برای ریشه‌های يك معادله چندجمله‌ای
۱۱۵	۹۰۱۱ جواب تقریبی معادلات
۱۱۶	۱۰۰۱۱ جبر مجموعه‌ها
۱۱۷	عنوان مقاله
۱۱۷	کتابنامه
۱۱۹	فصل ۱۴ قرن هجدهم و بهره‌برداری از حسابان
۱۱۹	۱-۱۲ مقدمه و پوزش‌خواهی
۱۲۱	۲-۱۲ خانواده برنولی
۱۲۵	۳-۱۲ دموآور و نظریه احتمالات
۱۲۷	۴-۱۲ تیلر و ماکلورن
۱۲۹	۵-۱۲ اویلر
۱۳۳	۶-۱۲ کلرو، دالامبر، و لامبرت
۱۳۷	۷-۱۲ لاگرانژ
۱۴۰	۸-۱۲ لاپلاس و لژاندر
۱۴۳	۹-۱۲ مونژ و کارنو

۱۰-۱۲ دستگاه متری

۱۴۸

۱۱-۱۲ خلاصه

۱۴۹

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۵۰

۱۰۱۲ اعداد برنولی

۱۵۰

۲۰۱۲ فرمول دموآور

۱۵۱

۳۰۱۲ توزیها

۱۵۲

۴۰۱۲ کار صوری با سریها

۱۵۲

۵۰۱۲ يك حدس و يك پارادوکس

۱۵۳

۶۰۱۲ اوپلر و سریهای نامتناهی

۱۵۳

۷۰۱۲ منحنیهای مداری شکل

۱۵۴

۸۰۱۲ گرافهای يك پیمایه‌ای و چندپیمایه‌ای

۱۵۵

۹۰۱۲ چند معادلهٔ دیفرانسیل

۱۵۷

۱۰۰۱۲ توابع هذلولی

۱۵۸

۱۱۰۱۲ لاگرانژ و هندسهٔ تحلیلی

۱۵۹

۱۲۰۱۲ مسئلهٔ سوزن بوفون

۱۶۰

۱۳۰۱۲ و تر تصادفی در يك دایره

۱۶۱

۱۴۰۱۲ دوش کمترین مربعات

۱۶۲

۱۵۰۱۲ کمی هندسهٔ مونژی

۱۶۳

۱۶۰۱۲ کمیتهای جهت‌دار

۱۶۴

۱۷۰۱۲ قضیهٔ کارنو

۱۶۴

عنوان مقاله

۱۶۵

کتابنامه

۱۶۶

فصل ۱۳ اوایل قرن نوزدهم و آزاد شدن هندسه و جبر

۱۶۷

۱-۱۳ امیر ریاضیات

۱۶۷

۲-۱۳ فوریه و پواسون

۱۷۱

۳-۱۳ کوشی

۱۷۴

۴-۱۳ آبل و گالوا

۱۷۷

۵-۱۳ ژاکوبی و دیریکله

۱۸۱

۶-۱۳ هندسهٔ نااقلیدسی

۱۸۴

۷-۱۳ ظهور ساختار جبری

۱۹۰

۸-۱۳ آزاد شدن جبر

۱۹۲

۹-۱۳ همپلتن، گراسمن، بول، و دمورگن

۱۹۸

۲۰۳	۱۳-۱۵ کیلی، سیلستر، وارمیت
۲۰۸	۱۳-۱۱ آکادمیها، انجمنها، و نشریات ادواری
۲۱۱	مطالعه‌های مسئله‌ای
۲۱۱	۱۰۱۳ قضیهٔ اساسی جبر
۲۱۱	۲۰۱۳ خواص اساسی همنهشتی
۲۱۲	۳۰۱۳ نگاوس و اعداد
۲۱۲	۴۰۱۳ سریهای فوریه
۲۱۳	۵۰۱۳ کوشی و سریهای نامتناهی
۲۱۳	۶۰۱۳ نظریهٔ گروهها
۲۱۴	۷۰۱۳ مثالهایی از گروهها
۲۱۴	۸۰۱۳ گروههای آبدلی
۲۱۵	۹۰۱۳ چهار ضلعیهای ساکری
۲۱۵	۱۰۰۱۳ فرض زاویهٔ حاده
۲۱۶	۱۱۰۱۳ يك مدل اقلیدسی برای هندسهٔ هذلولوی
۲۱۷	۱۲۰۱۳ هندسهٔ نااقلیدسی و فضای مادی
۲۱۷	۱۳۰۱۳ دستگاههایی با ساختار جبری مشترك
۲۱۸	۱۴۰۱۳ قوانین جبری
۲۱۹	۱۵۰۱۳ مطالب بیشتری دربارهٔ قوانین جبری
۲۱۹	۱۶۰۱۳ اعداد مختلط به عنوان زوج مرتب از اعداد حقیقی
۲۱۹	۱۷۰۱۳ کوآترینیونها
۲۲۰	۱۸۰۱۳ ماتریسها
۲۲۱	۱۹۰۱۳ جبرهای ژوردان و لی
۲۲۳	۲۰۰۱۳ بردارها
۲۲۴	۲۱۰۱۳ يك جبر جالب
۲۲۴	۲۲۰۱۳ يك جبر نقطه‌ای
۲۲۴	۲۳۰۱۳ يك گروه غیرآبدلی نامتناهی
۲۲۴	۲۴۰۱۳ بازی همیلتنی
۲۲۵	عنوان مقاله
۲۲۶	کتابنامه
۲۲۸	فصل ۱۴ اواخر قرن بیستم و حسابیدن آنالیز
۲۲۸	۱-۱۴ پیگیری کار اقلیدس
۲۲۹	۲-۱۴ امتناع حل سه مسئلهٔ مشهور با ابزارهای اقلیدسی

۲۳۱	۳-۱۴ تنها پرگار یا تنها ستاره
۲۳۳	۴-۱۴ هندسه تصویری
۲۳۹	۵-۱۴ هندسه تحلیلی
۲۴۴	۶-۱۴ هندسه II - بعدی
۲۴۶	۷-۱۴ هندسه دیفرانسیل
۲۴۸	۸-۱۴ فلیکس کلاین و برنامه ارلانگر
۲۵۲	۹-۱۴ حسابیدن آنالیز
۲۵۵	۱۰-۱۴ وایر شتراس و ریمان
۲۵۸	۱۱-۱۴ کانتور، کرونگر، و پوانکاره
۲۶۳	۱۲-۱۴ سونیا کووالفسکی و امی نوثر
۲۶۵	۱۳-۱۴ اعداد اول
۲۶۹	مطالعه‌های مسئله‌ای
۲۶۹	۱۰۱۴ هیئت فوئر باخ
۲۷۰	۲۰۱۴ قضیه کوماندینو
۲۷۰	۳۰۱۴ ارتفاعهای چهاروجهی
۲۷۰	۴۰۱۴ مشابیه‌های فضایی
۲۷۰	۵۰۱۴ عناصر هم‌زاویه‌ای
۲۷۱	۶۰۱۴ ساختمانهای ناممکن
۲۷۲	۷۰۱۴ برخی ساختمانهای تقریبی
۲۷۲	۸۰۱۴ قضیه ساختمان ماسکرونی
۲۷۴	۹۰۱۴ ساختمانهایی با خط‌کش و پرگارهای با فرجه ثابت
۲۷۵	۱۰۰۱۴ هندسه‌نگاری لموآن
۲۷۵	۱۱۰۱۴ اصل دوگانی
۲۷۶	۱۲۰۱۴ يك مجموعه اصول موضوعه خود - دوگان برای هندسه تصویری
۲۷۶	۱۳۰۱۴ اصل دوگانی مثلثات
۲۷۶	۱۴۰۱۴ دستگاههای مختصات
۲۷۷	۱۵۰۱۴ مختصات خطی
۲۷۸	۱۶۰۱۴ بعد چندی
۲۷۸	۱۷۰۱۴ نماد اختصاری
۲۷۹	۱۸۰۱۴ مختصات همگن
۲۸۰	۱۹۰۱۴ اعداد بلوکر
۲۸۰	۲۰۰۱۴ هندسه II - بعدی
۲۸۰	۲۱۰۱۴ انحناي گاوسی

۲۸۱	۲۲.۱۴ تراکتوئید
۲۸۲	۲۳.۱۴ برنامه ارلانگر
۲۸۳	۲۴.۱۴ رازگرایی و اباطیل در حسابان اولیه
۲۸۴	۲۵.۱۴ مشکلات اولیه در سریهای نامتناهی
۲۸۵	۲۶.۱۴ برخی پارادوکسها در جبر مقدماتی
۲۸۸	۲۷.۱۴ برخی پارادوکسها در حسابان
۲۹۰	۲۸.۱۴ منحنی پیوسته‌ای که هیچ مماسی ندارد
۲۹۱	۲۹.۱۴ اعداد جبری و متعالی
۲۹۲	۳۰.۱۴ اعداد اول
۲۹۲	عنوان مقاله
۲۹۳	کتابنامه
۲۹۵	فصل ۱۵ تجرید و فذر به قرن بیستم
۲۹۵	۱-۱۵ نقایص منطقی «اصول» اقلیدس
۲۹۸	۲-۱۵ مبحث اصل موضوعیها
۳۰۰	۳-۱۵ تکامل برخی مفاهیم اساسی
۳۰۲	۴-۱۵ اعداد ترانسفینی
۳۰۸	۵-۱۵ توپولوژی
۳۱۰	۶-۱۵ منطق ریاضی
۳۱۵	۷-۱۵ تعارض در نظریه مجموعه‌ها
۳۲۰	۸-۱۵ فلسفه‌های ریاضیات
۳۲۹	۹-۱۵ کامپیوترها
۳۳۵	۱۰-۱۵ ریاضیات جدید و بورباکی
۳۳۸	۱۱-۱۵ درخت ریاضیات
۳۴۰	مطالعه‌های مسئله‌ای
۳۴۰	۱۰.۱۵ فرضهای تلویحی اقلیدس
۳۴۱	۲۰.۱۵ سه پارادوکس هندسی
۳۴۳	۳۰.۱۵ اصل پیوستگی ددکیند
۳۴۴	۴۰.۱۵ تعبیر مختصاتی اصول موضوعه اقلیدس
۳۴۴	۵۰.۱۵ تعبیر کروی اصول موضوعه اقلیدس
۳۴۴	۶۰.۱۵ اصل موضوع پاش
۳۴۵	۷۰.۱۵ يك دستگاه مجرد ریاضی
۳۴۶	۸۰.۱۵ مبحث اصل موضوعیها

۳۴۷	۹۰۱۵ گزاره‌های فرضی مربوط به هم
۳۴۷	۱۰۰۱۵ شهود در مقابل برهان
۳۴۸	۱۱۰۱۵ يك دستگاه ریاضی كوچك
۳۴۹	۱۲۰۱۵ مجموعه‌ای از گزاره‌های ناسازگار
۳۴۹	۱۳۰۱۵ يك مجموعه اصل موضوعی مربوط به نظریه نسبیت
۳۴۹	۱۴۰۱۵ زنبورها و کندوها
۳۵۰	۱۵۰۱۵ فضا‌های متری
۳۵۱	۱۶۰۱۵ پاره‌خطهای معادل
۳۵۱	۱۷۰۱۵ برخی مجموعه‌های شمارا و ناشمارا
۳۵۲	۱۸۰۱۵ چندجمله‌ایهایی به ارتفاعهای ۹، ۲، ۳، ۴، ۵
۳۵۲	۱۹۰۱۵ اندازه يك مجموعه شمارا از نقاط
۳۵۲	۲۰۰۱۵ اعداد ترانسفینی و نظریه ابعاد
۳۵۳	۲۱۰۱۵ دواير و خطوط
۳۵۳	۲۲۰۱۵ سطوح همسانریخت
۳۵۴	۲۳۰۱۵ طرفها و یالها
۳۵۴	۲۴۰۱۵ حلقه‌های همرو
۳۵۴	۲۵۰۱۵ سطوح چند وجهی
۳۵۴	۲۶۰۱۵ وجوه و رئوس سطوح چندوجهی
۳۵۵	۲۷۰۱۵ فضای هاوسدورف
۳۵۶	۲۸۰۱۵ گزاره‌های متفق
۳۵۷	۲۹۰۱۵ منطقه‌های سه‌ارزشی
۳۵۷	۳۰۰۱۵ پارادوکس راسل
۳۵۸	۳۱۰۱۵ يك پارادوکس
۳۵۸	۳۲۰۱۵ برخی بلاتکلیفیه‌ها و چند سؤال
۳۵۸	۳۳۰۱۵ ریاضیات تفریحی
۳۵۸	عنوان مقاله
۳۶۰	کتابنامه
۳۶۵	کتابنامه عمومی
۳۶۷	يك جدول گاهشناختی
۳۷۸	جوابها و راهنمایها برای حل مطالعه‌های مسئله‌ای
۴۰۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۴۱۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۴۲۰	فهرست راهنما

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجم

پنج سال فاصله بین انتشار مجله‌های اول و دوم این کتاب، مدتی طولانی است؛ اما بخش عمده‌ای از این تأخیر طولانی، معلول انتشار ویرایش پنجم متن اصلی کتاب در سال ۱۳۶۰ است. ظاهراً مشی نویسنده کتاب، انتشار آن در هر چند سال یک بار با تجدید نظر، و ویرایش جدید بوده است. وقتی ترجمه کامل کتاب به فارسی انجام و حروفچینی مجلد اول آغاز شد، مترجم از انتشار ویرایش پنجم مطلع گردید. چون تغییرات بخش اول در مقایسه با بخش دوم کمتر بود، ترجمه فارسی بخش اول به صورت مجلد اول به دست انتشار سپرده شده ولی در مورد بخش دوم مترجم، بنا به تعهد خود در قبال مرکز نشر دانشگاهی برای تطبیق متن ترجمه با آخرین ویرایش کتاب و منعکس کردن مطالب جدید بر آن شد که بار دیگر ترجمه را به طور کامل بازبینی نماید. بویژه اینکه پیشرفتهای جدید، اعمال این بازبینی را ضروری می نمود. مثلاً در ویرایش چهارم از «مسئله چهار رنگ» مشهور توپولوژی به عنوان یکی از مسائل مهم «باز» یاد شده بود در حالی که در ویرایش پنجم پیرامون این مسئله که در سال ۱۹۷۸ میلادی پس از قریب صد سال راه حلی برای آن پیدا شد، بحثی به میان آمده است. و چنین شد که مترجم بار دیگر ترجمه را با ویرایش پنجم مقابله، و حذف و اضافات و تغییرات در ترتیب مطالب را در ترجمه اعمال کرد. آقای دکتر شفیعیه‌ها، ویراستار نکته سنج و فاضل کتاب هم بار دیگر تمام کتاب را ویرایش کردند و سرانجام متن آماده چاپ گردید.

اما روال ترجمه بخش دوم [مجلد حاضر] تقریباً مانند مجلد اول است؛ در عین پابندی به امانت، روانی و سلاست جمله‌ها مدنظر بوده است، ترجمه عناوین کتابها در متن و عناوین اصلی در پانویشت آمده اند. توضیحات مختصری، هر جا که به نظر مترجم لازم آمده در داخل علامت [] در متن یا پانویشت افزوده شده است. در نحوه نوشتن اسامی کتابها و اشخاص و محلها به فارسی، از دایرة المعارف فارسی به سرپرستی مرحوم دکتر مصاحب بهره گرفته شده است مگر آنکه خلاف آن صحیح تشخیص داده شده باشد که این موارد عمدتاً حاصل بررسیهای ویراستار محترم بوده است.

به هر دو مجلد کتاب هویت‌های مستقلی داده شده است و در نتیجه جوابهای «مطالعه‌های مسئله‌ای»، واژه‌نامه‌های انگلیسی به فارسی و فارسی به انگلیسی و فهرست اعلام این جلد جدا گانه در همین کتاب آمده است و طبعاً در ویرایش جدید مجلد اول هم که در آینده نزدیک منتشر خواهد شد، این نکته مدنظر خواهد بود.

سپیده دم ریاضیات جدید

۹-۱ قرن هفدهم

قرن هفدهم در تاریخ ریاضیات برجستگی خاصی دارد. در اوایل قرن، نبر اختراع لگاریتم خود را بر ملا ساخت، هاریوت^۱ و اوتردیه تمادگذاری و تدوین علامات جبری کمک کردند، گالیله علم دینامیک را پایه ریزی کرد، و کپلر قوانین حرکت سیاره‌ای خود را عرضه نمود. بعداً در همین قرن، دزارگ^۲ و پاسکال پهنه جدیدی در هندسه محض گشودند، هندسه تحلیلی جدید با دکارت آغاز شد، فرما مبانی نظریه نوین اعداد را پایه ریزی کرد، و هویگنس به نظریه احتمال و دیگر رشته‌ها کمکهای شایانی نمود. سپس در اواخر قرن بعد از آنکه راه توسط سیاهی از ریاضیدانان قرن هفدهم هموار شده بود، اختراع دوران ساز حسابان به دست نیوتن و لایبنیتز^۳ صورت پذیرفت. بدین ترتیب، می‌بینیم که در طول قرن هفدهم عرصه‌های متعدد و پهناوری برای تحقیقات ریاضی گشوده شدند.

در نیروی محرکه عمده‌ای که در قرن هفدهم به ریاضیات داده شد همه پوشهای فکری سهم بودند، و این امر بدون تردید تا حد زیادی نتیجه پیشرفتهای سیاسی، اقتصادی، و اجتماعی زمان بود. این قرن شاهد دستاوردهای بزرگ در تلاش به خاطر حقوق انسانی بود. ماشینهایی بسیار پیشرفته‌تر، از بازیچه‌های سرگرم‌کننده ایام هرون گرفته تا اشیایی که از لحاظ اقتصادی اهمیت روزافزونی داشتند، به خود دید و روح روبه رشد بین‌المللی‌گرایی

فکری و تردیدگرایی علمی را مشاهده کرد. جو مساعدتر سیاسی شمال اروپا، و غلبه عمومی بر سرما و تاریکی ماههای طولانی زمستان از طریق پیشرفتهای مناسب در ایجاد گرما و روشنایی، احتمالاً از دلایل عمده انتقال فعالیتهای ریاضی ایتالیا به سمت شمال، به فرانسه و انگلستان در قرن هفدهم بود.

در اینجا لازم است به دو مطلب که مطالعه ما را از تاریخ ریاضیات در قسمت دوم این کتاب به گفتاری تا حدودی نامتوازن سوق می دهد، توجه کنیم. اولین آنها این است که فعالیت ریاضی با چنان سرعتی شروع به رشد نهاد که در نتیجه آن نامهای زیادی که ممکن بود در دوره کم ثمرتری مورد توجه قرار گیرند اکنون باید حذف شوند. واقعیت دوم آن است که، با فرا رسیدن قرن هفدهم مقدار معتنا بهی پژوهشهای ریاضی صورت گرفت که برای يك خواننده عادی قابل درك نیست، زیرا بدرستی ادعا شده است که تاریخ يك موضوع را بدون آگاهی از خود موضوع نمی توان به طور صحیح فهمید.

در این فصل و فصل آتی، ما آن قسمت از بسط ریاضیات در قرن هفدهم را که بدون آگاهی از حسابان می تواند قابل فهم باشد، در نظر می گیریم. فصل ۱۱ متضمن شرح کوتاهی است از بسط حسابان از آغاز پیدایش آن در یونان باستان تا زمانی که نیوتن و لایبنیتز و پیشینیان بلا فصل آنان در نیمه دوم قرن هفدهم سر و صورت بخشیدن به آن را وجهه همت خویش قرار دادند. در فصول نهایی کتاب انتقال به قرن بیستم مطرح می شود؛ این فصول آخرین، بنا به ضرورت باید خیلی کوتاه باشند، زیرا که ریاضیات این دوره تنها توسط خبرگان قابل فهم است.

۹-۲ نبر

بسیاری از زمینه ها، نظیر نجوم، دریانوردی، تجارت، مهندسی، و جنگ که محاسبات عددی در آنها حائز اهمیت اند، به طور روزافزونی نیاز داشتند که این محاسبات سریعتر و دقیقتر انجام شوند. این نیازهای افزاینده با چهار اختراع قابل توجه بر آورده شد: نمادگذاری هندی-عربی، کسرهای اعشاری، لگاریتمها، و ماشینهای حسابگر جدید. اکنون زمان آن است که از بین این ابزارهای زحمتگاه به سومین آنها، یعنی اختراع لگاریتم به دست جان نبر در اوایل قرن هفدهم بپردازیم. اختراع چهارم بعداً در بخش ۱۵-۹ مطالعه خواهد شد.

جان نبر (۱۵۵۰-۱۶۱۷)، که وقتی پدرش فقط ۱۶ سال داشت به دنیا آمد، قسمت اعظم این زندگی را در ملک خانوادگی خود یعنی کاخ مریچستون^۱، نزدیک ادینبورو^۲، اسکاتلند، گذرانید و عمده انرژی خود را در جدالهای سیاسی و مذهبی آن زمان صرف کرد. وی بشدت ضد کاتولیک و مدافع نیات جان ناکس^۳ و جیمز I^۴ بود. در ۱۵۹۳،

1. Merchiston

2. Edinburgh

3. John Knox [۱۵۷۲-۱۵۰۵] مصلح مذهبی و سیاستمدار پروتستان اهل اسکاتلند]

4. James I [۱۶۲۵-۱۶۰۳] پادشاه انگلستان

ادعای نامۀ تند و پرخواننده‌ای علیه کلیسای رم تحت عنوان کشف ساده‌ای از کلیۀ مکاشفات یوحنا یقدیس منتشر، و در آن سعی کرد ثابت کند که پساپ ضد مسیح است، و خالق مقدر ساخته است که دنیا در سالهای بین ۱۶۸۸ و ۱۷۰۰ به آخر برسد. کتاب ۲۱ بار به چاپ رسید، که حداقل ده بار آن در دوران حیات مؤلف بود، و نبر صادقانه باور داشت که شهرت وی در بین نسلهای بعد بر مبنای این کتاب خواهد بود.

نبر همچنین پیشگویانه از پیدایش ماشینهای جهنمی جنگی گوناگونی نام برده که طرحها و نمودارهایی با نوشته‌هایش همراه بودند. وی پیشگویی کرد که در آینده آتشباری به وجود می‌آید که قادر به «پاکسازی میدانی به محیط چهارمایل از هر موجود زنده‌ای بایش از یک پا بلندی» خواهد بود و «از ارهای دریانوردی زیر آب» و ارا به ای با «پوزۀ جاننداری ساخته از آهن» به عرصه می‌آیند که «بر هر سو مرگ می‌پراکنند». در جنگ جهانی اول این پیشگوییها بترتیب در وجود مسلسل، زیر دریایی و تانک نظامی تحقق پیدا کردند.

شگفت آور نیست که نبوغ و قدرت تجسم نبر بعضیها را بر آن داشت تا وی را از لحاظ فکری نامتعادل پندارند و برخی دیگر به او به عنوان رواج‌دهنده سحر و جادو نگاه کنند. داستانهای بسیار و احتمالاً بی‌پایه‌ای، در تأیید این نظریات گفته می‌شوند. زمانی وی اعلام کرد که خروس سیاه ذغالی او برای وی مشخص خواهد کرد که کدامیک از خدمتکارانش از او دزدی می‌کند. خدمتکاران يك به يك به اطاق تساریکی فرستاده شده بودند، با این دستور که پشت خروس را نوازش کنند. بدون اطلاع خدمتکاران، نبر پشت خروس را به دودۀ چراغ آغشته بود، و خدمتکار مجرم، در بیم از دست زدن به خروس، با دستهای تمیز بازگشته بود. مورد دیگری نیز وقتی بود که نبر از دست کبوترهای همسایه که حبوبات او را می‌خوردند، به تنگ آمد. وی تهدید کرد که در صورتی که همسایه‌اش جلوی پرواز این پرندگان را نگیرد، آنها را ضبط خواهد کرد. همسایه، با این تصور که گرفتن کبوترهایش عملاً غیرممکن است، به نبر گفت که وی مخیر است که اگر می‌تواند آنها را بگیرد. روز بعد همسایه شگفت زده کبوترهای خود را تلوتلوخوران روی چمن



جان نبر

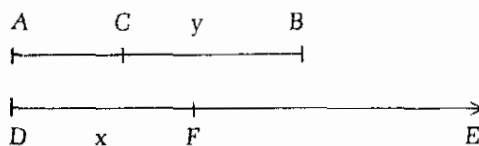
نپر مشاهده می‌کند که نپر باخونسردی آنها را در کیسه‌ای می‌ریخته است. نپر پرندگان را با پاشیدن نخودفرنگی‌های آلوده به شراب پیرامون چمن خود مست کرده بوده است. برای رهایی از مناقشات سیاسی و مذهبی، نپر خود را با مطالعه ریاضیات و علوم سرگرم می‌کرد و نتیجه‌اش چهار ثمرهٔ نبوغ اوست که در تاریخ ریاضیات ثبت شده است. اینها عبارت‌اند از: (۱) اختراع لگاریتم؛ (۲) یادآور زیرکانه‌ای، موسوم به قاعدهٔ اجزاء مستدیر، برای به‌دست آوردن دوبارهٔ فرمولهایی که در حل مثلثهای قائم‌الزاویهٔ کروی به کار می‌روند؛ (۳) حداقل دو فرمول مثلثاتی از یک گروه چهارتایی معروف به هشابهات نپر، که در حل مثلثهای غیر مشخص کروی مفیدند؛ و (۴) اختراع اسبابی، موسوم به هیله‌های نپر^۲، یا استخوانهای نپر^۳، مفید در ضرب، تقسیم، و استخراج ریشه‌های دوم اعداد به‌طور مکانیکی. اکنون به اولین، و مهمترین، این چهار اختراع می‌پردازیم؛ برای بحثی از سه دیگر، نگاه کنید به مطالعه‌های مسئله‌ای ۲۰۹ و ۳۰۹.

۹-۳ لگاریتم

همچنانکه امروزه می‌دانیم، قدرت لگاریتم به عنوان یک ابزار محاسباتی در این حقیقت نهفته است که ضرب و تقسیم به کمک آن، به‌اعمال ساده‌تر جمع و تفریق تحویل می‌شوند. نشانه‌ای از این ایده در فرمول

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2},$$

که در زمان نپر کاملاً شناخته شده بوده پیدا است، و کاملاً محتمل است که خط فکری نپر با این فرمول شروع شده باشد؛ چه در غیر این صورت تعلیل محدود کردن لگاریتمها به لگاریتم سینوس زوایا توسط وی مشکل است. نپر حداقل به مدت بیست سال بر روی نظریهٔ خود کار کرد، و منشأ اندیشهٔ او هر چه باشد، تعریف نهایی اواز لگاریتم چنین است. پاره خطی مانند AB و نیم خطی مانند DE ، به صورتی که در شکل ۷۳ نشان داده شده، در نظر بگیرید. فرض کنید که نقاط C و F ، هم‌زمان، بترتیب از نقاط A و D و در امتداد این خطوط، با سرعت اولیهٔ واحدی شروع به حرکت نمایند. فرض کنید C با سرعتی که از نظر عددی برابر با فاصلهٔ CB است، حرکت کند، و سرعت حرکت F یکواخت باشد. در این صورت نپر DF را به عنوان لگاریتم CB تعریف می‌کند. یعنی، با قراردادن $DF = x$ و $CB = y$ ،



شکل ۷۳

$$x = \text{Nap log } y.$$

برای احتراز از مزاحمت کسرها، نبر طول AB را 10^7 اختیار کرد، زیرا بهترین جداول سینوسی که در دسترس وی بود تا هفت رقم اعشار بسط پیدا می کردند. از تعریف نبر، و از طریق استفاده از معلوماتی که در دسترس نبر نبود، چنین نتیجه می شود که*

$$\text{Nap log } y = 10^7 \log_{10} \left(\frac{y}{10^7} \right),$$

لذا این بیان مکرر گفته شده که لگاریتمهای نبری لگاریتمهای طبیعی هستند در واقع بی اساس است. مشاهده می شود که لگاریتم نبری با افزایش عدد، کاهش می یابد، برخلاف آنچه در مورد لگاریتمهای طبیعی اتفاق می افتد.

بعلاوه آشکار می شود که، در دوره های مساوی متوالی از زمان، y مطابق يك تصاعد هندسی کاهش پیدا می کند در حالی که x مطابق يك تصاعد حسابی افزایش می یابد. بنابراین، اصل بنیانی دستگاه لگاریتمها، یعنی ارتباط بین يك تصاعد هندسی و يك تصاعد حسابی، را داریم. حال، برای مثال، نتیجه می شود که اگر $a/b = c/d$ ، آنگاه

$$\text{Nap log } a - \text{Nap log } b = \text{Nap log } c - \text{Nap log } d,$$

که یکی از نتایج متعددی است که به وسیله نبر برقرار شده است.

نبر بحث خود درباره لگاریتمها را در ۱۶۱۴ در رساله ای تحت عنوان شرح قانون شگفت انگیز لگاریتمها^۱ منتشر کرد. این اثر حاوی جدولی است که لگاریتم سینوس زوایا را برای دقیقه های متوالی يك کمان می دهد. رساله شرح علاقه فوری و گسترده ای را

* نتیجه با استفاده از کمی حسابان بآسانی نشان داده می شود. مثلاً داریم $10^7 - y = AC$ ، که از آن

$$C = \text{سرعت} = - dy/dt = y.$$

یعنی، $dy/y = - dt$ ، یا با انتگرال گیری، $\ln y = -t + C$. با محاسبه ثابت انتگرال گیری با جانشین کردن $t = 0$ ، چنین پیدا می کنیم که $C = \ln 10^7$ ، که از آن

$$\ln y = -t + \ln 10^7.$$

حال

$$F \text{ سرعت} = dx/dt = 10^7,$$

به طوری که $x = 10^7 t$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Nap log } y &= x = 10^7 t = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y) \\ &= 10^7 \ln(10^7/y) = 10^7 \log_{10}(y/10^7). \end{aligned}$$

برانگیخت، و در سال بعد از انتشار آن هنری بریگز^۱ (۱۵۶۱-۱۶۳۱)، استاد هندسه در کالج گرشام^۲ در لندن، و بعداً استاد در آکسفورد، به ادینبورو سفر کرد تا مراتب احترام خود را به مخترع کبیر لگاریتمها ادا کند. در ضمن این ملاقات بود که نپر و بریگز به این توافق رسیدند که جداول در صورت چنان تبدیلی که لگاریتم ۱، ۵ و لگاریتم ۱۰ هر توان مناسبی از ۱۰ شود، مفیدتر خواهد بود. بدین ترتیب لگاریتم امروزی بریگز، یا متعارفی، تکوین یافت. این گونه لگاریتمها، که اساساً لگاریتمهای در مبنای ۱۰ می باشند، کارآیی برتر خود را در محاسبات عددی مرهون این حقیقت هستند که دستگاه شمار ما نیز در مبنای ۱۰ است. برای دستگاه شماری که پایه دیگری مانند b داشته باشد، البته، به منظور محاسبات عددی، مناسبتر خواهد بود که جداول لگاریتم نیز در مبنای b باشند.

بریگز همه توان خود را در راه ساختن جدولی بر پایه طرح جدید وقف کرد، و در ۱۶۲۴ حساب لگاریتم^۳ خود را که شامل يك جدول ۱۴ رقمی از اعداد از ۱ تا ۲۰۰۰۰ و از ۹۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ بود، منتشر کرد. شکاف از ۲۰۰۰۰ تا ۹۰۰۰۰ بعداً، به کمک آدریان ولاک^۴ (۱۶۰۰-۱۶۶۶)، کتابفروش و ناشر هلندی، پر شد. در ۱۶۲۵، ادموند گانت^۵ (۱۵۸۱-۱۶۲۶)، یکی از همکاران بریگز، يك جدول هفت رقمی از لگاریتمهای متعارفی سینوس و تانژانت زوایا برای فواصل قوسی يك دقیقه منتشر نمود. گانت به گونه وازه های کسینوس و کتانژانت را ابداع کرد؛ مهندسان وی را به خاطر «زنجیر گانت»^۶ اش می شناسند. بریگز و ولاک چهار جدول بنیادی لگاریتمها را منتشر نمودند، که تنها در همین اواخر وقتی، در بین ۱۹۲۴ و ۱۹۴۹ جداول جامع ۲۰ رقمی در انگلستان به عنوان جزئی از جشن سیصدمین سال کشف لگاریتم محاسبه شد، کنار گذاشته شدند.

کلمه **لگاریتم** به معنی «عدد نسبت» است و توسط نپر، بعد از آنکه بدو از اصطلاح عدد ساختگی استفاده کرد، اتخاذ گردید. بریگز کلمه مانیتیس را، که کلمه لاتینی متأخری از ریشه اتروسکی است، معمول کرد، که در اصل به معنی «جمع» یا «پارسنگ» بوده و در قرن شانزدهم معنی «ضمیمه» را یافت. اصطلاح مفسر نیز توسط بریگز پیشنهاد شد و به وسیله ولاک به کار رفت. عجیب است که در جداول اولیه لگاریتمهای متعارفی رسم این بود که مانیتیس را نیز مانند مفسر چاپ کنند، و از قرن هجدهم به بعد بود که رسم فعلی چاپ مانیتیسها پتهایی، متداول گردید.

اختراع شگفت انگیز نپر در سرتاسر اروپا بگرمی مورد استقبال واقع شد. در نجوم، بویژه، زمان برای چنان اکتشافی بسیار آماده بود؛ بنابه اظهار لاپلاس، اختراع لگاریتمها «با کونه کردن زحمات، عمر منجمین را دو برابر کرد». بوناونتورا کالابری^۷، که درباره او سخن بیشتری در فصل ۱۱ داریم، تلاش زیادی برای متداول نمودن لگاریتمها در ایالتا به عمل آورد. خدمت مشایهی را یوهان کپلر در آلمان و ادموند وینگیت^۸ در فرانسه انجام دادند.

1. Henry Briggs	2. Gresham	3. Arithmetica Logarithmica
4. Adriaen Vlacq	5. Edmund Gunter	
6. Bonaventura Cavalieri	7. Edmund Wingate	

در بخش ۹-۷ کپلر به طور کاملتری مورد بحث قرار خواهد گرفت؛ وینگیت، که سالهای زیادی را در فرانسه گذراند، به صورت برجسته ترین نویسنده انگلیسی کتابهای درسی در حساب مقدماتی درآمد.

تنها رقیب نپر در پیشقدمی در اختراع لگاریتم یوبست بورگی^۱ (۱۵۵۲-۱۶۳۲) ابزار ساز سوییسی بود. بورگی جدولی از لگاریتمها را مستقل از نپر به تصور درآورده و آنرا ساخت و نتایج کارهای خود را در ۱۶۲۵، شش سال بعد از اینکه نپر کشف خود را به جهانیان اعلام کرده بود، منتشر نمود. گرچه هر دوی آنان ایده لگاریتم را مدتها قبل از انتشار در ذهن خود پرورانده بودند، عموماً اعتقاد بر این است که این ایده اول بار به ذهن نپر راه یافته بوده است. روش نپر هندسی بود، در حالی که روش بورگی جبری بود. امروزه لگاریتم عموماً به عنوان یک نما تلقی می شود. مثلاً اگر $n = b^x$ ، x را لگاریتم n در پایه b گوئیم. از این تعریف، قوانین لگاریتم بلافاصله از قوانین نماها نتیجه می شوند. یکی از امور خلاف قاعده تاریخ ریاضیات، کشف لگاریتم پیش از به کار بردن نماهاست.

در سال ۱۹۷۱ نیکارا گوته یک سری تمبرپستی در اکرام از «ده تا از مهمترین فرمولهای ریاضی» دنیا منتشر نمود. طرح هر تمبر یک فرمول ویژه ریاضی همراه با یک تصویر است و در پشت آن گفتار کوتاهی به زبان اسپانیایی در رابطه با اهمیت این فرمول آمده است. یکی از تمبرها به کشف لگاریتم به دست نپر اختصاص داده شده است. برای دانشمندان و ریاضیدانان باید اسباب خوشحالی باشد که فرمولهای خود را این گونه مورد بزرگداشت ببینند، زیرا این فرمولها سهمی بس بیشتر از کارهای شاهان و فرماندهان نظامی در پیشرفت بشریت داشته اند و تمبرهای پستی اغلب سیمای اینان را دربر دارد.^۲

سالها بود که محاسبه با لگاریتم در دروس ریاضی اواخر دبیرستان یا اوایل کالج درس داده می شد، و همچنین طی سالها خط کش محاسبه لگاریتمی، که در قاب چرمی زیبایی از کمر آویخته می شد، نشان تمایز دانشجویان مهندسی دانشگاهها بود. با این حال، امروزه با ظهور ماشین حسابهای جیبی کوچک جالب و با قیمتهای رو به کاهش، کسی استفاده از جدول لگاریتم یا خط کش محاسبه را در محاسبات عاقلانه نخواهد دانست. تدریس لگاریتم به عنوان یک وسیله محاسبه از مدارس رخت برمی بندد، سازندگان مشهور خط کشهای محاسبه دقیق به قطع تولید پرداخته اند، و کتابدستیهای جداول ریاضی مهم در فکر کنار گذاشتن جداول لگاریتم اند. محصولات اختراع بزرگ نیز بدل به اشیائی درخور موزه ها شده اند.

1. Jobst Bürgi

* سایر فرمولهایی که در تمبرها طراحی شده اند عبارت اند از فرمول اساسی شمارش $1 + 1 = 2$ ، رابطه فیثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$ ، قانون ارشمیدسی $w_1 d_1 = w_2 d_2$ ، قانون جاذبه عمومی آیزنک نیوتن، چهار معادله مشهور الکتریسته و مغناطیس ج.ک. ماکسول (J.C. Maxwell)، معادله گاز لودویگ بولتسمان (Ludwig Boltzmann)، معادله موشک کستانتین تسیولکوفسکی (Konstantin Tsiolkovskii)، معادله جرم-انرژی مشهور آلبرت اینشتین $E = mc^2$ ، و معادله انقلابی موج-ماده لوئی دو بروی (Louis de Broglie).

مع هذا، تابع لگاریتمی به این دلیل ساده که تغییرات لگاریتمی و نمایی از اجزاء حیاتی طبیعت و آنالیزند، هرگز از بین نخواهد رفت. در نتیجه، مطالعه خواص تابع لگاریتمی و معکوس آن، تابع نمایی، همواره بخش مهمی از آموزش ریاضی باقی خواهد ماند.

۹-۴ کرسیهای استادی ساویلی و لوکاسی

از آنجا که ریاضیدانان برجسته بسیاری صاحب کرسی ساویلی در آکسفورد یا صاحب کرسی لوکاسی در کیمبریج بوده اند، اشاره کوتاهی به این کرسیها بجا خواهد بود. سر هنری ساویل^۱ زمانی سرپرست کالج مرتن^۲ در آکسفورد، بعداً مدیر این^۳ شد، و در آکسفورد اصول اقلیدس را درس می داد. در ۱۶۱۹، وی دو کرسی استادی در آکسفورد دایر کرد، یکی در هندسه و یکی در نجوم. هنری بریگز اولین صاحب کرسی ساویلی هندسه در آکسفورد بود. قدیمی ترین کرسی استادی ریاضیات که در بریتانیای کبیر ایجاد شده بود، کرسی در هندسه بود که آن را سر توماس گرشام^۴ در ۱۵۹۶ در کالج گرشام در لندن دایر کرد. بریگز همچنین افتخار تصدی این کرسی را نیز برای اولین بار داشت. جان والیس، ادموندهالی، و سر کریستوفر فرن^۵ صاحبان دیگر کرسیهای استادی ساویلی در قرن هفدهم بودند.

هنری لوکاس^۶، که در ۱۶۳۹-۱۶۴۵ نماینده کیمبریج در مجلس انگلستان بود، طبق وصیت منامی را برای تأسیس یک کرسی استادی در اختیار دانشگاه قرار داد که به نام او نامیده می شود. آیزک برو به عنوان اولین عهده دار این کرسی در ۱۶۶۴ انتخاب و شش سال بعد آیزک نیوتن جانشین او شد.

۹-۵ هاریوت و اوترد

تامس هاریوت^۷ (۱۵۶۵-۱۶۲۱) ریاضیدان دیگری بود که بخش عمده زندگی خود را در قرن شانزدهم گذراند ولی اثر برجسته وی در قرن هفدهم منتشر شد. وی مورد علاقه خاص امریکاییها است زیرا در ۱۵۸۵ توسط سر والتر رالی^۸ به پنگه دنیا فرستاده شد تا جایی را که آن موقع ویرجینیا^۹ نامیده می شد ولی اکنون کارولینای شمالی^{۱۰} است مساحتی و نقشه برداری کند. به عنوان یک ریاضیدان، هاریوت معمولاً مؤسس مکتب انگلیسی جبردانان تلقی می شود. اثر بزرگ او در این زمینه، فنون تحلیلی حل معادلات جبری^{۱۱}، ده سال بعد از مرگ او چاپ شد و عمدتاً به نظریه معادلات می پردازد. این اثر کمک زیادی در پی ریزی

-
1. Sir Henry Savile	2. Merton	3. Eton
4. Sir Thomas Gresham	5. Sir Christopher Wren	
6. Henry Lucas	7. Thomas Harriot	8. Sir Walter Raleigh
9. Virginia	10. North Carolina	11. Artis analyticae praxis

معیارهای فعلی کتابهای درسی در این موضوع کرده است. کتاب فنون مشتمل است بر بحثی دربارهٔ معادلات درجهٔ اول، دوم، سوم، و چهارم، نوشتن معادلاتی با ریشه‌های مفروض، روابط بین ضرایب و ریشه‌های يك معادله، تبدیلهای معمولی يك معادله به معادله دیگری که بین ریشه‌های آن و ریشه‌های معادلهٔ اول رابطهٔ خاصی برقرار است، و حل عددی معادلات. قسمت زیادی از این مطالب را، البته، در آثار ویت می‌توان یافت، ولی کار هاریوت مطالعهٔ کاملتر و منظمتری است. هاریوت طرح ویت را در استفاده از حروف مصوت برای مجهولها و حروف بی‌صدا برای مقادیر ثابت دنبال کرد، ولی وی حروف کوچک را به جای حروف بزرگ اختیار نمود. وی نمادگذاری ویت را برای توانها با نمایش a^2 به جای aa ، a^3 به جای aaa ، و غیره اصلاح کرد. وی همچنین اولین کسی بود که علامت $< >$ را به ترتیب برای «بزرگتر است از» و «کوچکتر است از» به کار برد، اما این علامات را بلافاصله سایر نویسندگان نپذیرفتند.

نوآوریها و کشفیات متعدد دیگری، مانند يك هندسهٔ تحلیلی منسجم (قبل از انتشار دکارت به سال ۱۶۳۷)، این بیان که هر چند جمله‌ای درجهٔ n دارای n ریشه است، و «قاعدهٔ علامتهای دکارت» اشتهاً به هاریوت نسبت داده می‌شود. بعضی از این اشتباهات در تعیین مؤلف ظاهراً به علت آن است که، نویسندگان بعدی، مطالبی به بعضی از دستنوشته‌های محفوظ ماندهٔ هاریوت افزوده‌اند. مثلاً، هشت جلد از دستنوشته‌های هاریوت در موزه بریتانیا وجود دارد، اما قسمتی که با هندسهٔ تحلیلی سروکار دارد بنا بر آنچه توسط د. ی. اسمیت^۱ نشان داده شده، تحریفی است که به دست شخص دیگری صورت گرفته است. هاریوت به عنوان يك منجم نیز، با کشف لکه‌های خورشیدی و با مشاهدهٔ اقمار مشتری به طور مستقل از گالیله و تقریباً همزمان با او ممتاز بود.



ویلیام اولرد
(از مجموعهٔ دیوید اسمیت)

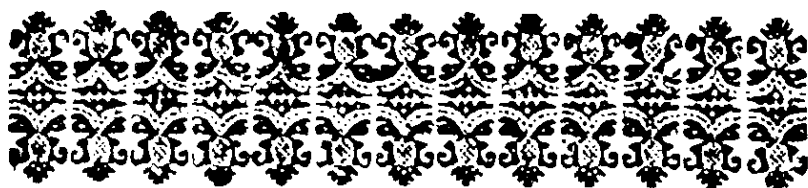
در همان سال (۱۶۳۱) که اثر هاریوت در جبر بعد از مرگ وی پدیدار شد، اولین چاپ کتاب عامه پسند راهنمای ریاضیات^۱ ویلیام اوترد، اثری در باب حساب وجبر که کمک زیادی در اشاعه دانش ریاضی در انگلستان کرد، از چاپ درآمد. ویلیام اوترد (۱۵۷۴-۱۶۶۵) یکی از پرنفوذترین نویسندگان انگلیسی قرن هفدهم در ریاضیات بود، گرچه از لحاظ شغلی يك كشیش کلیسای پروتستانی بود، به شاگردانی که علاقه به ریاضیات داشتند، درس خصوصی مجانی می داد. از جمله این شاگردان جان والیس، کریستوفر رن، و ست وارد^۲ بودند، که بعدها، بترتیب، به عنوان ریاضیدان، معمار، و منجم شهرت یافتند. گفته اند که اوترد وقتی خبر بازگشت چارلز II را به قدرت شنید، از فرط شادی قالب تهی کرد. در این مورد اوگاستس د مورگن^۳ خاطرنشان نمود که «من باب توجیه، باید اضافه کرد، که وی هشتاد و شش سال داشت.»

اوترد در نوشته های خود تأکید زیادی بر نمادهای ریاضی داشت و متجاوز از ۱۵۰ تای آنها را ارائه نمود. از میان اینها فقط سه تا به عصر حاضر راه یافته اند: (X) برای ضرب، چهار نقطه $(::)$ که در تناسب به کار می رود، و علامت $(\sim)$ که غالباً برای بیان تفاوت بین دو چیز از آن استفاده می کنیم. با این حال خاج به عنوان نمادی به نشانه ضرب، بلافاصله مورد پذیرش واقع نشد؛ زیرا، همان گونه که لایبنتز به آن ایراد گرفته، خیلی به X شباهت دارد. اگرچه هاریوت در مواقعی نقطه $(.)$ را برای ضرب به کار می برد، این نماد تازمانی که مورد قبول لایبنتز قرار نگرفته بود، چندان مورد استفاده واقع نشد. لایبنتز همچنین از طاق $(\cap)$ ، نمادی که امروزه برای نشان دادن ضرب در نظریه مجموعه ها به کار می رود، برای ضرب استفاده کرده است. نماد انگلیسی-امریکایی $(\cdot)$ برای تقسیم نیز ریشه در قرن هفدهم دارد، که به صورت چاپ برای نخستین بار در کتاب جبری توسط یوهان هاینریش ران^۴ سویسی (۱۶۲۲-۱۶۷۶) آمده است. نماد مذکور، وقتی چند سال بعد این کتاب ترجمه شد، در انگلستان شناخته شد. این نماد تقسیم مدتها در بر اروپا [اروپا بدون انگلستان] برای نشان دادن تفریق مورد استفاده بود. علامتهای آشنای فعلی، در هندسه، برای تشابه $(\sim)$ ، و برای تساوی مثلثها $(\simeq)$ ، را مدیون لایبنتز هستیم.

علاوه بر راهنمای ریاضیات، اوترد دو اثر تناسب^۵ (۱۶۳۲)، و مثلثات^۶ (۱۶۵۷) را منتشر نمود. اثر دوم به دلیل تلاش پیشگامانه خود در معرفی علایم اختصاری برای نامهای توابع مثلثاتی از اهمیت تاریخی برخوردار است. در اثر اول يك خط کش محاسبه مدور شرح داده می شود. ولی، اوترد اولین کسی نبوده که يك خط کش محاسبه از نوع مدور را به صورت چاپ شده توصیف کرده باشد. و تقدم در اختراع بین وی و ریچارد دلامین^۷، یکی از شاگردان او، جای بحث دارد. اما به نظر می رسد که بدون تردید اوترد مخترع

1. Clavis mathematicae
3. Augustus De Morgan
5. Circles of Proportion
7. Richard Delamain

2. Seth Ward
4. Johann Heinrich Rahn
6. Trigonometrie



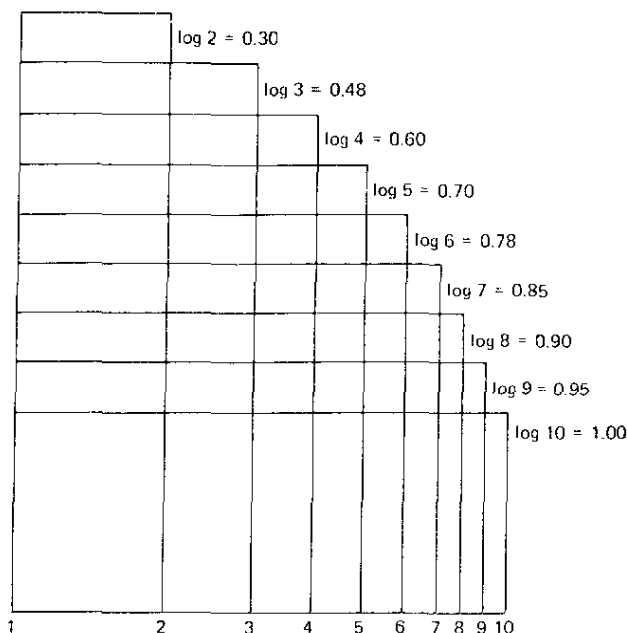
*Notæ seu symbola quibus in sequen-
tibus utor :*

Æquale =	Simile <i>Sim.</i>
Majus $\sqsupset$.	Proxime majus $\sqsupset\text{--}$.
Minus $\sqsubset$.	Proxime minus $\text{--}\sqsubset$.
Non majus $\sqsupset$.	Æquale vel minus $\sqsupset\text{--}$.
Non minus $\sqsubset$.	Æquale vel majus $\text{--}\sqsubset$.
Proportio, sive ratio æqualis ::	
Major ratio $\text{--}\text{--}\text{--}$.	Minor ratio $\text{--}\text{--}\text{--}$.
Continuè proportionales $\text{--}\text{--}\text{--}$.	
Commensurabilia $\sqcap$.	
Incommensurabilia $\sqcap$.	
Commensurabilia potentiâ $\sqcap$.	
Incommensurabilia potentiâ $\sqcap$.	
Rationale, $\rho\eta\tau\acute{o}\nu$, R, vel κ .	
Irrationale, $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$, κ .	
Medium sive mediale π .	
Linea secta secundum extremam & mediam rationem	} --
Major ejus portio σ	
Minor ejus portio τ .	
Z est A + E.	Σ est a + e.
X est A - E.	Ξ est a - e.

A 2

Z est

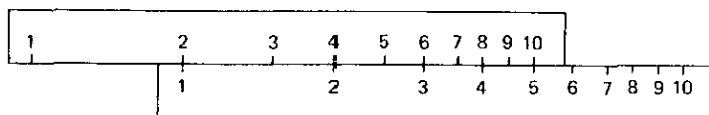
صفحه‌ای از راهنمای ریاضیات اوتورد (۱۶۳۱)، که تعدادی از نمادهای ریاضی وی را نشان می‌دهد.



شکل ۷۴

خط‌کش محاسبه مستقیم لگاریتمی، در ۱۶۲۲ بوده است. در ۱۶۲۵، گانته یک مقیاس لگاریتمی، یا خط مدرجی درست کرد که در آن فواصل با لگاریتمهای اعداد ثبت شده متناسب بودند (نگاه کنید به شکل ۷۴)، و ضرب و تقسیم را به‌طور مکانیکی با جمع و تفریق قطعات این مقیاس به کمک یک پرگار انجام می‌داد. فکر انجام این جمعها و تفریقها به کمک دو مقیاس لگاریتمی مشابه، که یکی در امتداد دیگری، نظیر شکل ۷۵ حرکت کند، منسوب به اوترد است. گرچه اوترد نظیر این خط‌کش محاسبه را در سالهای جلوتر، حوالی ۱۶۲۲، اختراع کرد، شرح چاپی آن را تا سال ۱۶۳۲ به تعویق انداخت. عددیاب [شاخص] برای خط‌کش محاسبه توسط آیزک نیوتن در ۱۶۷۵ پیشنهاد شد، ولی تا تقریباً یک قرن بعد عملاً ساخته نشد. چندین خط‌کش محاسبه برای مقاصد خاص، مثلاً برای معاملات بازرگانی، برای اندازه‌گیری الوار، و غیره، در قرن هفدهم ابداع شدند. مقیاس لگاریتم لگاریتم در ۱۸۱۵ اختراع شد، و در ۱۸۵۵ بود که آمده مانایم^۱ افسر ارتش فرانسه (۱۸۳۱-۱۹۰۶) خط‌کش محاسبه مدرن را استاندارد نمود.

عقیده بر این است که مؤلف ضمیمه مهم بی‌نام شانزده صفحه‌ای برای چاپ انگلیسی شرح نپر اثر ادوارد رایت^۲، اوترد بوده است. در اینجا ست که اولین استفاده از خاج برای



شکل ۲۵

ضرب، نخستین اختراع روش پایه‌ها در محاسبه لگاریتمها (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱.۹ (ج))، و نخستین جدول لگاریتمهای طبیعی ظاهر می‌شود. او ترد همچنین کتابی درباره کیل کردن (علم محاسبه ظرفیتهای چلیکها، بشکه‌ها) نوشت و یک کتاب از زبان فرانسوی درباره تفریحات ریاضی را ترجمه و منتشر نمود.

۹-۶ گالیله

دو منجم برجسته مهم قابل ملاحظه‌ای در اوایل قرن هفدهم در ریاضیات داشتند: گالیلئو گالیلئو [گالیله] ایتالیایی، و یوهان کپلر آلمانی.

گالیله، پسر نجیب‌زاده فلورانس تگدست شده‌ای، در شهر پیسا در سال ۱۵۶۴ در روز مرگ میکل‌آنجلو، به دنیا آمد. در هفده سالگی والدینش او را برای تحصیل طب به دانشگاه پیسا فرستادند. یک روز، موقعی که در مراسمی در کلیسای جامع شهر پیسا شرکت داشت، حواسش متوجه چراغ بزرگ برنزی که از سقف بلند آویزان بود، گردید. چراغ را به یک طرف کشیده بودند که روشن کردنش آسانتر شود، و وقتی رهایش کردند، چراغ با دامنه نوسانی که تدریجاً کاهش می‌یافت به نوسان درآمد. با استفاده از ضربان قلبش برای سنجش زمان، وی از کشف این مطلب که دوره هر نوسان چراغ مستقل از اندازه کمان نوسان است، دچار تعجب شد. بعدها، به کمک آزمایشهایی، نشان داد که دوره تاب خوردن یک پاندول نیز مستقل از وزن و وزن پاندول است و در نتیجه فقط به طول پاندول بستگی دارد. گفته‌اند که علاقه گالیله به علوم و ریاضیات بر اثر این مسئله برانگیخته شده و انگیزه بیشتر این کار حضور تصادفی در یک درس در هندسه در دانشگاه بوده است. نتیجه آن بود که وی از والدینش اجازه ترک تحصیل رشته پزشکی کرده و با به دست آوردن آن خود را به جای پزشکی وقف علوم و ریاضیات کرد. و اینها دو رشته‌ای بودند که او در آنها دارای استعداد طبیعی زیادی بود.

در بیست و پنج سالگی گالیله به سمت استادی ریاضیات در دانشگاه پیسا برگزیده شد و گفته‌اند که وقتی عهده‌دار این سمت بود آزمایشهایی را با استفاده از برج کج شده آنجا ترتیب داد. مطابق این گفته‌ها، وی در حضور جمعی از دانشجویان، استادان، و روحانیون، دو قطعه فلز را که یکی ده برابر دیگری وزن داشت، از فراز برج کج شده پیسا به پایین پرتاب کرد. این دو قطعه فلز عملاً در یک لحظه به زمین برخوردند و به این ترتیب گفته ارسطو را که

1. gauging

* این مطلب تنها به‌طور تقریبی درست است و تقریب در حالت کوچک بودن دامنه نوسان بسیار نزدیک است.

اجسام سنگینتر سریعتر از اجسام سبکتر سقوط می کنند، نقض کردند. گالیله به کشف این قانون که فاصله سقوط يك جسم متناسب با مجذور زمان سقوط است، در مطابقت با فرمول آشنای $s = gt^2/2$ ، نایل آمد. اما حتی رؤیت آزمایشهای گالیله خللی در اعتقاد اساتید دیگر نسبت به تعلیمات ارسطو وارد نکرد. گستاخی گالیله در توهین به مقدسات با نقض تعلیمات ارسطو چنان بر مقامات دانشگاه گران آمد که آنها در آنجا زندگی را بر او تلخ کردند و در نتیجه او در سال ۱۵۹۱ از پست استادی خود استعفا داد. سال بعد پست استادی را در دانشگاه پادوا، که برای مقاصد علمی جو مناسبتری داشت، پذیرفت. گالیله در اینجا قریب به ۱۸ سال به آزمایشها و تعلیمات خود ادامه داد و شهرتش عالم گستر شد.

در حدود سال ۱۶۰۷، يك شاگرد عینکساز هلندی به نام هانس لیپرش،^۱ در حال بازی با تعدادی از عدسیهای عینک، دریافت که اگر دو عدسی را در فاصله مناسبی از هم نگهدارد، اشایی که از درون این جفت عدسی مشاهده می شوند، بزرگ می شوند. شاگرد عینکساز، کشف خود را به اطلاع استادش رساند و او دو عدسی را در لوله ای قرار داده و این وسیله را به عنوان اسباب بازی در ویتروین مغازه اش گذاشت. يك مقام دولتی این اسباب بازی را دید و آن را خرید و تقدیم شاهزاده مائوریس ناسائویی^۲ کرد. شاهزاده مائوریس که فرماندهی قوای مسلح هلند متحده^۳ را به عهده داشت، دریافت که می توان از این اسباب بازی به عنوان تلسکوپ در کارهای نظامی استفاده کرد.

خبر اختراع تلسکوپ قبل از سال ۱۶۰۹ به گالیله رسید و او بزودی تلسکوپیی بمراتب بهتر از تلسکوپ لیپرش ساخت. بنا به درخواستی که به عمل آمد، وی ابزار خود را در ونیز به معرض امتحان گذاشت و در آنجا سناتورهای ونیزی توانستند که از فراز بلندترین کلیسای شهر، بادبانهای يك کشتی را دوساعت تمام زودتر از موقعی که به چشم بی سلاح قابل رؤیت باشد، مشاهده نمایند. گالیله مدل خود را تقدیم دوخ و نیز^۴ کرد و او، مانند پرنس-مائوریس، امکانات زیاد این وسیله را در عملیات دریایی و نظامی تشخیص داد، و مقرری گالیله به مقدار قابل ملاحظه ای افزایش یافت.

گالیله ضمن ادامه کار خود چهار تلسکوپ دیگر، نامی که به ابزار او نهاده شد (از تله^۵ یونانی، به معنی «دور» و اسکوپوس^۶، به معنی «نگریستن») ساخت که هر يك قویتر از قبلی بود. با ساختن پنجمین تلسکوپ، که قدرت بزرگنمایی آن سی برابر بود، گالیله در شب هفتم ژانویه ۱۶۱۰، دو ستاره كوچك را در شرق سیاره مشتری و یکی را در غرب آن مشاهده کرد. شب بعد، وی با شگفتی هر سه ستاره را در غرب سیاره دید، و سه شب بعد وی دریافت که ستاره كوچك دیگری حول مشتری در گردش است. او چهار قمر روشن مشتری را کشف کرده بود و ارصاء وی تأیید کاملی بر این نظریه کوپرنیکی بود که اجسام كوچك بر گرد اجسام بزرگتر در گردش اند. گالیله به كمك تلسکوپش، کلفهای خورشیدی، کوههای

1. Hans Lippershey

2. Maurice of Nassau

3. United Netherlands

4. Doge of Venice

5. tele

3. skopos



گالیلئو گالیلئو

(مجموعه دیوید اسمیت)

ماه، (اهله زهره) و حلقه‌های کیوان را رصد کرد. اما این کشفیات يك بار دیگر مخالفت مغرضانه بسیاری از اصحاب کلیسا را، که اقتدار ارسطو را قبول داشتند، برانگیخت؛ ارسطو گفته بود که خورشید بی عیب است و زمین، و در نتیجه بشر، مرکز عالم است. حتی يك روحانی کلیسا گالیله را متهم کرد که چهار ستاره ژوپیتر را در درون تلسکوپ خود جعل کرده است.

سرانجام در سال ۱۶۳۳، يك سال پس از منتشر کردن کتابی که نظریه کوپرنیکی را تأیید می‌کرد، گالیله برای حضور در مقابل هیأت تفتیش عقاید فراخوانده شد و در آنجا، این مرد پیر و بیمار، در اثر تهدید به شکنجه، مجبور شد که یافته‌های علمی خود را باطل اعلام نماید. کتاب او در فهرست آثار ممنوعه قرار داده شد و دویست سال در این فهرست ماند. با گواهی دروغ علیه وجدان خود، زندگی دانشمند پیر درهم شکسته شد. به او اجازه داده شد که به کارهای بی‌ضرر علمی‌اش ادامه دهد، اما کور شد و در ژانویه ۱۶۴۲، در حالی که هنوز تحت نظر هیأت تفتیش عقاید و عملاً در خانه‌اش زندانی بود، درگذشت.*

بنا بر حکایتی، وقتی که گالیله بعد از اعلام اجباری بطلان نظرش و تکذیب حرکت زمین به پا خاست، به آرامی زیر لب چنین زمزمه کرد: «با همه این احوال زمین به دور خود می‌چرخد.» این داستان صرف نظر از مبنای خود بدل به ضرب المثلی به این مضمون گشته است که حقیقت، هر چند هم در پوشاندن آن کوشش شود، سرانجام آشکار خواهد شد. سال ۱۶۴۲ که در گذار خود شاهد مرگ گالیله در اسارت بود، شاهد تولد آیزک نیوتن هم شد.

* در سال ۱۹۸۵، ۳۴۷ سال بعد از محکومیتش به وسیله کلیسا به دلیل استفاده از تلسکوپ برای اثبات چرخش زمین به دور خورشید، واتیکان، بنا به خواسته پاپ ژان پل II، شروع به تجدید نظر در محکومیت گالیله به عنوان رفق کرد.

روح علمی جدید را که هماهنگی بین تجربه و تئوری است، به گالیله مدیونیم. وی مکانیک اجسامی را که به طور آزاد سقوط می کنند تأسیس و بنیان دینامیک در حالت کلی را پی نهاد، شالوده ای که آیزک نیوتن بعداً توانست علوم را بر پایه آن بنا نماید. وی اولین کسی بود که ماهیت سهموی داشتن مسیر یک پرتابه در خلا را تشخیص داد و در قوانینی که متضمن شتابند، تأمل نمود. او اولین میکروسکوپ از نوع جدید و پرتکار تقسیم (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۹.۶) را، که زمانی بسیار مورد توجه بود، اختراع کرد. آنچه از نظر تاریخی مهم است، اظهاراتی است که از طرف گالیله عنوان شد و نشان می دهند که وی مفهوم هم ارزی دسته های نامتناهی را (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۷.۹) که نکته ای اساسی در نظریه مجموعه های قرن نوزدهم کانتور بوده و در توسعه آنالیز جدید تأثیر زیادی داشته، درک کرده است. این اظهارات، و قسمت عمده نظریات گالیله در دینامیک، را در اثر مهم او، محاوره دربارهٔ دو دانش جدید و اثبات ریاضی آنها که در سال ۱۶۳۸ در لیدن منتشر شد، می توان یافت. از گالیله نقل کرده اند که: «در پرسشهای علمی، مرجعیت هزاران نفر، ارزش استدلال خاضعانه یک فرد را ندارد.»

به نظر می رسد که گالیله به معاصر مشهور خود، یوهان کپلر حسادت می ورزیده، زیرا گرچه کپلر هر سه قانون مهم حرکت سیاره ای خود را پیش از سال ۱۶۱۹ اعلام کرده بود، این قوانین کاملاً توسط گالیله نادیده گرفته شده اند.

گالیله سرتاسر عمرش فردی مذهبی و کاتولیکی معتقد بود. در نتیجه برای او اضطراب آور بود که نظراتی را که مشاهدات و استدلالهایش به عنوان یک دانشمند وی را بناچار بدانها رهنمون شده بودند، به دلیل تعارض با کتب مقدس کلیسایی که او خود را عضو وفادار آن تلقی می کرد، در محکومیت ببیند. دانشمندان زیادی هر از چندگاه، خود را در این موقعیت یافته اند. چنین واقعه ای به عنوان مثال در اواسط قرن نوزدهم در موقعی که مشکلاتی در آشتی دادن نظریه تکامل داروین با نظر تورات در آفرینش موجودات زنده به وجود آمده بود، رخ داد.

نتیجه ای که گالیله به آن رسید این بود که کتاب مقدس کتابی در نجوم یا زیست شناسی یا هر علم دیگری نبوده و هرگز چنین نخواهد بود. به طور خلاصه به نظر گالیله کتاب مقدس برای آن نوشته نشده است که حقایق علمی را که خود ما می توانیم کشف کنیم، به ما بیاموزد. بلکه هدف آن این است که کتابی برای آشکار کردن حقایق معنوی که خود ما قادر به کشفشان نیستیم، باشد. ستیز بین علم و کتاب مقدس در این واقعیت نهفته است که این حقایق معنوی در کتاب مقدس به گونه ای ابراز شده اند که برای مردمی که این حقایق برای آنان و از طریق آنان آشکار شده، طبیعی باشند. اما این امر بوضوح صرفاً معلول موقعیت زمانی بوده و، بنابراین باید نادیده گرفته شود. یک دانشمند نباید از دریافت اینکه جهان کتاب مقدس به صورتی تصویر شده که برای عبریان قدیم طبیعی جلوه نماید، آشفته خاطر شود، و یک

روحانی نباید از دریافت اینکه دانشمندی دنیا را مغایر با توصیفات کتاب مقدس تصویر نماید، آشفته خاطر گردد. نحوه توصیف دنیا لازمه هدف واقعی کتاب مقدس بوده و به هیچ عنوان با آموزشهای معنوی کتاب مقدس ناسازگاری ندارد.

۹-۷ کپلر

یوهان کپلر در ۱۵۷۱ نزدیک اشتوتگارت متولد و در دانشگاه توبینگن^۱ با این نیت اولیه که يك کشیش او تری شود، به تحصیل پرداخت. علاقه عمیق وی در نجوم وی را به تغییر برنامه‌هایش راهبر شد. در ۱۵۹۴، در اوایل سنین بیست خود، سمت مدرسی در دانشگاه گراتس^۲ در اتریش را پذیرفت. در ۱۵۹۹ دستیار تیکوبراهه^۳ مشهور ولی منازعه جوی دانمارکی-سوئدی شد، که به عنوان منجم در بارکیسر رودلف II به پراگ منتقل شده بود. به فاصله کوتاهی پس از آن، در ۱۶۰۱، براهه بناگهان در گذشت، و کپلر هم مقام و هم مجموعه یافته‌های نجومی همکار ارشد خود در حرکت سیاره‌ها را به ارث برد.

این سخن را مکرر گفته‌اند که تقریباً هر مسئله را می‌توان با پرداختن مداوم به آن و گذاشتن وقت کافی حل کرد. آن‌طور که تامس ادیسون^۴ در باره اختراع گفته است که اختراع يك در صد الهام و نود و نه در صد عرق ریختن است، حل مسئله يك در صد تفکر و نود و نه در صد پشتکار است. شاید این امر در هیچ جای دیگر تاریخ علم آشکار تر از سماجت باور نکردنی کپلر در حل مسئله حرکت سیارات به دور خورشید بروز نکرده باشد. با اعتقاد کامل به نظریه کوپرنیکی چرخش سیارات در مدارهایی حول خورشید مرکزی، کپلر با جدیت زیاد در صدد تعیین ماهیت و وضع این مدارها و چگونگی حرکت سیاره‌ها در مدارهای خود برآمد. بعد از تلاشهای زیادی که عمدتاً جنبه تخیلی داشتند و زمانی انجام شدند که او داده‌های کمی برای تعیین صحت و سقم آنها در دست داشت، کپلر به توده عظیمی از رصدهای بسیار دقیق تیکوبراهه در حرکت سیاره‌ها دست یافت. مسئله بعداً به این صورت درآمد: به دست آوردن الگویی برای حرکت سیارات که دقیقاً با مجموعه عظیم رصدهای براهه مطابقت کند. یادداشتهای براهه چنان قابل اعتماد بودند که هر جوابی که با موقعیتهای رصد شده براهه که حتی مقدار اندکی به قدر يك چهارم قطر ظاهری ماه متفاوت باشد، می‌بایست به عنوان جواب ناصحیح کنار گذاشته شود. بدین ترتیب کپلر نیاز بدان داشت که ابتدا به کمک تخیل جواب موجهی را حدس بزند و سپس با پشتکار پرنجی کوهی از محاسبات کسل کننده را بر دوش بکشد تا حدس خود را تأیید یا رد کند. وی صدها بار به کوششهای بی‌ثمری دست زد و محاسبات بسیار زیادی انجام داد و با شوق و بردباری کاهش ناپذیری به مدت بیست و يك سال کار کرد. سرانجام در سال ۱۶۰۹ توانست دو قانون اول خود و سپس ده سال بعد در ۱۶۱۹ سومین قانون، یعنی حرکت سیاره‌ای، را



یوهان کپلر
(مجموعه دیوید اسمیت)

فرمولبندی کند.

کشف این قوانین حرکت سیاره‌ای از رویدادهای برجسته در تاریخ نجوم و ریاضیات است، زیرا در تلاش برای توجیه آنها آیزک نیوتن به ابداع مکانیک سماوی هدایت شد. سه قانون مزبور از این قرارند:

I. سیارات در حول خود شید بر مدار بیضی شکلی که خود شید در یکی از کانونهای آن واقع است، حرکت می‌کنند.

II. شعاع حاملی که یک سیاره را به خود شید وصل می‌کند در زمانهای مساوی مساحت‌های مساوی می‌پیماید.

III. مربع زمان یک‌گردش کامل سیاره‌ای بر مدار خود با مکعب نیم محور اطول مسیر آن متناسب است.

کشف تجربی این قوانین از انبوه اطلاعاتی که براهه جمع‌آوری کرده بود، یکی از استثنای‌ترین نتیجه‌گیری‌هایی است که تاکنون در علوم صورت گرفته است.

کسی نمی‌داند که بخشی مشخص از ریاضیات ناب کی کاربرد نامنتظری خواهد یافت. آن‌گونه که ویلیام وول^۱ گفته است، «اگر یونانیان علم مقاطع مخروطی را بارور نکرده بودند، کپلر نمی‌توانست بر بطلیموس برتری جوید.» بسیار جالب توجه است که ۱۸۵۰ سال بعد از آنکه یونانیان خواص قطوع مخروطی را صرفاً برای ارضای امیال روشنفکرانه خود بسط داده بودند، چنین کاربرد عملی روشنی از آنها پیش بیاید. با غرور قابل تصدیقی، کپلر در مقدمه کتاب همسازی جهانهای خود در سال ۱۶۱۹ چنین نگاشت: من کتابی برای معاصرین یا -بدون هیچ فرقی- برای نسل آینده می‌نویسم. شاید لازم

باشد که کتاب من صدسال منتظر خواننده‌ای بماند. آیا خداوند ۶۰۰۰ سال منتظر نظاره‌گری نمانده است؟

کپلر یکی از پیشگامان در علم حسابان بود. برای محاسبه مساحتیابی که در قانون دوم حرکت سیاره‌ای وی دخالت داشتند، وی می‌بایست که به شکل خامی به حساب انتگرال تمسک جوید. وی همچنین، در هندسه فضایی بشکه‌های شراب^۱ ۱۶۱۵ خود، روشهای خام انتگرالگیری را برای یافتن حجمهای ۹۳ جسم حاصل از دوران قطعه‌های مقاطع مخروطی حول محوری واقع در صفحه آنها به کار برد. از جمله این اجسام چنبره و دوجسمی هستند که وی آنها را سیب و لیمو نامیده است که دوجسم اخیر آنها بی هستند که از دوران دو کمان از یک دایره که به ترتیب بزرگتر و کوچکتر از نیمدایره هستند، در حول و ترمشتر کشان به دست می‌آیند. کپلر از مشاهده روشهای بدمورد استفاده کیل کنندگان شراب عصر خود به این موضوع علاقمند شد. چه بسا که کاوالیری، وقتی که بعداً تهذیب حساب بینهایت کوچکیها را با روش تقسیم ناپذیرهای خود یک گام فراتر برد از این اثر کپلر متأثر شده باشد. ما به بحث درباره همه اینها در فصل ۱۱ باز خواهیم گشت.

کپلر سهیم قابل ملاحظه‌ای در پیشبرد موضوع چندوجهیها دارد. وی ظاهراً اولین کس بود که یک پاد منشور (حاصل از دوران قاعده فوقانی یک منشور در صفحه خود به طوری که رؤس آن با اضلاع قاعده پائین متناظر شوند، و سپس وصل رؤس دو قاعده به طور زیگزاگ) را تشخیص داد. وی همچنین چهارده وجهی مرکب منتظم، دوازده وجهی لوزی منتظم، و سی وجهی لوزی منتظم را کشف کرد.* دومین این چندوجهیها به صورت بلورهای لعل در طبیعت یافت می‌شوند. از چهار چندوجهی منتظم ستاره‌ای ممکن، دوتا را کپلر و دوتای دیگر را در ۱۸۰۹ لویی پوانسو^۲ (۱۷۷۷-۱۸۵۹)، یکی از پیشگامانی که در مکانیک هندسی کار می‌کرده، کشف کرده‌اند. چندوجهیهای ستاره‌ای کپلر-پوانسو مشابه‌های فضایی چندضلعیهای ستاره‌ای منتظم در صفحه (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۵۰۸) هستند. کپلر همچنین توجه خود را به مسئله پر کردن صفحه با چندضلعیهای منتظم (که لزوماً همه مثل هم نیستند) و پر کردن فضا با چندوجهیهای منتظم (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۹۰۹) معطوف داشته‌است. کپلر مسئله تعیین نوع قطوع مخروطی را که با معلوم بودن یک رأس، محور مار برای آن رأس، یک مماس دلخواه و نقطه تماسش معین می‌شوند، حل کرد، و کلمه کانون را در هندسه مخروطات معمول نمود. وی مقدار تقریبی محیط یک بیضی با نیم‌قطرهای a و b را با استفاده از فرمول $\pi(a+b)$ به دست آورد. وی همچنین یک باصطلاح اصل پیوستگی وضع کرد که اساساً وجود نقاط آرمانی و یک خط آرمانی در بینهایت یک صفحه را که دارای بسیاری از خواص نقاط و خطوط معمولی هستند، مسلم فرض می‌کند. بدین ترتیب وی توضیح

1. Stereometria doliorum vinorum

* الگوهای ساختمان برای این اجسام صلب را می‌توان در Miles C. Hartley, Patterns of polyhedrons, rev. ed یافت.

2. Louis Poinso

می دهد که يك خط را می توان در بینهایت بسته انگاشت، و دو خط موازی را باید در بینهایت متقاطع تلقی کرد، و يك سهمی را می توان حالت حدی يك بیضی یا يك هذلولی تلقی کرد که یکی از کانونهای آن به بینهایت رفته است. این مفهوم را در ۱۸۲۲ مهندس فرانسوی پونسله به هنگامی که سعی داشت تا يك توجیه «حقیقی» در هندسه برای انگاریهایی پیدا کند که در سایر جاها در ریاضیات پیش می آیند، تا حد زیادی تعمیم داد.

نوشته های کپلر اغلب آموزه های است از اندیشه های عرفانی و بسیار تخیلی که با دریافت واقعاً ژرفی از حقایق علمی ترکیب شده است. جای تأسف است که زندگی شخصی او بر اثر شماری از پیشامدهای ناگوار زندگی تحمل ناپذیر شده بود. پسر دلبندش از آبله مرد، زنش دیوانه شد و درگذشت، مادرش به جادوگری و خود او به بدعت گذاری متهم شدند، و مقرری وی همیشه به تعویق می افتاد. بنا به روایتی بخت حتی با ازدواج دوم او کمتر از ازدواج اول یار بود، با آنکه از سر احتیاط محاسن و معایب یازده دختر را قبل از انتخاب اشتباه آمیزش به دقت سنجیده بود. وی مجبور شد تا بر درآمد خود از راه طالع بینی بیفزاید، و در ۱۶۳۵ در سفری به منظور دریافت حقوق مدتها به عقب افتاداش دارفانی را وداع گفت.

۸-۹ دزارگ

در ۱۶۳۹، نه سال بعد از مرگ کپلر، درباریس رساله ای فوق العاده ابتکاری درباره مقاطع مخروطی منتشر شد که چندان مورد توجه قرار نگرفت*. این رساله را ژرارد دزارگ^۱، مهندس، معمار، و افسر سابق ارتش فرانسه نوشته بود که در لیون^۲ در ۱۵۹۳ به دنیا آمد و در همان شهر در حدود سال ۱۶۶۲ درگذشت. این مقاله آن چنان مورد بی اعتنائی ریاضیدانان دیگر قرار گرفت که بزودی به دست فراموشی سپرده شد و همه نسخ منتشره آن از بین رفت. دو قرن بعد، که مهندس فرانسوی میشل شال^۳ (۱۷۹۳-۱۸۸۵) تاریخ هندسه خود را که هنوز هم کتابی استانده است نوشت، هیچ وسیله ای برای ارزیابی کار دزارگ در دست نبود. با این حال شش سال بعد، در ۱۸۴۵، شال به يك نسخه دستنویس رساله وی، که فیلیپ دولاهیر (۱۶۴۵-۱۷۱۸) شاگرد دزارگ تهیه کرده بود، برخورد، و از آن پس این اثر به صورت یکی از آثار کلاسیک در بسط اولیه هندسه تصویری ترکیبی درآمد.

دلایل متعددی را می توان در توضیح نادیده گرفته شدن بدوی مجلد کوچک دزارگ اقامه کرد. این کتاب تحت الشعاع هندسه تحلیلی روانتری که دو سال پیش از آن دکارت پایه ریزی کرده بود، قرار گرفت. هندسه دانان عموماً نیروی خود را در راه بسط این وسیله پر قدرت جدید با به کار بردن بینهایت کوچکها در هندسه صرف می نمودند. گذشته از آن دزارگ سبک نگارش نامساعد و غیر معمولی داشت و در حدود ۷۵ اصطلاح جدید که بسیاری از آنها ریشه گیاهشناسی پیچیده ای داشتند، به کار برده بود، که از میان آنها تنها یکی، یعنی

* Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan. (کوششی برای بحث در پیرامون موارد برخورد يك مخروط با يك صفحه.)

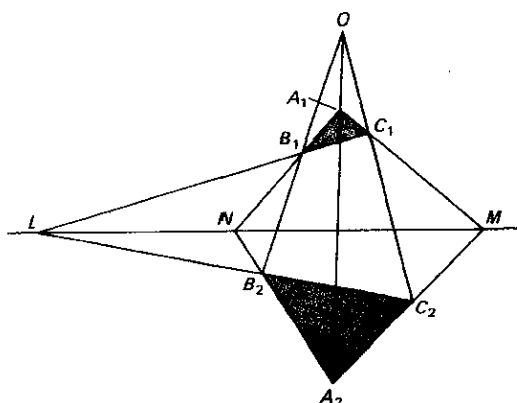
1. Gérard Desargues

2. Lyons

3. Michel Chasles

انولوسیون، به جا مانده است، و کاملاً عجیب آنکه، این یکی از آن جهت حفظ شد که بخشی از اصطلاحات فنی دزارگ بوده که منقد اثر وی جهت نقد و استهزای شدید انتخاب کرده بود. دزارگ علاوه بر آنچه که دربارهٔ مقاطع مخروطی نوشته، کتب دیگری نیز نگاشته که یکی از آنها رساله‌ای است در باب اینکه چگونه می‌توان به کودکان خوب آواز خواندن را آموخت. اما کتاب کوچک وی دربارهٔ مقاطع مخروطی بود که او را به عنوان عمده‌ترین نویسندهٔ قرن هفدهم در زمینهٔ هندسهٔ ترکیبی، مشخص می‌سازد. در اثر فوق با شروع از دکترین کپلر در باب پیوستگی، بسیاری از قضایای اساسی در بارهٔ انولوسیون، تقسیمات توافقی، هومولوژی، قطب و قطبی، و پرسپکتیو-مباحثی آشنا برای آنها که یکی از درسهای امروزی هندسهٔ تصویری را گرفته‌اند- بسط داده شده است.* مطلب جالب آنکه مفهوم قطب و قطبی را می‌توان برای کره‌ها و برخی سطوح درجه دوم تعمیم داد. احتمالاً دزارگ تنها از وجود چند سطح درجه دوم اطلاع داشته و اغلب این سطوح احتمالاً تا شمارش کامل آنها توسط اوایلر در ۱۷۴۸ ناشناخته بوده‌اند. در جای دیگری قضیهٔ اساسی دو-مثلاً دزارگ را می‌بینیم: اگر دو مثلث، واقع در یک صفحه یا غیر واقع بر آن، چنان قرار گرفته باشند که خطوطی که رأسهای نظیر را بهم وصل می‌کنند متقارب باشند، آنگاه نقاط تلاقی زوج اضلاع متناظر هم‌خط‌اند، و برعکس (نگاه کنید به شکل ۷۶).

دزارگ، در سنین بین سی و چهل و وقتی در پاریس می‌زیست، از طریق یک سلسله درسهای رایگان معاصرین خود را به‌طور قابل ملاحظه‌ای تحت تأثیر قرارداد. کارهای او مورد تحسین دکارت قرار گرفت، و بلز پاسکال زمانی از دزارگ به عنوان منبع عمده الهام خود یاد کرده است. لاهیر، باز حمت فراوان، کوشید تا نشان دهد که کلیهٔ قضایای مقاطع-مخروطی آپولونیوس را می‌توان به وسیلهٔ روش تصویر مرکزی دزارگ از دایره استخراج



شکل ۷۶

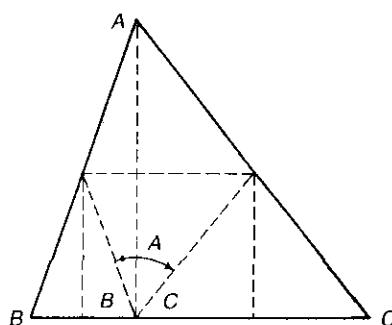
* این مطلب که برخی از این مفاهیم بر یونا نیان باستان معلوم بوده است، در فصل ۶ خاطر نشان شده است.

کرد. مع هذا علیرغم همه اینها، هندسه جدید در قرن هفدهم چندان نفوذی به دست نیاورد و این موضوع عملاً تا اوایل قرن نوزدهم، که توجه زیادی به آن مبذول شد و ریاضیدانانی مانند ژرگون، پونسله، بریانشون^۱، دوپن^۲، شال^۳، واشتاینر در آن به پیشرفتهای بزرگی در آن نایل شدند، مسکوت ماند. گرچه انگیزه دزارگ^۴ ممکن است نیازمعماران و طراحان به نظریه پرسپکتیو بوده باشد، نویسنندگان اخیر این موضوع را به خاطر زیبایی ذاتی آن مورد بسط قرار دادند.

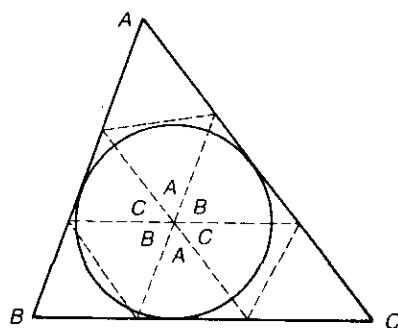
۹-۹ پاسکال

یکی از معدود معاصرین دزارگ که به اثر وی به دیده تحسین می نگریست، بلز پاسکال، یکی از نوایغ بلند پایه ریاضی است. پاسکال در ۱۶۲۳ در ایالت فرانسوی اوورنی^۵ متولد شد و خیلی زود توانایی شگفت انگیزی در ریاضیات از خود نشان داد. داستانهای چندی از دستاوردهای دوران جوانی او را خواهرش ژیلبرت^۶، که بعدها خانم پریه^۷ شد، نقل کرده است. به علت ضعف جسمی، پسر را در خانه نگهداشتند تا از تحلیل بنیه اش جلوگیری کنند. پدرش بر آن شد که تحصیلات فرزندش در بدو امر باید محدود به مطالعه زبان شود و شامل ریاضیات نباشد. حذف ریاضیات از مطالعات او کنجکاوای پسر را برانگیخت، و وی از معلم سرخانه خود درباره ماهیت هندسه استفسار کرد. معلمش به او گفت که هندسه، مطالعه اشکال دقیقه و خواص اجزای مختلف آن است. توصیف معلمش از هندسه و دستور پدرش در نهی آن باعث تهییج او شده از وقت بازی اش دست کشید و پنهانی، در عرض چند هفته، پیش خود بسیاری از خواص اشکال هندسی و بویژه این حقیقت را که مجموع زوایای مثلث یک نیم صفحه است، کشف کرد. دستاورد اخیر با عمل تا کردن یک مثلث کاغذی، شاید با تا کردن رئوس روی مرکز دایره محاطی، به طوری که در شکل ۷۷ نشان داده شده، یا با تا کردن بر پای ارتفاع آن، مطابق شکل ۷۸، حاصل شده بود. وقتی که پدرش روزی در جریان فعالیت های هندسی اش به او برخورد، وی چنان از توانایی پسرش متأثر شد که نسخه ای از اصول اقلیدس به وی داد و پسر جوان آن را با اشتیاق خواند و سرعت بر آن تسلط یافت. در چهارده سالگی، پاسکال در گردهما بیهای هفتگی گروهی از ریاضیدانان فرانسوی که سرانجام در ۱۶۶۶، آکادمی فرانسه از آن پدید آمد، شرکت کرد. در شانزده سالگی مقاله ای درباره مقاطع مخروطی نوشت که دکارت باور نمی کرد اثر پاسکال باشد بلکه تصور می کرد که به پدر وی تعلق داشته باشد. در هجده یا نوزده سالگی اولین ماشین حساب را اختراع کرد و اختراع آن بدان لحاظ بود که پدرش را در ممیزی حسابهای دولتی در روئن^۸ یاری نماید. پاسکال بیش از پنجاه ماشین حساب دیگر به وجود آورد که برخی از آنها همچنان در موزه هنرها و پیشه ها^۹ در پاریس نگهداری می شوند. در بیست و یک سالگی وی به کار

1. Brianchon	2. Dupin	3. Auvergne	4. Gilberta
5. Madame Périer	6. Rouen	7. Conservatoire des Arts et Métiers	



شکل ۲۸



شکل ۲۷

توریچلی درباره فشارجوی علاقمند شد و استعدادهای خارق العاده خود را در فیزیک به کار گرفت که نتیجه آن این بود که اصل پاسکال در تئیدرودینامیک را امروزه هر دانش آموز دبیرستانی می داند. چند سال بعد، در ۱۶۴۸، وی دستنویس جامعی درباره مقاطع مخروطی نوشت که به چاپ نرسید.

این فعالیت اعجاب آور و پیشرس وی ناگهان در ۱۶۵۰ قطع شد. در این سال پاسکال، که از ضعف جسمانی در رنج بود، تصمیم گرفت از تحقیقات خود در ریاضیات و علم دست بردارد و خود را وقف تأملات مذهبی نماید. ولی سه سال بعد به مدت کوتاهی به عالم ریاضیات بازگشت. در این دوران مقاله مثلث حسابی خود را نوشت، آزمایشهای متعددی در باره فشار مایعات به عمل آورد و مکاتبه با فرما وی را در پی ریزی شالوده های نظریه ریاضی احتمالات یآوری کرد. اما در اواخر سال ۱۶۵۴ آنچه را که وی به دیده یک ندای



بلز پاسکال

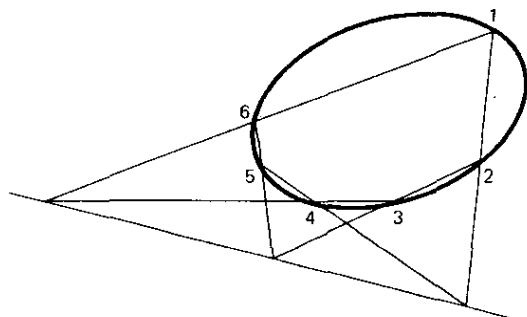
(برادران براون)

باطنی شدید مبنی بر ناخشنودی خداوند از تجدید فعالیتهايش بدان می نگریست ، دریافت کرد. این ندای غیبی زمانی به او رسید که اسبهای رم کرده کالسکه حامل وی با دیواره پل درنویی^۱ تصادم کردند، و خود او فقط به دلیل پاره شدن معجزه آسای تسمه ها نجات یافت. از آن پس، مستظهر به نوشته این خاطره که بر تکه پوستی آویخته بر سینه داشت، خود را به بازگشت به دامان تفکرات مذهبی موظف کرد.

تنها يك بار دیگر در ۱۶۵۸، پاسکال به ریاضیات بازگشت. زمانی که به دندان درد مبتلا بود، چند اندیشه هندسی به ذهن او خطور کرد و دندان درد او ناگهان قطع شد. با تلقی این امر به نشانه مشیت الهی، خاضعانه هم خود را به مدت ۸ روز شدیداً صرف بسط اندیشه های خود کرد و بدین ترتیب در این زمان شرح نسبتاً کاملی از هندسه منحنی سیکلوئید ارائه داد و تعدادی مسئله حل کرد که بعداً، وقتی به عنوان مسائل حریف آزمون مطرح شدند، سایر ریاضیدانان را دچار سردرگمی کرد. اثر مشهور نامه های ولایتی^۲ و اندیشه های وی، که امروزه به عنوان الگویی برای ادبیات دوره های پیشین فرانسه خوانده می شوند، در اواخر زندگی کوتاه او به رشته تحریر درآمدند. در سال ۱۶۶۲ در سن ۳۹ سالگی در پاریس درگذشت. در اینجا اضافه می کنیم که پدر وی، اتین پاسکال (۱۵۸۸-۱۶۴۰) نیز ریاضیدان قابل یابی بود؛ لیماسون پاسکال به نام پدر او نامگذاری شده است (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۷.۴ (ج)). پاسکال را به عنوان یکی از بزرگترین «چه ها که نمی شد»^۳ ها در تاریخ ریاضیات بر شمرده اند. با آن همه استعداد های خارق العاده و آن همه شهود هندسی عمیق وی می توانست، تحت شرایط مساعدتری، آثار خیلی بیشتری خلق نماید. اما وضع جسمانی او چنان بود که در قسمت عمده زندگی خود دچار دردهای جسمانی بود، و از غفوان جوانی از عذابهای روحی ناشی از تخیلات مذهبی نیز در رنج بود.

دست نوشته پاسکال در باره مقاطع مخروطی مبتنی بر اثر دزارگ بود و اکنون مفقود شده است، ولی دکارت و لایبنیتز آن را دیده اند. در این اثر قضیه مشهور هنگز اگر ارمزی^۴ پاسکال در هندسه تصویری ظاهر گردید: اگر يك شش ضلعی در يك مقطع مخروطی محاط باشد، نقاط تلاقی سه زوج اضلاع متقابل آن همخط هستند، و بالعکس (نگاه کنید به شکل ۷۹). وی احتمالاً قضیه را، به سبک دزارگ، ابتدا با اثبات صحت آن برای يك دایره و سپس در مورد هر مقطع مخروطی به کمک تصویر کردن ثابت کرده است. گرچه این قضیه یکی از پر بارترین قضایای موجود در تمامی هندسه تصویری است (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۲.۹)، احتمالاً نباید این داستان بارها گفته شده را که خود پاسکال متجاوز از ۴۰۰ نتیجه از آن استخراج کرده، جدی بگیریم. این دست نوشته هرگز چاپ نشد، و احتمالاً هیچگاه کامل نگردید، ولی در سال ۱۶۴۰ پاسکال يك اعلامیه تك صفحه ای، تحت عنوان مقاله ای درباره مقاطع مخروطی^۵ چاپ و بعضی از کشفیات خود را در آن اعلام نمود. تنها از وجود دو نسخه از این جزوه مشهور اطلاع در دست است، یکی در هانوفر^۶ در میان

1. Neuilly	2. Provincial Letters	3. Pensées
4. might-have-been	5. mystic hexagram	
6. Essay pour les coniques	7. Hanover	



شکل ۷۹

مقالات لایبنیتز، و دیگری در کتابخانه ملی^۱ در پاریس. قضیه «هگزگرام رمزی» پاسکال در لم سوم این جزوه گنجانده شده است.

مسئله مثلث حسابی پاسکال در سال ۱۶۵۳ نوشته شد ولی تا سال ۱۶۶۵ چاپ نشد. وی «مثلث حسابی» خود را به صورتی که در شکل ۸۰ نشان داده شده، ساخت. هر عضو (در سطردوم یا یکی از سطور بعدی) به صورت مجموع آن اعضای از سطر ماقبل است که در بالا و سمت چپ عضو مورد نظر، قرار دارند. مثلاً، در سطر چهارم،

$$۳۵ = ۱۵ + ۱۰ + ۶ + ۳ + ۱.$$

این مثلث، که می‌تواند دارای هر مرتبه‌ای باشد، با رسم قطری به صورتی که در شکل نشان داده شده، به دست می‌آید. دانشجویان جبر مقدماتی تشخیص خواهند داد که اعداد واقع بر چنان قطری ضرایب متوالی در بسط دوجمله‌ای هستند. مثلاً، اعداد واقع بر قطر پنجم، یعنی ۱، ۴، ۶، ۴، ۱، ضرایب متوالی در بسط $(a+b)^4$ اند. پیدا کردن ضرایب دوجمله‌ای یکی از مواردی بود که پاسکال مثلث خود را برای آن به کار گرفت. وی همچنین آن را، بخصوص در بحثهایش راجع به احتمال، برای پیدا کردن تعداد ترکیبهای n شیء

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	...

شکل ۸۰

r به r به کار برد (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۳.۹ (ز))، که مقدار آن را بدرستی

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اعلام کرد که در آن $n!$ نماد امروزی* ما برای حاصلضرب

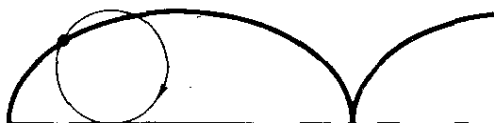
$$n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)$$

است. روابط زیادی متضمن اعداد مثلث حسابی وجود دارند، که چندتای آنها را پاسکال پیدا کرده است (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۳.۹). پاسکال خالق مثلث حسابی نبود، زیرا چنان آرایه‌ای را چندین قرن جلوتر نویسندگان چینی عنوان کرده بودند (نگاه کنید به بخش ۷-۳). به خاطر بسط چندین خاصیت مثلث و به دلیل کاربردهایی که پاسکال از این خواص به عمل آورده، این آرایه به نام **مثلث پاسکال** شناخته می‌شود. در رساله پاسکال راجع به این مثلث یکی از قدیمیترین احکام قابل قبول روش استقرای ریاضی به چشم می‌خورد. گرچه فلاسفه یونانی عهد کهن به تفصیل در ضرورت و امکان به بحث پرداخته‌اند، شاید گفتن این مطلب صحیح باشد که هیچگونه مطالعه ریاضی در باره احتمال تا اواخر قرن پانزدهم و اوایل قرن شانزدهم به عمل نیامده بود، که در این زمان ریاضیدانان ایتالیایی دست به محاسبه بختها در بعضی بازیهای قمار، مانند بختهای تاس، زدند. کاردان، همچنانکه در بخش ۸-۸ متذکر شدیم، راهنمای کوتاهی برای قمار نوشت که ضمن آن بعضی جنبه‌های احتمال ریاضی آمده است. اما عقیده کلی برای این است که تنها يك مسئله هست که می‌توان آن را منشأ علم احتمال دانست و آن مسئله موسوم به مسئله امتیازها^۱ است. در این مسئله چگونگی تقسیم جایزه يك بازی شانسی نیمه تمام بین دو بازیکن فرضی همقدرد، با دانستن امتیازهای دو بازیکن در موقع قطع بازی و تعداد امتیازهای لازم برای بردن بازی، خواسته می‌شود. پاچولی، در سوهای خود به سال ۱۴۹۴، یکی از اولین نویسندگانی بود که مسئله امتیازها را دائری درباره ریاضیات مطرح کرد. این مسئله را کاردان و تارتاگلیا نیز مورد بحث قرار داده بودند. اما پیشرفت واقعی تا زمان مطرح شدن آن، در سال ۱۶۵۴، نزد پاسکال، توسط شوالیه دومره^۲، قمار باز توانا و مجربی که استدلال نظری او راجع به این مسئله با مشاهدات او تطبیق نمی‌کرد، صورت نگرفت. پاسکال به این مسئله علاقمند شد و طی مراسله‌ای آن را به اطلاع فرما رساند. متعاقب این کار مکاتبات ارزنده‌ای بین این دومرد^۳ شروع شد، که در طی آن هر يك از آنها مسئله را به طور صحیح ولی از دو راه

* نماد $n!$ ، که n فاکتوریل نامیده می‌شود، در سال ۱۸۰۸ توسط کریستین کرامپ [Christian Kramp] (۱۷۶۰-۱۸۲۶) از اهالی استراسبورگ معرفی شد، که او این نماد را از آن جهت انتخاب کرد که از مشکلات چاپی ناشی از کاربرد نماد قبلی جلوگیری کند. برای هماهنگی تعریف می‌کنیم $0! = 1$.

1. problem of the points 2. Chevalier de Méré

** این مکاتبات در D.E. Smith, A Source Book in Mathematics ظاهر می‌شوند.



شکل ۸۱

متفاوت حل کردند. پاسکال حالت کلی مسئله را حل کرد و با استفاده از مثلث حسابی، نتایج متعددی به دست آورد. بنا بر این چنین شد که پاسکال و فرمادرمکاتبات خود شالوده علم احتمال را پی ریختند.

آخرین کار ریاضی پاسکال اثری دربارهٔ سیکلوئید است، منحنیی که توسط نقطه‌ای واقع بر محیط یک دایره، هنگامی که دایره روی خط مستقیمی بدون اصطکاک می‌غلتد، رسم می‌شود (نگاه کنید به شکل ۸۱). این منحنی که خواص ریاضی و فیزیکی فراوانی دارد، نقش مهمی در بسط اولیهٔ روشهای حسابان بازی کرد. گالیله از اولین کسانی بود که به منحنی توجه کرد و زمانی توصیه کرد که آن را برای طاق پلها به کار برند. مدت زیادی طول نکشید که مساحت زیر یکی از طاقهای منحنی پیدا شد، و روشهایی برای رسم مماس بر منحنی کشف شدند. این اکتشافات ریاضیدانان را به بررسی مسائل مربوط به سطح و حجم دوار حاصل از دوران یک قوس سیکلوئیدی حول خطوط مختلف هدایت کرد. این گونه مسائل، و نیز مسائل دیگری راجع به مراکز هندسی اشکال حاصل، توسط پاسکال حل شدند، و بعضی از این نتایج را وی به عنوان مسائل حریف آزمایی برای دیگر ریاضیدانان منتشر کرد. راه‌حل‌های پاسکال تحت تأثیر روش تقسیم‌ناپذیرهای مقدم بر حسابان قرار گرفتند و معادل با محاسبهٔ تعدادی انتگرال معین بودند که در دروس حسابان امروزی پیش می‌آیند. سیکلوئید به قدری خواص جالب دارد، و چنان اختلافاتی پدید آورده است که آن را «هلن‌هندسه»^۱ و «سبب نفاق»^۲ نامیده‌اند.

پاسکال گاهی نوشته‌های خود را با نام مستعار لوئی دومونتال^۳ یا آناگرام^۴ [کلمه‌ای که از تغییر ترتیب حروف یک کلمه به دست می‌آید] آن، آمودتونویل^۵ منتشر می‌کرد.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۹ لگاریتمها

(الف) با استفاده از قواعد آشنای نماها، خواص مفید زیرین را برای لگاریتمها ثابت کنید:

1. the Helen of geometry
2. the apple of discord

[مطابق افسانه‌های یونانی، سیمی از طلا که جملهٔ «تقدیم به زیباترین» بر آن نقش بسته بود و Aphrodite، Hera، Athena، مدعی آن بودند. این سبب توسط Paris به Aphrodite تروا شروع شد.]

3. Louis de Montalte
4. anagram
5. Amos Dettonville

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n \quad ۱.$$

$$\log_a (m/n) = \log_a m - \log_a n \quad ۲.$$

$$\log_a (m^r) = r \log_a m \quad ۳.$$

$$\log_a \sqrt[s]{m} = (\log_a m)/s \quad ۴.$$

(ب) نشان دهید که

$$\log_b N = \log_a N / \log_a b \quad ۱.$$

وقتی که يك جدول لگاریتم در مبنای a در اختیار داشته باشیم، حساب کنیم).

$$\log_N b = 1 / \log_b N \quad ۲.$$

$$\log_N b = \log_{1/N} (1/b) \quad ۳.$$

(ج) از گرفتن جذر ۱۰، سپس جذر نتیجه به دست آمده، و ادامه این عمل به همین قیاس، می‌توان جدول زیر را ساخت:

$$\begin{array}{ll} 10^{1/2} = 3.16228 & 10^{1/256} = 1.000904 \\ 10^{1/4} = 1.77828 & 10^{1/512} = 1.000451 \\ 10^{1/8} = 1.33352 & 10^{1/1024} = 1.000225 \\ 10^{1/16} = 1.15478 & 10^{1/2048} = 1.000112 \\ 10^{1/32} = 1.07461 & 10^{1/4096} = 1.000056 \\ 10^{1/64} = 1.03663 & 10^{1/8192} = 1.000028 \\ 10^{1/128} = 1.01815 & \end{array}$$

با این جدول، می‌توانیم لگاریتم طبیعی هر عدد بین ۱ و ۱۰، و بدین ترتیب با جرح و تعدیل مفسر، لگاریتم هر عدد مثبت دلخواه را حساب کنیم. مثلاً، فرض کنید N عدد دلخواهی بین ۱ و ۱۰ باشد. N را بر بزرگترین عدد موجود در جدول که از N بزرگتر نیست، تقسیم کنید. فرض کنید که مقسوم علیه $10^{1/P_1}$ و خارج قسمت N_1 باشد. در این صورت $N = 10^{1/P_1} N_1$ با N_1 به همین روال عمل کنید، و فرایند را ادامه دهید، تا

$$N = 10^{1/P_1} 10^{1/P_2} \dots 10^{1/P_n} N_n$$

به دست آید. فرض کنید که عمل را زمانی متوقف کنیم که تفاوت N_n و ۱، کسری با پیکره‌های معنی دار فقط از رقم ششم اعشاری به بعد، باشد. در این صورت، تا پنج پیکر اعشاری داریم،

$$N = 10^{1/P_1} 10^{1/P_2} \dots 10^{1/P_n}$$

و

$$\log N = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_n}.$$

این شیوه به روش ریشه‌ها برای محاسبه لگاریتمها موسوم است. $\log 4.26$ و $\log 500$

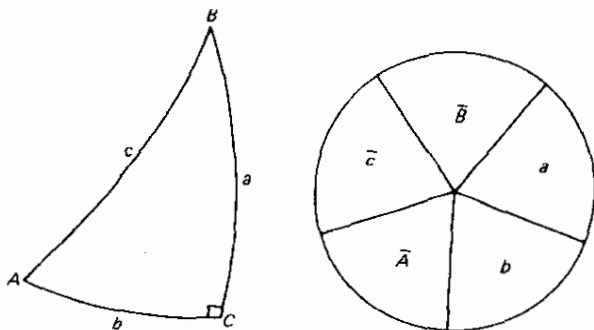
را با این شیوه حساب کنید.

۲.۹ نپر و مثلثات کروی

(الف) ده فرمول موجودند که در حل مثلثهای قائم الزاویه کروی مفیدند. نیازی به حفظ کردن این فرمولها نیست، زیرا به دست آوردن مجدد آنها به کمک دو قاعده‌ای که نپر وضع کرده، آسان است. در شکل ۸۲ يك مثلث قائم الزاویه کروی رسم و به‌روال معمول حرف گذاری شده است. در طرف راست مثلث دایره‌ای دیده می‌شود که به پنج قسمت تقسیم شده و شامل همان حروف مثلث بجز حرف C است و به همان ترتیب نیز مرتب شده است. پاره‌خطهای کوتاه روی c, B, A به معنی متمم است (مثلاً $\bar{B}$ به معنی $90^\circ - B$ است)، کمیت‌های زاویه‌ای $a, b, c, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}$ اجزاء مستدیر نامیده می‌شوند. در این دایره هر جزء مفروض با دو جزء مستدیر همجوار و با دو جزء دیگر غیر همجوار است. این جزء مفروض را جزء میانی، اجزاء همجوار را اجزاء مجاور، و دو جزء غیر همجوار را اجزاء مقابل می‌نامیم. قواعد نپر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. سینوس هر جزء میانی با حاصلضرب کسینوسهای دو جزء مقابل برابر است.
 ۲. سینوس هر جزء میانی با حاصلضرب تانژانت‌های دو جزء مجاور برابر است.
- با به کار بردن هر يك از این قواعد در مورد هر يك از اجزاء مستدیر ده فرمول مورد استفاده در حل مثلثهای کروی قائم الزاویه را به دست آورید.
- (ب) فرمولی که اضلاع a, b, c از يك مثلث قائم الزاویه کروی را به هم ربط می‌دهد، رابطه فیثاغورسی برای این مثلث نامیده می‌شود.
- (ج) فرمولهای زیر به نسبت‌های نپر مشهورند:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2}c}$$



شکل ۸۲

$$\frac{\cos \frac{1}{\gamma}(A-B) \tan \frac{1}{\gamma}(a+b)}{\cos \frac{1}{\gamma}(A+B) \tan \frac{1}{\gamma}c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{\gamma}(a-b) \tan \frac{1}{\gamma}(A-B)}{\sin \frac{1}{\gamma}(a+b) \cot \frac{1}{\gamma}C},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{\gamma}(a-b) \tan \frac{1}{\gamma}(A+B)}{\cos \frac{1}{\gamma}(a+b) \cot \frac{1}{\gamma}C},$$

این فرمولها را، که مشابه قانون تانژانتها در هندسهٔ مسطحه‌اند، می‌توان برای حل مثلثهای غیر قائم‌الزاویه‌ای که اجزاء معلوم در آنها دو ضلع و زاویهٔ بین آنها، یا دو زاویه و ضلع بین آنهاست، به کار برد.

۱. A, C, b را برای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن $a = ۱۲۵^{\circ}۳۸'$ ، $c = ۷۳^{\circ}۲۴'$ ، و $B = ۱۰۲^{\circ}۱۶'$ پیدا کنید.

۲. A, B, c را برای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن $a = ۹۳^{\circ}۸'$ ، $b = ۴۶^{\circ}۴'$ ، $C = ۷۱^{\circ}۶'$ پیدا کنید.

۳.۹ میله‌های نپر

مشکلی که در ضرب اعداد بزرگ به‌طور گسترده پیش می‌آمد، منجر به پیدایش طریقه‌های مکانیکی برای انجام این فرایند گردید. اختراع نپر، مشهور به میله‌های نپر یا استخوانهای نپر در زمان خود بسیار معروف بود، و توسط کاشف آن در اثری به نام مطالعهٔ چوبهای معجزه آسا، منتشره در ۱۶۱۷، تشریح شد. این اختراع اصولاً همان روش شبکه، یا شبکهٔ اعراب است که در بخش ۷-۵ توصیف کردیم، بجز آنکه در این اختراع، این فرایند به کمک نوارهای مستطیلی استخوانی، فلزی، چوبی، یا مقوایی، که از قبل آماده شده، انجام می‌شود. برای هر يك از ارقام دهگانه، باید نوارهایی نظیر آنچه که در سمت چپ شکل ۸۳ برای

ع نشان داده شده، در اختیار داشت که مضارب مختلف آن رقم را بر خود داشته باشد. برای توصیف نحوه استفاده از این نوارها در عمل ضرب، مثالی را که نپر در چوبهای معجزه آسا انتخاب کرده، یعنی ضرب ۱۶۱۵ در ۳۶۵ را برمی‌گزینیم. نوارهایی را که در صدر آنها اعداد ۱، ۶، ۱، ۵ نوشته شده‌اند، به صورتی که در طرف راست شکل ۸۳ نشان داده شده کنار هم قرار دهید. نتایج ضرب ۱۶۱۵ در ارقام ۵، ۶، و ۳ از عدد ۳۶۵ را در این صورت می‌توان با سانی به صورت ۸۰۷۵، ۹۶۹۰، و ۴۸۴۵ پیدا کرد، تنها چند عمل جمع قطری ساده دو رقم برای به دست آوردن این نتایج لازم‌اند. نتیجه نهایی، بدان گونه که در شکل نشان داده شده، بایک عمل جمع حاصل می‌شود.

(الف) مجموعه‌ای از میله‌های نپر ساخته و چند عمل ضرب انجام دهید.

(ب) توضیح دهید که چگونه می‌توان از میله‌های نپر در تقسیم استفاده کرد.

6	1	6	1	5	
6	1	6	1	5	
1 2	2	1 2	2	1 0	
1 8	3	1 8	3	1 5	3 (1615) = 4845
2 4	4	2 4	4	2 0	
3 0	5	3 0	5	2 5	5 (1615) = 8075
3 6	6	3 6	6	3 0	6 (1615) = 9690
4 2	7	4 2	7	3 5	
4 8	8	4 8	8	4 0	
5 4	9	5 4	9	4 5	

شکل ۸۳

۴.۹ خط کش محاسبه

(الف) به کمک جداول، يك مقياس لگاریتمی، تقریباً به طول ۱۰ اینچ به نام مقياس D بسازید. از این مقياس، همراه بایک جفت مقسم، برای انجام چند عمل ضرب و تقسیم استفاده کنید.

(ب) دو مقياس لگاریتمی، که مقياسهای C و D نامیده خواهند شد، با اندازه‌ساوی بسازید. با لغزاندن C در امتداد D چند عمل ضرب و تقسیم انجام دهید (جهت راهنمایی رجوع کنید به قواعد لگاریتم (مطالعه مسئله‌ای ۱.۹)).

(ج) يك مقياس لگاریتمی با طولی برابر نصف مقياس D ، مذکور در بالا بسازید و

دوتا اذین مقیاسهای کوتاه را که انتها به انتهای هم قرار داده شوند، A بنامید. نشان دهید که چگونه می توان از مقیاسهای A و D برای استخراج جذر استفاده کرد.

(د) چگونه می توان مقیاسی طراحی کرد که همراه با مقیاس D برای استخراج کعب به کار رود؟

(ه) مقیاسی درست نظیر مقیاسهای C و D در دو جهت مختلف بسازید، و آن را مقیاس CI (عکس C) بنامید. نشان دهید که چگونه می توان از مقیاسهای CI و D برای انجام عمل ضرب استفاده کرد. مزیت مقیاسهای CI و D بر مقیاسهای C و D برای این منظور چیست؟

۵.۹ سقوط آزاد اجسام

با فرض اینکه همه اجسام با شتاب ثابت یکسان g سقوط می کنند، گالیله نشان داد که فاصله d ی سقوط یک جسم، با مربع زمان سقوط t ی آن متناسب است. مراحل زیرین در استدلال گالیله را ثابت کنید.

(الف) اگر v سرعت سقوط در پایان زمان t باشد، آنگاه $v = gt$.

(ب) اگر v و t مربوط به یک جسم در حال سقوط و T و V مربوط به جسم در حال سقوط دیگری باشند، آنگاه $v/V = t/T$ ، و در نتیجه مثلث قائم الزاویه ای که طول ساقهایش از لحاظ عددی برابر v و t است با مثلث قائم الزاویه ای که طول ساقهایش از لحاظ عددی برابر V و T است، متشابه است.

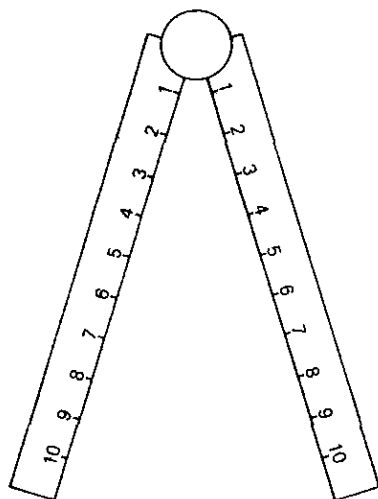
(ج) چون سرعت به طور یکنواخت افزایش می یابد، سرعت متوسط سقوط $v/2$ است، در نتیجه $d = vt/2 = vt^2/2$ مساحت مثلث قائم الزاویه با ساقهای v و t .

(د) $d/D = t^2/T^2$. همچنین نشان دهید که $d = gt^2/2$. گالیله درستی این قانون آخری را با مشاهده زمانهای پایین آمدن اجسامی که بر روی صفحه های شیب دار لغزانده می شوند، نشان داد.

۶.۹ پرگار تقسیم

در حدود ۱۵۷۹، گالیله پرگار تقسیم را تکمیل کرد؛ ابزاری که متجاوز از دو قرن به میزان زیادی مورد استقبال عامه بود. این ابزار متشکل از دو بازو است که در یک انتها توسط یک مفصل لولایی، به صورتی که در شکل ۸۴ نشان داده شده، به هم متصل شده اند. در روی هر بازو مقیاس ساده ای که درجه بندی آن از لولا شروع شده و صفر مقیاس بر روی لولا است، قرار دارد. علاوه بر این دو مقیاس ساده، اغلب مقیاسهای دیگری به کار رفته اند که بعضی از آنها در زیر توصیف می شوند. مسائل زیادی را می توان بلافاصله با استفاده از این مقیاسهای پرگار حل کرد، تنها نظریه مثلثهای متشابه مورد نیاز است.

(الف) نشان دهید که چگونه پرگار تقسیم را می توان برای تقسیم پاره خط مفروضی



شکل ۸۴

به پنج قسمت مساوی به کار برد.

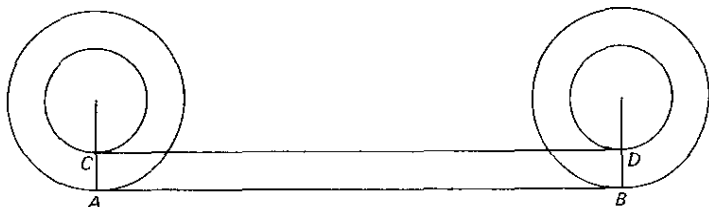
(ب) نشان دهید که چگونه پرگار تقسیم را می‌توان برای تغییر مقیاس در يك ترسیم به کار برد.

(ج) نشان دهید که چگونه می‌توان پرگار تقسیم را برای یافتن جزء چهارم تناسب، x ، بین سه مقدار معلوم a ، b ، c (یعنی یافتن x به طوری که $a:b=c:x$) به کار برد و از آنجا آن را در مسائل مربوط به تسعیر مورد استفاده قرار داد.

(د) گاليله استفاده از پرگار تقسیم خود را از راه پیدا کردن مقدار پولی که می‌بایست ۵ سال پیش بانرخ ۶ درصد بهره سالانه به بهره مرکب گذاشته می‌شد تا در زمان مورد بحث ۱۵۰ اسکودی شود، شرح داد. سعی کنید این مسئله را با پرگار تقسیم حل کنید.

از جمله مقیاسهای دیگری که اغلب بر بازوهای پرگار تقسیم ظاهر می‌شدند، مقیاسی بود (خط مساحتها) که مطابق مربعهای اعداد مضبوطه درجه بندی می‌شد، و برای پیدا کردن مجذور و ریشه دوم اعداد به کار می‌رفت. مقیاس دیگر (خط حجمها) مقیاسی بود که مطابق با مکعبات اعداد مضبوطه درجه بندی می‌شد. مقیاس دیگری هم بود که وتر کمانهایی با درجات معین را برای دایره‌ای به شعاع واحد می‌داد، و مهندسين از آن به عنوان تقاله استفاده می‌کردند. مقیاس دیگری هم بود (به تمام مقیاس فلزات) که شامل علائم رایج برای فلزات در قرون وسطی برای طلا، نقره، آهن، مس، و غیره بود که مطابق با چگالیهای این فلزات فاصله بندی شده بودند و برای حل مسائلی از قبیل پیدا کردن قطر کره‌ای آهنین هم وزن با کره‌ای مسین به کار می‌رفت.

دقت پرگار تقسیم نه به اندازه دقت خط کش محاسبه است و نه کار کردن با آن به سادگی کار کردن با خط کش محاسبه است.



شکل ۸۵

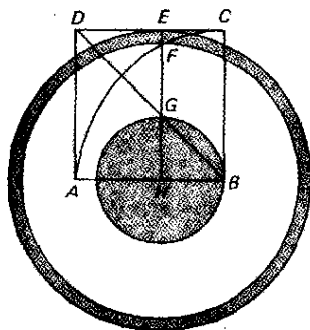
۷.۹ چند پارادوکس ساده از «محاوره درباره دو علم جدید» گالیله

دوپارادوکس هندسی زیر را که گالیله در اثر محاوره خود به سال ۱۶۳۸ مورد بررسی قرار داده، توضیح دهید.

(الف) فرض کنید دایره بزرگ در شکل ۸۵ ضمن غلتیدن بر خط مستقیمی از A تا B یک بار به دور خود چرخیده باشد، به طوری که AB برابر با محیط دایره بزرگ باشد. در این صورت دایره کوچک نیز، که بر روی دایره بزرگ نصب شده است، یک چرخش کامل به دور خود انجام داده است، به طوری که CD برابر با محیط دایره کوچک است. نتیجه می شود که دو دایره محیطهای برابر دارند!

این پارادوکس را قبلاً ارسطو تشریح کرده بود، و از این رو گاهی به آن چرخ ارسطو^۱ اطلاق می شود.

(ب) فرض کنید $ABCD$ یک مربع و HE خط دلخواهی موازی با BC باشد که قطر BD را، همچنانکه در شکل ۸۶ نشان داده شده است، در G قطع می کند. فرض کنید دایره $B(C)$ را در F قطع کند، و سه دایره $H(E)$ ، $H(F)$ ، $H(G)$ را رسم کنید. ابتدا نشان دهید که مساحت دایره $H(G)$ برابر مساحت حلقه بین دایره های $H(F)$ و $H(E)$ است. سپس H را به B میل دهید به طوری که، در حد، دایره $H(G)$ به نقطه B بدل شود و حلقه مبدل به محیط $B(C)$ گردد. حال نتیجه می گیریم که نقطه تنهای B برابر با همه محیط $B(C)$ است!



شکل ۸۶

(ج) این نکته در محاوره را که «عده مربعات از عده کل اعداد کمتر نیست و عده کل اعداد کمتر از عده مربعات نیست»، توضیح دهید.

۸۰۹ قوانین کپلر

(الف) وقتی ستاره‌ای بیشترین سرعت خود را داراست در کجای مدار خود واقع است؟
 (ب) قانون سوم کپلر را با استفاده از شکل‌های امروزی زیر به‌طور تقریبی تحقیق کنید. (A.U. علامت اختصاری «واحد نجومی»، طول نیم قطر اطول مدار زمین است.)

سیاره	زمان بر حسب سال	نیم قطر اطول
عطارد	۰٫۲۴۱	۰٫۳۸۷ A.U.
زهره	۰٫۶۱۵	۰٫۷۲۳ A.U.
زمین	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰ A.U.
مریخ	۱٫۸۸۱	۱٫۵۲۴ A.U.
مشتری	۱۱٫۸۶۲	۵٫۲۰۲ A.U.
کیوان	۲۹٫۴۵۷	۹٫۵۳۹ A.U.

(ج) دوره گردش سیاره‌ای که دارای نیم قطر اطول A.U. ۱۰۰ است، چقدر است؟
 (د) نیم قطر سیاره‌ای که دوره گردش آن ۱۲۵ سال است، چقدر است؟
 (ه) دو سیاره فرضی حول خورشید در مدارات بیضوی با نیم قطرهای اطول یکسان حرکت می‌کنند. با این حال نیم قطر اقصر یکی نصف دیگری است. دوره‌های گردش سیاره‌ها در مقایسه با هم چیست؟
 (و) ماه در ۲۷٫۳ روز در یک مدار بیضوی با نیم قطر اطولی که ۶۰ برابر شعاع کره زمین است، یکبار حول کره زمین گردش می‌کند. دوره یک ماهواره فرضی که خیلی نزدیک به سطح زمین در حال گردش است، چه خواهد بود؟

۹۰۹ موزائیکها

یک مسئله بسیار جالب موزائیکها، پوشاندن صفحه با چند ضلعیهای منتظم مساوی است. فرض کنید که n عده اضلاع یک چنین چند ضلعی باشد. در این صورت زاویه داخلی در هر رأس این چند ضلعی $n/180^\circ$ است. این حکم را ثابت کنید.
 (الف) اگر نگذاریم که رأسی از یک چند ضلعی بر ضلع دیگری قرار گیرد، نشان دهید

که عده چندضلعیها در هر رأس با $(n-2)/2 + 2$ داده می شود، و بنا بر این باید n مساوی ۳ یا ۴ یا ۶ باشد. از جنبه مثال موزائیکهای بسازید.

(ب) اگر مصر باشیم که رأسی از يك چندضلعی برضلعی از دیگری قرار گیرد، نشان دهید که عده چندضلعیهای که در چنین رأسی مجتمع می شوند با $(n-2)/2 + 1$ داده می شود، و بنا بر این باید n مساوی ۳ یا ۴ باشد. از جنبه مثال موزائیکهای بسازید.

(ج) موزائیکهای شامل موارد زیرین بسازید: (۱) مثلثهای متساوی الاضلاع با دو اندازه مختلف، که هر ضلع مثلث بزرگتر دو برابر ضلع مثلث کوچکتر باشد و به طوری که اضلاع مثلثهای هم اندازه بر روی هم نیفتند؛ (۲) مربعهای با دو اندازه مختلف، که ضلع مربع بزرگتر دو برابر ضلع مربع کوچکتر باشد و به طوری که اضلاع مربعهای کوچکتر بر روی هم نیفتند؛ (۳) مثلثهای متساوی الاضلاع مساوی و دوازده ضلعیهای منتظم مساوی؛ (۴) مثلثهای متساوی الاضلاع مساوی و شش ضلعیهای منتظم مساوی؛ (۵) مربعهای مساوی و هشت ضلعیهای منتظم مساوی.

(د) فرض کنید موزائیکی مرکب از چند ضلعیهای منتظم از سه نوع مختلف در هر رأس داشته باشیم. اگر این سه نوع چندضلعی بترتیب p ، q ، r ضلع داشته باشند، نشان دهید که

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

يك جواب صحیح این معادله $p=4$ ، $q=6$ ، $r=12$ است. موزائیکی از نوع مورد بحث، مرکب از مربعهای مساوی، شش ضلعیهای منتظم مساوی، و دوازده ضلعیهای منتظم مساوی بسازید.

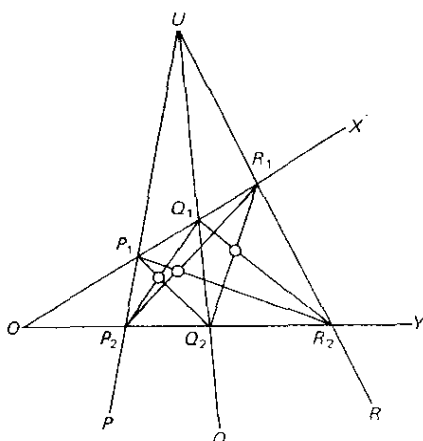
۱۰۰۹ اثبات قضایا از طریق عمل تصویر

(الف) اگر l خط مفروضی در صفحه مفروض π و O مرکز مفروض تصویر (غیر واقع بر π) باشد، نشان دهید که چگونه می توان صفحه ای مانند π' پیدا کرد به طوری که تصویر l بر روی π' خط واقع در بینهایت π' باشد. (عمل انتخاب مرکز مناسبی برای تصویر و صفحه تصویر π' به طوری که خط مفروضی از صفحه مفروضی به خط واقع در بی نهایت π' تصویر شود، عمل «تصویر خط مفروضی به بینهایت» نامیده می شود.)

(ب) نشان دهید که در تصویر قسمت (الف)، خط بینهایت در π به محل تلاقی π' با صفحه مار بر O به موازات π ، تصویر خواهد شد.

(ج) فرض کنید UP ، UQ ، UR سه خط هم رس هم صفحه باشند که دو خط OX ، OY آنها را بترتیب در P_1 ، Q_1 ، R_1 و P_2 ، Q_2 ، R_2 قطع کرده اند (نگاه کنید به شکل ۸۷). ثابت کنید که نقاط تلاقی Q_1R_2 و Q_2R_1 ، R_1P_2 و R_2P_1 ، P_1Q_2 و P_2Q_1 همخط هستند.

(د) نشان دهید که اگر $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ مثلثهای هم صفحه ای باشند به طوری که



شکل ۸۷

که N تلاقی کنند که در A_1B_1 و A_2B_2 در M در C_1A_1 و C_2A_2 در L در B_1C_1 و B_2C_2 در آن N و M و L همخط هستند، در این صورت A_1A_2 ، B_1B_2 ، C_1C_2 هم‌رسانند. (این قسمت عکس حکم قضیه دو مثلث دزادگ است به‌صورتی که در بخش ۹-۸ داده شده است.)

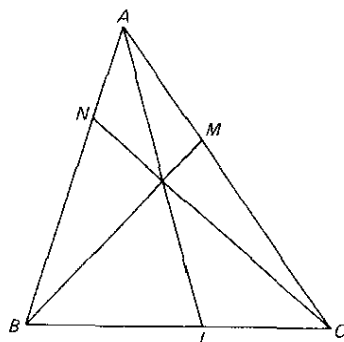
(ه) نشان دهید که در تصویر موازی (تصویری که در آن مرکز تصویر در بینهایت باشد) یک بیضی را می‌توان همواره به یک دایره تصویر کرد.

(و) در سال ۱۶۷۸، جیووانی سوا^۱ از اهالی ایتالیا (حدود ۱۶۴۷-۱۷۳۶) کتابی منتشر کرد حاوی قضیه زیر (نگاه کنید به شکل ۸۸) که اکنون به نام خود او مشهور است: سه خط که سه نقطه N ، M ، L واقع بر اضلاع BC ، CA ، AB از یک مثلث ABC را به رأسهای متقابل وصل می‌کنند هم‌رسانند، اگر و فقط اگر

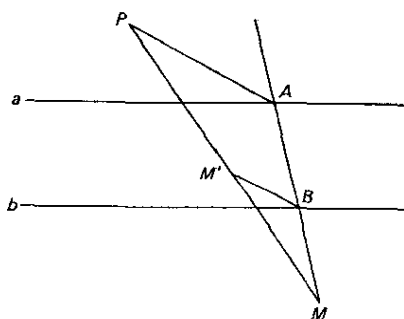
$$\left(\frac{AN}{NB}\right) \left(\frac{BL}{LC}\right) \left(\frac{CM}{MA}\right) = +1.$$

این قضیه، قضیه ملازمی برای قضیه منلا^۲ئوس است که در بخش ۶-۵ بیان شد. با استفاده از قضیه سوا ثابت کنید که خطوط واصل بین رأسهای یک مثلث و نقاط تماس اضلاع مقابل با دایره محاطی آن، هم‌رسانند. سپس، به کمک قسمت (ه)، ثابت کنید که خطوط واصل بین رأسهای یک مثلث و نقاط تماس اضلاع مقابل با بیضی محاط در آن، هم‌رسانند.

(ز) لاهیر نگاشت جالب زیر از صفحه بر خود آن را ابداع کرد (نگاه کنید به شکل ۸۹): دو خط موازی دلخواه مانند a و b رسم و نقطه‌ای مانند P در صفحه آنها انتخاب



شکل ۸۸



شکل ۸۹

می‌کنیم. از نقطه دلخواه دیگر M از صفحه خطی رسم می‌کنیم که a را در A و b را در B قطع کند. در این صورت فصل مشترک MP با خطی که از B به موازات AP رسم می‌شود، نگاشت M' نقطه M گرفته می‌شود. (۱) نشان دهید که M' به خط خاص MAB مار بر M که برای تعیین آن به کار رفته است، بستگی ندارد. (۲) نگاشت لایبر را برای وضعیتی که در آن a و b لزوماً موازی نیستند تعمیم دهید.

۱۱۰۹ «برهان» تجربی دوران شباب پاسکال

جزئیات «براهین» تجربی نشان داده شده در شکل‌های ۷۷ و ۷۸ را تکمیل کنید.

۱۲۰۹ قضیه پاسکال

پیامدهای قضیه «هگزاگرام رمزی» پاسکال متعدد و جذاب‌اند، و میزان تحقیقاتی که صرف

این پیکر بندی شده تقریباً باور نکردنی است. برای تشکیل يك شش ضلعی از ۶ نقطه بر يك مقطع مخروطی ۶۰ راه وجود دارد، و بنا بر قضیه پاسکال، هریک از این شش ضلعیها يك خط پاسکال دارد. این ۶۰ خط پاسکال سه به سه بر ۲۰ نقطه می گذرند، که به نقاط اشتراک موسوم اند و به نوبه خود چهار به چهار بر ۱۵ خط موسوم به خطوط پلوکر^۲ قرار دارند. خطوط پاسکال همچنین سه به سه در مجموعه دیگری از نقاط، موسوم به نقاط کیرکمن^۳ تلاقی می کنند که تعداد آنها ۶۰ است. متناظر با هر نقطه اشتراک، سه نقطه کیرکمن وجود دارند به طوری که هر چهار تا بر يك خط، موسوم به خط کیلی^۴، واقع اند. تعداد خطوط کیلی ۲۰ است، و سه به سه از ۱۵ نقطه می گذرند که نقاط سمین^۵ نامیده می شوند. توسیعها و خواص متعدد دیگری از این پیکر بندی وجود دارند، و تعداد براهین مختلفی که برای خود قضیه «هگزگرام رمزی» داده شده است، بسیار زیاد است. در این مطالعه مسئله‌ای، محدودی از نتایج متعدد قضیه «هگزگرام رمزی» را که می توان از انطباق بعضی از این شش نقطه با یکدیگر به دست آورد، بررسی خواهیم کرد. برای سهولت، این نقاط را ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ خواهیم نامید. در این صورت قضیه پاسکال می گوید که محل های برخورد زوج خطوط ۱۲، ۴۵، ۲۳، ۵۶، ۳۴، ۶۱ هم خط اند اگر و فقط اگر این شش نقطه بر يك مقطع مخروطی واقع باشند.

(الف) اگر يك پنج ضلعی مانند ۱۲۳۴۵ در دایره ای محاط شده باشد، نشان دهید که زوج خطوط ۱۲، ۴۵، ۲۳، ۵۱، ۳۴، ۶۱ و مماس در ۱، در سه نقطه هم خط برخورد می کنند.

(ب) پنج نقطه مفروض اند، در هریک از آنها مماسی بر مقطع مخروطی مار بر این پنج نقطه رسم کنید.

(ج) با مفروض بودن چهار نقطه از يك مقطع مخروطی و مماسهای مرسوم بر آن در هر يك از این نقاط، نقاط دیگری از این مقطع مخروطی را به دست آورید.

(د) نشان دهید که نقاط تلاقی اضلاع مقابل يك چهار ضلعی محاط در يك مقطع مخروطی، و نقاط تلاقی مماسهای مرسوم بر رأسهای مقابل آن چهار نقطه هم خط اند.

(ه) نشان دهید که اگر مثلثی در يك مقطع مخروطی محاط باشد، در این صورت مماسهای مرسوم در رؤس این مثلث، اضلاع مقابل را در سه نقطه هم خط تلاقی می کنند.

(و) سه نقطه از يك مقطع مخروطی و مماسهای مرسوم در دو تا از آنها مفروض اند، مماس در نقطه سوم را رسم کنید.

۱۳.۹ مثلث پاسکال

روابط زیر را ثابت کنید، همه این روابط توسط پاسکال بسط یافته اند و متضمن اعداد مثلث حسابی هستند.

1. Steiner	2. Plücker	3. Kirkman
4. Cayley	5. Salmon	

(الف) هر عضو (غیر واقع بر سطر یا ستون اول) مثلث حسابی برابر است با مجموع عضوی که درست در بالای آن، و عضوی که درست در سمت چپ آن است.

(ب) هر عضو مفروض مثلث حسابی، منهای ۱، برابر است با مجموع کلیه اعضای مثلث که بالای سطر و درست چپ ستون عضو مفروض قرار دارند.

(ج) عضو m در سطر n عبارت است از $(m-1)!(n-1)!(m+n-2)!$ ، که در آن بنا بر تعریف، $0! = 1$.

(د) عضو واقع در سطر m و ستون n برابر است با عضو واقع در سطر n و ستون m .

(ه) مجموع عضوهای واقع در امتداد هر قطر دو برابر مجموع عضوهای واقع در امتداد قطر قبل از آن است.

(و) مجموع اعضای واقع در امتداد قطر m ، 2^{m-1} است.

(ز) فرض کنید گروهی از n شیء به ما داده شده باشد. هر مجموعه r تایی از این اشیاء، صرف نظر از ترتیب آنها ترکیب n شیء r به r ، نامیده می شود، ما علامت $C(n, r)$ را برای نشان دادن تعداد چنین ترکیبهایی به کار خواهیم برد. مثلاً ترکیبهای 2 به 4 چهار حرف a, b, c, d عبارت اند از

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$$

که از آنجا، $C(4, 2) = 6$. در کتابهای جبر مدارس نشان داده می شود که

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

نشان دهید که $C(n, r)$ در محل تلاقی قطر $(n+1)$ و ستون $(r+1)$ مثلث حسابی ظاهر می شود.

عنوان مقاله

- ۱/۹ دلایل اوجگیری ریاضیات در قرن هفدهم.
- ۲/۹ نپر به عنوان نویسنده داستانهای علمی تخیلی زمان خود.
- ۳/۹ موارد استفاده میله های نپر و پرگار تقسیم گالیه.
- ۴/۹ تمبرهای فرمولی-علمی نیکاراگوئه مربوط به سال ۱۹۷۱.
- ۵/۹ دلایل انتخاب e برای پایه لگاریتم و اندازه رادیان برای زوایا.
- ۶/۹ هاریوت به عنوان پدر نظریه نوین معادلات.
- ۷/۹ هاریوت در آمریکا.
- ۸/۹ نمادهای ریاضی او ترده.
- ۹/۹ اثرات زبان آور هیأت تفیش عقاید.

- ۱۵/۹ آیا می‌توان علم و دین را سازش داد؟
 ۱۱/۹ کپلر و اصل پیوستگی.
 ۱۲/۹ نقش هنر در انگیزش بسط هندسه تصویری.
 ۱۳/۹ ملثک پاسکال پیش از پاسکال.
 ۱۴/۹ تاریخچه منحنی سیکلوئید.

کتابنامه

- BARLOW, C. W. C., and G. H. BRYAN, *Elementary Mathematical Astronomy*. London: University Tutorial Press, 1923.
- BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
- BISHOP, M. G., *Pascal, The Life of Genius*. New York: Reynal & Hitchcock, 1936.
- BIXBY, WILLIAM, *The Universe of Galileo and Newton*. New York: Harper & Row, 1964.
- BRASCH, F. F., ed., *Johann Kepler, 1571-1630. A Tercentenary Commemoration of his Life and Work*. Baltimore: Williams and Wilkins, 1931.
- CAJORI, FLORIAN, *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments*. New York: McGraw-Hill, 1909.
- , *William Oughtred, A Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics*. Chicago: Open Court, 1916.
- , *A History of Mathematical Notation*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1929.
- CASPAR, MAX, *Kepler*. Translated by C. Doris Hellman. New York: Abelard-Schuman, 1959.
- COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
- , *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
- COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes*. New York: Pitman, 1949.
- DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner, 1962.
- DRYER, J. L. E., *Tycho Brahe, A Picture of Scientific Life and Work in the Seventeenth Century*. London: A. & C. Black, 1890.
- FAHIE, J. J., *Galileo, His Life and Work*. London: John Murray, 1903.
- GADE, J. A., *The Life and Times of Tycho Brahe*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1947.
- GALILEI, GALILEO, *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Translated by Henry Crew and Alfonso de Salvio, introd. by Antonio Favaro. New York: Macmillan, 1914. Reprinted by Dover.
- , *Discourses on the Two Chief Systems*. Ed. Stillman Drake. Berkeley, Calif: University of California Press, 1953.
- , *Discourses on the Two Chief Systems*. Ed. Giorgio de Santillana. Chicago: University of Chicago Press, 1953.
- HACKER, S. G., *Arithmetical View Points*. Pullman, Wash: Mimeographed at Washington State College, 1948.
- HARTLEY, MILES C., *Patterns of Polyhedrons*. Ann Arbor, Mich: privately printed, Edwards Bros., 1957.
- HOOPER, ALFRED, *Makers of Mathematics*. New York: Random House, 1948.
- IVINS, W. M., JR., *Art and Geometry*. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1946.
- KNOTT, C. G., *Napier Tercentenary Memorial Volume*. London: Longmans, Green, 1915.
- KOESTLER, ARTHUR, *The Watershed, a Life of Kepler*. New York: Doubleday, 1960.
- KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
- MORTIMER, ERNEST, *Blaise Pascal: The Life and Work of a Realist*. New York: Harper and Brothers, 1959.
- MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, Mead, 1961.
- NORTHROP, E. P., *Riddles in Mathematics*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1944.
- PEARCE, PETER, and SUSAN PEARCE, *Polyhedra Primer*. New York: D. Van Nostrand, 1978.
- SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.

- SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York: Oxford University Press, 1925.
- TODHUNTER, ISAAC, *A History of the Mathematical Theory of Probability, From the Time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea, 1949.
- TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.

هندسهٔ تحلیلی و دیگر مباحث مقدم بر حسابان

۱-۱۰ هندسهٔ تحلیلی

در همان هنگام که دزارگک و پاسکال عرصهٔ جدید هندسهٔ تصویری را می‌گشودند، دکارت و فرما مفاهیم هندسهٔ تحلیلی را در ذهن می‌پروراندند. بین این دو مبحث تمایزی اساسی وجود دارد، زیرا که اولی شاخه‌ای از هندسه است در حالی که دومی روشی در هندسه است. برای دانشجوی ریاضیات مقدماتی، کمتر تجربهٔ تحصیلی می‌توان سراغ یافت که تکان‌دهنده‌تر از آشنایی وی با این روش جدید و نیرومند در رویارویی با مسائل هندسی باشد. به یاد می‌آوریم که جوهر این اندیشه، وقتی در مورد صفحه به کار رود، ایجاد تناظری بین نقاط صفحه و زوجهای مرتب اعداد حقیقی است و بدین وسیله تناظری بین منحنیهای واقع در صفحه و معادلات دو متغیره امکان‌پذیر می‌گردد، به طوری که به ازای هر منحنی واقع در صفحه، معادلهٔ معینی مانند $f(x, y) = 0$ وجود دارد، و به ازای هر معادله، یک منحنی معین، یا مجموعه نقاطی معین، در صفحه وجود دارد. به طور مشابه بین خواص جبری و تحلیلی معادلهٔ $f(x, y) = 0$ و خواص هندسی منحنی وابسته تناظری برقرار می‌شود. امر اثبات یک قضیه در هندسه، به طور داهیانهای به اثبات قضیهٔ متناظری در جبر و آنالیز مبدل می‌شود. در این باب که چه کسی هندسهٔ تحلیلی را کشف کرده است و حتی دربارهٔ اینکه چه زمانی را باید مبدأ کشف آن دانست، اختلاف نظر وجود دارد و این اختلاف نظر بدون توافق بر سر اینکه هندسهٔ تحلیلی متشکل از چه چیز است، برطرف نمی‌شود. دیده‌ایم که یونانیان باستان به میزان قابل توجهی جبر هندسی را دنبال می‌کردند. محقق است که مفهوم

مختصات را در دنیای قدیم مصریان و رومیان در مساحی و یونانیان در نقشه‌سازی مورد استفاده قرار می‌داده‌اند. آنچه بخصوص کفه ترازو را به نفع یونانیان سنگین می‌کند، این حقیقت است که آپولونیوس قسمت اعظم هندسه مقاطع مخروطی خود را از معادله‌های هندسی برخی معادله‌های دکارتی این منحنیها استخراج کرده‌است، و این ایده‌ای است که به نظر می‌رسد با مانایخموس شروع شده باشد. همچنین، در بخش ۸-۴، ملاحظه کردیم که در قرن چهاردهم نیکول اورم با نمایش ترسیمی برخی قوانین از طریق قرار دادن متغیر وابسته (عرض) در مقابل متغیر مستقل (طول) نظیرش، موقعی که به متغیر اخیر نمو‌های کوچکی داده می‌شد، جنبه دیگری از هندسه تحلیلی را پیش‌نگری کرده‌است. هواداران این نظر که اورم مخترع هندسه تحلیلی است وجود دستاوردهایی نظیر اولین معادله صریح خط راست و تعمیم برخی مفاهیم این موضوع را در ابعاد بالاتر شاهد می‌آورند. يك قرن بعد از آنکه کتاب اورم نوشته شد، این کتاب به چندین چاپ رسید، و به این ترتیب ممکن است ریاضیدانان آتی را تحت تأثیر قرار داده باشد.

نظریات فوق در باره هندسه تحلیلی ظاهراً باعث مشتبه شدن آن با يك یا برخی جنبه‌های هندسه تحلیلی می‌شود. جوهر حقیقی این موضوع در انتقال دادن مطالعات هندسی به مطالعات جبری نظیر، نهفته است. قبل از آنکه هندسه تحلیلی این توانایی را بیابد، می‌بایست منتظر بسط فرایندها و نمادگرایی جبری بماند. از این رو به حقیقت بسیار نزدیکتر خواهیم بود که با اکثر مورخین هم‌آواز شویم که به نظر آنها سهم بزرگی که در قرن هفدهم دو ریاضیدان فرانسوی یعنی رنه دکارت و پیر دو فرما در بسط هندسه تحلیلی داشته‌اند، لااقل مبدأ اصلی روح نوین حاکم بر این موضوع است. تا قبل از تکانی که توسط این دو ریاضیدان به هندسه تحلیلی داده شود، آن را به‌شکلی که امروزه با آن آشنا هستیم، نمی‌یابیم.

۱۰-۲ دکارت

رنه دکارت در ۱۵۹۶ نزدیک تور^۱، با به‌عرصه وجود گذاشت. وقتی هشت ساله بود، به‌مدرسه یسوعی در لافلش^۲ فرستاده شد. در آنجا بود که او (ابتدا به دلیل ضعف جسمی) عادت مادام‌العمری ماندن در رختخواب تا نزدیک‌های ظهر را پیدا کرد. دکارت بعدها این ساعات تفکر استراحت صبحگاهی را خلاقترین دوره زندگی‌اش می‌دانست. در ۱۶۱۲، دکارت مدرسه را ترک کرد و بلافاصله به پاریس رفت و در آنجا، با مرسن^۳ و میدورژ^۴ (نگاه کنید به بخش ۱۵-۶) مدتی را صرف مطالعه ریاضیات کرد. در ۱۶۱۷، بسا پیوستن به ارتش پرنس موریس اهل اورانژ، دوره چند ساله خود در خدمت نظام را آغاز کرد. بعد از ترك خدمت نظام چهار یا پنج سال را به سفر در آلمان، دانمارك، هلند، سوئیس، و ایتالیا پرداخت. بعد از اسکان مجدد برای دو سه سال در پاریس، و دنبال کردن مطالعات ریاضی و تأملات فلسفی و اشتغال به ساختن ادوات نورشناختی، برای مدتی کوتاه تصمیم به مهاجرت به هلند گرفت

و در این موقع این کشور در اوج قدرت خود بود. مدت ۲۰ سال در آنجا زندگی و وقت خود را وقف فلسفه، ریاضیات، و علوم کرد. در ۱۶۴۹، با اکراه به دعوت ملکه کریستینا به سوئد رفت. چند ماه بعد به ذات‌الریه مبتلا شد و در اوایل ۱۶۵۰ در استکهلم درگذشت. در طول ۲۰ سال اقامتش در هلند بود که دکارت رسائل خود را به رشته تحریر درآورد. چهار سال اول را صرف نوشتن جهان^۱، که توصیفی از جهان ازدیدگاه فیزیک بود، کرد ولی چون از محکومیت گالیله توسط کلیسا اطلاع یافت، جانب احتیاط را برگزید و ناتمام آن را رها کرد و به نوشتن یک رساله فلسفی در باره علم کلی تحت عنوان گفتار در روش دست‌راه‌بردن عقل و طلب حقیقت در علوم^۲ روی آورد؛ به این رساله سه ضمیمه تحت عناوین نورشناختی^۳، کائنات جو^۴، و هندسه الحاق شده است. گفتار، همراه با ضمائم در ۱۶۳۷ چاپ شد و در آخرین ضمیمه است که نوشته دکارت در باره هندسه تحلیلی ظاهر می‌شود. در ۱۶۴۱، دکارت رساله‌ای تحت عنوان تأملات^۵ را منتشر نمود که به توضیح مفصل دیدگاه‌های مطروحه در گفتار اختصاص داده شده است، و در ۱۶۴۴، اصول فلسفه^۶ خود را انتشار داد، که شامل برخی قوانین نادرست درباره طبیعت و نظریه کیهانشناسی ناسازگاری از گردش‌هاست.

هندسه، سومین ضمیمه مشهور گفتار حدود ۱۰۰ صفحه از کل اثر را اشغال می‌کند، و خود به سه بخش تقسیم شده است. بخش اول شامل توضیحی از برخی اصول هندسه جبری و حاکی از پیشرفت واقعی نسبت به کار یونانیان است. در نظر یونانیان یک متغیر با طول یک پاره خط، حاصلضرب دو متغیر با مساحت یک مستطیل، و حاصلضرب سه متغیر با حجم یک مکعب مستطیل متناظر بود. یونانیان نمی‌توانستند فراتر از این بروند. در نظر دکارت، از دیگر سو،^۲ دلالت بر یک مساحت نمی‌کرد و بلکه دال بر جزء چهارم در تناسب $x^2 : x = x : 1$ بود، و از این رو با طول مناسبی قابل نمایش بود که با معلوم بودن x باسانی قابل ساختن است. بدین ترتیب، با استفاده از پاره‌خطی به عنوان واحد طول، می‌توانیم هر توانی از یک متغیر، یا حاصلضرب هر تعدادی از متغیرها را به صورت یک طول نشان دهیم، و طول مزبور را، وقتی مقادیر متغیرها معین شده باشند، عملاً با ابزارهای اقلیدسی بسازیم. با این عمل حسابیدن هندسه، دکارت در اولین قسمت هندسه، x را بر روی یک محور مفروض و سپس طولی مانند y را که زاویه ثابتی با این محور می‌سازد، جدا می‌کند، و به ساختن نقاطی که xy ها و y^2 های آنها در رابطه مفروضی صدق می‌کنند (نگاه کنید به شکل ۹۰) دست می‌زند. برای مثال، اگر رابطه $y^2 = x$ را داشته باشیم، آنگاه به ازای هر مقدار x قادر به ساختن y متناظر به عنوان جزء چهارم تناسب بالا خواهیم بود. دکارت علاقه خاصی در به دست آوردن این روابط برای منحنی‌هایی که به‌طور سینماتیکی تعریف می‌شوند، نشان می‌دهد. به عنوان کاربردی از روش خود، دکارت

-
1. Le monde	2. Discours de la méthode pour bien conduire sa	
raison et chercher la vérité dans les sciences		3. La dioptrique
4. Les météores	5. Meditationes	6. Principia philosophiae



رنه دکارت

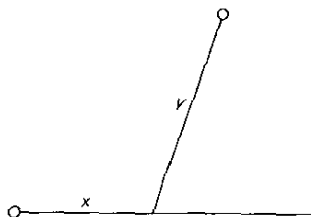
(مجموعه دیوید اسمیت)

مسئله زیر را مورد بحث قرار می‌دهد: اگر $p_1, \dots, p_m, \dots, p_{m+1}, \dots, p_{m+n}$ طولهای $m+n$ باره خط رسم شده از نقطه‌ای مانند P بر $m+n$ خط مفروض باشند، و با این خطوط زوایای مفروضی بسازند، و اگر

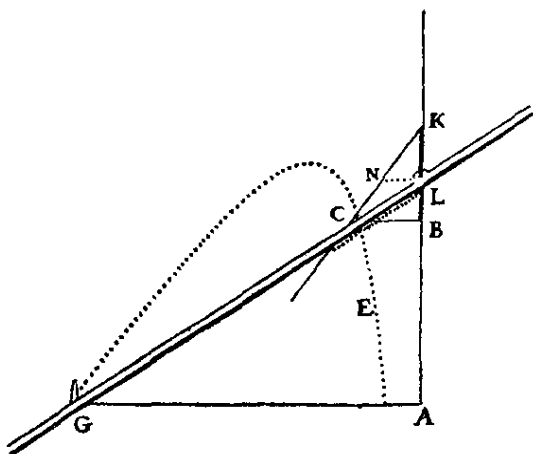
$$p_1 p_2 \dots p_m = k p_{m+1} p_{m+2} \dots p_{m+n},$$

که در آن k ثابت است، مکان هندسی P را پیدا کنید. یونانیان باستان این مسئله را در حالت‌هایی که m و n بیشتر از ۲ نباشند، حل کردند (نگاه کنید به بخش ۹-۶)، ولی مسئله در حالت کلی به صورت یک معما باقی مانده بود. دکارت بسادگی نشان می‌دهد که حالت‌های بالاتر مسئله به مکان‌های هندسی از درجات بالاتر از ۲ منتهی می‌شود، و در موارد معینی وی عملاً قادر به پیدا کردن نقاط مکان هندسی با ابزارهای اقلیدسی است (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۲۰۱۵ (الف)). این امر که هندسه تحلیلی دکارت قادر به مقابله با این مسئله کلی است بخوبی قدرت این روش جدید را تأیید می‌کند. گفته می‌شود که تلاش دکارت برای حل این مسئله الهامبخش وی در ابداع هندسه تحلیلی بوده است.

قسمت دوم هندسه، در بین سایر مطالب، به دسته‌بندی از منحنیها، که اینک منسوخ



شکل ۹۰



Après cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A sont deux quantités indeterminées & inconnuës , ie les nomme l'une y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'une à l'autre, ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cere ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele à G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L est à L K, ou c à b, ainsi C B, ou y, est à B K, qui est par consequent $\frac{b}{c} y$: & B L est $\frac{b}{c} y - b$, & A L est $x + \frac{b}{c} y - b$. de plus comme C B est à L B, ou y à $\frac{b}{c} y - b$, ainsi a, ou G A, est à L A, ou $x + \frac{b}{c} y - b$. de façon que mul-

Sf

tipliant

شده، و نیز به روش جالبی از ساختن مماس بر منحنیها، پرداخته است. روش رسم مماسها به صورت زیر است (نگاه کنید به شکل ۹۱). فرض کنید که معادله منحنی مفروض $f(x, y) = 0$ باشد و (x_1, y_1) مختصات نقطه P از منحنی که می‌خواهیم در آن نقطه مماسی بر آن رسم کنیم. فرض کنید Q ، به مختصات $(x_2, 0)$ ، نقطه‌ای بر محور x ها باشد. در این صورت معادله دایره به مرکز Q و ماربر P

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2$$

است. از حذف y بین این معادله و معادله $f(x, y) = 0$ ، معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آوریم که طولهای نقاط تقاطع دایره با منحنی مفروض را می‌دهد. اکنون x_2 را چنان تعیین می‌کنیم که این معادله بر حسب x دارای یک زوج ریشه برابر با x_1 باشد. این شرط Q را به عنوان محل تلاقی محور x ها و قائم بر منحنی در نقطه P مشخص می‌کند، زیرا دایره اینک در نقطه P بر منحنی مفروض مماس است. به محض اینکه این دایره رسم شود، با سانی می‌توانیم مماس مطلوب را رسم کنیم. به عنوان مثالی از این روش، ساختن مماسی بر سهمی $y^2 = 4x$ را در نقطه $(1, 2)$ در نظر بگیرید. در اینجا داریم

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (1 - x_2)^2 + 4.$$

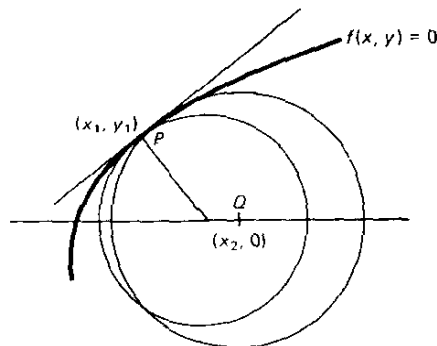
از حذف y بین این معادله و معادله سهمی نتیجه می‌شود که

$$(x - x_2)^2 + 4x = (1 - x_2)^2 + 4,$$

یا

$$x^2 + 2x(2 - x_2) + (2x_2 - 5) = 0.$$

شرط اینکه این معادله درجه دوم دو ریشه برابر داشته باشد این است که مبین آن مساوی صفر باشد، یعنی



شکل ۹۱

$$(y - x_2)^2 - (2x_2 - 5) = 0,$$

یا

$$x_2 = 3.$$

اکنون دایره به مرکز $(3, 0)$ و مار بر نقطه $(1, 2)$ از منحنی رامی توان رسم کرد، و مماس مطلوب سرانجام ساخته می شود. این روش ترسیم مماسها را دکارت در مورد تعدادی از منحنیهای مختلف، از جمله مماس بر یکی از مرغانه های درجه چهارم که نام دکارت بر آن گذاشته شده است*، به کار برده است. در اینجا يك روال کلی داریم که دقیقاً به مامی گوید برای حل مسئله خود چگونه عمل کنیم، ولی باید تصدیق کرد که در حالات پیچیده تر اعمال جبری مورد نیاز کاملاً دست و پا گیر می شوند. این يك نقص کاملاً شناخته شده هندسه تحلیلی مقدماتی است. اغلب می دانیم چه باید بکنیم اما توانایی انجام آن را از لحاظ فنی نداریم. البته، روشهای خیلی بهتری برای یافتن مماسهای بر منحنیها وجود دارند.

در سومین قسمت هندسه به حل معادلات درجات بالاتر از دو پرداخته شده است. از قاعده ای که اکنون آن را قاعده علامت دکارت می نامیم برای تعیین حدود عدده ریشه های مثبت و منفی چند جمله ای استفاده شده است (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۳۱۰). دکارت در هندسه خود به کار بردن حروف اول الفبا را برای نشان دادن مقادیر معلوم، و حروف آخر را برای نشان دادن مقادیر مجهول معمول کرده است. وی همچنین نظام امروزی اندیسه (نظیر a^2 ، a^3 ، و غیره) را معرفی کرد، که بسیار بهبود یافته تر از روش ویت در مشخص کردن توانهاست، و او همچنین تشخیص داد که يك حرف می تواند معرف هر کمیتی، مثبت یا منفی باشد. در اینجا همچنین برای اولین بار به استفاده از روش ضرایب نامعین بر می خوریم. مثلاً، در مثال پاراگراف پیشین، از صفر گذاردن مبین برای تعیین مقدار x_2 به طوری که هر دو ریشه معادله زیر برابر ۱ باشند، استفاده کرده ایم

$$x^2 + 2x(2 - x_2) + (2x_2 - 5) = 0.$$

به عنوان مثالی از روش ضرایب نامعین می توانیم این مطلب را با بیان اینکه اتحاد

$$x^2 + 2(2 - x_2)x + (2x_2 - 5) \equiv (x - 1)^2 \equiv x^2 - 2x + 1,$$

برقرار باشد، به انجام برسانیم، که از آن، با متحد قراردادن ضرایب توانهای مشابه x ، باید داشته باشیم

$$2x_2 - 5 = 1 \quad \text{و} \quad 2(2 - x_2) = -2$$

* يك مرغانه دکارتی مکان هندسی نقطه ای است که فواصل آن، r_1 و r_2 ، از دو نقطه ثابت در رابطه $r_1 + mr_2 = a$ صدق کنند، که a و m در آن مقادیر ثابتی هستند. مقاطع مخروطی مرکزی به عنوان حالت های خاصی از این مکان به شمار می روند.

که از هر يك از اینها $x = 3$ نتیجه می شود.

کتاب هندسه به هیچ وجه بسط منظم روش تحلیلی نیست، و خواننده باید قسمت اعظم این روش را از تعدادی حکم که به طور پراکنده اینجا و آنجا بیان شده، برای خود استخراج کند. در متن کتاب ۳۲ شکل وجود دارد، ولی در هیچیک از آنها صرفاً سخن از محورهای مختصات به میان نیامده است. این اثر عمداً به طور مغلط نوشته شده و لذا بسیار مشکل بوده که به طور گسترده مورد مطالعه قرار گیرد. در ۱۶۴۹ ترجمه لاتینی آن با یادداشتهای توضیحی ف. دوبون^۱ منتشر شد که از سوی فرانس وان سکو تن^۲ پسر همراه با نقد و ویراستاری شده بود. این ترجمه، و چاپ ۱۶۵۹-۱۶۶۱ تجدیدنظر شده آن، انتشار وسیعی داشت. يك قرن و اندی بعد این موضوع شکل آشنای امروزی خود را که در کتابهای درسی دانشگاهی دیده می شود، پیدا کرد. کلمات مختصات، طول، و عرض که امروزه به معنی فنی آنها در هندسه تحلیلی مورد استفاده قرار می گیرند، از جانب لایبنیتز در سال ۱۶۹۲ وارد موضوع شده است.

داستانهای چندی در تبیین بارقه های فکری که دکارت را به تفکر در هندسه تحلیلی واداشت، وجود دارد. بنا بر یکی از این داستانها، این بارقه در رؤیا به ذهنش راه یافت. در شب عید سن مارتین^۳، دهم نوامبر ۱۶۱۶، هنگام اقامت در جایگاه زمستانی ارتش در سواحل دانوب، دکارت سه مرتبه خواب روشن و معنی دار دید که به قول او مسیر زندگی اش را تغییر دادند. این خوابها، به گفته او، با آشکار کردن «دانشی باشکوه» و «کشفی حیرت آور» هدف زندگی وی را روشن و تلاشهای آینده او را معین کردند. دکارت هرگز بصراحت روشن نکرد که این دانش باشکوه و این کشف حیرت آور چه بوده ولی برخی براین باورند که منظور هندسه تحلیلی، یا کاربرد جبر در هندسه و بدین ترتیب تحویل همه علوم به هندسه بوده است. هشت سال بعد وی برخی از این اندیشه ها را در کتاب گفتار خود بتفصیل شرح داد.

داستان دیگری که شاید هم ردیف حکایت آیزک نیوتن و افتادن سیب از درخت باشد، این است که اولین اندیشه از مشاهده مگسی که در مجاورت سقف نزدیک به گوشه ای از اتاقش در حال خزیدن بود، به ذهن او خطور کرد. وی دریافت که مسیر مگس با دانستن رابطه ای که فواصل مگس را از دو دیوار مجاور به هم مربوط می کند، قابل بیان است. گرچه در اعتبار داستان اخیر جای تردید است، ولی ارزش آموزشی زیادی دارد.

از دو ضمیمه دیگر کتاب گفتار، یکی به نورشناسی و دیگری به توضیح پدیده های گوناگون هواشناسی، یا جوی، از جمله رنگین کمان، اختصاص دارد.

از میان سایر کارهای ریاضی منسوب به دکارت، اعلام رابطه $y = f + e - v$ برای اولین بار است که در آن v تعداد رئوس، e تعداد یالها، و f تعداد وجوه يك چند وجهی محذب است (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۲۰۳). وی اولین کسی بود که منحنی موسوم به فولیوم [جینه] دکارت، منحنی درجه سوم گره داری که در اغلب کتابهای حسابان دیده

می‌شود، را مورد بحث قرار داد، ولی تصویر منحنی را به‌طور کامل رسم نکرد. او طی مراسلاتش سهمیه‌های درجات بالاتر ($y^n = px, n > 2$) را مطرح نظر قرار داد و ساختمان بسیار زیبایی از مماس بر سیکلوئید را عرضه کرد.

۱۰-۳ فرما

در همان اوان که دکارت پایه‌های هندسه تحلیلی جدید را پی‌ریزی می‌کرد، این موضوع توجه نافه ریاضی فرانسوی دیگر یعنی پیر دو فرما را هم به‌خود مشغول کرده بود. داعیه فرما در باب حق تقدمش متکی بر نامه‌ای است که وی، در سال ۱۶۳۶، به روبروال^۱ نوشته و در آن متذکر شده است که اندیشه‌های نویسنده در این باره در آن زمان سابقه هفت ساله داشته است. شرح جزئیات این امر در رساله مخمل مکانهای مسطحه و فضایی^۲، که پس از مرگش منتشر شد، آمده است. در این اثر معادله کلی خط و دایره و بیضی درباره هذلولی، بیضی، و سهمی به چشم می‌خورد. در اثری راجع به مماسها و تریبها، که قبل از سال ۱۶۳۷ کامل شده بود، فرما منحنیهای جدید زیادی را به‌طور تحلیلی تعریف کرده است. در حالی که دکارت معدودی منحنی جدید را، که با حرکت مکانیکی تولید می‌شوند، مطرح کرد، فرما منحنیهای جدید زیادی را ارائه داد که به کمک معادلات جبری تعریف می‌شوند. منحنیهای $y^n = ax^m$ ، $x^m y^n = a$ و $m = a\theta$ هنوز هم به هذلولیها، سهمیها، و مارپیچهای فرما مشهورند. فرما، از جمله، منحنی درجه سومی را نیز که بعدها به جادوسر آنیزی^۳ معروف شد، طرح کرده است. این نامگذاری به یاد ماریا کشتانا آنیزی^۴ (۱۷۱۸-۱۷۹۹)، زنی جامع در چندین فن و شهره به عنوان ریاضیدان، زبان‌شناس، فیلسوف، و خوابگرد است. مثلاً، در جایی که دکارت تا حد زیادی از يك مکان هندسی آغاز و معادله آن را پیدا می‌کرده، فرما از معادله شروع و سپس مکان هندسی را مطالعه می‌کرده است. اینها دو جنبه معکوس از اصل بنیادی هندسه تحلیلی را تشکیل می‌دهند. آثار فرما با نامادگذاری ویت نوشته شده ولذا در مقایسه با علامتگذاری جدیدتر دکارت قدیمی جلوه می‌کند.

خبر ظاهراً موثقی در دست است که فرما در بومون دولومانی^۵، نزدیک تولوز^۶، در ۱۷ اوت ۱۶۵۱ به دنیا آمد. می‌دانیم که او در کاستر^۷ یا در تولوز در ۱۲ ژانویه ۱۶۶۵ درگذشت. سنگ قبر او که بدو در کلیسای اوگوستین^۸ در تولوز بود و بعداً به موزه محلی منتقل شد، تاریخ مرگ فوق و سن فرما را در بدو مرگ که پنجاه و هفت سال بوده، می‌دهد. به دلیل این اطلاعات متناقض، تاریخ تولد و مرگ فرما معمولاً به صورت (۱۶۰۱-۱۶۶۵) ثبت می‌شود. در واقع به دلایل متعدد، تاریخ ولادت فرما به صورتی که نویسندگان مختلف

1. Roberval	2. Isogoge ad locus planos et solidos
3. Witch of Agnesi	4. Maria Gaetana Agnesi
5. Beaumont de Lomagne	6. Toulouse
7. Castres	8. Augustines

داده‌اند، از ۱۵۹۰ تا ۱۶۰۸ تغییر می‌کند.

فرما پسر يك تاجر چرم بود و تحصیلات مقدماتی را در زادگاه خود انجام داد. در ۳۵ سالگی به عضویت پارلمان محلی در تولوز درآمد و وظایف خود را در آنجا با فروتنی و دقت زیاد انجام داد. وی که حقوقدانی متواضع و گوشه گیر بود، قسمت اعظم ساعات فراغت خود را وقف مطالعه ریاضیات می‌کرد. گرچه در دوران حیات خود مطالب کمی را منتشر کرد، ولی با ریاضیدانان برجسته زیادی که با او همزمان بودند، مکاتبه علمی داشت و از این راه تاحد زیادی معاصران خود را تحت تأثیر قرار داد. شاخه‌های ریاضی که وی موجب غنای آنها شده، به قدری متعدّدند و سهم وی در آنها به قدری اهمیت دارد که بزرگترین ریاضیدان قرن هفدهم فرانسه نامیده شده است.

از کارهای متنوع فرما در ریاضیات، برجسته تر از همه تأسیس نظریه نوین اعداد است. در این زمینه، فرما شهود و توانایی خارق العاده‌ای داشت. شاید ترجمه لاتینی علم حساب دیوفانتوس، که در ۱۶۲۱ توسط باشه دومزیريك انجام شده بود، موجب شده است که اولین بار توجه او به نظریه اعداد معطوف گردد. اغلب افادات او در این زمینه به صورت اظهاراتی در حاشیه نسخه‌ای از اثر باشه آمده است. در ۱۶۷۰، پنج سال پس از مرگش، این یادداشتها در ضمن چاپ جدیدی از علم حساب، که متأسفانه چاپ آن با بی‌مبالاتی صورت گرفته بود، به وسیله پسر فرما، کلمنت ساموئل^۱، منتشر شد. بعدها درست بودن اغلب قضایای ثابت نشده‌ای که فرما اعلام کرده بود، به ثبوت رسیدند. مثالهای زیر مفاد تحقیقات فرما را آشکار می‌کنند.

۱. اگر p عددی اول و a نسبت به p اول باشد، آنگاه $a^{p-1} - 1$ بر p قابل قسمت است. مثلاً، اگر $p=5$ و $a=2$ ، آنگاه $(5)(3) = 15 = a^{p-1} - 1$. این قضیه، که



پیر دو فرما
(مجموعه دیوید اسمیت)

به قضیه کوچک فرما مشهور است، بدون برهان در نامه‌ای از فرما به فرنیکل دوسی^۱، به تاریخ ۱۸ اکتبر ۱۶۴۰ داده شده بود. اولین برهان چاپ شده آن را اوایل در سال ۱۷۳۶ داد (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۵.۱۰).

۲. هر عدد اول فرد p می‌توان فقط و فقط به یک طریق به صورت تفاضل دو مربع نشان داد. فرما برهان ساده‌ای برای آن آورده است. اگر p یک عدد اول فرد باشد، آنگاه بسادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

از طرف دیگر، اگر $p = x^2 - y^2$ ، آنگاه $p = (x+y)(x-y)$. اما چون p اول است تنها عوامل آن p و ۱ هستند. بنابراین $x+y = p$ و $x-y = 1$ ، یا $x = (p+1)/2$ و $y = (p-1)/2$.

۳. هر عدد اول به صورت $4n+1$ می‌توان به صورت مجموع دو مربع نشان داد. مثلاً، $5 = 4 + 1$ ، $13 = 9 + 4$ ، $17 = 16 + 1$ ، $29 = 25 + 4$. این قضیه را اولین بار در نامه‌ای به تاریخ ۲۵ دسامبر سال ۱۶۴۰ فرما برای مرسن فرستاد. اولین برهان چاپ شده آن را اوایل در ۱۷۵۴ داد، که علاوه بر آن، موفق شد که منحصر به فرد بودن این نمایش را ثابت کند.

۴. یک عدد اول به صورت $4n+1$ دتر فقط یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح، مربع آن دتر دو مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح، و مکعب آن دتر سه مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح است و قس علیهذا. مثلاً $5 = 4(1) + 1$ را در نظر بگیرید. حال $5^2 = 3^2 + 4^2$ ؛ $5^2 = 2^2 + 7^2$ ؛ $5^2 = 1^2 + 24^2$ و $11^2 = 10^2 + 1^2$ ؛ $13^2 = 12^2 + 5^2$ ؛ $17^2 = 16^2 + 1^2$ ؛ $29^2 = 28^2 + 1^2$.

۵. هر عدد صحیح نامنفی n می‌توان به صورت مجموع چهار مربع یا کمتر از چهار مربع نشان داد. این قضیه مشکل را لاگرانژ در سال ۱۷۷۰ ثابت کرد.

۶. در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح مساحت نمی‌تواند یک مجذور کامل باشد. این قضیه نیز بعداً به وسیله لاگرانژ اثبات شد.

۷. معادله $x^2 + 2 = y^3$ تنها یک جواب در اعداد صحیح، و معادله $x^2 + 4 = y^3$ تنها دو جواب در اعداد صحیح دارد. فرما این مسئله را به عنوان یک مسئله حریف آزما برای ریاضیدانان انگلیسی فرستاد. جوابهای معادله اول $x=5$ ، $y=3$ ، و جوابهای معادله دوم $x=2$ ، $y=2$ و $x=11$ ، $y=5$ هستند.

۸. اعداد صحیح مثبتی مانند x و y وجود ندارند که در تساوی $x^4 + y^4 = z^2$ صدق کنند.

۹. اعداد صحیح مثبتی مانند x ، y ، z ، n وجود ندارند که به ازای $n > 2$ در تساوی $x^n + y^n = z^n$ صدق کنند. این حدس مشهور به آخرین «قضیه» فرما مشهور است. این قضیه

را فرما در حاشیه نسخه‌ای از کتاب دیو فانتوس ترجمه باشد در کنار مسئله ۸ مقاله دوم چنین بیان کرد: «تجزیه یک مربع مفروض به مجموع دو مربع». حاشیه‌ای که فرما بر آن نوشت بدین قرار است: «تجزیه یک مکعب به مجموع دو مکعب، یک توان چهارم به مجموع دو توان چهارم، یا به طور کلی هر توان دلخواه به مجموع دو توان با قوه‌های همانند ولی بزرگتر از دو غیر ممکن است، و من یقیناً برهان تحسین آمیزی برای آن یافته‌ام، اما این حاشیه تنگتر از آن است که گنجایش درج آن را داشته باشد.» این امر که آیا فرما برآستی برهان موجهی برای این مسئله در اختیار داشته یا نه، تا ابد به صورت یک معما باقی خواهد ماند. بسیاری از برجسته‌ترین ریاضیدانان از زمان خود او به بعد مهارت خود را در این مسئله آزموده‌اند، اما این حدس در حالت کلی همچنان لاینحل مانده است. برهانی از فرما برای حالت $n=4$ در جای دیگری وجود دارد، و اوایل برهانی را (که بعداً به دست دیگران تکمیل شد) برای $n=3$ ارائه داد. در حدود ۱۸۲۵، لژاندر و دیریکله برهانهای مستقلى برای حالت $n=5$ دادند، و در ۱۸۳۹، لامه قضیه را برای $n=7$ ثابت کرد. پیشرفتهای بسیار مهمی در مطالعه این مسئله توسط ریاضیدان آلمانی، ا. کومر^۲ (۱۸۱۰-۱۸۹۳) حاصل شد. در ۱۸۴۳، کومر برهان خود را تسلیم دیریکله کرد، که دیریکله وجود خطایی را در استدلال او متذکر شد. کومر سپس با نیرویی تازه به مسئله روی آور شد، و چند سال بعد، بعد از کشف موضوع مهمی وابسته به آن در جبر عالی به نام نظریه ایده‌آلها، شرایط بسیار کلیدی برای امتناع روابط فرما استخراج کرد. تقریباً کلیه پیشرفتهای بعدی در این مسئله بر اساس تحقیقات کومر استوار است. اکنون معلوم شده است که آخرین «قضیه» فرما محققاً برای $100000 < n^*$ و برای بسیاری از مقادیر دیگر n درست است.

در ۱۹۰۸، ریاضیدان آلمانی، پل ولفسکهیل^۳ ۱۰۰۰۰۰۰ مسأله در اختیار آکادمی علوم گوتینگن قرارداد تا به عنوان جایزه برای اولین حل کامل «قضیه» اعطا شود. با این کار سیلی از براهین ادعایی از سوی افراد عادی جوای نام و پول به آکادمی سرازیر شد، و از آن زمان به بعد این مسئله تقریباً به همان اندازه تثلیث یک زاویه دلخواه و تربیع یک دایره آما تورها را به خود مشغول داشته است. آخرین «قضیه» فرما این وجه تمایز خاص را هم داراست که مسئله‌ای ریاضی است که بیشترین تعداد براهین نادرست برای آن به چاپ رسیده است.

۱۰. فرما حدس زد که $f(n) = 2^n + 1$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی عددی است اول. نادرست بودن این حدس وقتی که اوایلر نشان داد $f(5)$ عددی است مرکب، ثابت شد.

در ۱۸۷۹، در کتابخانه لیدن، در بین دستنوشته‌های کریستیان هوینگنس، مقاله‌ای از فرما پیدا شد، که در آن فرما از یک روش کلی صحبت می‌کند که امکان دارد وی اغلب اکتشافات خود را به کمک آن انجام داده باشد. این روش به روش نزول نامتناهی معروف است و بویژه در اثبات نتایجی که جنبه نفی حکمی را دارند، مفید است. این روش

1. Lamé 2. E. Kummer

* این امر در سالهای اخیر به کمک کامپیوترهای پرسرعت الکترونیکی انجام شده است.

3. Wolfskehl

اجمالاً از این قرار است. برای اثبات امتناع رابطه معینی که اعداد صحیح مثبت را به هم مربوط می‌کند، فرض کنید که برعکس، مجموعه خاصی از اعداد صحیح مثبت در این رابطه صدق می‌کنند. باین فرض، نشان دهید که این رابطه برای مجموعه دیگری از اعداد مثبت کوچکتر نیز برقرار است. سپس، با کاربرد مجددی، این رابطه باید باز به‌ازای مجموعه دیگری از اعداد کوچکتر از قبل، برقرار باشد، و همین‌طور الی غیرالتهایه. چون اعداد صحیح مثبت را نمی‌توان از نظر کمی به‌طور نامتناهی کاهش داد، نتیجه می‌شود که فرض ابتدایی بیجا و در نتیجه رابطه آغازین غیرممکن است. برای روشن کردن این روش، آن را برای اثبات تازه‌ای از ناگویا بودن $\sqrt{2}$ به‌کار می‌بریم. فرض کنید $\sqrt{2} = a/b$ ، که در آن a و b اعداد صحیح مثبت‌اند. اما

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

و از آنجا

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{b}{a - b},$$

و

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a - b} - 1 = \frac{2b - a}{a - b} = \frac{a_1}{b_1}$$

اما، چون $2 < \sqrt{2} < 1$ ، بعد از قرار دادن a/b به‌جای $\sqrt{2}$ و سپس ضرب طرفین در b ، داریم $2b < a < b$. اما، چون $2b < a$ ، نتیجه می‌شود که $a_1 = 2b - a < a$. بنابراین a_1 عدد صحیح مثبتی کوچکتر از a است. با تکرار این رویه، نتیجه می‌گیریم که $a_p/b_p = \sqrt{2}$ ، که در آن a_p عدد صحیح مثبتی کوچکتر از a_1 است. این عمل را می‌توان به‌طور نامتناهی ادامه داد. چون اعداد مثبت را نمی‌توان از نظر کمی به‌طور نامتناهی کاهش داد نتیجه می‌شود که $\sqrt{2}$ نمی‌تواند گویا باشد.

قبلاً در بخش ۹-۹، خاطر نشان کردیم که مکاتبات بین پاسکال و فرما اساس علم احتمال را پی‌ریزی کرد. متذکر می‌شویم که با اصطلاح مسئله امتیازها بود که آغازگر این مطلب گردید: «نحوه تقسیم جایزه در بازی نیمه تمام مانده‌ای بین دوبازیکن، به‌فرض داشتن مهارت یکسان، با معلوم بودن امتیازهای دوبازیکن در موقع قطع بازی و تعداد امتیازات لازم برای برنده شدن را، تعیین کنید.» فرما به‌بحث در حالتی پرداخت که A ، یکی از بازیکنها، برای برنده شدن ۲ امتیاز و B ، بازیکن دیگر ۳ امتیاز می‌خواست. در اینجا جواب فرما را برای این حالت خاص می‌آوریم. چون آشکار است که چهار بازی دیگر نتیجه را معین خواهد کرد، اگر a معرف بازی باشد که در آن A برنده می‌شود و b

معرف بازمیی باشد که در آن B برنده می‌شود، و ۱۶ تبدیل دوحرف a و b را ۴ به ۴، در نظر بگیریم:

$aaaa$	$aaab$	$abba$	$bbab$
$baaa$	$bbaa$	$abab$	$babb$
$abaa$	$baba$	$aabb$	$abbb$
$aaba$	$baab$	$bbba$	$bbbb$

حالت‌هایی که در آن a دوبار یا بیشتر ظاهر می‌شود، مساعد برای A است؛ ۱۱ تا از این حالت‌ها وجود دارند. حالت‌هایی که در آن b سه بار یا بیشتر ظاهر می‌شود مساعد برای B است؛ تعداد آنها ۵ است. بنابراین باید جایزه به نسبت ۱۱:۵ تقسیم شود. در حالت کلی که برای برنده شدن، A به m امتیاز، و B به n امتیاز نیاز دارد، $m+n-1$ جایگشت ممکن دوحرف a و b را $m+n-1$ به $m+n$ می‌نویسیم. در این صورت عدد α ، تعداد حالت‌هایی را که در آن a ، m بار یا بیشتر و عدد β ، تعداد حالت‌هایی که در آن b ، n بار یا بیشتر ظاهر می‌شود، به دست می‌آوریم. بنابراین باید جایزه را به نسبت $\alpha:\beta$ تقسیم کرد.

پاسکال مسئله امتیازها را با سود بردن از «مثلث حسابی» مذکور در بخش ۹-۱ حل کرد. با فرض اینکه $C(n,r)$ معرف تعداد ترکیب‌های n شیء r به r باشد (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۳.۹ (ز))، آسانی می‌توان نشان داد که اعداد واقع در امتداد قطر پنجم «مثلث حسابی»، بترتیب، عبارت‌اند از

$$C(4,4)=1, C(4,3)=4, C(4,2)=6, C(4,1)=4, C(4,0)=1.$$

چون، یا مراجعه به مسئله امتیازها در حالت خاص بالا، $C(4,4)$ تعداد راه‌های به دست آوردن ۴ تا a ، $C(4,3)$ تعداد راه‌های به دست آوردن ۳ تا a است و قس علیهذا، نتیجه می‌شود که جواب مسئله به صورت زیر است

$$[C(4,4)+C(4,3)+C(4,2)]:[C(4,1)+C(4,0)]=(1+4+6):(4+1)=11:5$$

در حالت کلی که A به m امتیاز و B به n امتیاز برای برنده شدن نیاز دارند، می‌توان قطر $(m+n)$ ، آرایه حسابی پاسکال را اختیار کرد. پس از آن عدد α ، مجموع n عدد اول روی این قطر و عدد β ، مجموع m عدد آخر روی قطر محاسبه می‌شود. در این صورت جایزه را باید به نسبت $\alpha:\beta$ تقسیم کرد.

پاسکال و فرما، در مراسلات تاریخی خود در سال ۱۶۵۴، روی مسائل دیگری در ارتباط با مسئله امتیازها، نظیر تقسیم جایزه در حالت وجود بیش از دو بازیکن یا وجود دو بازیکن غیرهمقدرت تأمل کردند. این کار پاسکال و فرما سبب به راه افتادن نظریه ریاضی احتمال شد. در سال ۱۶۵۷ کریستیان هوپکنس (۱۶۲۹-۱۶۹۵) اولین رساله صوری در باره احتمال را، بر مبنای مکاتبات پاسکال-فرما نگاشت. این، بهترین شرح این موضوع تا

پیش از فن حدس^۱ یا کوب برنولی^۲ بود که در ۱۷۱۳، پس از مرگ برنولی منتشر شد و چاپ مجددی از رسالهٔ قبلی هویگنس را در بر داشت. بعد از این کوششهای پیشاهنگانه، مشاهده می‌شود که موضوع رامردانی چون آبراهام دموآور^۳ (۱۶۶۷-۱۷۵۴)، دانیل^۴ برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲)، لئونهارت اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳)، پیرسیمون لاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷) و جمعی دیگر به‌پیش برده‌اند.

جای تأمل، و تا حدی تعجب، است که ریاضیدانان به بسط شاخه‌ای از علم، یعنی نظریهٔ ریاضی احتمال نایل شده‌اند که به تأسیس قوانینی منطقی که می‌توان آنها را در موقعیتهایی با جنبهٔ کاملاً تصادفی به‌کاربرد پرداخته است. این علم به‌هیچوجه غیرعملی نیست و گواه این امر آزمایشهای انجام‌شده در آزمایشگاههای بزرگ، وجود شرکتهای بیمهٔ معتبر، و علم‌سازوکار بازرگانیهای عمده و جنگ هستند.

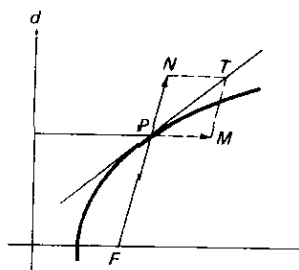
ما در فصل آتی (بخش ۱۱-۷) به فرما بازمی‌گردیم و در آنجا استفادهٔ اوازیبناهیات کوچکها در هندسه-مخصوص کارگیری او از آنها در مسائل مربوط به ماکزیموم و مینیموم-را بررسی می‌کنیم که او را به‌عنوان پیشگام بزرگ حساب دیفرانسیل مشخص کرده‌است.

۱۰-۴ روبروال و تورپجلی

این بخش را به ژیل پرسون دو روبروال^۵ و اوانجلیستا تورپجلی^۶، یکی فرانسوی و دیگری ایتالیایی اختصاص می‌دهیم که معاصر هم بودند، هر دو هندسه‌دان و فیزیکدان برجسته بودند، سلیقه و استعداد مشابهی در ریاضیات داشتند و در نزاعهای مربوط به حق تقدم در کشف باهم درگیر شدند.

ژیل پرسون، که فردی ستیزه‌جو بود، در روبروال، نزدیک بووه^۷ در سال ۱۶۰۲ به دنیا آمد و در سال ۱۶۷۵ در پاریس درگذشت. وی نام دو روبروال را که عنوان تیولداری است، بی آنکه واجد شرط باشد، بر خود نهاد. مکاتبات گستردهٔ او به عنوان واسطه‌ای در رد و بدل کردن اندیشه‌های ریاضی در آن روزها که هنوز مجلات علمی منتشر نمی‌شد سودمند افتاد. وی به خاطر روش خود در رسم مماسها و کشفیاتش در زمینهٔ منحنیهای مسطحهٔ درجات بالا شهرت یافت. وی یک منحنی را حاصل حرکت نقطه‌ای که حرکتش ترکیبی از دو حرکت معلوم است، تلقی کرد. در این صورت برآیند بردارهای سرعت دو حرکت معلوم خط مماس بر منحنی را به دست می‌دهد. مثلاً، در مورد سهمی، می‌توانیم دو حرکت را چنان بگیریم که نیروی آن یکی مبدأش بر کانون و دیگری مبدأش بر هادی است. چون فواصل نقطهٔ متحرک از کانون و هادی همیشه باهم برابرند، بردارهای سرعت دو حرکت نیز باید از نظر کمی برابر باشند. نتیجه می‌شود که مماس در یک نقطه بر سهمی زاویهٔ بین شعاع حامل این نقطه و عمود وارد از این نقطه بر هادی را نصف می‌کند (نگاه کنید به شکل ۹۲).

1. Ars Conjectandi
2. Jacob Bernoulli
3. Abraham De Moivre
4. Daniel
5. Gilles Persone de Roberval
6. Evangelista Torricelli
7. Beauvais



شکل ۹۲

این فکر مماسها مورد توجه تورچلی نیز واقع شده بود و در پی آن بحثی در پیرامون اینکه حق تقدم از آن کیست، در گرفت. روبروال همچنین مدعی ابداع روش تقسیم ناپذیرهای پیش از حسابان کوالیری (که در بخش ۱۱-۶ مورد بحث قرار گرفته) و تربیع سیکلوئید پیش از تورچلی بود. این موارد مربوط به حق تقدم را نمی توان بآسانی رفع و رجوع کرد، زیرا روبروال در افشای کشفیات خود پیوسته کندی نشان می داد. کندی نشان دادن او را این حقیقت روشن می کند که وی به مدت ۴۵ سال، از سال ۱۶۳۴، متصدی يك کرسی استادی در کولژ رویال^۱ بود. این کرسی خود به خود هر سه سال يك بار بلامتصدی می شد که تصدی آن می بایست از طریق گذراندن يك مسابقه ریاضی در يك رقابت آزاد، که سؤالات آن را متصدی مستعفی طرح می کرد، انجام می شد. برای حفظ پست خود، روبروال کشفیاتش را پیش خود نگاه می داشت تا سؤالهایی برای مسابقه طرح کند که وی قادر به جواب دادن به آنها باشد ولی برای رقابیش مشکل باشد. در هر بار، روبروال باموفقیت روش تقسیم ناپذیرها را برای یافتن برخی مساحتها، احجام، و مراکز هندسی به کار می گرفت. علی رغم موفقیتهایش در هندسه، علاقه اصلی او به فیزیک بود.

او انجلیستاتورچلی که روحی حساس داشت، نزدیک فائنزا^۲ در ایتالیا، در سال ۱۶۵۸، به دنیا آمد و در سال ۱۶۴۷ در فلورانس درگذشت. وی برای مدت کوتاهی، در اواخر عمر گالیله شاگرد او بود. گرچه چهل و چهار سال از گالیله جوانتر بود، تنها پنج سال پس از استاد خود زیست و در سی و نه سالگی، پانزده سال پیش از پاسکال درگذشت. بنا بر داستانی که شاید بیش از اندازه پرسوز و گداز باشد، تورچلی در اثر بیم و اندوه ناشی از اتهام سرقت ادبی که روبروال به او زد، درگذشت.

قبلاً دیده ایم که گالیله ارزش سیکلوئید را در شکل زیبایی که به طاقها در معماری می دهند، می دانست. وی همچنین، در ۱۵۹۹، سعی کرد که مساحت يك طاق منحنی را با برابر گرفتن يك سردر سیکلوئید شکل با يك سردر مستدیری به اندازه دایره مولد آن، تعیین کند. وی بغلط نتیجه گرفت که مساحت زیر يك طاق خیلی نزدیک به سه برابر مساحت دایره

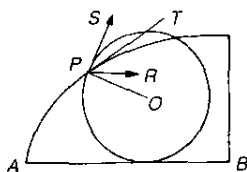


اوانجلیستا توریچلی
(مجموعه دیوید اسمیت)

است ولی با آن برابر نیست. اولین برهان ریاضی چاپ شده را که این مساحت دقیقاً سه برابر دایره مولد آن است در سال ۱۶۴۴ شاگردش توریچلی، با استفاده از روش بینهایت کوچکها، داد. توریچلی همچنین روشی برای رسم مماس بر سیکلوئید در هر نقطه مفروض آن منتشر کرد. وی هیچ اشاره‌ای به اینکه روبروال هم مساحت و هم مماس را به دست آورده، نکرد و در نتیجه آن روبروال در سال ۱۶۴۶ برآشفته از این موضوع، در نامه‌ای توریچلی را به سرقت ادبی متهم کرد. اینک روشی است که تقدم در کشف از آن روبروال ولی تقدم در انتشار از آن توریچلی است که احتمالاً به‌طور مستقل هر دو نتیجه را مجدداً کشف کرده بوده‌است.

برای یافتن مماس، هر دو روش ترکیب حرکتهای را که در بالا در رابطه با رسم مماس بر سهمی توصیف شد، به کار گرفتند. در مورد سیکلوئید، نقطه‌ای مانند P بر منحنی را می‌توان تحت دو حرکت برابر دانست که یکی انتقال و یکی دوران است. موقعی که دایره مولد در امتداد خط پایه AB می‌غلتد (نگاه کنید به شکل ۹۳)، نقطه P به‌طور افقی پیش می‌رود در حالی که هم‌زمان با آن حول O ، مرکز دایره، می‌چرخد. بنابراین باید بردار افقی PR برابر P را، به‌عنوان مؤلفه انتقال، و بردار PS را که مماس بر دایره مولد است، به‌عنوان مؤلفه دوران رسم کرد. مادام که دو بردار کمیت برابر دارند، مماس مطلوب بر سیکلوئید در امتداد PT ، متصف زاویه RPS که بین دو بردار تشکیل می‌شود، قرار دارد.

فرما مسئله تعیین نقطه‌ای در صفحه يك مثلث را که مجموع فواصل آن از سه رأس مینیموم باشد، برای توریچلی مطرح کرد. راه‌حل توریچلی در سال ۱۶۵۹ توسط شاگردش ویویانی^۱ به چاپ رسید. این نقطه، که امروزه مرکز هم‌زاویه‌ای مثلث نامیده می‌شود، اولین نقطه مهم يك مثلث بود که از زمان ریاضیات یونان باستان به بعد کشف شده بود. تحلیل ساده



شکل ۹۳

و زیبایی از مسئله بعداً توسط یاکوب اشتاینر^۱ داده شد.* در سال ۱۶۴۰، توریکلی طول قوس شاخه‌ای از مارپیچ لگاریتمی را پیدا کرد. دکارت نیز طول قوس این منحنی را دو سال جلوتر محاسبه کرده بود و اولین منحنی بعد از دایره بود که طول قوسش حساب شده بود. در ۱۶۴۱، توریکلی متوجه شد که یک مساحت نامتناهی، موقعی که حول محوری در صفحه‌اش دوران داده شود، می‌تواند گاهی جسم دواری با حجم متناهی تولید کند. به عنوان مثال، مساحت محصور بین هذلولی $xy = k^2$ و خط $x = b$ ($b > 0$) و محور x ها نامتناهی است، در حالی که حجم جسم دوار حاصل از دوران این سطح حول محور x ها متناهی است. مع‌هذا توریکلی اولین کسی نبود که متوجه این امر ظاهراً خلاف قاعده شده باشد. توریکلی به خاطر سهمش در فیزیک شهرت بیشتری دارد و در این زمینه، نظریه فشارسنج را بسط داد و در رابطه با سؤالاتی نظیر مقدار شتاب ناشی از گرانش، نظریه پرتابه‌ها، و حرکت مایعات کار کرد.

۵-۱۰ هوینگنس

نا بغه بزرگ هلندی، کریستیان هویگنس، زندگی بی حادثه ولی بسیار پر بار داشت. وی در سال ۱۶۲۹ در لاهه متولد شد و در لیدن پیش فرانس وان سخوتن پسر درس خواند. در سال ۱۶۵۱، وقتی ۲۲ سال داشت، مقاله‌ای به چاپ رساند که در آن اشتباهات سن ونسان را در اثرش دربارهٔ تربیع دایره گوشه ذکر کرد. به دنبال آن هویگنس رسالاتی دربارهٔ تربیع مقاطع مخروطی و پیرایش مثلثاتی اسنل از روش کلاسیک محاسبه π نوشت (نگاه کنید به بخش ۴-۸). در سال ۱۶۵۴، او و برادرش روش جدیدی برای ساییدن و صیقل دادن عدسیها یافتند، و در نتیجه هویگنس قادر به بافتن پاسخ برخی سؤالات در نجوم ارسادی، نظیر ماهیت حلقه‌های کیوان شد. کار هویگنس در نجوم او را، در چند سال بعد، به اختراع ساعت پاندولی راهبری کرد، شاید برای اینکه وسایل دقیقتری برای اندازه‌گیری زمان در اختیار داشته باشد.

1. Jacob Steiner

* مثلاً نگاه کنید به

R. A. Johnson, *Modern Geometry*, pp. 218–25,

Richard Courant and H. E. Robbins *What is Mathematics?* pp.354-61



گریستیان هویگنس
(مجموعه دیوید اسمیت)

همچنانکه در بخش ۱۰-۳ متذکر شدیم، هویگنس در سال ۱۶۵۷ اولین رسالهٔ صوری در بارهٔ احتمال را، بر مبنای مکاتبات پاسکال-فرما نگاشت. هویگنس مسائل جالب و غیر مقدماتی بسیاری را حل کرد و مفهوم مهم «امید ریاضی» را معرفی کرد: اگر p معرف احتمال آن باشد که شخصی برندهٔ مبلغ معین s شود، در این صورت sp امید ریاضی او خواهد بود. هویگنس از جمله نشان داد که اگر p احتمال برد مبلغی برابر a ، q احتمال برد مبلغی برابر b برای کسی باشد، آنگاه وی می‌تواند امید برد $ap + bq$ را داشته باشد.

پاسکال در کتاب اندیشه‌ها، یا تفکراتی در بارهٔ مذهب و سایر موضوعات که هشت سال بعد از مرگش چاپ شد، به طور موجه‌نمایی مفهوم امید ریاضی را به‌کار گرفت. وی استدلال کرد که چون ارزش سعادت ابدی باید نامتناهی باشد، در این صورت حتی اگر احتمال اینکه تضمین سعادت از راه مذهب بسیار کوچک باشد، امید (که با حاصلضرب این دو اندازه گرفته می‌شود) تنها کافی است که مذهبی بودن را بر خوردار از ارزش کند.

در سال ۱۶۶۵، هویگنس برای استفاده از مقرری که از سوی لویی چهاردهم به او پیشنهاد شده بود، به پاریس نقل مکان کرد. در پاریس، در سال ۱۶۶۸، مقاله‌ای به‌انجمن سلطنتی لندن فرستاد که در آن به‌طور تجربی نشان داده شده بود که مجموع اندازه حرکت دو جسم در يك امتداد معین قبل و بعد از تصادم با یکدیگر یکی است.

در ۱۶۷۳، در پاریس، بزرگترین اثر هویگنس، ساعت نوسانی^۱ منتشر شد. این اثر در پنج قسمت، یا فصل است. در اولین قسمت به ساعت آونگی پرداخته شده که مؤلف در ۱۶۵۶ اختراع کرده بود. دومین قسمت به بحث در بارهٔ اجسامی اختصاص دارد که در خلا سقوط آزاد دارند، و بر روی يك صفحهٔ شیب‌دار هموار می‌لغزند، یا در امتداد منحنی همواری حرکت می‌کنند. خاصیت همزمانی يك سیکلوئید وارون-که يك دژوزین در روی يك کمان سیکلوئیدی وارون از هر نقطه از کمان که حرکت به پایین را شروع کند در زمان واحدی به ته آن می‌رسد- در اینجا نشان داده شده است. در قسمت سوم گسترده‌ها و گسترده‌ها

بررسی می‌شوند. گستردهٔ يك منحنی مستوی، پوش قائمهای بر منحنی است، و هر منحنی که منحنی مفروض گستردهٔ آن باشد، گستردهٔ آن منحنی مفروض نامیده می‌شود. به عنوان کاربردهایی از نظریهٔ عام خود، هویگنس گستردهٔ سهمی و سیکلوئید را پیدا می‌کند. برای حالت نخست يك سهمی از درجهٔ $۳/۲$ و برای حالت دوم سیکلوئید دیگری به همان اندازه به دست می‌آورد. در قسمت چهارم ساعت، مطالعهٔ آونگ مرکب همراه با این برهان که مرکز نوسان و نقطهٔ تعلیق رami توان با هم عوض کرد، دیده می‌شود. در آخرین قسمت این اثر، به نظریهٔ ساعت‌ها پرداخته شده است. در اینجا به تشریح آونگ سیکلوئیدی برمی‌خوریم (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۷۰۱۰)، که در آن دورهٔ نوسان مستقل از بزرگی یا کوچکی دامنهٔ نوسان است، چیزی که در مورد دامنهٔ نوسان يك آونگ ساده فقط تقریباً درست است. آخرین قسمت با ۱۳ قضیهٔ مربوط به نیروی گریز از مرکز در حرکت دورانی خاتمه می‌یابد، که در آن، از جمله، این حقیقت آشنا ثابت می‌شود که در حرکت دورانی یکنواخت مقدار نیروی گریز از مرکز با مربع سرعت خطی تناسب مستقیم و با شعاع دایره نسبت معکوس دارد. در سال ۱۶۷۵، تحت نظارت هویگنس، اولین ساعتی که با فرمویی تنظیم می‌شد، ساخته شد؛ این ساعت به لویی-چهاردهم اهدا شد.

هویگنس در سال ۱۶۸۱ به هلند بازگشت. عدسیه‌هایی با طول کانونی بسیار بزرگ ساخت، و عدسیه‌های بیرنگ برای تلسکوپها را اختراع کرد. در ۱۶۸۹، از انگلستان دیدار کرد و با آیزک نیوتن، که کار وی را بسیار ستود، آشنا گردید. به فاصلهٔ کوتاهی پس از بازگشت به هلند، در سال بعد رساله‌ای در شرح نظریهٔ موجی نور منتشر کرد، و بر اساس این نظریه توانست قوانین انعکاس و انکسار را به‌طور هندسی استخراج کند، و پدیدهٔ انکسار مضاعف را توضیح دهد. از سوی دیگر، نیوتن از نظریهٔ گسلی بودن نور طرفداری کرد، و شخصیت برجستهٔ او موجب شد که دانشمندان معاصر وی این نظریه را بر نظریهٔ موجی ترجیح دهند. هویگنس چند رسالهٔ کم اهمیت تر هم نوشت. طول قوس سیسویید دیوکلس را حساب کرد. به تحقیق پیرامون هندسهٔ منحنی زنجیری (شکلی که يك زنجیر کاملاً قابل انعطاف تمدید ناپذیر با چگالی خطی یکنواخت که از دو تکیه‌گاه غیر واقع بر يك خط عمودی آویزان شده باشد، به خود می‌گیرد) پرداخت، در بارهٔ منحنی لگاریتمی مطالبی نگاشت، قاعدهٔ فرما برای ماکزیموم و مینیموم را، به صورت امروزی برای چند جمله‌ایها، بیان کرد، و کاربردهای متعددی از ریاضیات را در فیزیک عرضه کرد.

نظیر اغلب براهینی که از سوی نیوتن آورده شده، استدلالهای هویگنس تقریباً به‌طور کامل، به روشهای هندسهٔ یونانی، با تأکید فراوان بر دقت، صورت گرفته است. با خواندن آثار او نمی‌توان تشخیص داد که او با روشهای قدرتمند نوین هندسهٔ تحلیلی و حسابان آشنا بوده است. هویگنس در شهر زادگاه خود در ۱۶۹۵ درگذشت.

۱۰-۶ برخی ریاضیدانان فرانسوی و ایتالیایی قرن هفدهم

ریاضیدانان کم‌اهمیت‌تری در قرن هفدهم وجود داشتند که باید کار آنان، ولو باختصار، ذکر

شود. ما در این بخش و در دو بخش آتی به این کار می پردازیم، و اینان را بر حسب نواحی جغرافیایی مورد بررسی قرار می دهیم.

از اولین پیروان قابل ذکر دیوفانتوس در اروپا، یکی باشه دو مزیریاک (۱۵۸۱-۱۶۳۸) است. اثر دلپذیر و کلاسیک او تحت عنوان مسائل مطبوع و لذت بخش^۱، که در ۱۶۱۲، و دوباره، به صورت حجیمتر، در ۱۶۲۴ منتشر شد، شامل حیل‌های متعددی در حساب و سؤالاتی است که عملاً در همه مجموعه‌های معماها و تفریحات ریاضی که بعداً به چاپ رسیده‌اند، آمده‌اند. در سال ۱۶۲۱، وی ویرایشی از متن یونانی علم حساب دیوفانتوس را، همراه با ترجمه لاتینی آن به انضمام یادداشت‌هایی بر آن منتشر کرد. در نسخه‌ای از این اثر بود که فرما حواشی معروف خود را نگاشت.

نظریه اعداد دان دیگری که نویسنده کثیرالتألیفی در بسیاری از زمینه‌ها بود، راهب فرقه مینییم^۲ مارن مرسن (۱۵۸۸-۱۶۴۸) است. وی مدام با بزرگترین ریاضیدانان عصر خود در مکاتبه بود. وی، در آن روزهای پیش از پیدایش مجلات علمی، به طور تحسین آمیزی به عنوان مرکز مبادله اندیشه‌های ریاضی خدمت کرد. آثار بسیاری از ریاضیدانان یونانی را ویرایش کرد و مطالبی در باره موضوعات گوناگون نگاشت. شهرت وی بویژه در رابطه با اصطلاح اعداد اول مرسن، یا اعداد اولی به صورت $2^p - 1$ است، که آنها را در دوسه‌جا در اثرش اندیشه‌های فیزیکی-ریاضی^۳ مربوط به سال ۱۶۴۴ مورد بحث قرار داد. ارتباط بین اعداد اول مرسن و اعداد تام در بخش ۳-۳ خاطر نشان شد. عدداول مرسن برای $p = 4253$ اولین عدد اول شناخته شده‌ای است که در بسط اعشاری آن بیش از ۱۰۰۰ رقم موجود است. کلود میدورژ (۱۵۸۵-۱۶۴۷)، از دوستان دکارت، هندسه‌دان و فیزیکدان بود. او آثاری در زمینه اپتیک و یک مطالعه ترکیبی از مقاطع مخروطی را که در آن بسیاری از براهین طول آپولونیوس را ساده کرده بود، منتشر کرد. وی دستنوشته جالبی شامل صورتها و جوابهای متجاوز از هزار مسئله هندسی از خود به جا گذاشت و تفریحات ریاضی^۴ عامه پسند لورشون^۵ را ویرایش کرد.

قبلاً، در بخش ۹-۸، اشاره‌ای به کار فیلیپ دولاهیر (۱۶۴۰-۱۷۱۸) کرده ایم. وی را، که نقاش، معمار، منجم، و ریاضیدان بوده است، مردی با نبوغ در زمینه‌های مختلف توصیف کرده‌اند. علاوه بر کتابش در باره مقاطع مخروطی که قبلاً وصف شد، در باره روشهای نموداری، انواع گوناگون منحنیهای مستوی از درجات بالا، و مرهمهای جادویی مطالبی نوشت. وی نقشه‌هایی از زمین را به طریقه تصویرگری ساخت، که در آن مرکز تصویر، بر خلاف تصویر گنجنگاشتی بطلمیوس (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۰.۶) نه در قطب کره بلکه بر امتداد شعاع مار بر قطب و به فاصله $r \sin 45^\circ$ در خارج کره واقع است. وینچنسو ویویانی^۶ (۱۶۲۲-۱۷۰۳)، یکی دیگر از شاگردان گالیله، که هم به فیزیک

1. Problèmes plaisants et délectables

2. Minimite

3. Cogitata physico-mathematica

4. Réc réations mathématiques

5. Leurechon

6. Vincenzo Viviani

و هم به هندسه علاقه داشت، در زمرهٔ ریاضیدانان کم‌اهمیت تر ایتالایی است که باید در اینجا ذکر شوند. وی مردی بود که در طول حیاتش سخت مورد تجلیل قرار گرفت. در میان کارهای هندسی‌اش یکی تعیین مماس بر سیکلوئید بود، ولی چند تنی این مسئله را قبلاً حل کرده بودند. در سال ۱۶۹۲، وی مسئلهٔ زیر را مطرح نمود، که جلب توجه زیادی کرد: یک گنبد نیم‌کره‌ای دارای چهار پنجرهٔ مساوی با چنان اندازه‌ای است که بقیهٔ مساحت را می‌توان تربیع نمود؛ نشان دهید که این کار چگونه ممکن است. جوابهای صحیحی از سوی عده‌ای از ریاضیدانان برجستهٔ معاصر وی داده شد. ویویانی مسئلهٔ تثلیث زاویه را با استفاده از یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرد.

لازم است از خانوادهٔ کاسینی هم، که چندین عضو آن کارهای برجسته‌ای در نجوم انجام دادند و استفادهٔ استادانه‌ای از ریاضیات در این زمینه به‌عمل آوردند، ذکر می‌کنیم. آید. منحنی کاسینی، که مکان هندسی نقطه‌ای است که حاصلضرب فواصل آن از دو کانون ثابت مقداری ثابت است، توسط جیووانی دومینیکو کاسینی^۱ (۱۶۲۵ - ۱۷۱۲) در ۱۶۸۰ در رابطه با موضوعی دربارهٔ حرکت‌های نسبی زمین و خورشید مورد مطالعه قرار گرفت. در خانواده‌ای از منحنیهای هم کانون کاسینی لمنیسکات هشت شکل [هشت انگلیسی] برنولی را می‌توان یافت، حقیقتی که تا پایان قرن هجدهم مورد توجه قرار نگرفت. منحنیهای کاسینی را می‌توان به‌عنوان مقاطع یک چنبره باصفحاتی موازی با محور چنبره پیدا کرد. جیووانی کاسینی به‌عنوان استاد نجوم در بولونیا به‌کار پرداخت، ولی در سال ۱۶۶۹ از طرف لوئی چهاردهم به پاریس دعوت شد و در آنجا، در سال ۱۶۷۱، اولین منجم دربار فرانسه شد. چون به تبعیت کشور فرانسه درآمد و دومین فرزندش، ژاک^۲ کاسینی (۱۶۷۷-۱۷۵۶) در فرانسه متولد شد، این شاخهٔ خانوادهٔ کاسینی از زمرهٔ ایتالیاییها بیرون آمدند. در ۱۷۱۲ ژاک به‌عنوان منجم دربار جانشین پدر شد، و سزار فرانسوا^۳ کاسینی، پسر ژاک، به‌نوبهٔ خود در ۱۷۵۶ به‌عنوان منجم دربار جانشین پدر شد و جای او را یکی از فرزندانش، ژاک دومینیک^۴ کاسینی (۱۷۴۸-۱۸۴۵) گرفت. همهٔ آنان، به‌اعتلای سنت خانواده در ایفای سهم به‌عالم علم کوشیدند.

۱۰-۷ برخی ریاضیدانان آلمان و ایالات سفلی در قرن هفدهم

پیشرفت موفقیت‌آمیزی که آلمان در طول قرن شانزدهم در ریاضیات داشت، در قرن هفدهم ادامه نیافت. جنگ سی‌ساله (۱۶۱۸-۱۶۴۸) و ناآرامی بعد از آن در کشورهای تیوتنی این قرن را برای پیشرفت معنوی در آنجا نامساعد کرد. کپلر و لایبنیتز تنها ریاضیدانان درجهٔ اول این دوره به‌شمار می‌آیند و تنها ریاضیدان با اهمیت کمتری که در اینجا ذکر خواهیم کرد، اهرنفرید والتر فون چیرنهاوزن^۵ (۱۶۵۱-۱۷۰۸) است. چیرنهاوزن وقت

1. Giovanni Domenico Cassini

2. Jacques

3. Cèsar - Francois Cassini

4. Jacques Dominique

5. Ehrenfried Walther von Tschirnhausen

زیادی را وقف ریاضیات و فیزیک کرد، رد خود را در مطالعه منحنیها و نظریه معادلات به جا گذاشت. در ۱۶۸۲، منحنیهای محرق را معرفی و مطالعه کرد، چنین منحنی پوش اشعه نورانی، ساطع شده از يك منبع نقطه‌ای پس از انعکاس نسبت به يك منحنی مفروض است. مارپیچ سینوسی خاص $a = r \cos^3(\theta/3)$ ، به معادله درجه سوم چیرنهاوزن معروف است. مارپیچ سینوسی کلی $r^n = a \cos n\theta$ ، که در آن n گویاست، توسط کالین ماکلورن^۱ در ۱۷۱۸ مورد مطالعه قرار گرفت (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۸.۱۰). در نظریه معادلات، چیرنهاوزن بویژه به خاطر تبدیلی که يك معادله چند جمله‌ای درجه m بر حسب x را به يك معادله چند جمله‌ای درجه m بر حسب y تبدیل می‌کند که در آن ضرایب y^{n-1} و y^{n-2} هر دو صفرند، مشهور است. بعداً، در سال ۱۸۳۴، ج. ب. جرادت يك تبدیل چیرنهاوزن پیدا کرد که يك معادله چند جمله‌ای بر حسب x را به يك معادله چند جمله‌ای بر حسب y تبدیل می‌کند که در آن ضرایب y^{n-1} ، y^{n-2} ، y^{n-3} همه صفرند. کاربرد این تبدیل در مورد يك معادله درجه پنجم را قبلاً، در سال ۱۷۸۶، ا. سی. برینگ^۲ داده بود و در حل غیر جبری معادله درجه پنجم به کمک توابع بیضوی حائز اهمیت است.

علیرغم دوره‌های پر آشوب، ناحیه جغرافیایی که اینک معالک سفلی نامیده می‌شود، تعدادی ریاضیدان کم اهمیت‌تر را در قرن هفدهم پدید آورد. از ویلبرورد اسنل (۱۵۸۰ یا ۱۵۸۱-۱۶۲۶) قبلاً در رابطه با کارش در مساحت دایره یاد شده است. وی عجبویه‌ای بود، و گفته‌اند که قبل از ۱۲ سالگی با آثار ریاضی استانده زمان خود آشنا شده بوده است. نام لوکسودروم^۳، برای مسیری بر کره که زوایای ثابتی با مدارها می‌سازد، به اسنل منسوب است، و وی یکی از اولین کسانی است که در خواص مثلثهای قطبی کروی تحقیق کرده است. مثلثهای اخیر را اولین بار ویت مورد بحث قرار داده است.

آلبر ژیرار^۴ (۱۵۹۵-۱۶۳۲) نیز، که به نظر می‌رسد عمدتاً در هلند زیسته باشد، به هندسه کروی و مثلثات پرداخت. در سال ۱۶۲۶، رساله‌ای در مثلثات منتشر نمود که حاوی اولین مورد استفاده از علائم اختصاری $\sin$ ، $\tan$ ، $\sec$ ، به نشانه سینوس، تانژانت، سکانت است. وی عبارتی را برای يك مثلث کروی بر حسب زیادتی کروی آن* ارائه داد. ژیرار همچنین جبردانی باتوانایی قابل ملاحظه بود. او آثار سیمون استوین را ویرایش کرد.

گرگوار دوسن و نسان (۱۵۸۴-۱۶۶۷) از نام‌آوران است که در قرن هفدهم در تریبوع دایره کار کرده است. وی از روشهای مقدم بر اختراع حسابان در مسائل مختلف تریبوع استفاده می‌کرد.

فرانس وان سخوتن پسر (۱۶۱۵-۱۶۶۰ یا ۱۶۶۱)، يك استاد ریاضی بود که دو چاپ هندسه دکارت به زبان لاتین را ویرایش کرد، و به هوینگنس، هود، واسلوزه ریاضی

1. Colin Maclaurin

2. E.S. Bring

3. Loxodrome

4. Albert Girard

* تفاضل زوایای يك مثلث کروی و °۱۸۰-م.

آموخت. وی دربارهٔ پرسپکتیو مقالاتی نوشت و آثار ویت را ویرایش کرد. پدر وی، فرانس وان سخوتن پدر، و برادر ناتنی اش، پتروس وان سخوتن، نیز استاد ریاضی بودند. یوهان هود^۱ (۱۶۳۳-۱۷۰۴) شهردار آمستردام بود. مقالاتی دربارهٔ ماکزیوموم و مینیوموم و نظریهٔ معادلات نوشت. در موضوع اخیر، وی قاعدهٔ ماهرانه‌ای برای پیدا کردن حاصلضرب ریشه‌های يك چند جمله‌ای داد که معادل با روش امروزی آن است، که در آن ریشه‌های بزرگترین عامل مشترک چند جمله‌ای و مشتق آن را پیدا می‌کنیم.

رنه فرانسوا والتر دو اسلوزه^۲ (۱۶۲۲-۱۶۸۵)، که از روحانیون کلیسا بود، رسالات متعددی در ریاضیات نوشت. وی مارپیچها، نقاط عطف، و پیدا کردن واسطه‌های هندسی را مورد بحث قرارداد. خانوادهٔ منحنیهای $y^n = k(a-x)^p x^m$ ، که در آن توانها اعداد صحیح مثبتی هستند، به یاد او، مروریهای اسلوزه^۳ نامیده می‌شوند.

سخن را با نیکولاس مرکاتور^۴ (حدود ۱۶۲۰-۱۶۸۷) خاتمه می‌دهیم که در هولشتاین^۵، که در آن زمان بخشی از دانمارک بود، به دنیا آمد، اما قسمت اعظم زندگی خود را در انگلستان به سر برد. وی اصول اقلیدس را ویرایش کرد، دربارهٔ مثلثات، نجوم، محاسبهٔ لگاریتمها، و کیهان نگاری مطالبی نوشت. سری

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

که به طور مستقل توسط سن ونسان کشف شد، گاهی سری مرکاتور نامیده می‌شود. این سری به ازای $-1 < x \leq 1$ همگراست، و می‌توان آن را به طور رضایتبخشی برای محاسبهٔ لگاریتمها به کار گرفت (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱۰۱۰). نگاشت مشهوری از کره که به تصویر مرکاتور معروف است و در آن لوکسودرومها به صورت خطوط راست ظاهر می‌شوند، به نیکولاس مرکاتور منسوب نیست بلکه به گراودوس مرکاتور^۶ (۱۵۱۲-۱۵۹۴) منسوب است.

۱۰-۸ برخی ریاضیدانان انگلیسی قرن هفدهم

بریتانیای کبیر هم سهم خود را از ریاضیدانان کهنتر در قرن هفدهم داشت. قبلاً در جای دیگری ویلیام، ویسکونت برونکر^۷ (۱۶۲۰-۱۶۸۴) را ذکر کرده‌ایم. وی یکی از بنیانگذاران و اولین رئیس انجمن سلطنتی لندن بود، و با والیس، فرما، و دیگر ریاضیدانان برجسته ارتباط داشت. وی دربارهٔ محاسبهٔ طول قوس سهمی و سیکلوتید مطالبی نوشت، و در استفاده از سریهای نامتناهی برای بیان کمیتهایی که نمی‌توانست آنها را به طریق دیگر تعیین کند، تردیدی به خود راه نمی‌داد. مثلاً ثابت کرد که مساحت محصور بین هذلولی

1. Johann Hudde	2. René Francois Walter de Sluze
3. pearls of Sluze	4. Nicolaus Mercator
	5. Holstein
6. Gerhardus Mercator	7. William, Viscount Brouncker

متساوی القطرین $xy=1$ ، محور x ها، و دوخط $x=1$ و $x=2$ برابر است با

$$\frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(3)(4)} + \frac{1}{(5)(6)} + \dots$$

و یا با

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

برونکر اولین نویسنده انگلیسی بود که به تحقیق و استفاده از خواص کسور مسلسل پرداخت. در بخش ۴-۸، کسر مسلسل جالب او را در بسط $4/\pi$ داده ایم.

به ریاضیدان اسکا تلندی، جیمز گریگوری (۱۶۳۸-۱۶۷۵)، نیز درجای دیگر اشاره شده است (بخش ۴-۸). وی بترتیب در ۱۶۶۸ و ۱۶۷۴، به استادی ریاضیات در دانشگاه‌های سنت اندروز^۱ و ادینبورو^۲ رسید. وی به همان اندازه به فیزیک هم علاقه‌مند بود و کتابی در باب اپتیک منتشر کرد که در آن تلسکوپ انعکاسی که اکنون به نام او شهرت دارد، تشریح شده است. در ریاضیات، $\tan x$ ، $\arctan x$ ، و $\operatorname{arc sec} x$ را به صورت سریهای نامتناهی بسط داد (۱۶۶۷) و از اولین کسانی بود که بین سریهای همگرا و واگرا تمایز قابل شد. وی برهانی استادانه ولی غیر مقنع از امتناع تریبوع دایره اقلیدسی را ارائه داد. سری

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

که نقش عظیمی در محاسبه π دارد، به نام او مشهور است. وی در سنین جوانی، به فاصله کوتاهی پس از آنکه از خستگی بصری ناشی از ارسادهای نجومی اش نابینا شده بود؛ درگذشت. جالب است که برادرزاده او، دیوید گریگوری (۱۶۶۱-۱۷۰۸) هم از ۱۶۸۴ تا ۱۶۹۱ در ادینبورو به مقام استادی رسید، و بعد از آن به استادی ساویلی نجوم در آکسفورد منصوب شد. او نیز به اپتیک علاقه‌مند بود و درباره این موضوع و نیز هندسه و نظریه نیوتن آثاری دارد.

گفته شده است که اگر آتش سوزی بزرگ لندن^۳ در سال ۱۶۶۶ نمی بود، سر-کریستوفر رن (۱۶۳۲-۱۷۲۳) به جای اینکه به عنوان معمار مشهور شود به عنوان ریاضیدان شهرت می یافت. وی از ۱۶۶۱ تا ۱۶۷۳ استاد ساویلی نجوم در آکسفورد و برای مدتی رئیس انجمن سلطنتی بود. درباره قوانین برخورد اجسام، درباره موضوعات مرتبط با اپتیک، مقاومت مایعات، و مباحث دیگر در فیزیک ریاضی و مکانیک سماوی مقالاتی نوشت. کشف دو دستگاه مولد در روی هذلولوی یکپارچه در ۱۶۶۹ به او منسوب شده است. وی



گريستوفر هوك
(مجموعه ديويده اسميت)

اولين كسى بود (۱۶۵۸) كه نشان داد طول هر قوس از يك سيكلويد هشت برابر شعاع دايره مولدان است. ولى بعد از آتش سوزى بزرگ، رن چنان نقش برجسته اى در بازسازى كليساى جامع سنت پل و حدود ۵۰ كليسا يا بيشتر و ساختمانهاى عمومى به عهده گرفت كه شهرت او به عنوان معمار شهرتش را به عنوان رياضيدان تحت اشعاع قرار داد.

شايد لازم باشد كه از رابرت هوك^۱ (۱۶۳۵-۱۷۰۳) و آدموندهالى (۱۶۵۶-۱۷۴۲) هم ذكرى به ميان آيد، گرچه اين دو در موضوعات وابسته به رياضيات و نه خود آن به شهرت رسيدند. هوك تقريباً به مدت ۴۰ سال استاد هندسه در كاليج گرشام بود. هر دانشجوى فزيك مقدماتى با او به خاطر قانونى كه تنش و كشي را در يك نخ كشان كشيده شده به هم ربط مى دهد، آشناست. وى آونگ كانونى را اختراع كرد. براى بافتن قانون نيروى (كه بعداً توسط نيوتن ثابت شد كه قانون عكس مجذور است) كه تحت آن سيارات به دور خورشيد مى چرخند، دست به تلاش زد. او و هويگنس هر دو ساعتى را طراحى كردند كه توسط يك فنر تعادل تنظيم مى شد. هالى جانشين واليس به عنوان استاد ساويلى هندسه و بعد منجم در بار شد. وى به طور حدسى مقاله VIII گمشده مقاطع مخروطى آپولونيوس را بازسازى كرد و آثار متعددى از يونانيان باستان را ويرايش نمود، و برخى از آنها را از عربى ترجمه كرد در حالى كه حتى كلمه اى از اين زبان را نمى دانست. وى يك جدول مرگ و مير هم از نوعى كه امروزه در بازرگانى بيمه عمر جنبه اساسى دارد، گردآورى كرد. معهد كارخلاق عمده او، با كيفيتى عالى، در نجوم است. او در برخورد با ديگر فضلا همانقدر مهربان و سخنى بود كه هوك خسود و زودرنج بود. قسمت اعظم كار او در قرن هجدهم انجام شده است.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱۰ جبر هندسی

(الف) باقطعه خط واحد مفروض و قطعه‌خطی به‌طول x ، به کمک خط کش و پرگار قطعه خطیایی به‌طولهای x^2 ، x^3 ، x^4 ، ... بسازید.

(ب) باقطعه خط واحد مفروض و قطعه خطیایی به‌طولهای x ، y ، z ، قطعه خطیایی به‌طولهای xy و xyz بسازید.

(ج) قطعه خط واحدی مفروض است. نشان دهید که، اگر $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای‌هایی بر حسب x باشند که ضرایب آنها باقطعه خطیایی مفروضی نمایش داده‌شده‌اند، می‌توانیم متناظر با هر قطعه خطی که برای x انتخاب می‌شود، قطعه خطی به‌طول $y = f(x)/g(x)$ بسازیم.

(د) معادله درجه دوم $x^2 - gx + h = 0$ ، $g > 0$ ، $h > 0$ مفروض است. برقطعه خطی به‌طول g نیم‌دایره‌ای مانند C به‌همین قطر رسم کنید، و سپس خطی به‌موازات قطر C به‌فاصله $\sqrt{h}$ از آن رسم کنید تا C را در نقطه‌ای مانند P قطع کند. از P عمودی بر قطر C وارد کنید، این عمود قطر را به دو قسمت r و s تقسیم می‌کند. نشان دهید که r و s معرف ریشه‌های معادله درجه دوم مفروض هستند. معادله $x^2 - 7x + 12 = 0$ را با این روش حل کنید.

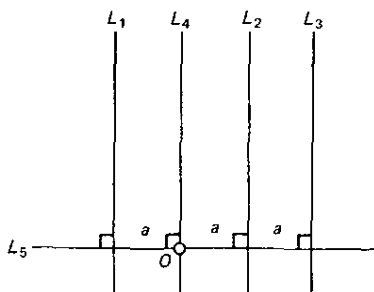
(ه) معادله درجه دوم $x^2 + gx - h = 0$ ، $g > 0$ ، $h > 0$ مفروض است. برقطعه خطی به‌طول g به‌همین قطر دایره‌ای مانند C رسم کنید، و سپس مماسی بر C رسم و بر آن از نقطه تماس طولی برابر $\sqrt{h}$ جدا کنید. از انتهای دیگر خط مماس، قاطع مار بر مرکز C را رسم کنید. با نشان دادن تمام قاطع با r و قطعه خارجی آن با s نشان دهید که r و s معرف ریشه‌های معادله درجه دوم مفروض هستند. معادله $x^2 + 4x - 21 = 0$ را با این روش حل کنید.

۲۰۱۰ «هندسه» دکارت

(الف) پنج خط $L_1, \dots, L_5$ که نحوه قرار گرفتن آنها نظیر شکل ۹۴ است، مفروض‌اند. فرض کنید p_i معرف فاصله نقطه‌ای مانند P از خط L_i باشد. با اختیار L_5 و L_4 به‌عنوان محورهای x و y ، معادله مکان هندسی نقطه‌ای مانند P را که حرکت آن به‌طوری است که

$$p_1 p_2 p_3 = a p_4 p_5,$$

پیدا کنید.



شکل ۹۴

(این مکان هندسی يك منحنی درجه سوم است که نیوتن آن را سهمی دکارتی نامید و گاهی يك منحنی سه دانه هم نامیده شده است و بکرات در هندسه دیده می شود.)

(ب) نشان دهید که با ابزارهای اقلیدسی می توان هر چند نقطه را که بخواهیم بر روی مکان هندسی (الف) بسازیم.

(ج) چهار خط دلخواه L_1, L_2, L_3, L_4 مفروض اند. فاصله نقطه ای مانند P از خط L_i را با p_i نمایش می دهیم. نشان دهید که مکان هندسی P به طوری که $p_1 p_2 = k p_3 p_4$ يك مقطع مخروطی است.

(د) روش دکارت را در رسم مماسی در يك نقطه کلی سهمی $y^2 = 2mx$ به کار برید، و نشان دهید که این کار به این حقیقت منجر می شود که تحت قائم (تصویر قطعه ای از قائم که بین منحنی و محور سهمی قرار دارد بر روی محور سهمی) دارای طول ثابتی است برابر با نصف لاتوس رکتوم [ضلع قائم] سهمی.

۳۰۹۵ قاعده علامات دکارت

(الف) اگر $c_1, c_2, \dots, c_m$ عدد حقیقی غیر صفر دلخواه باشند، و اگر دو جمله متوالی این دنباله دارای علامتهای مخالف باشند، گوئیم که این دو جمله نمایش يك واریاسیون است. به کمک این مفهوم می توانیم قاعده علامات دکارت را به صورت زیر بیان کنیم. برهان مربوط به آن را می توان در هر کتاب درسی که راجع به معادلات نوشته شده باشد، پیدا کرد: فرض کنید $f(x) = 0$ يك معادله چندجمله ای با ضرایب حقیقی باشد که بر حسب قوای نزولی x مرتب شده است. تعداد ریشه های مثبت و حقیقی معادله حداکثر برابر تعداد واریاسیونهای ضرایب $f(x)$ است و اختلاف بین این دو، عددی است زوج. تعداد ریشه های منفی حقیقی آن حداکثر برابر است با تعداد واریاسیونهای ضرایب $f(-x)$ و اختلاف بین این دو نیز عددی است زوج. يك ریشه حقیقی مکرر از مرتبه m ، به عنوان m ریشه به حساب می آید. ماهیت ریشه های معادلات زیر را به کمک قاعده علامات دکارت بررسی کنید:

$$x^9 + 3x^8 - 5x^7 + 4x + 6 = 0 \quad .1$$

$$۲x^۷ - ۳x^۴ - x^۳ - ۵ = ۰ \quad ۰۲$$

$$۳x^۴ + ۱۰x^۲ + ۵x - ۴ = ۰ \quad ۰۳$$

(ب) نشان دهید که اگر n زوج باشد، معادله $x^n - ۱ = ۰$ دقیقاً دارای دو ریشه حقیقی است، و اگر n فرد باشد فقط دارای یک ریشه حقیقی است.

(ج) نشان دهید که $x^۵ + x^۲ + ۱ = ۰$ دارای چهار ریشه موهومی است.

(د) ثابت کنید که اگر p و q حقیقی باشند، و $q \neq ۰$ ، معادله $x^۳ + px + q = ۰$ وقتی p مثبت است دارای دو ریشه موهومی است.

(ه) ثابت کنید که اگر ریشه‌های یک معادله چندجمله‌ای همه مثبت باشند، علامتهای ضرایب متناوباً مثبت و منفی‌اند.

۴.۱۰ مسائلی از دکارت

(الف) نمودار فولیوم دکارت را رسم کنید،

$$x^۳ + y^۳ = ۳axy.$$

خط $x + y + a = ۰$ یک مجانب آن است.

(ب) معادله قطبی مربوط به فولیوم دکارت را پیدا کنید.

(ج) قرار دهید $y = tx$ و یک نمایش پارامتری از فولیوم دکارت را بر حسب پارامتر t پیدا کنید. دامنه تغییرات t را که منجر به حلقه، بازوی پایینی، و بازوی بالایی آن می‌شود، پیدا کنید.

(د) معادله دکارتی فولیوم دکارت را وقتی که گره آن به عنوان مبدأ و محور تقارن منحنی به عنوان محور x ها اختیار شود، پیدا کنید.

(ه) راه حل دکارت از یک معادله درجه چهارم ملخص روش ضرایب نامعین را به کار می‌برد. به عنوان یک مثال، معادله درجه چهارم

$$x^۴ - ۲x^۲ + ۸x - ۳ = ۰$$

را در نظر بگیرید. طرف چپ معادله را برابر با حاصلضرب دو عامل درجه دوم به صورت‌های $x^۲ + kx + h$ و $x^۲ - kx + m$ قرار دهید. از متحد قراردادن ضرایب متناظر در دو طرف معادله، سه رابطه که k ، h ، m را به هم مربوط می‌کنند، به دست آورید. h و m را از سه رابطه حذف کنید تا معادله درجه ششمی بر حسب k که می‌تواند به عنوان یک معادله درجه سوم بر حسب $k^۲$ تلقی شود، به دست آید. بدین ترتیب، حل معادله درجه چهارم اصلی به حل یک معادله درجه سوم وابسته‌ای تحویل می‌شود. با دانستن اینکه یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم بر حسب $k^۲$ ، $k^۲ = ۴$ است، چهار ریشه معادله درجه چهارم اصلی را به دست آورید.

۵.۱۰ قضایای فرما

در حدود سال ۱۷۰۶، اوایلر مسئله تعیین عددها اعداد صحیح مثبت کوچکتر از عدد صحیح مثبت مفروض n و اول نسبت به n را مطرح و حل کرد. این عدد را امروزه معمولاً با $\phi(n)$ نشان می‌دهند، و تابع ϕ اوایلر n نامیده می‌شود (گاهی نیز نشانگر n نامیده می‌شود). مثلاً، اگر $n=42$ ، معلوم می‌شود که ۱۲ عدد صحیح ۱، ۵، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۵، ۲۹، ۳۱، ۳۷، و ۴۱ تنها اعداد صحیح مثبت کوچکتر از ۴۲ و اول نسبت به آن هستند. بنابراین $\phi(42)=12$.

(الف) $\phi(n)$ را به ازای $n=2, 3, \dots, 12$ پیدا کنید. جدولی که مقادیر $\phi(n)$ را به ازای همه مقادیر $n \geq 10000$ می‌دهد توسط ج. و. ل. گلیشر (۱۸۴۸-۱۹۲۸) محاسبه شده است.

(ب) اگر p اول باشد، نشان دهید که $\phi(p)=p-1$ و $\phi(p^a)=p^a(1-1/p)$.
 (ج) می‌توان نشان داد که اگر $n=ab$ ، که در آن a و b متباین هستند، آنگاه $\phi(n)=\phi(a)\phi(b)$. با استفاده از این حقیقت $\phi(42)$ را از نتایج قسمت (الف) محاسبه کنید، و همچنین نشان دهید که اگر $n=p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ ، که در آن $p_1, p_2, \dots, p_r$ اعداد اول اند، آنگاه

$$\phi(n)=n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\dots(1-1/p_r).$$

از این فرمول برای محاسبه $\phi(360)$ استفاده کنید.

(د) اوایلر نشان داد که اگر a عدد صحیح مثبت دلخواهی اول نسبت به n باشد، آنگاه $a^{\phi(n)}-1$ بر n بخشپذیر است. نشان دهید که قضیه کوچک فرما حالت خاصی از این حکم است.

(ه) نشان دهید که برای اثبات آخرین «قضیه» فرما کافی است که تنها توانهای اول $p > 2$ در نظر گرفته شوند.

(و) با پذیرش آخرین «قضیه» فرما نشان دهید که منحنی $x^n + y^n = 1$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی بزرگتر از ۲ است، شامل هیچ نقطه‌ای با مختصات گویا بجز نقاطی که در آنها منحنی از محورهای مختصات عبور می‌کند، نیست.

(ز) با قبول مقوله (۶) بخش ۱۰-۳ (که در یک مثلث قائم الزامیه با اعداد صحیح، مساحت نمی‌تواند یک مجذور کامل باشد)، نشان دهید که معادله $x^4 - y^4 = z^4$ دارای جوابهای صحیح مثبتی مانند x و y و z نیست، و لذا آخرین قضیه فرما را در حالت $n=4$ ثابت کنید.

۶.۱۰ مسئله امتیازها

نحوه تقسیم جایزه در یک بازی شانسی بین دو بازیکن همقدرت A و B را پیدا کنید به شرطی که

(الف) A ، ۱ امتیاز دیگری خواهد تا برنده شود و B ، ۴ امتیاز دیگر می‌خواهد تا برنده شود. از روش فرما استفاده کنید.

(ب) A ، ۳ امتیاز دیگری خواهد تا برنده شود و B ، ۴ امتیاز دیگری خواهد تا برنده شود. از روش پاسکال استفاده کنید.

۷۰۱۰ مسائلی از هویگنس

(الف) بازیکنی در صورت آوردن يك شش با يك تاس برنده ۳۰۰ دلار خواهد شد. امید ریاضی برد او چقدر است؟

(ب) فرض کنید که بازیکنی در صورت آوردن شش با يك تاس، برنده ۳۰۰ دلار می‌شود ولی در صورت آوردن يك پنج، برنده ۶۰۰ دلار می‌شود. امید ریاضی برد او چیست؟ در زیر چند مسئله احتمال که به وسیله هویگنس حل شده است، آورده می‌شود:

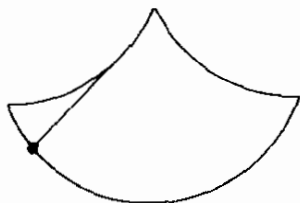
۱. A و B يك درمیان با يك جفت تاس معمولی تاس می‌ریزند. A در صورتی که قبل از اینکه B يك ۷ بیاورد ۶ بیاورد برنده می‌شود، و B در صورتی که قبل از آنکه A ۶ بیاورد ۷ بیاورد، برنده می‌شود. اگر A بازی را شروع کند، آنگاه شانس برنده شدن او به شانس برنده شدن B مثل ۳۰ به ۳۱ است.

۲. A و B هریک ۱۲ مهره برمی‌دارند و با ۳ تاس به صورت زیر بازی می‌کنند: اگر ۱۱ بیاید، A يك مهره به B می‌دهد؛ اگر ۱۴ بیاید، B يك مهره به A می‌دهد؛ و کسی که اولین بار همه مهره‌ها را به دست می‌آورد، برنده می‌شود. در این صورت شانس A به B مثل عدد ۲۴۴۱۴۰۶۲۵ است به عدد ۲۸۲۴۲۹۵۳۶۴۸۱.

۳. A و B با دو تاس بازی می‌کنند، اگر ۷ بیاید، A برنده می‌شود؛ اگر ۱۰ بیاید، B برنده می‌شود؛ اگر هر عدد دیگری ظاهر شود بازی مساوی است. در این صورت شانس برنده شدن A به B مثل ۱۳ به ۱۱ است.

(ج) با استفاده از خاصیت همزمانی سیکلوئید، و این حقیقت که گسترده يك سیکلوئید، سیکلوئید دیگری با همان اندازه است، نشان دهید که آونگی که مقید به نوسان بین دو قوس متوالی يك سیکلوئید وارون باشد (نگاه کنید به شکل ۹۵) باید با دامنه ثابتی نوسان نماید.

(د) توبی به طور یکنواخت در انتهای يك نخ دایره وار، در حال تاب خوردن است و در هر دقیقه يك گردش کامل انجام می‌دهد. اگر طول نخ دو برابر و دوره گردش نصف



شکل ۹۵

شود، نیروی گریز از مرکز در مقایسه با وضعیت اول چه وضعی پیدا می‌کند؟

۸.۱۰ منحنیهای مسطح از درجات بالا

(الف) در یک دستگاه مختصات دکارتی قائم نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ را کانونهای منحنی کاسینی و k^2 را مقدار ثابت حاصلضرب فواصل يك نقطه آن از دو کانون بگیرید و معادله دکارتی منحنی را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که معادله قطبی مربوط به منحنی فوق چنین است:

$$r^4 - 2r^2 a^2 \cos 2\theta + a^4 = k^4.$$

توجه کنید که اگر $k = a$ ، منحنی به صورت لمنیسکات برنولی با معادله زیر به دست می‌آید:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

(ج) نشان دهید که لمنیسکات برنولی، سیسویید (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۷.۴) دایره ای به شعاع $a/2$ و خود آن است، برای قطبی مانند O به فاصله $a\sqrt{2}/2$ واحد از مرکز آن.

(د) هذلولی متساوی الساقین $xy = k^2$ را به دقت رسم کنید و چند عضو از خانواده دوایری را که مراکزشان بر این هذلولی واقع و از مبدأ می‌گذرند، رسم کنید. پوش این خانواده دوایر، لمنیسکات برنولی است.

(ه) با استفاده از این حقیقت که قائم در يك نقطه بر لمنیسکات برنولی در (ب) با شعاع حامل این نقطه زاویه ای برابر 2θ می‌سازد، نشان دهید که چگونه می‌توان مماسهای بر این لمنیسکات را رسم کرد.

(و) نشان دهید که منحنیهای زیر حالات خاص مارپیچ سینوسی $r^n = a \cos n\theta$ به ازای مقادیر گویای مختلف n هستند.

n	منحنی
۲	هذلولی متساوی القطرین
۱	خط مستقیم
۱/۲	سه می
۱/۳	منحنی درجه سوم چیرنهاوزن
۱/۲	کاردیوئید
۱	دایره
۲	لمنیسکات برنولی

(ز) اپی‌سیکلوئید مسیر نقطه ای است از يك دایره که روی دایره مبنای ثابتی و در خارج آن می‌غلتد. منحنی محرق دایره ای برای يك منبع نوری در بینهایت، يك اپی‌سیکلوئید

با دو نقطه بازگشت است که دایرهٔ منبای آن با دایرهٔ مفروض هم‌مرکز و شعاع آن نصف شعاع دایرهٔ مفروض است. اپی‌سیکلوئیدی با دو نقطهٔ بازگشت يك نفروئید [منحنی کلیه شکل] نامیده می‌شود. منحنی‌محرق يك دایره برای يك منبع نوری واقع بر محیط يك دایره اپی‌سیکلوئیدی با يك نقطهٔ بازگشت است که دایرهٔ منبای آن با دایرهٔ مفروض هم‌مرکز و شعاع آن يك سوم شعاع دایرهٔ مفروض است. اپی‌سیکلوئیدی با يك نقطهٔ بازگشت يك كاردیوئید است. یا كوب برنولی، در سال ۱۶۹۲، نشان داد که منحنی‌محرق يك كاردیوئید، وقتی که منبع نوری در نقطهٔ بازگشت كاردیوئید باشد، يك نفروئید است. منحنی‌محرق يك دایره را می‌توان به صورت منحنیهای روشنی که بر سطح قهوه دريك فئجان تشکیل می‌شود، یا بروی میز در داخل حلقهٔ يك دستمال سفره مدور مشاهده کرد. به مشاهدهٔ چند منحنی‌محرق يك دایره، با استفاده از يك فئجان مایع و يك منبع نوری متحرک، پیردازید.

۹.۱۰ چند مسئلهٔ سرگرم‌کننده از باشه

در زیر چند مسئلهٔ سرگرم‌کننده را می‌آوریم که در کتاب مسائل مطبوع و لذتبخش باشه یافت می‌شود. اینها، و مسائل دیگری از باشه را می‌توان در مقالات و تفریحات ریاضی^۱ بال^۲-کاکستر^۳ نیز پیدا کرد.

(الف) (۱) از شخصی بخواهید که پنهانی عددی را در نظر بگیرد، و سپس از او بخواهید که آن را سه برابر کند. (۲) سؤال کنید که حاصلضرب زوج یا فرد است. در صورت زوج بودن، از او بخواهید که نصف آن را اختیار کند. در صورت فرد بودن آن از او بخواهید که به آن ۱ را اضافه و نصف آن را اختیار کند. (۳) به او بگویید تا نتیجهٔ (۲) را در ۳ ضرب کند، و به شما بگوید که قسمت صحیح این عدد بر ۹، که مثلاً آن را با n نشان می‌دهید، چیست. (۴) در این صورت عدد اصلی انتخاب شده $2n$ یا $2n+1$ است بسته به اینکه نتیجهٔ مرحلهٔ (۱) زوج یا فرد باشد، این مطلب را ثابت کنید.

(ب) از شخصی بخواهید که پنهانی عددی کوچکتر از ۶۰ در نظر بگیرد، و باقیمانده‌های تقسیم آن بر ۳، ۴، و ۵، را مثلاً به صورت اعداد a ، b ، و c اعلام نماید. در این صورت عدد انتخاب شده باقیماندهٔ تقسیم $36c + 45b + 50a$ بر ۶۰ خواهد بود. این مطلب را ثابت کنید.

(ج) به A بگویید که پنهانی هر تعدادی، بیشتر از ۵، از بین تعدادی مهره را انتخاب کند و به B بگوید سه برابر آن را انتخاب کند. از A بخواهید که ۵ مهره به B بدهد، و سپس از B بخواهید که ۳ برابر مهره‌هایی را که برای A باقی مانده است به A منتقل کند. اکنون می‌توانید به B بگویید که او ۳۰ مهره دارد. توضیح دهید که چرا چنین است و مطلب را به حالتی تعمیم دهید که در آن به جای ۳ و ۵، p و q گذاشته شوند.

(د) A پنهانی یکی از دو عدد را انتخاب می‌کند، که یکی از آنها فرد و دیگری

زوج است، و عدد دیگری به B داده می‌شود. از A بخواهید که عدد خودش را دو برابر کند، و از B بخواهید که عدد خود را سه برابر کند. مجموع دو حاصلضرب را پیرسید. اگر مجموع زوج باشد، در این صورت A عدد فرد را انتخاب کرده است؛ در غیر این صورت A عدد زوج را انتخاب کرده است. این را توضیح دهید.

(ه) از کسی بخواهید که ساعتی، مثلاً m ، را در نظر بگیرد، و سپس انگشت خود را بر روی عددی که نشان‌دهنده ساعت دیگری، مثلاً n ، است قرار دهد. اگر، با شروع از عددی که انگشت بر آن قرار دارد، وی به‌طور متوالی ضربات آهسته‌ای بر روی شماره‌های روی ساعت، در جهت عکس حرکت عقربه‌های آن بزند، و در همان حال ضربات را به صورت $m+1$ ، m ، و غیره بشمارد، تا به شماره $12+n$ برسد، در این صورت آخرین عددی که بر آن ضربه نواخته شده است، ساعتی خواهد بود که در ابتدا او آن را در نظر گرفته است. این را ثابت کنید.

۱۰.۱۰ مقداری هندسه

(الف) با روش روبه‌روال، نشان دهید که مماس وقائم بر نقطه‌ای از یک مقطع مخروطی مرکزی زاویه‌های بین شعاع‌های حامل واصل به این نقطه را نصف می‌کنند.

(ب) بنابر تعریف یک درجه کروی مساحتی است از کره معادل با $(1/720)^\circ$ سطح کل آن. نشان دهید که مساحت یک هلال به زاویه n° برابر با $2n$ درجه کروی است.

(ج) نشان دهید که مساحت یک مثلث کروی، بر حسب درجه کروی، برابر با زیادتی کروی آن است.

(د) نشان دهید که مساحت A از یک مثلث کروی به زیادتی کروی E با

$$A = \frac{\pi r^2 E}{180^\circ}$$

داده می‌شود که در آن r شعاع کره است.

(ه) مساحت یک مثلث سه قائمه بر روی کره‌ای به قطر ۲۸ اینچ را پیدا کنید.

(و) نشان دهید (به کمک حساب دیفرانسیل) که مساحت محصور بین هذلولی $xy=6$ ، خط $x=2$ ، و محور x ها نامتناهی است. از طرف دیگر، نشان دهید که حجم حاصل از دوران این سطح حول محور x ها متناهی است.

این مسئله مایه پادادوکس رنگد زبر می‌شود. چون مساحت فوق نامتناهی است، مقداری نامتناهی رنگ برای رنگامیزی سطح لازم است. با این حال، چون حجم فوق متناهی است، تنها مقداری متناهی رنگ برای پر کردن حجم لازم است. اما این حجم مورد نظر را در بر می‌گیرد. این پارادوکس را توضیح دهید.

سری مرکاتور

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

به ازای $-1 < x \leq 1$ همگراست. با گذاشتن $-x$ به جای x نتیجه می شود که سری

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

باید به ازای $-1 \leq x < 1$ همگرا باشد. چون يك سری که جملات آن تفاضل جملات متناظر دوسری مفروض باشد مطمئناً به ازای همه مقادیر x که برای آن هر دوسری مفروض همگرا هستند، همگراست، نتیجه می شود که به ازای $-1 < x < 1$ ،

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right). \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $x = 1/(2N+1)$ ، مشاهده می کنیم که به ازای هر N مثبت، $-1 < x < 1$ ، و $(1+x)/(1-x) = (N+1)/N$ با گذاشتن آن در آخرین معادله

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots\right]$$

را به دست می آوریم، این سری، به ازای همه مقادیر مثبت N بسرعت همگراست.

(الف) با قراردادن $N=1$ ، $\ln 2$ را تا چهار رقم اعشار حساب کنید.

(ب) $\ln 3$ را تا چهار رقم اعشار حساب کنید.

(ج) $\ln 4$ را تا چهار رقم اعشار حساب کنید.

عنوان مقاله

۱/۱۰ فن تبدیل کردن-حل کردن-برگرداندن.

۲/۱۰ هندسه تحلیلی به عنوان موردی از حداعلای فن تبدیل کردن-حل کردن-برگرداندن.

۳/۱۰ هندسه تحلیلی به عنوان روشی برای کشف.

۴/۱۰ چه کسی هندسه تحلیلی را اختراع کرد.

۵/۱۰ بزرگترین ریاضیدان فرانسوی قرن هفدهم.

۶/۱۰ پنج ریاضیدان مهم فرانسوی قرن هفدهم.

- ۷/۱۰ روش نزول نامتناهی فرما.
 ۸/۱۰ منشأ نظریه ریاضی احتمال.
 ۹/۱۰ امر خلاف قاعده تولید حجم دوار متناهی از سطحی نامتناهی.
 ۱۰/۱۰ روش روبروال-توریچلی در رسم مماسها.
 ۱۱/۱۰ آونگک ثانیه شمار کامل هویگنس.
 ۱۲/۱۰ مرکز همزاویه ای مثلث.
 ۱۳/۱۰ قضایای سوا و کوماندینو.
 ۱۴/۱۰ اولین دومنحنی مسطحه از درجات بالا که کاربرد عملی یافتند.
 ۱۵/۱۰ خانواده برجسته کاسینی.

کتابنامه

- ADAMS, O. S., *A Study of Map Projections in General*. Washington: Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 60, Department of Commerce, 1919.
 ———, and C. H. DEETZ, *Elements of Map Projection, With Applications to Map and Chart Construction*. Washington: Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 68, Department of Commerce, 1938.
 ARCHIBALD, R. C., *Mathematical Table Makers*. New York: Scripta Mathematica, Yeshiva University, 1948.
 AUBREY, JOHN, *Brief Lives*. New York: Oxford University Press, 1898.
 BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.
 BELL, A. E., *Christian [sic] Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*. London: Edward Arnold, 1948.
 BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
 ———, *The Last Problem*. New York: Simon and Schuster, 1961.
 BOYER, C. B., *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, Yeshiva University, 1956.
 ———, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.
 CONKWRIGHT, N. B., *Introduction to the Theory of Equations*. Boston: Ginn, 1941.
 COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
 ———, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Oxford University Press, 1947.
 ———, *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
 COURANT, RICHARD, and HERBERT ROBBINS, *What is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.
 DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner, 1962.
 DESCARTES, RENÉ, *The Geometry of René Descartes*. Translated by D. E. Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover, 1954.
 HACKER, S. G., *Arithmetical View Points*. Pullman, Wash.: Mimeographed at Washington State College, 1948.
 HALDANE, ELIZABETH S., *Descartes: His Life and Times*. New York: E. P. Dutton, 1905.
 JOHNSON, R. A., *Modern Geometry*. Boston: Houghton Mifflin, 1929. Reprinted by Dover.
 KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
 MAHONEY, M. S., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1972.
 MERRIMAN, MANSFIELD, *The Solution of Equations*. 4th ed. New York: John Wiley, 1908.
 MILLER, G. A., *Historical Introduction to Mathematical Literature*. New York: Macmillan, 1916.
 MUIR, IANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd,

Mead, 1961.

ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.

SMITH, D. E., *History of Modern Mathematics*. 4th ed. New York: John Wiley, 1906.

———, *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.

SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York: Oxford University Press, 1925.

SUMMERSON, JOHN, *Sir Christopher Wren*. No. 9 in a series of *Brief Lives*. New York: Macmillan 1953.

TODHUNTER, ISAAC, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea, 1949.

TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.

WILLIAMSON, BENJAMIN, *An Elementary Treatise on the Differential Calculus*. London: Longmans, Green & Co., 1899.

WINGER, R. M., *An Introduction to Projective Geometry*. Boston: D. C. Heath, 1923.

YATES, R. C., *A Handbook on Curves and Their Properties*. Ann Arbor, Mich: J. W. Edwards, 1947.

حسابان و مفاهیم وابسته به آن

۱-۱۱ مقدمه

دیده‌ایم که زمینه‌های جدید و دامنه‌دار زیادی در تحقیقات ریاضی در قرن هفدهم گشوده شدند، که این دوره را به صورت دورهٔ پرباری در بسط ریاضیات در آوردند. بی‌چون و چرا مهمترین دستاورد ریاضی این دوره ابداع حسابان، در اواخر قرن، توسط آیزک نیوتن و گوته‌فرید ویلهلم لایبنیتز بود. با این ابداع، ریاضیات خلاق به طور کلی به درجهٔ پیشرفته‌ای می‌رسد و تاریخ ریاضیات ابتدایی اساساً با آن پایان می‌یابد. فصل حاضر به شرح کوتاهی از مبادی و بسط مفاهیم مهم حسابان اختصاص می‌یابد، مفاهیمی که چنان کاربرد وسیعی دارند و چنان تأثیری بر دنیای جدید داشته‌اند که شاید گفتنش درست باشد که بدون آگاهی از آنها انسان بزحمت می‌تواند ادعای داشتن تحصیلات درست و حسابی را داشته باشد.

جالب توجه است که، برخلاف ترتیب متداول در ارائهٔ مطالب در دروس مقدماتی دانشگاهی فعلی، که با مشتق‌گیری شروع و بعداً به انتگرال‌گیری می‌پردازیم، مفاهیم حساب انتگرال از لحاظ تاریخی قبل از مفاهیم حساب دیفرانسیل به وجود آمده‌اند. مفهوم انتگرال‌گیری ابتدا در نقشی که در یک فرایند مجموعیابی در رابطه با یافتن بعضی مساحات، احجام، و طول قوسها داشت، پدیدار شد. بعدها، مشتق‌گیری در رابطه با مسائل مربوط به تماس بر منحنیها و سؤالاتی در بارهٔ ماکزیموم و مینیموم توابع به وجود آمد. و حتی خیلی بعد از آن بود که ارتباط انتگرال‌گیری با مشتق‌گیری به عنوان اعمال معکوس یکدیگر مورد توجه قرار گرفت.

گرچه قسمت عمده گفتار ما به قرن هفدهم مربوط می‌شود، لازم است جهت آغاز مطلب به یونان باستان و قرن پنجم پیش از میلاد باز گردیم.

۱-۲ پارادوکسهای زنون

آیا باید پذیرفت که کمیتی بینهایت بار تقسیم پذیر است یا اینکه این کمیت از عده بسیار زیادی اجزای اتمی تقسیم ناپذیر تشکیل شده است؟ فرض اول به نظر بسیاری منطقی تر جلوه می‌کند، اما مفید بودن فرض دوم در پیدایش کشفیات بسیاری موجب می‌شود که نامعقول بودن ظاهری آن تا حدی از بین برود. شواهدی درست است که در یونان باستان، مکاتب استدلال ریاضی بر مبنای هر یک از دو فرض بالا به وجود آمده است.

برخی از اشکالهای منطقی که با هر یک از دو فرض پیش می‌آیند به طور شگفت انگیزی در قرن پنجم ق. م. به کمک چهار پارادوکس ابداعی فیلسوف الیایی، زنون (حدود ۴۵۰ ق. م.)، آشکار شدند. این پارادوکسها، که تأثیر شگرفی در ریاضیات داشتند، بیان می‌کنند که خواه فرض کنیم کمیتی بی نهایت بار تقسیم پذیر است یا از عده بسیار زیادی اجزای اتمی ساخته شده است، حرکت غیر ممکن است. ما ماهیت این پارادوکسها را با دو پارادوکس زیر روشن می‌کنیم.

دیکتوموسی: اگر پاره خط مستقیمی بی نهایت بار تقسیم پذیر باشد، آنگاه حرکت غیر ممکن است، زیرا برای پیمودن طول پاره خط ابتدا لازم است که به نقطه وسط پاره خط برسیم، و برای این کار لازم است که به نقطه واقع بر یک چهارم پاره خط برسیم، و برای این کار باید ابتدا به نقطه یک هشتم برسیم، و همینطور تا غیر انتهاییه. نتیجه می‌شود که حرکت را حتی نمی‌توان شروع کرد.

تیر: اگر زمان متشکل از لحظه‌های ریز تقسیم ناپذیر باشد، آنگاه یک تیر در حال حرکت همیشه در یک جاست، زیرا در هر لحظه تیر در یک وضعیت ثابت است. چون این مطلب در مورد هر لحظه درست است نتیجه می‌شود که تیر اصلاً حرکت نمی‌کند.

توجیه‌های زیادی از پارادوکسهای زنون به عمل آمده است و نشان دادن این امر مشکل نیست که این پارادوکسها با این باورهای شهودی که مجموع تعداد بینهایتی از کمیت‌های مثبت، کمیتی بسیار بزرگ است، حتی اگر هر یک از کمیتها فوق العاده کوچک باشد

$(\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i = \infty)$ ، و این که مجموع عده‌ای از کمیت‌های متناهی یا نامتناهی با بعد صفر، صفر است

$(n \times 0 = 0 \text{ و } \infty \times 0 = 0)$ ، در تضاد قرار دارند. انگیزه واقعی این پارادوکسها هرچه که باشد، اثر آنها حذف بینهایت کوچکیها از هندسه برهانی یونانی بود.

۱-۳ روش افنای انود و کوس

اولین مسائلی که در تاریخ حسابان پیش می‌آیند، به محاسبه مساحتها، احجام، و طول قوسها

مربوط اند، و در مطالعه آنها به شواهدی از دو فرض قابل قسمت بودن کمیتها که در بالا به آن اشاره کردیم، برمیخوریم.

یکی از قدیمی ترین کارهای مهم در زمینه مسئله تریبیس دایره کار آنتیفون سوفسطایی^۱ (حدود ۴۳۵ ق. م.) است، که یکی از معاصرین سقراط بود. گفته اند که آنتیفون این فکر را قوت بخشیده است که با متوالیاً دوبرابر کردن عدد اضلاع یک چند ضلعی محاط در یک دایره، اختلاف مساحت بین دایره و چند ضلعی در نهایت از بین خواهد رفت. چون می توان مربعی از نظر مساحت برابر با چند ضلعی مفروضی ساخت، در این صورت ساختن مربعی برابر با یک دایره میسر خواهد بود. این استدلال به دلیل اینکه اصل تقسیم پذیر بودن نامحدود کمیتها را نقض می کرد، و اینکه به موجب اصل فوق، در فرایند آنتیفون همه مساحت دایره به کار نمی رود، بلافاصله مورد انتقاد قرار گرفت. با این حال، اظهار جسورانه آنتیفون نقطه روش افنای مشهور یونانیان را در برداشت.

روش افنا معمولاً به ائودوکسوس (حدود ۳۷۵ ق. م.) منسوب می شود و شاید بتوان آن را پاسخ مکتب افلاطونی به پارادوکسهای زنون محسوب کرد. در این روش تقسیم پذیر بودن نامتناهی کمیتها پذیرفته می شود. پایه آن گزاره زیر است: اگر از کمیت دلخواهی کمیتی ناکمتر از نصف آن کسر شود، از باقیمانده قسمت دیگری که از نصف آن کمترین است برداشته شود و این عمل به همین قیاس ادامه یابد، در نهایت کمیتی باقی می ماند که از هر کمیت مفروضی از همان جنس کمتر خواهد بود. می خواهیم روش افنا را برای اثبات اینکه اگر A_1 و A_2 مساحت دو دایره به قطرهای d_1 و d_2 باشند، آنگاه

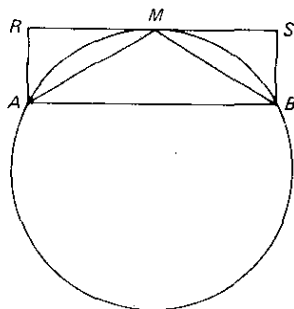
$$A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2,$$

به کار ببریم.

ابتدا، به کمک گزاره اساسی فوق، نشان می دهیم که تفاضل بین مساحت یک دایره و یک چند ضلعی منتظم محاطی را می توان تا هر اندازه مورد نظر کوچک کرد. فرض کنید AB در شکل ۹۶، ضلعی از یک چند ضلعی منتظم محاطی باشد، و فرض کنید M نقطه وسط قوس AB باشد. چون مساحت مثلث AMB نصف مساحت مستطیل $ARSB$ و بنا بر این بزرگتر از نصف مساحت قطعه دایره AMB است، نتیجه می شود که با دوبرابر کردن تعداد اضلاع چند ضلعی منتظم به مساحت چند ضلعی مقداری بیش از نصف تفاضل مساحتی دایره و چند ضلعی افزوده می شود. در نتیجه، با دوبرابر کردن تعداد اضلاع به قدر کافی، می توانیم تفاضل مساحت بین دایره و چند ضلعی را از هر مساحت معین، هر اندازه کوچک، کوچکتر نماییم.

حال به قضیه خود بازمی گردیم، و فرض می کنیم که به جای تساوی داشته باشیم

$$A_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2.$$



شکل ۹۶

در این صورت می‌توانیم در دایرهٔ اول چندضلعی منتظمی محاط کنیم که تفاوت مساحت آن P_1 با A_1 به قدری کوچک باشد که

$$P_1 : A_1 > d_1^2 : d_2^2.$$

فرض کنید P_2 چندضلعی منتظمی متشابه با P_1 ، ولی محاط در دایرهٔ دوم باشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ معروف در بارهٔ چند ضلعیهای متشابه،

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2.$$

نتیجه می‌شود که $P_1 : P_2 > P_1 : A_1$ یا $P_2 > A_1$ ، که غیر ممکن است، زیرا مساحت يك چندضلعی منتظم نمی‌تواند از مساحت دایرهٔ محیطی آن بیشتر باشد. به‌طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم که

$$A_1 : A_2 < d_1^2 : d_2^2$$

غیر ممکن است. در نتیجه، به‌موجب این مراحل برهان خلف مضاعف، قضیه ثابت می‌شود. بنابراین، اگر A مساحت و d قطر يك دایره باشد، داریم $A = kd^2$ ، که در آن k (که در واقع $\pi/4$ است) مقداری است ثابت که برای کلیهٔ دایره‌ها یکی است.

ارشمیدس مدعی بود که دموکریتوس^۱ (حدود ۴۱۰ ق.م.) گفته است حجم هرمی که قاعدهٔ آن چندضلعی دلخواهی باشد يك سوم حجم منشوری با همان قاعده و ارتفاع است. در بارهٔ دموکریتوس اطلاع کمی در دست است، اما معلوم نیست که او توانسته باشد برهان دقیقی برای این قضیه ارائه نماید. چون هر منشور را می‌توان به‌صورت مجموع منشورهایی که قاعدهٔ همهٔ آنها مثلث باشد، قطعه‌قطعه کرد، و منشوری از این نوع را می‌توان به‌توبهٔ خود به سه هرم مثلث القاعده تقطیع کرد که دو به دو قاعده‌های معادل و ارتفاعهای یکسان داشته باشند، نتیجه می‌شود که گره مسئلهٔ دموکریتوس، نشان دادن این امر است که دو هرم

با ارتفاعهای مساوی و قاعده‌های معادل حجمهای برابر دارند. برهانی برای آن را بعداً اتودوکسوس، با استفاده از روش افنا، داده است.

در این صورت، دموکریتوس چگونه می‌توانسته به این نتیجهٔ اخیر دست یافته باشد؟ پلوتارک کلیدی در اختیار ما می‌گذارد. وی مواجه شدن دموکریتوس را با يك مسئلهٔ بفرنج، وقتی که يك مخروط را متشکل از بینهایت مقطع عرضی مستوی به موازات قاعده تلقی کرده، نقل می‌کند. اگر دو مقطع «مجاور» به يك اندازه باشند، جسم يك استوانه خواهد بود نه يك مخروط. از طرف دیگر، اگر دو مقطع «مجاور» مساحت‌های مختلف داشته باشند، سطح جسم مفروض به يك سلسله از پله‌های كوچك تقسیم خواهد شد، که مطمئناً چنین چیزی در بین نیست. در اینجا فرضی راجع به تقسیم پذیر بودن کمیتها داریم که نسبت به دوفرضی که قبلاً بررسی شده اند تا حدی جنبهٔ بینابینی دارد، زیرا در اینجا فرض می‌کنیم که حجم مخروط بینهایت بار تقسیم پذیر، یعنی قابل تقسیم به بینهایت مقطع اتمی مستوی است، اما این فرض را هم می‌کنیم که این مقاطع قابل شمارش اند بدین معنی که اگر یکی از آنها را در نظر بگیریم مقطعی دیگر در کنار آن قرار دارد. دموکریتوس احتمالاً چنین استدلال کرده است که اگر دو هرم با قاعده‌های معادل و ارتفاعهای برابر را صفحات موازی با قاعده قطع کنند و این صفحات ارتفاعها را به يك نسبت قطع نمایند، در این صورت مقاطع متناظر تشکیل شده معادل هستند. بنابراین هرما شامل تعدادی نامتناهی ولی متساوی از مقاطع مستوی معادل هستند، و بنابراین باید حجمهای برابر داشته باشند. این می‌تواند موردی از دوش تقسیم ناپذیرهای کاوالیری باشد، که در زیر در بخش ۱۱-۶ بررسی می‌شود.

اما از مردم باستان ارشمیدس بود که زیباترین کاربردهای روش افنا را عملی کرد، و همو بود که به انتگرالگیری واقعی از همه نزدیکتر شد. به عنوان یکی از قدیمی ترین مثالها، تریبوع وی از يك قطعهٔ سهموی را در نظر بگیرید. فرض کنید E, D, C نقاطی واقع بر قطعهٔ سهموی باشند (نگاه کنید به شکل ۹۷) که از رسم NE, MD, LC به موازات محور سهمی از نقاط N, M, L ، و سطوح AB, CA, CB ، به دست می‌آیند. با استفاده از خواص هندسی سهمی، ارشمیدس نشان می‌دهد که

$$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}.$$

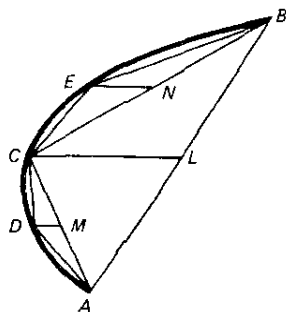
با کاربردهای مکرر این ایده، نتیجه می‌شود که مساحت قطعهٔ سهموی توسط

$$\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \dots$$

$$= \Delta ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right)$$

$$= \frac{4}{3} \Delta ABC$$

داده می‌شود.



شکل ۹۷

ما در اینجا کار را با گرفتن حد مجموع يك تصاعد هندسی مختصر کرده ایم؛ ارشمیدس ابزار پرهان خلف مضاعف مربوط به روش افنا را به خدمت می گیرد. ارشمیدس در مطالعه اش از بعضی مساحتها و احجام، به معادلهای عده ای از انتگرالهای معین که در کتابهای حسابان مقدماتی دیده می شود، دست یافت.

۱۱-۴ روش تعادل ارشمیدس

روش افنا روش دقیق ولی بی باری است. به عبارت دیگر، وقتی فرمولی را بدانیم، روش افنا می تواند وسیله زیبایی برای اثبات آن باشد، ولی این روش قابلیت درکشف اولیه نتیجه ندارد. از این لحاظ، روش افنا بسیار شبیه به فرایند استقراء ریاضی است. پس ارشمیدس فرمولهایی را که با آن همه خوبی به روش افنا، ثابت کرده چگونه کشف کرده است؟ پرسش بالا سرانجام در ۱۹۵۶، با کشف نسخه ای از مقاله روش ارشمیدس، که از مدتها پیش مفقود و خطاب به اراتستن نوشته شده بود، توسط هابیرگ در قسطنطنیه پاسخ داده شد. این دستنویس بر روی يك پالیمپ سست (نگاه کنید به بخش ۱-۸) قرار داشت؛ یعنی، در قرن دهم بر روی کاغذ پارچه ای نوشته شده بود، سپس بعدها، در قرن سیزدهم، شسته شده و مجدداً برای نوشتن يك متن مذهبی مورد استفاده قرار گرفته بود. خوشبختانه، قسمت اعظم متن اولیه از زیر نوشته بعدی قابل احیا بود.

ایده اصلی روش ارشمیدس چنین است. برای یافتن مساحت یا حجم مطلوب، آن را از راه بریدن به صورت تعداد زیادی نوارهای باریک مستوی موازی، یا لایه های موازی باریک، در آورید، و این قطعه ها را (به طور ذهنی) در یک سر اهرم مفروض چنان آویزان کنید که با شکلی که گنجایش و مرکز هندسی آن معلوم باشد، در حالت تعادل قرار گیرد. ما برای روشن کردن این روش آن را برای یافتن فرمول حجم کره به کار می بریم.

فرض کنید r شعاع کره باشد. کره را طوری قرار دهید که قطر قطبی آن در امتداد محور افقی x ها قرار گیرد و قطب شمال N در مبدأ باشد (نگاه کنید به شکل ۹۸). استوانه و مخروط دوار حاصل از دوران مستطیل $NABS$ و مثلث NCS در حول محور yx را

بسازید. حال از سه جسم قاچهای عمودی باریکی (فرض کنید که این قاچها استوانه‌های همواری هستند) به فاصله x از N وضخامت Δx ببرید. حجمهای این قاچها تقریباً عبارتند از:

$$\text{کره: } \pi x(2r-x)\Delta x$$

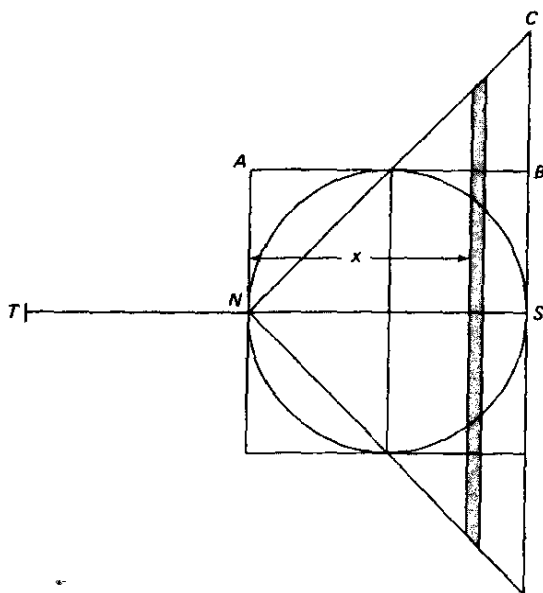
$$\text{استوانه: } \pi r^2 \Delta x$$

$$\text{مخروط: } \pi x^2 \Delta x.$$

قاچهای کره و مخروط را در نقطه T ، $TN = 2r$ ، آویزان می‌کنیم. مجموع گشتاورهای آنها در حول N عبارت است از

$$[\pi x(2r-x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x] 2r = 2\pi r^2 x \Delta x.$$

ملاحظه می‌کنیم که این مجموع، چهار برابر گشتاور قاچ بریده‌شده از استوانه است وقتی که این قاچ در همانجا که هست بماند. یا افزودن تعداد زیادی از این قاچها برهم رابطه زیر را به دست می‌آوریم.



شکل ۹۸

* گشتاور يك حجم حول يك نقطه حاصل ضرب حجم در فاصله بين نقطه و مرکز هندسی حجم است.

$$[\text{حجم استوانه}] = ۲r [\text{حجم مخروط} + \text{حجم کره}] ۲r,$$

یا

$$۲r [\text{حجم کره}] + \frac{8\pi r^3}{3} = 8\pi r^3,$$

یا

$$\text{حجم کره} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

در روشی گفته شده است که این طریقه، طریقه ارشمیدس در کشف فرمول حجم کره بوده است. ولی شعور ریاضی او بدهاو اجازه نمی‌داده است که چنین روشی را به‌عنوان یک برهان پذیرد، و از این رو برهان دقیقی را به کمک روش افنا تدارك دیده است. در روش تعادل، تمرین بخش بودن این فکر سست بنیاد را که یک کمیت، ترکیبی از عدد زیادی اجزای اتمی تلقی شود، مشاهده می‌کنیم. نیازی به گفتن نیست که، با روش امروزی حدگیری، روش تعادل ارشمیدس را می‌توان به‌صورت کاملاً دقیقی که اساساً همان انتگرالگیری امروزی است، درآورد.

۱-۵ مقدمات انتگرالگیری در اروپای غربی

نظریه انتگرال بعد از دستاوردهای قابل ملاحظه ارشمیدس، تا دوران جدید چندان دنبال نشد. در حدود ۱۴۵۰ بود که آثار ارشمیدس از طریق ترجمه نسخه‌ای از نوشته‌هایش که در قرن نهم صورت گرفته بود و در قسطنطنیه پیدا شد، به اروپای غربی رسید. این ترجمه را دگیومونتائوس مورد تجدید نظر قرار داد و در ۱۵۴۰ به چاپ رسانید. چند سال بعد ترجمه دومی از آن منتشر شد. اما تنها در اوایل قرن هفدهم است که می‌بینیم اندیشه‌های ارشمیدس بسط بیشتری می‌یابند.

دو تن از اولین نویسندگان اعصار جدید که روش‌هایی قابل مقایسه با روش‌های ارشمیدس را به کار می‌بردند مهندس فلاندری^۱ سیمون-استوین (۱۵۴۸-۱۶۲۰) و ریاضیدان ایتالیایی لوکا والریو^۲ (حدود ۱۵۵۲-۱۶۱۸) بودند. هر یک از اینها سعی کردند که از برهان خلف مضاعف روش افنا، با گذار مستقیم به حد، عمدتاً نظیرکاری که ما در پایان بخش ۱-۳ در بررسی خود از قطعه سهموی انجام دادیم، احتراز کنند. استوین در کار خود در هیدروستاتیک از چنین روشی استفاده کرد که طی آن نیروی فشار مایع بر یک سد مستطیلی را از راه تقسیم سد به نوارهای افقی باریک و سپس چرخاندن این نوارها در حول لبه‌های پائینی و بالایی تا آنکه اینها به موازات یک صفحه افقی درآیند، پیدا کرد. این اساساً روشی است که آن را امروزه در کتابهای درسی مقدماتی در حسابان به کار می‌بریم.

از اولین اروپائیان جدید که ایدهٔ بینهایت کوچکها را در رابطه با انتگرالگیری به کار برد، باید علی‌الخصوص یادی از یوهان کپلر کرد. قبلاً متذکر شده ایم (در بخش ۷-۹) که کپلر می‌بایست به یک روش انتگرالگیری متوسل شود تا مساحت مطروحه درقانون دوم حرکت سیاره‌ای و نیز احجام مورد بررسی در رساله‌اش راجع به گنجایش بشکه‌های شراب را پیدا کند. اما کپلر، نظیر دیگر هم‌عصران خود، چندان حوصله‌ای برای دقت زیاد در روش افنا نداشت، و به خیال صرفه‌جویی در وقت و زحمت شیوه‌هایی را که ارشمیدس صرفاً رهگشای می‌پنداشت، بسادگی قبول کرد. مثلاً کپلر محیط دایره را به صورت یک چندضلعی منتظم در نظر می‌گرفت که دارای بینهایت ضلع است. اگر هر یک از این اضلاع پایه‌مثلی اختیار شود که رأس آن در مرکز دایره است، در این صورت مساحت دایره به تعداد بینهایتی از مثلثهای باریک تقسیم شده است که همه ارتفاعی برابر با شعاع دایره دارند. چون مساحت هر یک از این مثلثهای باریک برابر با نصف حاصلضرب پایه در ارتفاع است، از آنجا مساحت دایره برابر با نصف حاصلضرب محیط آن در شعاع آن می‌شود. همچنین حجم یک کره متشکل از تعداد بینهایتی از مخروطهای باریکی گرفته شده که همه آنها رأسی در مرکز کره دارند. نتیجه می‌شود که حجم کره برابر یک سوم حاصلضرب سطح آن در شعاعش می‌شود. با اینکه این روشها از دیدگاه دقت ریاضی قابل ایرادند، نتایج صحیحی را به‌روایی بسیار ساده به بار می‌آورند. حتی امروزه هم می‌بینیم که فیزیکدانها و مهندسين چنین روشهای «اتمی» را مرتباً در پرداختن به مسائل ریاضی به کار می‌برند و بررسی دقیق «حد» را به‌عهدهٔ ریاضیدانان حرفه‌ای می‌گذارند. و هندسه‌دانان اغلب به مفاهیم مناسب نقاط «متوالی» و منحنیها و سطوح «متوالی» در خانواده‌های یک پارامتری از چنین نقاط، منحنیها، و سطوح متوسل می‌شوند.^{۵۵}

۱-۶ روش تقسیم‌ناپذیرهای کالویری

بونواتورا کالویری در ۱۵۹۸ در میلان به دنیا آمد، در سنین پایین یک یسوعا^{۵۶} شد،

* «مثلاً، تا آنجا که فقط دیفرانسیلهای مرتبهٔ اول مطرح است، قسمت کوچکی از منحنی را می‌توان مستقیم و بخشی از یک سطح را در مجاورت یک نقطه مستوی دانست، طی یک مدت زمان کوتاه dt ، یک ذره را می‌توان دارای سرعت ثابت تلقی و چنین فرض کرد که یک فرایند فیزیکی با آهنگ ثابتی رخ می‌دهد»... ه. ب. فیلیپس (H. B. Phillips)، معادلات دیفرانسیل، چاپ سوم، صفحه ۲۸ [متن انگلیسی].

** «به عبارت دیگر، مشخصهٔ یک سطح (از خانواده‌ای از سطوح یک پارامتری) منحنی است که در آن سطحی تالی بر آن، آن را قطع می‌کند»... ا. ب. لین [E. P. Lane]، هندسهٔ دیفرانسیل متری منحنیها و سطوح [Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces]، ص ۸۱ [متن انگلیسی].

*** و نه یک یسوعی، که اغلب به‌غلط گفته می‌شود. [یسوعا (Jesuat)] عضو یک نظام مذهبی است که در ۱۳۶۷ کولومبینی آن را پایه‌گذاری کرد و در ۱۶۶۸ پاپ کلمنت نهم آن را پراخت نمود. م.



یو ناو نئورا کاولیری
(مجموعه دیوید اسمیت)

زیر نظر گالیه درس خواند، و از سال ۱۶۲۹ تا زمان مرگش، در ۱۶۴۷، در دانشگاه بولونا استاد ریاضیات بود. وی یکی از مؤثرترین ریاضیدانان عصر خود بود و آثار چندی در زمینه‌های ریاضیات، اپتیک، و نجوم نگاشت. رواج بموقع لگاریتم در ایتالیا عمدتاً مدیون اوست. اما بزرگترین سهم او رساله‌ای است، هندسه تقسیم ناپذیرها، که به صورت اولیه خود در ۱۶۳۵ منتشر شد و به روش تقسیم ناپذیرها اختصاص داده شده بود. گرچه می‌توان رد این روش را در کارهای دموکریتوس (حدود ۴۱۰ ق.م.) و ارشمیدس (حدود ۲۱۲-۲۸۷ ق.م.) پی گرفت، ولی بسیار محتمل است که تلاشهای کپلر در یافتن برخی مساحتها و احجام بود که محرک کاولیری شد.

رساله کاولیری مطول است و به وضوح نوشته نشده است، و دانستن اینکه منظور او از «تقسیم ناپذیر» دقیقاً چیست، مشکل است. به نظر می‌رسد که يك تقسیم ناپذیر در يك قطعه مستوی مفروض و تری از آن قطعه باشد، و يك تقسیم ناپذیر در يك جسم صلب مفروض يك مقطع مستوی آن جسم است. يك قطعه مستوی متشکل از مجموعه بینهایتی از وترهای موازی، و يك جسم صلب متشکل از مجموعه بینهایتی از مقاطع مستوی موازی تلقی می‌شود. براین مینا، کاولیری استدلال می‌کند که اگر هر يك از اعضای مجموعه وترهای موازی قطعه مستوی مفروضی را در امتداد محورش بلغزانیم، به طوری که دوسر و ترها همچنان يك مرز پیوسته را ببینند، در این صورت مساحت قطعه مستوی جدیدی که بدین ترتیب تشکیل می‌شود با مساحت قطعه مستوی اصلی برابر است. لغزاندن مشابه مقاطع مستوی يك جسم مفروض، جسم صلب دیگری را به دست می‌دهد که حجم آن با حجم جسم اصلی برابر است. این نتایج، وقتی اندکی تعمیم داده شوند، اصول موسوم به اصول کاولیری را به دست می‌دهند: ۱. اگر دو قطعه مستوی بین يك جفت خط موازی قرار گیرند، و اگر دو قطعه خطی

که توسط آنها بر روی هر خطی به موازات خطوط در بردارنده جدا می شود، طولهای برابر داشته باشند، آنگاه مساحتهای قطعه های مستوی برابرند.

۲. اگر دو جسم صلب بین يك جفت صفحه موازی قرار گیرند، و اگر دو مقطع جدا شده توسط آنها بر روی هر صفحه به موازات صفحات در بردارنده مساحتهای برابر داشته باشند، آنگاه حجم دو جسم صلب با هم برابرند.

اصول کالوایی ابزار ارزنده ای در محاسبه مساحتها و حجمهاست و پایه شهودی آنها را می توان با سانی به کمک حساب نوین انتگرال تدقیق کرد. با پذیرش اینکه این اصول از لحاظ شهودی روشن اند، می توان مسائل بسیاری را در مساحتی که معمولاً نیاز به فنون پیشرفته حسابان دارند، حل کرد.

استفاده از اصول کالوایی را ابتدا با به کار گرفتن آنها در حالت مسطحه، در یافتن مساحت يك بیضی با نیم قطرهای a و b ، و سپس در حالت فضایی در یافتن حجم کره ای به شعاع r تشریح می کنیم.

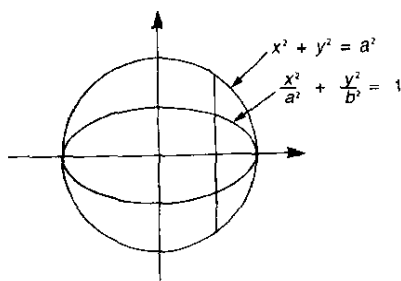
بیضی و دایره

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b, \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

را که در دستگاه مختصات متعامدی، مطابق شکل ۹۹، رسم شده اند در نظر گیرید. با حل هر يك از دو معادله فوق بر حسب y معادلات زیر را به دست می آوریم

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad y = (a^2 - x^2)^{1/2}.$$

از این روابط نتیجه می شود که نسبت عرضهای نظیر بیضی و دایره برابر b/a است. بنابراین نتیجه می شود که وترهای قائم بیضی و دایره نیز به همین نسبت هستند و لذا، بنابر اصل اول کالوایی، مساحتهای بیضی و دایره به همین نسبت هستند. نتیجه می گیریم که



شکل ۹۹

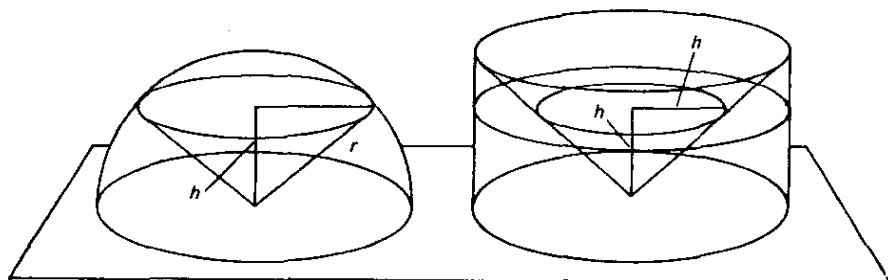
$$\begin{aligned} \text{مساحت دایره} &= \frac{b}{a} = \text{مساحت بیضی} \\ &= \frac{b}{a}(\pi a^2) = \pi ab. \end{aligned}$$

این روش اساساً روشی بود که کپلر آن را در یافتن مساحت يك بیضی با نیم‌قطرهای a و b به‌کار گرفت.

حال فرمول‌آشنای حجم يك کره به شعاع r را به‌دست می‌آوریم. در شکل ۱۰۰ نیم‌کره‌ای به شعاع r در طرف چپ و استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع r در سمت راست قرار دارد که مخروطی به‌قاعده بالایی استوانه و به رأس مرکز قاعده پایینی استوانه از آن برداشته شده‌است. نیم‌کره و استوانه توکنده در روی يك صفحه مشترک قرار گرفته‌اند. حال هر دو جسم را با صفحه‌ای به موازات صفحه قاعده و به‌فاصله h از آن قطع می‌کنیم. این صفحه یکی از اجسام را در يك مقطع مستدیر و دیگری را در يك مقطع تاجی، یا حلقوی شکل، قطع می‌کند. بنابر هندسه مقدماتی، باسانی نشان می‌دهیم که هر يك از این دو مقطع مساحتی برابر با $\pi(r^2 - h^2)$ دارد. بنابر اصل کاوالیری، نتیجه می‌شود که دو جسم حجم برابر دارند. بنابر این حجم V يك کره چنین است،

$$\begin{aligned} V &= \text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} \\ &= \frac{4}{3} \left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

پذیرفتن و استفاده دائم از اصل کاوالیری استخراج بسیاری از فرمولهائی را که در هندسه فضایی دبیرستانی پیش می‌آیند، ساده می‌کند. این روش از سوی عده‌ای از مؤلفان کتب درسی قبول و به دلایل آموزشی از آن طرفداری شده است. مثلاً، برای استخراج فرمول‌آشنای حجم چهار وجهی ($V = Bh/3$)، قسمت مشکل ابتدا آن است که نشان‌دهیم در هر دو چهار وجهی که قاعده‌های آنها معادل و ارتفاعهای وارد بر این قاعده‌ها برابر باشند حجم‌هایشان برابرند. دشواری ذاتی موجود در اینجا، در تمام بررسیهای هندسه



شکل ۱۰۰

فضایی از اصول اقلیدس به بعد منعکس شده است.

تصور مبهمی که کالواییری از تقسیم ناپذیرها، به عنوان نوعی اجزای اتمی يك جسم داشت، بحث زیادی برانگیخت و انتقادهای جدی از سوی برخی محصلین این رشته، بخصوص پل گولدین سویسی را، متوجه کالواییری کرد. کالواییری براین امید واهی که این ایرادات را مرتفع نماید، مطالعه خود را طرحریزی مجددی کرد. ریاضیدان فرانسوی روبروال با توانایی این روش را مورد بحث قرار داد و مدعی شد که این مفهوم را مستقلاً خود ابداع کرده است. روش تقسیم ناپذیرها، یا روندی بسیار شبیه به آن را به طور مؤثری تورپچلی، فرما، پاسکال، سن-ونسان، برو، و دیگران به کار برده اند. در ضمن کار این مردان، نتایجی حاصل شده است که با انتگرالگیری عباراتی نظیر x^n ، $\sin \theta$ ، $\sin^2 \theta$ و $\theta \sin \theta$ هم ارز هستند.

۱۱-۷ آغاز مشتقگیری

می توان گفت که ریشه مشتقگیری در مسئله رسم مماس بر منحنی ها و پیدا کردن مقادیر ماکزیموم و مینیموم توابع است. گرچه این مسائل به یونانیان عهد باستان بازمی گردد، گفتن این مطلب موجه به نظر می رسد که فرما به طور قطع در سال ۱۶۲۹ با اندیشه های خود به پیشواز روش مشتقگیری رفته است.

کپلر ملاحظه کرده بود که نمویك تابع در همسایگی يك مقدار ماکزیموم یا مینیموم معمولی به طور صرف نظر کردنی کوچک می شود. فرما این حقیقت را به روندی برای تعیین این ماکزیموم یا مینیموم برگردانید. این روش را باختصار بررسی می کنیم. اگر $f(x)$ يك ماکزیموم یا مینیموم معمولی در x داشته باشد، و e مقدار بسیار کوچکی باشد، آنگاه مقدار $f(x-e)$ تقریباً با $f(x)$ برابر است. بنابراین، من باب آزمایش قرار می دهیم $f(x-e) = f(x)$ و سپس برابری را با گرفتن مقدار صفر برای e برقرار می کنیم. در این صورت ریشه های معادله حاصل آن مقادیری از x را که به ازای آنها $f(x)$ دارای يك ماکزیموم یا مینیموم است، به ما می دهد.

روش بالا را با در نظر گرفتن اولین مثال فرما-تقسیم کمیتی به دو قسمت به طوری که حاصل ضرب آنها ماکزیموم شود- تشریح می کنیم. فرما از نمادگذاری ویت استفاده کرد که در آن مقادیر ثابت با حروف بزرگ بی صدا و متغیرها با حروف بزرگ مصوت نشان داده می شوند. به تبع این نمادگذاری، کمیت مفروض را با B و قسمتهای مورد نظر را با A و $A-B$ نشان می دهیم. با تشکیل

$$(A-E)[B-(A-E)]$$

و برابر قراردادن آن با $A(B-A)$ داریم

$$A(B-A) = (A-E)(B-A+E)$$

$$2AE - BE - E^2 = 0.$$

بعد از تقسیم بر E ، به دست می آوریم

$$2A - B - E = 0.$$

حال با قرار دادن $E = 0$ رابطه $2A = B$ را به دست می آوریم، و بنابراین تقسیم مطلوب را می یابیم.

گرچه منطق گفتار فرما چندان رضایتبخش نیست، دیده می شود که روش او معادل با نوشتن

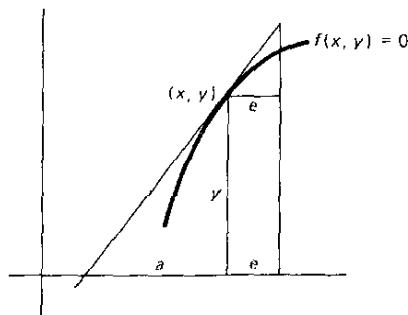
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

یعنی قرار دادن مشتق $f'(x)$ برابر با صفر است. این روش متداول برای یافتن ماکزیموم یا مینیموم معمولی تابعی مانند $f(x)$ است، و گاهی در کتابهای مقدماتی کنونی روش فرما نامیده می شود. ولی فرما نمی دانست که صفر شدن مشتق $f'(x)$ تنها یک شرط لازم و نه کافی برای یک ماکزیموم یا مینیموم معمولی است. همچنین روش فرما تمایزی بین مقدار ماکزیموم یا مینیموم نمی گذارد.

فرما همچنین یک روش کلی برای یافتن مماس در نقطه ای از یک منحنی که مختصات دکارتی آن معلوم باشد، ابداع کرد. ایده او یافتن تحت مماس این نقطه، یعنی، قطعه ای بر روی محور x ها بین پای عمود رسم شده از نقطه تماس بر محور x ها و محل تلاقی خط مماس با محور x هاست. در این روش از این ایده استفاده می شود که مماس وضعیت حدی قاطعی است که دو نقطه تلاقی آن با منحنی برهم منطبق می شوند. با استفاده از نمادگذاری نوین این روش به صورت زیر است. فرض کنید که معادله منحنی (نگاه کنید به شکل ۱۰۱)، $f(x, y) = 0$ باشد، و فرض کنید که مطلوب تعیین تحت مماس a بر منحنی در نقطه (x, y) باشد. از روی مثلثهای متشابه با سانی مختصات یک نقطه مجاور به نقطه تماس را به صورت $[x + e, y(1 + e/a)]$ پیدا می کنیم. چنین تلقی می شود که این نقطه نیز من باب آزمایش بر منحنی قرار دارد، که از آن نتیجه می شود

$$f\left[x + e, y\left(1 + \frac{e}{a}\right)\right] = 0.$$

این تساوی سپس با گذاشتن مقدار صفر به جای e تصحیح می شود. سپس معادله حاصل را نسبت به تحت مماس a بر حسب مختصات x و y نقطه تماس، حل می کنیم. البته، این کار معادل است با قرار دادن



شکل ۱۰۱

$$a = -y \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x},$$

که يك فرمول کلی است که بعداً در آثار اسلوزه ظاهر شد. بدین طریق فرما مماسهای بر بیضی، میکلوتید، سیسوئید، کوانکوتید، کوادراتریکس، و فولیوم دکارت را پیدا کرد. این روش را با یافتن تحت مماس در يك نقطه کلی بر فولیوم دکارت

$$x^2 + y^2 = nxy$$

روشن می کنیم. در اینجا داریم

$$(x+e)^2 + y^2 \left(1 + \frac{e}{a}\right)^2 - ny(x+e) \left(1 + \frac{e}{a}\right) = 0,$$

یا

$$e \left(3x^2 + \frac{3y^2}{a} - \frac{nxy}{a} - ny \right) + e^2 \left(3x + \frac{3y^2}{a^2} - \frac{ny}{a} \right) + e^3 \left(1 + \frac{y^2}{a^2} \right) = 0.$$

حال، با تقسیم بر e و سپس قراردادن $e = 0$ ، به دست می آوریم،

$$a = - \frac{3y^2 - nxy}{3x^2 - ny}.$$

۱۱-۸ والیس و برو

از اساتید بلا فصل قبل از آیزک نیوتن در انگلیس جان والیس و آیزک برو بودند. جان والیس، که در ۱۶۱۶ به دنیا آمد، یکی از تواناترین و خلاقترین ریاضیدانان عصر خود بود. وی از نویسندگان کثیر التالیف و متبحر در چند زمینه بود و گفته اند که او یکی از اولین کسانی بود که دستگاهی برای تعلیم ناشنویان ابداع کرد. در ۱۶۴۹، وی به استادی ساویلی هندسه در آکسفورد منصوب شد، منصبی که وی به مدت ۵۴ سال تا زمان مرگش در ۱۷۰۳ عهده دار آن بود. کار او در آنالیز تأثیر زیادی در آماده کردن زمینه برای

معاصر بزرگش، آیزک نیوتن، داشته است.

والیس یکی از اولین کسانی بود که مقاطع مخروطی را به عنوان منحنیهای درجه دوم و نه مقطهائی از يك مخروط، مورد بحث قرارداد. در ۱۶۵۶ کتاب حساب بینهایت کوچکیهای او (که به او ترد اهدا شده بود) منتشر شد. کتابی که، علیرغم برخی معایب منطقی، به عنوان رساله استاندهای برای چندین سال باقی ماند. در این اثر، روشهای دکارت و کوالیری به صورت منظمی در آمده و بسط یافته و چندین نتیجه قابل توجه از حالتیهای خاص استنتاج شده اند. مثلاً، ادعا می شود که فرمول

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

که به صورت امروزی نوشته شده و در آن m عدد صحیح مثبتی است، حتی وقتی که m کسری یا منفی ولی مخالف ۱- باشد، برقرار است. والیس اولین کسی بود که اهمیت توانهای صفر، منفی، و کسری را به طور کامل توضیح داد، و نماد امروزی (∞) را برای بینهایت معرفی کرد.

والیس، با پیدا کردن عبارتی برای مساحت ربعی از دایره $x^2 + y^2 = 1$ ، که $\pi/4$ است، در صدد تعیین π برآمد. این کار معادل با محاسبه مقدار $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$ است، که والیس به علت آشنا نبودن با قضیه دو جمله ای کلی مستقیماً قادر به انجام آن نبود. بنابراین وی $\int_0^1 (1-x^2)^0 dx$ ، $\int_0^1 (1-x^2)^1 dx$ ، $\int_0^1 (1-x^2)^2 dx$ ، و غیره را محاسبه کرد و دنباله ۱، $2/3$ ، $8/15$ ، $16/35$ ، ... را به دست آورد. وی سپس مسئله پیدا کردن قاعده ای را که به ازای $n=0, 1, 2, 3, \dots$ دنباله بالا را بدهد، مطمح نظر قرار داد. مقدار درونیایی شده این قاعده به ازای $n=1/2$ بود که والیس آن را می خواست. با روندی طولانی و پیچیده، وی سرانجام به عبارت حاصلضربی برای $\pi/2$ که در بخش ۴-۸ داده



جان والیس
(کتابخانه کنگره)

شده، رسید. ریاضیدانان عصر او اغلب به فرایندهای درونیابی برای محاسبه کمیت‌هایی که مستقیماً قادر به محاسبه آن نبودند، متوسل می‌شدند.

والیس کارهای دیگری هم در ریاضیات انجام داد. وی ریاضیدانی بود که به حل سؤالات حریف آزمای پاسکال دربارهٔ سیکلوئید (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۹.۹) از همه نزدیکتر شد. می‌توان تاحدی استدلال کرد که وی معادلی برای فرمول

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

دربارهٔ طول عنصری از قوس منحنی به دست آورد. اثر وی تحت عنوان رساله‌ای در جبر، تاریخچه و کاربرد آن^۱، که در ۱۶۷۳ نوشته شده ولی در ۱۶۸۵ به زبان انگلیسی و در ۱۶۹۳ به زبان لاتین منتشر شده بود، اولین تلاش جدی در تاریخ ریاضی، در انگلستان تلقی می‌شود. در این اثر است که به اولین کوشش برای ارائهٔ تعبیر نموداری ریشه‌های مختلط یک معادلهٔ حقیقی برمی‌خوریم. والیس بخشهایی از آثار عده‌ای از ریاضیدانان بزرگ یونانی را ویرایش کرد و دربارهٔ موضوعات فیزیکی گوناگون مطالبی نوشت. وی یکی از بنیانگذاران انجمن سلطنتی بود و چند سالی به عنوان کارشناس رمز در دستگاه حکومتی کار کرد. در حالی که کار عمدهٔ والیس در بسط حسابان در نظریهٔ انتگرالگیری است، شاید مهمترین کار اساسی آیزک برو در ارتباط با نظریهٔ مشتقگیری باشد.

آیزک برو در ۱۶۳۵ چشم به جهان گشود. به روایتی وی در ایام تحصیلات ابتدایی بقدری بازیگوش بوده است که گویا پدرش دعا می‌کرده است که اگر خداوند می‌خواهد یکی از فرزندان او را بگیرد وی با طیب خاطر حاضر است آیزک را ببخشد. برو تحصیلات خود را در کیمبرج به اتمام رسانید و در ادب یونانی یکی از بهترین فضلاء عصر خود شد. وی مردی با تواناییهای علمی بالایی بود و در ریاضیات، فیزیک، نجوم، و الاهیات مسیحی احاطهٔ کامل داشت. داستانهای جذابی از قدرت جسمی، شجاعت، بذله‌گویی، و وظیفه‌شناسی مفرط او گفته شده است. او اولین کسی بود که کرسی نوکاسی را در کیمبرج تصاحب کرد، و با علو طبع در سال ۱۶۶۹ به نفع شاگرد عالیمقامش آیزک نیوتن از این منصب کناره گرفت. برو از اولین کسانی بود که استعدادهای فوق‌العادهٔ نیوتن را تشخیص و مورد تأیید قرار داد. او در ۱۶۷۷ در کیمبرج درگذشت.

مهمترین اثر ریاضی برو دوهی نورشناسی و هندسهٔ ۲ اوست که در سال کناره‌گیری از کرسی‌اش در کیمبرج منتشر شد. در پیشگفتار این رساله مراتب سپاسگزاری خود را از نیوتن به خاطر برخی مطالب کتاب، احتمالاً قسمتهایی که به نورشناسی مربوط است، اعلام می‌دارد. در این کتاب است که به دریافت بسیار نزدیک به فرایندهای مشتقگیری برمی‌خوریم که در آن از اصطلاح مثلث دیفرانسیل که در کتابهای درسی امروزی با آن مواجه

1. De algebra tractatus, historicus & practicus

2. Lectiones opticae et geometricae



آیزک برو
(مجموعه دیوید اسمیت)

می‌شویم، استفاده شده است. فرض کنید یافتن مماسی در نقطه‌ای مانند P ، بر منحنی مفروضی که در شکل ۱۵۲ نشان داده شده، مورد نظر باشد. فرض کنید Q يك نقطه مجاور بر منحنی باشد. در این صورت مثلثهای PTM و PQR با تقریب خیلی نزدیکی متشابه‌اند، و برو استدلال می‌کند که وقتی مثلث کوچک بی‌نهایت کوچک می‌شود، داریم

$$\frac{RP}{QR} + \frac{MP}{TM}.$$

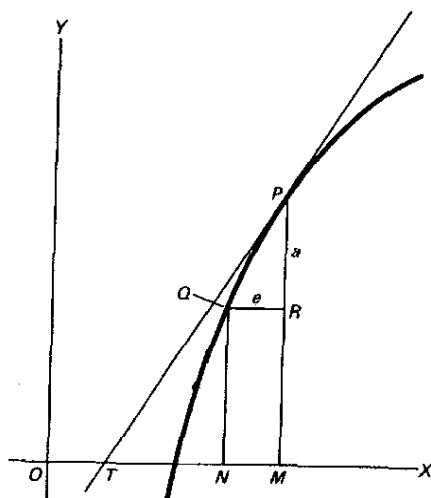
قرار می‌دهیم $RP = a$ و $QR = e$. در این صورت اگر x و y مختصات P باشند، مختصات Q ، $x - e$ و $y - a$ خواهد شد. با قرار دادن این مقادیر در معادله منحنی و صرف نظر کردن از توانهای دوم و بالاتر e و a ، نسبت a/e را پیدا می‌کنیم. در این صورت داریم

$$OT = OM - TM = OM - MP \left(\frac{QR}{RP} \right) = x - y \left(\frac{e}{a} \right),$$

و خط مماس تعیین می‌شود. برو این روش رسم مماسها را در مورد منحنیهای زیر به کار برده است: (الف) $x^2(x^2 + y^2) = r^2 y^2$ (منحنی کایا)، (ب) $x^3 + y^3 = r^3$ (حالت خاص منحنی لافه)، (ج) $x^3 + y^3 = rxy$ (فولیوم دکارت) که برو آن را (منحنی بادامی نامیده است)، (د) $y = (r - x) \tan \pi x / 2r$ (کوادرانتریکس)، (ه) $y = r \tan \pi x / 2r$ (يك منحنی تانژانسی). به عنوان مثال، این روش را در مورد منحنی (ب) به کار می‌بریم. در اینجا داریم

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = r^3,$$

یا



شکل ۱۰۲

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3.$$

باصرف نظر کردن از توانهای دوم و بالاتر e و a ، و استفاده از این حقیقت که $x^3 + y^3 = r^3$ ، این رابطه به صورت

$$3x^2e + 3y^2a = 0,$$

ساده می شود که از آن

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$

به دست می آید. البته نسبت a/e ، همان dy/dx امروزی است، و روش برو را که در آن جای سؤال است، می توان با آسانی با استفاده از نظریه حدود به صورت دقیقی در آورد. برو را عموماً اولین کسی می دانند که معکوس هم بودن اعمال مشتق گیری و انتگرال گیری را به طور کامل تشخیص داده است؛ گرچه شواهد ضعیفی حکم برخلاف آن دارند. این کشف مهم همان باصطلاح قضیه اساسی حسابان است و ظاهراً در کتاب دروس برو بیان و ثابت شده است.

گرچه برو قسمت عمده اواخر عمرش را وقف الاهیات کرد، در ۱۶۷۵، ویرایش (و شرحی) از چهار مقاله اول مقاطع مخروطی و آثار باقیمانده ارشمیدس و تئودوسیوس را منتشر کرد.

در این مرحله از بسط حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرالهای متعددی محاسبه شدند،

حجم بسیاری از اجسام، مساحات اشکال و طول قوسهای زیادی به دست آمدند، یک فرایند مشتق گیری به مرحله کمال رسید، و معاسهای منحنی های متعددی رسم شدند، مفهوم حد وارد اذهان شد، و قضیه اساسی تشخیص داده شد. پس دیگر چه مانده بود که باید انجام می شد؟ هنوز کار ایجاد یک نمادگرایی کلی با مجموعه منظمی از قواعد صوری تحلیلی، و نیز بسط مجددی از مبانی این موضوع، باقی مانده بود. دقیقاً اولین اینها، یعنی ابداع یک حسابان مناسب و عملی بود، که توسط نیوتن و لایبنیتز، که مستقل از هم کار می کردند، تدارک دیده شد. بسط مجدد مفاهیم اساسی بر مبنای دقیق و قابل قبولی باید در انتظار کاربرد فعالانه این موضوع می ماند و این کار توسط آنالیزدان بزرگ فرانسوی اوگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) و جانشینان وی در قرن نوزدهم انجام پذیرفت. این داستان در فصل بعد خواهد آمد.

۱۱-۹ نیوتن

آیزک نیوتن در روستای وولز تورپ^۱ در روز کریسمس، در سال ۱۶۴۲، سال درگذشت گالیله به دنیا آمد. پدر او، که قبل از تولد آیزک درگذشته بود، یک کشاورز بود، و در ابتدا بنا بر آن بود که پسر نیز زندگی خود را وقف کشاورزی کند. ولی پسرک مهارت و شوق زیادی در ابداع مدل های مکانیکی هوشمندانه در انجام آزمایشها از خود نشان داد. مثلاً، وی یک آسیاب بازیچه برای آرد کردن گندم ساخت که نیروی محرکه آن را یک موش فراهم می کرد، و یک ساعت چوبی ساخت که با آب کار می کرد. نتیجه آن شد که دوره تحصیل او را تمدید کردند، و وقتی ۱۸ ساله بود، اجازه ورود به کالج ترینیتی^۲، در کیمبریج یافت. در این مرحله از تحصیلاتش بود که، به کمک کتابی درباره احکام نجوم که از بازار مکاره استوربریج^۳ گیر آورده بود، توجه او به ریاضیات جلب شد. در نتیجه، ابتدا اصول اقلیدس را خواند، که آن را بسیار بدیهی یافت، و سپس هندسه دکارت را مطالعه کرد، که کمی آن را مشکل یافت. وی همچنین کلاویس^۴ اوترد، آثار کپلر و ویت، و حساب بینهایت کوچکی های والیس را مطالعه کرد. وی از خواندن ریاضیات، به خلق آن روی آورد و بزودی، در ۱۶۶۵، وقتی ۲۳ سال داشت، تمیم قضیه دوجمله ای عمومی را به دست آورد و روش فلوکسیونها^۴، نامی که وی به آنچه امروزه تحت عنوان حساب دیفرانسیل شناخته می شود، داده بود، را ابداع کرد. در این سال، و قسمتی از سال بعد، دانشگاه به دلیل شیوع بیماری طاعون تعطیل بود، و نیوتن درمولدش زندگی می کرد. در این مدت وی حسابان خود را به درجه ای بسط داد که می توانست مماس و شعاع انحناء در یک نقطه از منحنی را پیدا کند. وی همچنین به مسائل مختلف فیزیکی علاقمند شد، آزمایشهای خود را در زمینه نورشناختی انجام داد، و مبانی اصلی نظریه گرانش خود را پی ریزی کرد.

1. Woolsthorpe
2. Trinity College
3. Stourbridge Fair
4. fluxions



آیزک نیوتن
(مجموعه دیوید اسمیت)

نیوتن در ۱۶۶۷ به کیمبرج بازگشت و به مدت دو سال عمدتاً سرگرم تحقیقات در نورشناسی شد. در سال ۱۶۶۹، پرواز استادی لوکاسی به نفع نیوتن استعفا کرد، و نیوتن تدریس ۱۸ ساله دانشگاهی خود را آغاز کرد. اولین درسهای او، که درباره نورشناسی بود، بعداً طی مقاله‌ای به انجمن سلطنتی ارسال شد و بحث و علاقه زیادی را برانگیخت. نظریه رنگهای وی و برخی نتایج که از آزمایشهایش در نورشناسی به دست آورده بود، بشدت از سوی بعضی از دانشمندان مورد حمله قرار گرفت. مجادلات بعد از آن چنان بر او ناگوار آمد که وی سوگند خورد دیگر چیزی در زمینه علم به چاپ نرساند. بیزاری فوق العاده او از مجادله، که تا سرحد بیماری پیش می‌رفت، اثر مهمی در تاریخ ریاضیات داشت، زیرا نتیجه آن بود که همه یافته‌های او تا چند سال پس از کشف آنها، چاپ نشده ماند. این تعویق در انتشار بعدها منجر به مشاجرات رسوایی با لایبنیتز بر سر تقدم در کشف حسابان شد. به دلیل این مشاجره بود که ریاضیدانان انگلیسی، به پشتیبانی نیوتن به عنوان رهبرشان، رابطه خود را با پیشرفتهای بزرگ اروپا قطع کردند، و پیشرفت ریاضی در انگلستان عملاً به مدت یک قرن دچار عقب ماندگی شد.

نیوتن به کار خود در زمینه نورشناسی ادامه داد، و در ۱۶۷۵ کار خود را در نظریه گسیلش، یا ذره‌ای نور به انجمن سلطنتی ارسال کرد. شهرت او و پرداخت استادانه این نظریه موجب پذیرش آن از سوی عامه گشت، و باید چندین سال می‌گذشت تا بهتر بودن فرض نظریه موجی در تحقیقات، به ثبوت برسد. خطاهای درسی نیوتن از ۱۶۷۳ تا ۱۶۸۳ به جبر و نظریه معادلات اختصاص داشت. در این دوره، در سال ۱۶۷۹، بود که وی صحت نظریه گرانش* خود را با استفاده از اندازه‌گیری جدیدی از شعاع زمین در رابطه با حرکت ماه

* هر دو ذره در عالم یکدیگر را با نیروی جذب می‌کنند که با حاصلضرب جرمهای آنها نسبت مستقیم و با مربع فواصل بین آنها نسبت معکوس دارد.

معلوم کرد. وی همچنین سازگاری قانون گرانش خود را با قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر، با این فرض که خورشید و سیارات را می‌توان به صورت اجرام وزین تلقی کرد، ثابت نمود. اما این کشفیات مهم به اطلاع کسی نرسید، تا اینکه پنج سال بعد، در ۱۶۸۴، هالی برای بحث در قانون نیرویی که سبب حرکت سیاره‌ها در یک مدار بیضوی حول ماه می‌شود، برای دیدن نیوتن به کیمبریج آمد. بدین ترتیب با برانگیخته شدن مجدد علاقه‌اش به مکانیک سماوی، نیوتن اقدام به استخراج بسیاری از قضایا کرد که مبانی اصلی اولین کتاب اصول او را تشکیل می‌دادند. بعداً، وقتی هالی دستنوشته‌های نیوتن را دید به اهمیت فوق‌العاده آنها پی برد، و از مؤلف قول گرفت که نتایج خود را به انجمن سلطنتی بفرستد. نیوتن چنین کرد، و تقریباً در همان ایام وی سرانجام مسئله‌ای را که سالها ذهن او را به خود مشغول داشته بود، حل کرد. آن مسئله این بود که جسمی کروی که چگالی آن در هر نقطه به فاصله آن از مرکز کره بستگی دارد، یک ذره خارجی را طوری جذب می‌کند که گویی همه جرم آن در مرکزش متمرکز شده است. این قضیه توجیه وی را از قوانین حرکت سیاره‌ای کامل کرد، زیرا انحراف جزئی خورشید و ستاره‌ها از کسویت واقعی در اینجا قابل صرف نظر کردن است. نیوتن اینک با جدیت تمام بر روی نظریه‌اش کار می‌کرد و با تلاش فکری عظیمی اولین مقاله اصول را پیش از تابستان ۱۶۸۵ نوشت. یک سال بعد دومین مقاله کامل شد و مقاله سوم را آغاز کرد. اتهامات حسودانه هوک و رنجشی که از بی آن در نیوتن حاصل شد، تقریباً منجر به دست کشیدن از مقاله سوم شد، اما سرانجام هالی نیوتن را برای پایان دادن به این کار تشویق کرد. رساله کامل، تحت عنوان اصول ریاضی فلسفه طبیعی^۱، به هزینه هالی، در اواسط سال ۱۶۸۷ به چاپ رسید و بلافاصله در سرتاسر اروپا تأثیر زیادی به جا گذاشت.

در سال ۱۶۸۹، نیوتن به نمایندگی دانشگاه در پارلمان انتخاب شد. در سال ۱۶۹۲، وی به بیماری عجیبی دچار شد که به مدت دو سال ادامه داشت و به شکل اختلال حواس در او ظاهر شده بود. قسمت اعظم اواخر عمرش وقف شیمی، کیمیاگری، و الهیات مسیحی شد. در حقیقت، حتی در مراحل پیشین زندگی‌اش هم وی احتمالاً همان اندازه وقت صرف این مشغله‌ها می‌کرد که صرف ریاضیات و فلسفه طبیعی. گرچه کار خلاق او در ریاضیات عملاً دچار وقفه شد، ولی تواناییهای خارق‌العاده خود را از دست نداد، زیرا مسائل حریف-آزمای متعددی را که به او تسلیم می‌شد و کاملاً ماوراء تواناییهای دیگر ریاضیدانان انگلیس بود، با استادی تمام حل می‌کرد. در سال ۱۶۹۶، وی به سمت ناظر ضرابخانه منصوب شد و در ۱۶۹۹ به ریاست ضرابخانه ترفیع مقام یافت. در سال ۱۷۰۳ به عنوان رئیس انجمن سلطنتی انتخاب و هر ساله تازمان مرگش به همین سمت برگزیده شد و در ۱۷۰۵ لقب نایت [شهباز] به او داده شد. آخرین قسمت زندگی او به خاطر مجادله اسبقارش با لایبنتز با تیره‌کامی توأم بود. در سال ۱۷۲۷ پس از یک بیماری طولانی و رنج‌آور در سن ۸۴ سالگی

در گذشت و در وستمینستر ابی^۱ به خاک سپرده شد.

همچنانکه در بالا متذکر شدیم، کلیه آثار مهم منتشر شده نیوتن، بجز اصول، سالها بعد از آنکه مؤلف مطالب آنها را کشف کرده بود به چاپ رسیدند، و تقریباً انتشار همه آنها در نهایت به علت فشار دوستانش انجام گرفته است. تاریخ این آثار، به ترتیب زمان انتشار آنها، چنین است: اصول، ۱۶۸۷؛ نورشناسی^۲، با دو ضمیمه درباره منحنیهای درجه سوم^۳ و تریب و راستش منحنیها به کمک سریهای نامتناهی^۴، سال ۱۷۰۴؛ حساب عمومی^۵، ۱۷۰۷؛ تحلیل از راه سریها، فلوکسیونها و جز آن^۶ و روش بینهایت کوچکها^۷، ۱۷۱۱؛ دروس نورشناختی^۸، ۱۷۲۹؛ و روش فلوکسیونها و سریهای نامتناهی^۹، ترجمه از متن لاتین آن توسط ج. کولسون^{۱۰}، ۱۷۳۶. باید به دو نامه مهم اشاره شود که نیوتن در ۱۶۷۶ به ه. اولدنبرگ^{۱۱}، دبیر انجمن سلطنتی نوشته و در آن نیوتن برخی روشهای ریاضی خود را شرح می دهد.

در نامه اش به اولدنبرگ است که نیوتن استنتاج قضیه دو جمله ای تعمیم یافته را شرح می دهد و آن را به صورت

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots,$$

بیان می کند که در آن A معرف جمله اول، یعنی $P^{m/n}$ ، B معرف جمله دوم، یعنی $C(m/n)AQ$ ، معرف جمله سوم، و قس علی هذا است. درست بودن بسط دو جمله ای، تحت شرایط مناسبی، به ازای کلیه مقادیر مختلط توان، متجاوز بر ۱۵۰ سال بعد توسط ریاضیدان نروژی ن. ه. آبل (۱۸۵۲-۱۸۲۹) به ثبوت رسید.

کشف مهمتری را که نیوتن تقریباً مقارن با این زمان انجام داد روش فلوکسیونهای او بود، که مطالب اساسی آن را در سال ۱۶۶۹ به اطلاع آیزک بروسانید. در این کار، نیوتن یک منحنی را مولود حرکت پیوسته یک نقطه می انگارد. با این تصور طول و عرض نقطه مولد، در حالت کلی، کمیتهایی در حال تغییرند. او کمیت متغیر را یک *فلوئنت*^{۱۲} (کمیت در حال جریان) و نرخ تغییر را *فلوکسیون* فلوئنت می نامد. اگر یک فلوئنت، نظیر عرض نقطه مولد منحنی، را با y نشان دهیم، در این صورت فلوکسیون فلوئنت با $\dot{y}$ نمایش داده می شود. با نمادگذاری امروزی ملاحظه می کنیم که این فلوکسیون با dy/dt ، که در آن t نمایش زمان است، معادل است. علیرغم وارد شدن زمان در هندسه، می توان با این فرض که کمیتی، مثلاً طول نقطه متحرک، به طور ثابت افزایش می یابد، از مفهوم زمان احتراز

-
1. Westminster Abbey	2. Opticks	3. Cubic Curves
4. Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series	5. Arithmetica universalis	6. Analysis per Series, Fluxiones, etc.
7. Methodus differentialis	8. Lectiones opticae	9. The Method of Fluxions and Infinite Series
10. J. Colson	11. H. Oldenburg	12. fluent

کرد. این نرخ افزایش ثابت يك فلوئنت **فلوکسیون اصلی**، نامیده می‌شود و فلوکسیون هر فلوئنت دیگر را می‌توان با این فلوکسیون اصلی مقایسه کرد. فلوکسیون $\dot{y}$ با $\dot{z}$ نشان داده می‌شود و در مورد فلوکسیونهای مراتب بالا به همین ترتیب عمل می‌شود. از سوی دیگر، فلوئنت y با نماد y که مربع کوچکی به دور آن کشیده شده، یا گاهی با $\dot{y}$ نشان داده می‌شود. نیوتن مفهوم دیگری را نیز معرفی می‌کند، که آن را **گشتاور فلوئنت** می‌نامد؛ این کمیت بی‌نهایت کوچکی است که فلوئنتی مانند x در يك فاصله بی‌نهایت کوچک o افزایش می‌یابد. بنابراین گشتاور فلوئنت x با حاصلضرب $\dot{x}o$ داده می‌شود. نیوتن خاطر نشان می‌کند که، در هر مسئله، می‌توان از همه جملاتی که مضارب توانهای دوم و بالاتر o هستند، صرف نظر کرد، و بدین ترتیب معادله‌ای بین مختصات x و y نقطه مولد يك منحنی و فلوکسیونهای $\dot{x}$ و $\dot{y}$ آن به دست آورد. به عنوان مثال وی معادله درجه سوم $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ را در نظر می‌گیرد. با گذاشتن $x + \dot{x}o$ به جای x و $y + \dot{y}o$ به جای y ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 \\ & - ax^2 - 2ax(\dot{x}o) - a(\dot{x}o)^2 \\ & + axy + ay(\dot{x}o) + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) + ax(\dot{y}o) \\ & - y^3 - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0. \end{aligned}$$

حال، با استفاده از این حقیقت که $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ ، و تقسیم جملات باقیمانده بر o ، و سپس حذف کلیه جملاتی که شامل توانهای دوم و بالاتر o هستند، رابطه زیر را پیدا می‌کنیم

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

نیوتن دو نوع مسئله را در نظر می‌گیرد. در نوع اول، رابطه‌ای بین چند فلوئنت به ما داده می‌شود، و از ما خواسته می‌شود رابطه‌ای بین فلوئنتها و فلوکسیونهای آنها پیدا کنیم. این کاری است که در بالا آن را انجام دادیم. در مسائل نوع دوم، رابطه‌ای بین چند فلوئنت و فلوکسیونهای آنها داده می‌شود، و از ما خواسته می‌شود که رابطه‌ای صرفاً بین فلوئنتها پیدا کنیم. این مسئله، عکس مسئله اول و معادل با حل يك معادله دیفرانسیل است. ایده کنار گذاشتن جملات شامل توانهای دوم و بالاتر o را بعداً نیوتن با استفاده از مفاهیم ابتدایی حد توجیه کرد. نیوتن این روش فلوکسیون خود را در جاهای متعدد و به طرز جالبی به کار برد. وی ماکزیموم و مینیموم مماس بر منحنیها، انحناهای منحنیها، نقاط عطف، و تحدب و تقعر منحنیها را تعیین کرد و نظریه خود را در محاسبه مساحات زیر منحنیها و طول قوس آنها به کار برد. در انتگرالگیری برخی معادلات دیفرانسیل وی توانایی فوق‌العاده‌ای از خود نشان داد. این اثر همچنین متضمن روشی است (که صورت پیراسته آن اکنون به روش نیوتن معروف می‌باشد) برای تقریب زدن مقادیر ریشه‌های حقیقی يك معادله عددی جبری

یا غیر جبری.

حساب عمومی متضمن مواد اصلی دروس نیوتن از ۱۶۷۳ تا ۱۶۸۳ است. در آن نتایج متعدد مهمی در نظریه معادلات، نظیر این حقیقت که ریشه‌های موهومی يك چندجمله‌ای حقیقی باید به صورت مزدوج باشند، قواعدی برای پیدا کردن کران بالایی برای ریشه‌های يك چندجمله‌ای حقیقی، فرمول او برای بیان مجموع توانهای n ریشه‌های چندجمله‌ای بر حسب ضرایب چندجمله‌ای، توسیعی از قاعده علامت دکارت برای یافتن تعداد ریشه‌های موهومی يك چندجمله‌ای حقیقی، و چیزهای متعدد دیگری دیده می‌شود.

منحنیهای درجه سوم، که به عنوان ضمیمه‌ای بر اثر نیوتن درباره نورشناسی ظاهر شد، به تحقیق در خواص منحنیهای درجه سوم به کمک هندسه تحلیلی می‌پردازد. نیوتن در دسته‌بندی خود از منحنیهای درجه سوم از ۷۸ شکل ممکن که منحنیهای درجه سوم به خود می‌گیرند ۷۲ تارا برمی‌شمارد. بسیاری از قضایای او بدون اثبات بیان شده‌اند. جالبترین و مبهوت‌کننده‌ترین آنها، این ادعای اوست که همان گونه که مقاطع مخروطی را می‌توان از تصاویر مرکزی يك دایره به دست آورد، همه منحنیهای درجه سوم را هم می‌توان از تصاویر مرکزی منحنیهای

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

به دست آورد. این قضیه به صورت معمایی باقی ماند تا اینکه در ۱۷۳۱ برهانی برای آن پیدا شد.

البته مهمترین اثر نیوتن کتاب اصول اوست، که در آن برای اولین بار يك دستگاه دینامیکی کامل و يك صورت‌بندی ریاضی از پدیده‌های اصلی زمینی و سماوی حرکت ظاهر می‌شود. این اثر به صورت پرنفوذترین و تحسین برانگیزنده‌ترین اثر در تاریخ علم درآمد. جالب است که قضایای آن، گرچه احتمالاً به روشهای فلوکسیونی ثابت شده‌اند، همه به استادی تمام به کمک هندسه کلاسیک یونانی، که اینجا و آنجا از بعضی مفاهیم ساده راجع به حدود نیز یاری گرفته شده‌است، اثبات گردیده‌اند. تا قبل از به وجود آمدن نظریه نسبیت، کل فیزیک و نجوم بر فرض دستگاه مختصات متنازی متکی بود، که از سوی نیوتن اتخاذ شده بود. در اصول قضایای زیادی راجع به منحنیهای مسطحه درجات بالاتر، براینی برای قضایای جذاب هندسی نظیر دو موردی که در زیر داده می‌شود، دیده می‌شود.

۱. مکان هندسی مراکز همه مقاطع مخروطی مماس بر اضلاع يك چهار ضلعی خطی است (خط نیوتن) ماربر اوساط قطرهای آن.
۲. اگر نقطه‌ای مانند P که در امتداد خط مستقیمی حرکت می‌کند به دو نقطه ثابت O و O' وصل شود، و اگر خطوط OQ و $O'Q$ زوایای ثابتی با خطوط OP و $O'P$ بسازند، آنگاه مکان هندسی Q يك مقطع مخروطی است.

نیوتن هرگز در حل هیچ يك از مسائل گوناگون و حریف آزمایشی که در میان ریاضیدانان عصر خودش مطرح بوده اظهار عجز نکرده است. یکی از مسائلی که لاینیتز طرح کرده

مسئله یافتن مسیرهای قائم يك خانواده منحنی است که نیوتن آن را حل کرده است. نیوتن آزمایشگری ماهر و تحلیلگری عالی بود، به طور قطع همه او را در زمینه بزرگترین ریاضیدانانی می‌دانند که تاکنون جهان به خود دیده است. در بصیرت در مسائل فیزیکی و توانایی در مطالعه ریاضی آنها احتمالاً هیچکس بر او برتری نگرفته است. عظمت او بارها از سوی داوران توانایی مورد تصدیق قرار گرفته است. مثلاً ستایش بزرگ منشانه‌ای که لایبنتز از او به عمل آورده است از آن جمله است «اگر ریاضیات را از آغاز جهان تا عصر نیوتن در نظر گیریم، آنچه او کرده بیش از نیم آن است». و این سخن از لاگرانژ است که نیوتن بزرگترین نابغه‌ای بوده که در جهان زیسته است، و نیز خوشبخت‌ترین آنان، زیرا تنها يك بار می‌توان دستگاه جهان را تأسیس کرد. پاپ دستاوردهای او را با این جملات شاعرانه بیان کرده است،

طبیعت و قوانین طبیعت در ظلمت نهفته بودند؛

ذات باری فرمود «نیوتن به وجود آید» و همه چیز روشن شد.^۱

در مقابل این ستایشها، ارزیابی خاضعانه خود نیوتن از کارهایش چنین است: «منی دلم دنیا به من به چه دیده‌ای می‌نگرد؛ اما من خود را چون کودکی می‌بینم که در ساحل دریا سرگرم بازی است، گهگاه یافتن سنگریزه‌ای صافتر یا صدفی زیباتر توجهم را جلب می‌کند، در حالی که اقیانوس پهناور حقایق در مقابلم کشف نشده گسترده است.» در سخاوت طبع وی نسبت به پیشینیانش يك بار گفته است که اگر اقیانوس دید او گسترده‌تر از دیگران است، صرفاً به خاطر آن است که بر دوش غولان ایستاده است.

گفته‌اند که نیوتن اغلب در روز، ۱۸ یا ۱۹ ساعت را صرف نوشتن می‌کرده، و نیز از قدرت تمرکز ذهنی نیرومندی برخوردار بوده است. داستانهای خوشمز و احتمالاً مشکوکی در تأیید حواسپرتی او هنگامی که غرق تفکر بوده، گفته شده است. مثلاً، این داستان را گفته‌اند که روزی که ضیافت شامی به دوستان داده بود، میز را برای آوردن يك بطری شراب ترك گفت، و به علت اشتغال فکری آن را فراموش کرد، ردا بر تن نمود، و از کلیسا سر در آورد.

در موردی دیگر دوست نیوتن، دکتر استوکل^۲ به منزل وی برای شام جوجه دعوت داشت. نیوتن هنگام آمدن او موقتاً از منزل بیرون رفته، ولی میز را قبلاً چیده و جوجه پخته را در ظرفی زیر سرپوشی نهاده بود. ماندن نیوتن در خارج از منزل، که قرار شام را فراموش کرده بود، بیش از حد به درازا کشید و دکتر استوکل سرانجام سرپوش غذا را برداشته و به تناول جوجه پرداخت، و سپس استخوانها را در ظرف سرپوشیده قرار داد. بعداً وقتی بالاخره نیوتن پیدایش شد به دوست خود خوشامد گفت، و ضمن نشستن او نیز سرپوش را برداشت و با ته‌مانده‌ها روبه رو شد و گفت «خدای من، من فراموش کرده‌ام که قبلاً شام خورده‌ایم.»

1. Nature and Nature's laws lay hid in night; God said, 'Let Newton be,' and all was light

2. Dr. Stukeley

و بالاخره يك بار وقتی که روزی سوار بر اسب از گرانتم^۱ به منزل می‌رفت، از اسب پایین آمد تا حیوان را از تپه اسپیتل گیت^۲، که درست در کنار شهر قرار داشت، بالا ببرد. بی آنکه متوجه شود، در سر بالایی تپه، اسب به پایین لغزد و تنها دهنه خالی در دست او باب باقی ماند، نیوتن وقتی از این حقیقت آگاه شد که، در بالای تپه، مجدداً در صدد جست‌زدن بر زین برآمده بود.

۱۱-۱۰ لایبنیتز

گو تفرید و یلهلم لایبنیتز، بزرگترین نابغه جامع قرن هفدهم، و رقیب نیوتن در ابداع حسابان، در لایپزیگ^۳، در ۱۶۴۶ متولد شد. از آنجا که در سنین کودکی خواندن زبانهای لاتین و یونانی را نزد خود فرا گرفته بود، قبل از ۲۰ سالگی، بر معارف عادی موجود در کتابهای درسی، در زمینه ریاضیات، فلسفه، الهیات، و حقوق تسلط یافت. با همه جوانی به خلق اولین ایده‌های خصیصه‌های کلی^۴ پرداخت، که متضمن ریاضیات جامعی بود که بعداً در قالب منطقی علامتی جورج بول^۵ (۱۸۱۵-۱۸۶۴) شکوفا شد، و بعداً، در ۱۹۱۰، در قالب اثر عظیم پرنسیپیا ماتماتیکا [اصول ریاضیات]^۶ وایتهد و راسل درآمد. وقتی، ظاهراً به دلیل جوانیش، از اعطای دکترای حقوق در دانشگاه لایپزیگ به او خودداری شد، به نورنبرگ رفت. در آنجا مقاله درخشانی درباره تدریس حقوق به روش تاریخی نوشت و آن را به برگزینده^۷ ماینتس^۸ اهدا کرد. این کار موجب شد که این برگزینده وی را در کمیسیونی برای تدوین مجدد بعضی قوانین انتخاب کند. باقی زندگی لایبنیتز از این زمان به بعد در خدمات سیاسی، ابتدا در خدمت برگزینده ماینتس و سپس، تقریباً از حدود ۱۶۷۶ تا زمان مرگش، در خدمت دوک برونسویک^۹ در هانوفر^{۱۰} صرف شد.

در سال ۱۶۷۲، طی يك مأموریت سیاسی در پاریس، لایبنیتز با هوینگنس، که در آن موقع در آنجا اقامت داشت، دیدار کرد، و دیپلمات جوان با جلب رضایت این عالم به فرا گرفتن ریاضیات در نزد وی پرداخت. در سال بعد لایبنیتز به يك مأموریت سیاسی به لندن فرستاده شد و در آنجا با اولدنبورگ و دیگران آشنا شد و در همانجا ماشین حساب ابداعی خود را در انجمن سلطنتی به معرض نمایش گذاشت. قبل از ترك پاریس برای احراز مقام پرسود کتابداری دوک برونسویک، لایبنیتز قضیه اساسی حسابان را کشف کرد، قسمت اعظم نمادهای خود را در حسابان به وجود آورد، و تعدادی از فرمولهای مقدماتی مشتق‌گیری را استخراج کرد.

1. Grantham	2. Spittlegate	3. Leipzig
4. Characteristica generalis	5. George Boole	
6. Principia mathematica		

۷. برگزیننده یا الکتور (elector)، عنوان برخی از امرای نواحی جزء امپراطوری مقدس روم، که امپراطور را انتخاب می‌کردند. م.

8. Mainz	9. Duke of Brunswick	10. Hanover



گوتفرید ویلهلم لایبنیتز
(مجموعه دیوید اسمیت)

انتصاب لایبنیتز در خدمت برگزینده هانوفر به او فراغت لازم را برای دنبال کردن مطالعات دلخواهش داد و در نتیجه وی بعد از خودکوهی از مقالات در انواع موضوعات به جا گذاشت. وی بویژه زبانشناس توانایی بود، که شهرتی به عنوان عالم زبان سانسکریت کسب کرد، و نوشته‌های او در فلسفه او را در ردیف ممتازی در این زمینه قرار داد. او طرح‌های متنوع بزرگی در سر داشت که بی‌حاصل از کار درآمدند، از آن جمله اتحاد مجدد کلیساهای پروتستان و کاتولیک، و بعداً، دو فرقه پروتستان زمان خود بود. در ۱۶۸۲ وی و او تومنکه^۱ مجله‌ای به نام آکتا ادیوکتودوم^۲ [اعمال دانشوران] را تأسیس کردند، که او سردیر آن شد. بیشتر مقاله‌های او در باره مکانیک، که عمدتاً در دوره دهساله از ۱۶۸۲ تا ۱۶۹۲ نوشته شده، در این مجله ظاهر شدند. این مجله، در بستر اروپا رواج بسیاری داشت. در سال ۱۷۰۰، لایبنیتز آکادمی علوم برلین را تأسیس کرد، و در صدد تأسیس آکادمیه‌های مشابهی در درسدن^۳، وین، و سن پترزبورگ در آمد.

هفت سال آخر عمر لایبنیتز به خاطر مشاجره‌ای با سعایت دیگران بین او و نیوتن بر سر اینکه او حسابان را مستقل از نیوتن ابداع کرده است، به تلخی سپری شد. در سال ۱۷۱۴، مخدوم او اولین پادشاه آلمانی انگلیس شد، و لایبنیتز در هانوفر، به فراموشی سپرده شد. می‌گویند که دو سال بعد، در ۱۷۱۶، وقتی از دنیا رفت، تنها کسی که در تشییع جنازه او شرکت کرد، منشی باو فایش بود.

لایبنیتز در جستجوی خود برای خصیصه‌های کلی به طرح‌هایی جهت يك نظریه در منطق ریاضی و يك روش علامتی با قواعد صوری که لزوم فکر کردن را از بین می‌برد، راهبر شد. گرچه این رؤیا فقط امروزه به مرحله تحقق محسوسی رسیده است، لایبنیتز، در قالب علامتگذاری کنونی، خواص اصلی جمع، ضرب، و نقیض منطقی را بیان کرده بود، مجموعه تهی و احتوای مجموعه‌ها را مطالعه کرده بود، و متوجه شباهتهای برخی خواص احتوای مجموعه‌ها و استلزام گزاره‌ها شده بود (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۰۱).

لايبنيتز حسابان خود را زماني بين سالهاي ۱۶۷۳ و ۱۶۷۶ اختراع کرد. در ۲۹ اکتبر ۱۶۷۵ بود که برای اولین بار علامت امروزي انتگرال را، به صورت $\int$ کشيده‌ای که از اولین حرف کلمه لاتين *summa* (مجموع) گرفته شده، برای نشان دادن مجموع تقسيم-ناپذيرهای کالویری به کار برد. چند هفته بعد او ديفرانسیلها ومشتقها، و همچنین انتگرالهایی نظير $\int y dx$ و $\int y dy$ را به صورتی نوشت، که ما امروزه می نویسیم. اولین مقاله چاپ شده او در حساب ديفرانسیل تا سال ۱۶۸۴ ظاهر نشد. در این مقاله وی dx را به عنوان بازه متناهی دلخواهی معرفی می کند و سپس dy را با تناسب زیر تعريف می کند

$$dy : dx = y$$

. تحت مماس

بسیاری از قواعد مقدماتی مشتقگیری را، که يك دانشجو در اوایل يك درس مقدماتی در حسابان می آموزد، لایبنيتز استخراج کرده است. قاعده یافتن مشتق m حاصلضرب دوتابع (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۶.۱۱) هنوز هم قاعده لایبنيتز نامیده می شود.

لایبنيتز احساسی قوی نسبت به صورتهای ریاضی داشت و نسبت به تواناییهای نمادگرایی در صورتی که با حسن تدبیر وضع شوند، حساس بود. نمادگذاری او در حسابان فرجام بسیار خوبی داشت، وبدون تردید ساده تر وانعطاف پذیرتر از نمادگذاری فلوکسیونی نیوتن بود. گرچه ریاضیدانان انگلیسی به مدت زیادی به نمادگذاری رهبرشان اصرار ورزیدند. در قرن نوزدهم بود که «انجمن تحلیلی»، نامی که یکی از مؤسسين آن، چارلز بابیج^۲، به آن داد، در کیمبريج به منظور حمایت از «اصول d -گرایی^۳ خالص در مقابل نقطه گرایی^۴ دانشگاه» تشکیل شد. باید خاطر نشان کنیم که فلسفه عقل گرایی d -گرایی مورد قبول بسیاری از دانشمندان زمان بود.

معمولاً گفته می شود که نظریه دترمینانها را لایبنيتز، در سال ۱۶۹۳، هنگامی که این فرمها را در رابطه با دستگاههای معادلات خطی همزمان در نظر گرفت، پدید آورده است، گرچه اندیشه مشابهی را ده سال پیش از او در ژاپن سکی کووا^۵ داشته است. تعمیم قضیه دو جمله ای به قضیه چند جمله ای، که به بسط

$$(a+b+\dots+n)^m$$

مربوط می شود، به لایبنيتز منسوب است. وی همچنین تلاش زیادی برای پایه گذاری نظریه پوشها کرد و دایره بوسان را تعريف نمود و اهمیت آن را در مطالعه منحنیها نشان داد.

ما در اینجا وارد بحث در باب مشاجره اسفار نیوتن-لایبنيتز نخواهیم شد. عقیده عمومی امروزه براین است که هریک از آنها حسابان را مستقل از دیگری کشف کرده است. با آنکه کشف نیوتن زودتر انجام شده، لایبنيتز زودتر به انتشار نتایج پرداخته است. اگر

1. Summa
2. Charles Babbage

3. d -ism [هواداری از نماد d برای ديفرانسیل که لایبنيتز آن را به کار برده بود]

4. dot-age [هواداری از نماد نقطه ای که نیوتن واضع آن بود]

5. Seki kōwa



مارکی دولوپیتال
(مجموعه دیوید اسمیت)

لایبنیتز ریاضیدانی به ژرفای نیوتن نبوده، ولی شاید وسعت اطلاعات او بیشتر بوده است، و در همان حال که به عنوان آنالیزدان و فیزیک - ریاضیدان از رقیب انگلیسی خود پائینتر بوده است، احتمالاً تخیل ریاضی نافذتری داشته و فراست برتری در درک صورتهای ریاضی داشته است. جدالی که نتیجه تفکین دیگران بود، منجر به آن شد که ریاضیدانان بریتانیایی بر پیشرفتهای اروپا چشم فروپوشند و این بیشتر به زیان ریاضیدانان انگلیسی تمام شد.

بعد از نیوتن و لایبنیتز برای مدتی شالوده‌های حسابان در پرده ابهام باقی ماند و چندان به آن اعتنا نشد، زیرا قابلیت کاربرد استثنایی این موضوع بود که توجه اولین محققین را به خود جلب کرد. تا سال ۱۷۵۵، قسمت اعظم حسابان دانشگاهی، همراه با بخشهایی از موضوعات پیشرفته‌تر، نظیر حساب تغییرات، پی‌ریزی شده بود. اولین کتاب درسی در این موضوع در ۱۶۹۶، نوشته مارکی دولوپیتال^۱ (۱۶۶۱-۱۷۵۴) هنگامی منتشر شد که وی، تحت یک توافق غیر عادی، دروس استاد خود، یوهان برنولی، را انتشار داد. در این کتاب قاعده موسوم به قاعده هویپیتال برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن با هم به صفر میل می‌کنند، دیده می‌شود.

لایبنیتز فردی عمیقاً خوش بین بود. وی امیدوار بود که نه تنها فرقه‌های مذهبی متضاد - اندیش زمان خود را در یک کلیسای جهانی واحد متحد کند، بلکه وی تصور می‌کرد راهی برای به مسیحیت درآوردن سراسر چین به وسیله آنچه فکر می‌کرد تصویر خلقت در حساب دودویی است، داشته باشد. چون می‌توان یک را نشانه خدا و هیچ را نشانه صفر دانست، وی پنداشت که خداوند همه چیز را از هیچ آفرید همچنانکه در حساب دودویی کلیه اعداد

1. Marquis de l'Hospital

به وسیله يك وصفر بیان می شوند. این اندیشه چنان باعث خوشحالی لایبنیتز شد که وی آن را طی مراسله ای به ژوزوئیت گریمالدی، رئیس هیأت ریاضی چین^۱، اعلام کرد، با این امید که این اندیشه باعث گرویدن امپراطور حاکم چین (که دلبستگی خاصی به علم داشت)، و در نتیجه تمام چین، به مسیحیت شود. به عنوان مورد دیگری از پندارهای مذهبی لایبنیتز، می توان اظهار نظر او را درباره اعداد موهومی مثال زد که آنها را نظیر روح القدس در کتب مقدس مسیحیت می دانست - نوعی موجود دو زیست که در نیمه راه بین وجود و عدم قرار دارد. ما شرح خود از لایبنیتز را با این تمجید اختتامیه بر استعداد یگانه او به پایان می بریم. اندیشه ریاضی را دوحوزه وسیع و متضاد است؛ ریاضیات پیوسته و ریاضیات گسسته. لایبنیتز تنها شخصی در تاریخ ریاضیات است که هر دو جنبه اندیشه را در حدی عالی دارا بود.

مطالعه های مسئله ای

۱۰۱۱ روش افنا

(الف) با فرض باصطلاح اصل ارشمیدس: اگر دو کمیت همجنس داده شده باشند، آنگاه می توانیم مضربی از کمیت کوچکتر پیدا کنیم که از کمیت بزرگتر بیشتر باشد. گزاره اصلی روش افنا را ثابت کنید: اگر از کمیت دلخواهی جزئی نا کمتر از نصف آن کسر شود، از باقیمانده قسمت دیگری که از نصف آن کمتر نیست، برداشته شود، و این عمل به همین قیاس ادامه یابد، در نهایت کمیتی باقی می ماند که از هر کمیت مفروض از همان جنس کمتر خواهد بود. (اصل ارشمیدس در تعریف چهارم مقاله ۷ اصول اقلیدس تلویحاً آورده شده است، و قضیه اصلی روش افنا به صورت قضیه ۱ مقاله X اصول دیده می شود.)

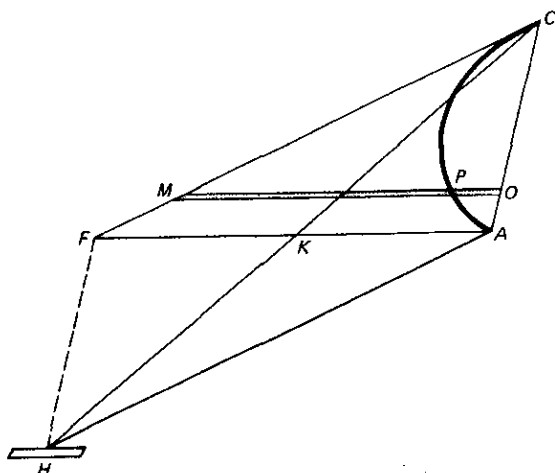
(ب) به کمک گزاره اصلی روش افنا، نشان دهید که تفاضل بین مساحات يك دایره و يك چندضلعی منتظم محیطی را می توان تا هر میزان دلخواه کوچک کرد.

۲۰۱۱ روش تعادل

شکل ۱۰۳ يك قطعه سهموی را نشان می دهد که AC وتر و CF در C بر سهمی مماس و AF با محور سهمی موازی است. OPM نیز با محور سهمی موازی است. K وسط FA است و $HK = KC$. HC را به عنوان اهرم اختیار کنید به طوری که K تکیه گاه آن باشد. مرکز را در H قرار دهید، و OM را در جای خود نگهدارید.

(الف) با استفاده از این حقیقت هندسی که $OM/OP = AC/AO$ و با روش تعادل ارشمیدسی نشان دهید که مساحت قطعه سهموی برابر یک سوم مساحت مثلث AFC است.

(ب) از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که مساحت يك قطعه سهموی برابر است با $2/3$ مساحت مثلث محصور بین وتر قطعه و مماس بر سهمی در دو نقطه انتهایی وتر.



شکل ۱۰۳

۳.۱۱ چند مسئله از ارشمیدس

ارشمیدس چند مقاله را به حل مسائل حجم و سطح اختصاص داده و نتایج خود را به کمک «روش افنا» ثابت کرده است. به کمک روشهای کنونی مسائل ارشمیدس زیر را حل کنید.

(الف) مساحت يك منطقه کروی به ارتفاع h و شعاع r را پیدا کنید.

(ب) مرکزهندسی قطعه کروی را پیدا کنید.

(ج) حجم يك گویه استوانه‌ای یا سم را که از قطع دادن يك استوانه مستدیر قائم با صفحه‌ای ماربریکی از اقطار قاعده استوانه حاصل می‌شود، حساب کنید.

(د) حجم مشترك دو استوانه مستدیر قائم با شعاعهای برابر را که دارای محوره‌ای متعامدند، پیدا کنید.

۴.۱۱ روش تقسیم ناپذیرها

(الف) (۱) نشان دهید که يك منشور مثلث القاعده را می‌توان به سه هرم مثلث القاعده تقطیع کرد که، دو به دو، قاعده‌های معادل و ارتفاعهای برابر داشته باشند. (۲) با استفاده از اصل دوم کاوالیری، نشان دهید که ۲ هرم مثلث القاعده که قاعده‌های معادل و ارتفاعهای برابر دارند، حجمشان برابر است. (۳) حال نشان دهید که حجم يك هرم مثلث القاعده برابر $1/3$ حاصلضرب مساحت قاعده هرم در ارتفاع آن است.

(ب) اصل کاوالیری را به کمک انتگرالگیری نوین ثابت کنید.

(ج) به کمک اصل دوم کاوالیری، حجم يك گویه استوانه‌ای، یا سم (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۳.۱۱ (ج)) را بر حسب r ، شعاع استوانه وابسته و h ، ارتفاع سم پیدا

کنید. (سم را با صفحه‌ای مانند p مار بر محور استوانه به دو قسمت برابر تقسیم کنید، و فرض کنید که A مساحت مقطع مثلث شکل حاصل باشد. يك منشور قائم که قاعده آن مربعی به مساحت A و قاعده واقع بر صفحه p و ارتفاع برابر با r باشد، بسازید. از منشور يك هرم ببرید که قاعده آن، قاعده‌ای از منشور باشد که در p واقع نیست و رأس آن نقطه‌ای در پایه دیگر منشور است. این منشور توکنده را می‌توان به عنوان جسم مبنای مقایسه برای یکی از دو نیمه سم به کار برد.)

(د) به کمک اصل کاولیری، حجم يك حلقه کروی را پیدا کنید که از کندن يك سوراخ استوانه‌ای شکل که با محور قطبی کره هم محور است، حاصل می‌شود. (جسم مبنای مقایسه را کره‌ای بگیرید که قطرش برابر با ارتفاع h حلقه باشد.)

(ه) نشان دهید که شعاع‌های کره‌های حلقه‌ها هر چه باشند، همه حلقه‌های کروی که ارتفاعشان یکی است، حجم‌های برابر دارند.

(و) يك چندوجهی طرح کنید که بتوان آن را به عنوان جسم مبنای مقایسه برای به دست آوردن حجم کره‌ای به شعاع r به کمک اصل کاولیری، به کار برد. (فرض کنید AB و CD دو قطعه خط در فضا باشند به طوری که: (۱) $AB = CD = 2r\sqrt{\pi}$ (۲) AB و CD هر يك بر خط واصل بین اواسطشان عمود باشند، (۳) طول قطعه خطی که اواسط را به هم وصل می‌کند، $2r$ است. (۴) AB بر CD عمود باشد. چهاروجهی $ABCD$ می‌تواند به عنوان چندوجهی مبنای مقایسه مورد استفاده قرار گیرد.)

(ز) با استفاده از اصل دوم کاولیری، حجم چنبره، یا حلقه لنگر را که از دوران دایره‌ای به شعاع r حول خطی در صفحه دایره و به فاصله $c \geq r$ از مرکز دایره، پدید می‌آید پیدا کنید. (چنبره را بر صفحه‌ای مانند p عمود بر محور چنبره قرار دهید. جسم مبنای مقایسه را استوانه قائم مستدیری به شعاع r و ارتفاع $2\pi c$ اختیار کنید و آن را در امتداد طول بر صفحه p قرار دهید.)

(ح) با استفاده از اصل اول کاولیری، حجم احاطه شده توسط منحنی

$$b^2 y^2 = (b+x)^2 (a^2 - x^2)$$

را که در آن $0 < a \leq b$ ، پیدا کنید.

(ط) نشان دهید که نمی‌توان يك چندضلعی یافت که به عنوان مساحت مبنای مقایسه برای به دست آوردن مساحت دایره مفروض به وسیله اصل اول کاولیری مورد استفاده قرار گیرد.

۵.۱۱ فرمول منشور گونی

يك منشور وار چند وجهی است که همه رأس‌های آن بر دو صفحه موازی قرار داشته باشند. وجوه واقع در این دو صفحه، قاعده‌های منشور وار نامیده می‌شوند. اگر تعداد اضلاع دو قاعده با هم برابر باشند، منشور وار را منشور گونی می‌نامند. يك منشور گونی تعمیم یافته هر

جسم صلبی است که دارای دو صفحه قاعده موازی باشد و مساحت مقاطع موازی با قاعده‌ها در آن توسط يك تابع درجه دوم از فواصل آنها از یکی از قاعده‌ها داده شود.

(الف) نشان دهید که حجم يك منشور، يك گوه (منشور قائم مثلث القاعده‌ای که طوری برگردانده شده باشد که بر روی یکی از وجوه جانبی آن، که قاعده آن را تشکیل می‌دهد، قرار گیرد)، و يك هرم با فرمول منشورگونی داده می‌شود:

$$V = \frac{h(U + \frac{1}{2}M + L)}{6}$$

که در آن h ارتفاع، U ، L ، و M بترتیب مساحت‌های قاعده‌های بالایی و پایینی و میانی هستند.

(ب) نشان دهید که حجم هر منشوروار محدب از فرمول منشورگونی به دست می‌آید.

(ج) به کمک اصل کاوالیری، نشان دهید که حجم هر منشوروار تعمیم یافته از فرمول منشورگونی به دست می‌آید.

(د) قسمت (ج) را با استفاده از حساب انتگرال ثابت کنید.

(ه) به کمک حساب انتگرال نشان دهید که حجم هر جسمی که دارای دو صفحه قاعده موازی باشد و مساحت‌های مقاطع موازی با قاعده آن‌ها توسط يك معادله درجه سوم از فواصل آنها از يك قاعده داده می‌شود، از فرمول منشورگونی به دست می‌آید.

(و) با استفاده از فرمول منشورگونی حجم: (۱) يك کره، (۲) يك بیضی، (۳) يك گاو استوانه‌ای، (۴) جسم مطالعه مسئله‌ای ۳.۱۱ (د) را پیدا کنید.

۶.۱۱ مشتقگیری

(الف) شیب خط مماس در نقطه (۳، ۴) بر دایره $x^2 + y^2 = 25$ را به روش‌های زیر پیدا کنید:

۱. روش فرما.

۲. روش برو.

۳. روش فلوکسیونهای نیوتن.

۴. روش امروزی.

(ب) اگر $y = uv$ ، که در آن u و v توابعی از x اند، نشان دهید که مشتق y نسبت به x از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u''v^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u'''v^{(n-3)} + \dots + u^{(n)}v.$$

این دستور، به قاعده لایبنیتز مشهور است.

۷.۱۱ قضیه دوجمله‌ای

(الف) نشان دهید که بیان نیوتن از قضیه دوجمله‌ای که در بخش ۱۱-۹ داده شد با بسط آشنای زیر معادل است.

$$(a+b)^r = a^r + r a^{r-1} b + \frac{r(r-1)}{2!} a^{r-2} b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} a^{r-3} b^3 + \dots$$

(ب) با استفاده از قضیه دوجمله‌ای نشان دهید که اگر $(a+ib)^k = p+iq$ ، که در آن a, b, p, q اعداد حقیقی اند، k عدد صحیح مثبتی است، و $i = \sqrt{-1}$ ، آنگاه $(a-ib)^k = p-iq$.

(ج) با استفاده از (ب) نشان دهید که ریشه‌های موهومی یک چندجمله‌ای باضرایب حقیقی به صورت مزدوج ظاهر می‌شوند. (این نتیجه را نیوتن به دست داده است.)

۸.۱۱ یک کران بالا برای ریشه‌های یک معادله چندجمله‌ای

(الف) با استفاده از قضیه دوجمله‌ای، یا به طریق دیگر، نشان دهید که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n ام باشد، آنگاه

$$f(y+h) \equiv f(h) + f'(h)y + f''(h)\frac{y^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(h)\frac{y^n}{n!}.$$

(ب) نشان دهید که هر عددی که به ازای آن یک چندجمله‌ای حقیقی $f(x)$ و همه مشتق‌های $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ آن، مثبت باشند کران بالایی برای ریشه‌های حقیقی $f(x) = 0$ است. (این نتیجه از آن نیوتن است.)

(ج) نشان دهید که اگر به ازای $x = a$ ، $f^{(n-k)}(x), f^{(n-k+1)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$ همه مثبت باشند، آنگاه این توابع به ازای هر عدد $x > a$ نیز مثبت خواهند بود.

(د) نتایج قسمت‌های (ب) و (ج) را می‌توان برای یافتن کران بالای نزدیکی برای ریشه‌های حقیقی یک معادله چند جمله‌ای حقیقی به کار برد. روش کلی به صورت زیر است: کوچکترین عدد صحیحی را که $f^{(n-1)}(x)$ را مثبت می‌کند، اختیار کنید. این عدد را در $f^{(n-2)}(x)$ قرار دهید. اگر به یک نتیجه منفی برسیم، عدد صحیح را متوالیاً واحد به واحد افزایش دهید تا عدد صحیحی پیدا کنید که این تابع را مثبت نماید. حال با عدد صحیح جدید مثل قبل عمل کنید. کار را به همین منوال ادامه دهید تا عدد صحیحی پیدا شود که کلیه تابع‌های $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ را مثبت نماید. به کمک این روش کران بالایی برای ریشه‌های حقیقی

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x + 9 = 0$$

پیدا کنید.

۹.۱۱ جواب تقریبی معادلات

(الف) نیوتن روشی برای تقریب کردن مقادیر ریشه‌های حقیقی يك معادله عددی ابداع کرد که هم در معادلات جبری و هم در معادلات غیر جبری به کار می‌آید. پیرایش یافته این روش، که امروزه به روش نیوتن مشهور است، بدین قرار است: اگر $f(x) = 0$ در بازه $[a, b]$ تنها يك ریشه داشته باشد، و اگر نه $f'(x)$ در این بازه صفر نشود و نه $f''(x)$ ، و اگر x_0 را یکی از دو عدد a یا b بگیریم که به ازای آن $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ هم علامت باشند، آنگاه

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

نزدیکتر از x_0 به ریشه است. این نتیجه را ثابت کنید.

(ب) به روش نیوتن معادله درجه سوم $x^3 - 2x - 5 = 0$ را برای یافتن ریشه‌ای واقع بین ۲ و ۳، حل کنید.

(ج) به روش نیوتن معادله $x = \tan x$ را برای یافتن ریشه‌ای واقع بین ۴ و ۴٫۵، حل کنید.

(د) به روش نیوتن مقدار تقریبی $\sqrt{12}$ را با سه رقم اعشار پیدا کنید.

(ه) به کمک هذلولی $xy = k$ ، $k > 0$ ، نشان دهید که اگر x_1 تقریبی برای $\sqrt{k}$ باشد، آنگاه $x_2 = (x_1 + k/x_1)/2$ تقریب بهتری است، و همینطور الی آخر. (این روش هرون برای تقریب کردن جذر است.) (به بخش ۶-۶ نگاه کنید.)

(و) روش (ه) را با به کار بردن روش نیوتن در مورد $f(x) = x^2 - k$ ، پیدا کنید.

(ز) با به کار بستن روش نیوتن در مورد $f(x) = x^n - k$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است، نشان دهید که اگر x_1 تقریبی برای $\sqrt[n]{k}$ باشد، آنگاه

$$x_2 = \frac{(n-1)x_1 + \frac{k}{x_1^{n-1}}}{n}$$

تقریب بهتری است، و همینطور الی آخر.

(ح) در کتابی راجع به نظریه معادلات، دنبال قضیه‌ای به نام قضیه فوریه بگردید که در آن، شرط حتمی موفقیت آمیز بودن روش نیوتن ذکر شده است.

(در ۱۶۹۰، جوزف رفسون^۱ (۱۶۴۸-۱۷۱۵)، یکی از اعضای انجمن سلطنتی لندن، رساله‌ای منتشر نمود، تحت عنوان تحلیل معادلات عمومی^۲، که اساساً روش نیوتن را برای تقریب ریشه‌های يك معادله عددی شرح می‌دهد. به این دلیل، امروزه اغلب این روش را روش نیوتن-رفسون می‌نامند. نیوتن روش خود را، که در مورد معادله درجه سوم قسمت (ب) توضیح داده بود، در روش فلوکسیونهای خود شرح می‌دهد، که گرچه در ۱۶۷۱ نوشته شده بود، تا سال ۱۷۳۶ چاپ نشد. اولین شرح چاپ شده روش نیوتن

در جبر والیس در ۱۶۸۵ ظاهر شد.*

۱۰.۱۱ جبر مجموعه‌ها

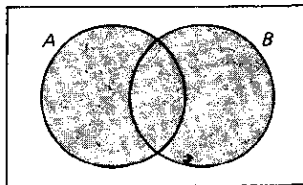
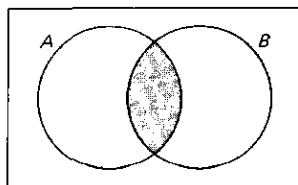
مفهوم «مجموعه‌ای از اشیاء» در منطق اهمیت اساسی دارد. لایبنیتز مقداری جبر مقدماتی مجموعه‌ها را به‌وجود آورد. با استفاده از تمادگذاری امروزی، اگر A و B مجموعه‌هایی از اشیاء باشند، آنگاه $A \cap B$ (که اشتراك، یا حاصلضرب A و B نامیده می‌شود) معرف مجموعه همه اشیایی است که هم به A و هم به B تعلق دارند، و $A \cup B$ (که اجتماع، یا مجموع A و B نامیده می‌شود) معرف مجموعه همه اشیایی است که به A یا به B یا به هر دو، تعلق دارند.

جبر مجموعه‌ها را می‌توان به‌طور نموداری به‌وسیله اصطلاح دیاگرام ون نشان داد، که در آن مجموعه‌ای مانند A با ناحیه مفروض نمایش داده می‌شود. مثلاً، اگر دو مجموعه A و B را با نقاط درونی دو دایره A و B ، مانند شکل ۱۰۴. نشان دهیم؛ مجموعه $A \cap B$ با ناحیه مشترك این دو دایره نمایش داده می‌شود، و مجموعه $A \cup B$ با ناحیه متشکل از همه نقاطی که در هر یک از دو دایره واقع اند، نشان داده می‌شود. اگر همه مجموعه‌های خود را محاط در داخل يك مستطیل بگیریم، آنگاه منظور از A' ، که متمم A نامیده می‌شود، همه نقاطی است که داخل مستطیل ولی در خارج ناحیه معرف A قرار دارند.

(الف) بروی يك دیاگرام ون هر يك از نواحی زیر را پرداز برنید: $A \cap (B' \cup C)$ ، $(A \cup B') \cup C'$ ، $(A' \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ب) با پرداز زدن نواحی مناسب بروی يك دیاگرام ون صحت تساویهای زیر را در جبر مجموعه‌ها تحقیق کنید: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ؛ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ؛ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ، $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ج) با پرداز زدن نواحی مناسب بر روی يك دیاگرام ون تعیین کنید که کدام يك از تساویهای زیر معتبرند: $A' \cup B' = (A \cup B)'$ ، $(A' \cup B)' = A \cap B'$ ؛ $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cap C'$.



شکل ۱۰۴

* نگاه کنید به ف. کازوری

عنوان مقاله

- ۱/۱۱ رابطه پارادوکسهای زنون با حسابان.
- ۲/۱۱ سهم یونانیان در بسط حساب انتگرال.
- ۳/۱۱ نیوتن و لایبنیتز، پیشگامان نوین بسط حسابان.
- ۴/۱۱ استفاده از اصل دوم کالویری در يك درس مقدماتی در هندسه فضایی.
- ۵/۱۱ بزرگترین دستاورد ریاضی در قرن هفدهم.
- ۶/۱۱ تصور لایبنیتز از دیفرانسیل.
- ۷/۱۱ برو و قضیه اساسی حسابان.
- ۸/۱۱ جدول نیوتن-لایبنیتز.
- ۹/۱۱ چهار کتاب مهم ریاضی قرن هفدهم.
- ۱۰/۱۱ پنج ریاضیدان مهم بریتانیایی در قرن هفدهم.
- ۱۱/۱۱ افرادی که در قرن هفدهم هم در ریاضیات و هم در فیزیک برجسته بودند.
- ۱۲/۱۱ شش کشور پیشتاز از نظر ریاضی در قرن هفدهم، به ترتیب اهمیت.
- ۱۳/۱۱ نیوتن ژاپنی.
- ۱۴/۱۱ تاریخچه کسرهای مسلسل.
- ۱۵/۱۱ دترمینانها در ریاضیات ژاپنی قرن هفدهم.

کتابنامه

- ANTHONY, H. D., *Sir Isaac Newton*. New York: Abelard-Schuman, 1960.
- BARON, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford: Pergamon Press, 1969.
- BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
- BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, 1959.
- BREWSTER, SIR DAVID, *Life of Newton*. London: John Murray, 1831.
- BRODETSKY, SELIG, *Sir Isaac Newton: A Brief Account of His Life and Work*. London: Methuen & Co., 1927.
- CAJORI, FLORIAN, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, From Newton to Woodhouse*. Chicago: Open Court, 1919.
- , *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928–1929.
- , *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Revision of the translation of 1729 by Andrew Motte. Berkeley, Calif: University of California Press, 1934.
- CHILD, J. M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago: Open Court, 1920.
- , *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. Chicago: Open Court, 1916.
- COOLIDGE, J. L., *Geometry of the Complex Domain*. New York: Oxford University Press, 1924.
- , *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
- , *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
- DE MORGAN, AUGUSTUS, *Essays on the Life and Work of Newton*. Chicago: Open Court, 1914.
- EDWARDS, C. H., Jr., *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1980.
- HALL, A. R., and M. B. HALL, eds., *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. New York: Cambridge University Press, 1962.

- , *Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz*. New York: Cambridge University Press, 1980.
- HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics*. Vol. 2. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
- , *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
- , *The Method of Archimedes Recently Discovered by Heiberg*. New York: Cambridge University Press, 1912. Contained in *The Works of Archimedes*, reprinted by Dover.
- , *The Works of Archimedes*. New York: Cambridge University Press, 1897. Reprinted by Dover.
- KERN, W. F., and J. R. BLAND, *Solid Mensuration; with Proofs*. 2nd ed. New York: John Wiley, 1938.
- LANE, E. P., *Metric Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Chicago: University of Chicago Press, 1940.
- LEE, H. D. P., ed., *Zeno of Elea*. Cambridge: Cambridge University Press, 1936.
- LOVITT, W. V., *Elementary Theory of Equations*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1939.
- MACFARLANE, ALEXANDER, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century*, Mathematical Monographs, No. 17. New York: John Wiley, 1916.
- MANHEIM, J. H., *The Genesis of Point Set Topology*. New York: Macmillan, 1964.
- MANUEL, F. E., *A Portrait of Isaac Newton*. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1968.
- MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- MORE, L. T., *Isaac Newton, a Biography*. New York: Dover, 1962.
- MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, Mead, 1961.
- MUIR, THOMAS, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. 4 vols. New York: Dover, 1960.
- NEUGEBAUER, OTTO, *The Exact Sciences in Antiquity*. 2d ed. New York: Harper and Row, 1962.
- NEWTON, SIR ISAAC, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translated by Andrew Motte, ed. Florian Cajori. Berkeley, Calif: University of California Press, 1934.
- , *Mathematical Works*. 2 vols., ed. D. T. Whiteside. New York: Johnson Reprint, 1964-1967.
- , *Mathematical Papers*. 7 vols., ed. D. T. Whiteside. New York: Cambridge University Press, 1967.
- PHILLIPS, H. B., *Differential Equations*. 3rd ed. New York: John Wiley, 1934.
- ROSENTHAL, A., "The History of Calculus," *American Mathematical Monthly*, 58 (1951), pp. 75-86.
- ROYAL SOCIETY OF LONDON, *Newton Tercentenary Celebrations, 15-19 July, 1946*. New York: Macmillan, 1947.
- SCOTT, J. T., *The Mathematical Work of John Wallis (1616-1703)*. London: Taylor & Francis, 1938.
- SMITH, D. E., *History of Modern Mathematics*. 4th ed. New York: John Wiley, 1906.
- , *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
- SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, From the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York: Oxford University Press, 1925.
- TAYLOR, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*. Cambridge: The University Press, 1954.
- TOEPLITZ, OTTO, *The Calculus, a Genetic Approach*. Chicago: University of Chicago Press, 1963.
- TURNBULL, H. W., *Mathematical Discoveries of Newton*. Glasgow: Blackie & Sons, 1945.
- , *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
- , ed., *Correspondence of Newton*. 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1959-1961.
- WALKER, EVELYN, *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Personne de Roberval*. New York: Teachers College, Columbia University, 1932.

قرن هجدهم و بهره‌برداری از حسابان

۱-۱۲ مقدمه و پوزش‌خواهی

حساب، جبر مقدماتی، هندسه، و مثلثات که معمولاً امروزه در مدارس تدریس می‌شوند، همراه جبر مقدماتی دانشگاهی، هندسه تحلیلی، و حسابان مقدماتی که معمولاً در سالهای اول یا دوم دانشگاه تدریس می‌شوند، آنچه را که عموماً «ریاضیات مقدماتی» نامیده می‌شود، تشکیل می‌دهند. پس در این مرحله از کتاب بررسی تاریخی ریاضیات مقدماتی را به صورت امروزی آن، به پایان رسانیده‌ایم. جالب است، بدون وسعت دادن دامنه تعمیم، توجه کنیم که دنبالهٔ دروس ریاضیات که امروزه در کلاسها تدریس می‌شود کاملاً مسیر تکاملی این موضوع را می‌پیماید.

بحق ادعا شده است که تاریخ يك موضوع را بدون آگاهی از خود موضوع نمی‌توان به خوبی مطالعه کرد. در نتیجه مطالعهٔ گسترده‌ای از آنچه طی دو و سه ربع قرن گذشته در ریاضیات اتفاق افتاده، با درك صحیحی از آن، مستلزم مطالعهٔ دروس پیشرفته‌تری ماوراء حسابان است. وقتی دانشجو از چنین زمینه‌ای از اطلاعات برخوردار باشد، مطالعهٔ کتابهای بسیار خوب پیدایش ریاضیات^۱، نوشته ات. بل، تاریخ ریاضیات^۲ نوشتهٔ ك. ب. بویر^۳، و اندیشهٔ ریاضی از عهد باستان تا عصر جدید^۴، نوشتهٔ موريس كلاین^۵ به او توصیه می‌شوند.

-
1. The Development of Mathematics
 2. History of Mathematics
 3. C.B. Boyer
 4. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
 5. Morris Kline

مع هذا، افزودن فصل حاضر، و سه فصل اختتامیه بعدی به کتاب مقتضی به نظر می رسد. سعی بر این خواهد بود که در این فصول نکات اساسی ریاضیات قرنهای هجدهم، نوزدهم، و بیستم که در محدودهٔ درك خوانندگان است که کتاب برای آنها نوشته شده و جهت گیری کنونی بسط ریاضیات را در زمینه‌ای مقلداتی نشان می‌دهد، عرضه کنیم. در این صورت، میحث ریاضیات مقلداتی در جایگاه واقعی خود پیش در آمدی بردستاوردهای جالبتر دوران معاصر خواهد بود.

بر خلاصه بودن و کامل نبودن مطالب بعدی نمی توان چندان با قاطعیت انگشت گذاشت. تاریخ معظم ریاضیات موریتس کانتور، که به پایان قرن هجدهم خاتمه می پذیرد، متشکل از چهار جلد بزرگ است که به طور متوسط هر کدام بالغ بر هزار صفحه می شود. محتاطانه بر آورد شده است که اگر بنا باشد تاریخ ریاضیات قرن نوزدهم با همان جزئیات نوشته شود حداقل چهارده جلد دیگر با این حجم لازم است. هنوز کسی جرأت بر آورد تعداد مجلدهای لازم از این نوع را برای بررسی تاریخ ریاضیات در سه ربع اول قرن بیستم، که بمراتب پربارتر از همه دوره ها بوده، به خود نداده است. و، همانطور که در بالا خاطر نشان شد، مقدار بسیار کمی از این مطالب را می توان با ریاضیات معمولی دورهٔ لیسانس به خوبی فهمید، در واقع درك قسمت اعظم این مطالب مستلزم داشتن اطلاعات يك خبره در علوم ریاضی است.

رشد تقریباً انفجار آمیز تحقیقات ریاضی در دوران جدید را این واقعیت که قبل از ۱۷۵۵ تنها، به حسابی، ۱۷ نشریهٔ ادواری شامل مقالات ریاضی وجود داشته، تعداد این نشریات در قرن هجدهم به ۲۱۵، در قرن نوزدهم به ۹۵۵ رسیده، و تعداد آنها در قرن نوزدهم افزایش فوق العاده‌ای یافته است، روشنی بیشتری می بخشد. بعلاوه، تا قبل از قرن نوزدهم مجلاتی که عمدتاً یا منحصراً مختص ریاضیات باشند، پدید نیامدند. گفته شده است، و احتمالاً کاملاً بجا، که مقالات این مجلات تحقیقی تاریخ واقعی ریاضیات نوین را تشکیل می دهند، و باید اقرار کرد که جز عدهٔ بسیار قلیلی از این مقاله ها برای کسی جز اهل فن، قابل فهم نیستند.

حسابان، به همراهی هندسهٔ تحلیلی، مهمترین ابزار ریاضی کشف شده در قرن هجدهم بود. معلوم شد که این وسیله، توانایی قابل ملاحظه‌ای دارد و قادر به حل مسائلی است که پیشتر از آن کاملاً تسخیرناپذیر می نمودند. قابلیت کاربرد گسترده و اعجاب آور آن بود که قسمت اعظم محققان ریاضی آن روز را به خود جلب کرد، و در نتیجهٔ مقالات بسیار زیادی بدون کمترین اعتناء به رضایت بخش بودن مبانی آنها بیرون داده شدند. توجیه اغلب روندهای به کار گرفته شده بر مبنای نتیجه بخش بودن آنها بود، و تنها پس از سپری شدن قرن هجدهم و ورود برخی تناقضات و ممتنعات به حیطهٔ ریاضیات بود که ریاضیدانان ضرورت وادسی منطقی و تأسیس دقیق اساس کار خود را حس کردند. تلاش پر زحمات قرار دادن آنالیز بر يك مبنای منطقی دقیق عکس العمل طبیعی در مقابل کاربرد آشفتهٔ شهود و صورت- گسرای قرن پیشین بود. این، وظیفهٔ بسیار دشواری از کار درآمد و بخش اعظم فعالیت صدمال بعد صرف شاخه‌های مختلف آن شد. یکی از نتایج این کار دقیق در مبنای آنالیز

پرداختن به مبانی کلیه شاخه‌های ریاضیات به همان دقت و نیز پیرایش بسیاری از مفاهیم آنها شد. مثلاً، مفهوم خود تابع می‌بایست روشن می‌شد، و مفاهیمی نظیر حد، پیوستگی، مشتق‌پذیری، و انتگرال‌پذیری می‌بایست به دقت و روشنی تعریف می‌شدند. این وظیفه پالایش مفاهیم اساسی ریاضیات به نوبه خود به تعمیم‌های پیچیده‌ای منجر گردید. من باب ذکر، مفاهیمی نظیر فضا، بعد، همگرایی، و انتگرال‌پذیری دستخوش تعمیم‌ها و تجربدهای قابل ملاحظه‌ای شدند. بخش قابل توجهی از ریاضیات قرن بیستم به این قبیل کارها اختصاص یافته است و تا کنون تعمیم و تجربد، جنبه‌های اصلی ریاضیات امروزی گشته‌اند. اما برخی از این پیشرفتهای، به نوبه خود، دسته جدیدی از وضعیتهای پارادوکسی را به میان آوردند. به عنوان مثال، تعمیم اعداد ترانسفینی، و مطالعه مجرد مجموعه‌ها به وسعت و عمق بسیاری از شاخه‌های ریاضیات افزوده است، اما در همان حال برخی پارادوکسهای بسیار مضطرب کننده را که به نظر می‌رسد در ژرفای ریاضیات قرار دارند، آشکار ساخته‌اند. ما ظاهراً امروزه در این نقطه قرار گرفته‌ایم، و شاید چنین شود که ربع آخر قرن بیستم شاهد پاسخگویی به برخی از این مسائل بحرانی شود.

در جمع‌بندی پاراگراف آخر می‌توان، تا حدی با اطمینان به درستی آن، گفت که قرن هجدهم عمده‌تاً صرف بهره‌برداری از روشهای جدید و نیرومند حسابان شد، قرن نوزدهم عمده‌تاً به تلاش در تأسیس پایه منطقی محکمی برای ساختمان عظیم ولی سست بنیاد قرن پیشین اختصاص یافت، قرن بیستم، عمده‌تاً، در تعمیم دستاوردهای قبلی تا سرحد امکان صرف گردید، و اینک بسیاری از ریاضیدانان امروزی حتی با مسائل شالوده‌ای عمیق‌تری دست به‌گیرانند. این تصویر کلی با عوامل جامعه‌شناختی متعددی که در بسط هر علمی تأثیر می‌گذارند، پیچیده‌تر می‌شود. موضوعاتی مانند رشد بیمه عمر، ایجاد نیروهای دریایی عظیم قرن هجدهم، مسائل اقتصادی و فنی ناشی از صنعتی شدن اروپای غربی و امریکا در قرن نوزدهم، جو جنگ دنیاگیر قرن بیستم، و تلاش متمرکز امروزی برای تسخیر فضا، به پیشرفتهای عملی زیادی در زمینه ریاضیات انجامیده است. انشعابی در ریاضیات به «مجرد»، و «کاربردی» صورت گرفته است، تحقیقات در زمینه اول را تا حد زیادی متخصصینی انجام می‌دهند که به ریاضیات به‌خاطر خود آن علاقه‌مند شده‌اند، و در زمینه دوم راکسانی که به کاربردهای مستقیم آن دلچسپی دارند.

اکنون، در باقی این کتاب، برخی از جزئیات سیمای کلی طرح بالا را تکمیل می‌کنیم.

۱۲-۲ خانواده برنولی

اعضای خانواده برنولی^۱، آبراهام دموآور^۲، بروک تیلر^۳، کالین ماکلورن، لئونهارت اویلر،

۱. تلفظ این نام به فرانسه برنویی و به زبان انگلیسی برنولی است. هر دو صورت تلفظ در فارسی رایج است. س.م.

آلکسی کلود کلو روا، ژان لورون دالامبر^۲، یوهان هاینریش لامبرت، ژوزف لوئی لاگرانژ^۳، و گاسپار مونژ سهم عمده را در ریاضیات در قرن هجدهم داشتند. خواهیم دید که منشأ و هدف بخش اعظم ریاضیات اغلب آنها در کاربردهای حسابان در زمینه‌های مکانیک و نجوم بوده است. بعد از سپری شدن بخش قابل توجهی از قرن نوزدهم بود که تحقیق ریاضی، خود را عموماً از قید این نقطه نظر رها ساخت. در این بخش خانواده برجسته برنولی توصیف می‌شود.

یکی از مشخص‌ترین خانواده‌ها در تاریخ ریاضیات و علوم خانواده برنولی از سوئیس است، که، از اواخر قرن هفدهم به بعد، تعداد بسیار زیادی از ریاضیدانان و دانشمندان توانا را به وجود آورده است. سابقه خانوادگی آنها با دو برادر، یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) و یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) شروع می‌شود، که برخی از دستاوردهای ریاضی آنان قبلاً در این کتاب ذکر شده‌اند. این دو وقتی که انتشار مقاله‌های لایبنیتز در اعمال دانشوران آغاز شد، از اشتغالات حرفه‌ای سابق خود دست کشیدند. آنان از جمله اولین ریاضیدانانی بودند که به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان پی بردند و این وسیله را در انواع گوناگون متعددی از مسائل به کار بردند. از سال ۱۶۸۷ تا زمان مرگش، یاکوب کرسی ریاضی را در دانشگاه بال عهده‌دار بود. یوهان، در سال ۱۶۹۷، استاد ریاضیات در دانشگاه گرونینگن^۴ گردید، و سپس، بعد از مرگ یاکوب در سال ۱۷۰۵، جانشین برادر خود در دانشگاه بال^۵ شد و مابقی عمر را در همانجا ماند. دو برادر، که اغلب رقبای سرسخت یکدیگر بودند، تقریباً به طور مداوم با لایبنیتز و با یکدیگر در تبادل نظر بودند. از جمله کارهای یاکوب برنولی در ریاضیات کاربرد مختصات قطبی (نگاه کنید به



یاکوب برنولی
(مجموعه دیویدا سمیت)

1. Alexis Claude Clairaut
3. Joseph Louis Lagrange

2. Jean-le-Rond d'Alembert
4. Gröningen 5. Basel

بخش ۱۴-۴)، استخراج فرمول شعاع انحنای يك منحنی مستوی هم در مختصات متعامد و هم در مختصات قطبی، مطالعهٔ منحنی زنجیری با تعمیمهایی از آن به ریسمان‌هایی با چگالی متغیر و ریسمان‌هایی که تحت عمل يك نیروی مرکزی قرار دارند، مطالعهٔ تعدادی دیگر از منحنیهای مسطح از درجات بالاتر، کشف با اصطلاح منحنی همزمان-یا منحنی که جسمی در امتداد آن با سرعت عمودی یکنواختی سقوط می‌کند (این منحنی يك سهمی است از درجهٔ $3/2$ که مماس در نقطهٔ بازگشت آن قائم است)، تعیین شکلی که يك میلهٔ کشسان اختیار می‌کند وقتی که يك سر آن ثابت و به‌سر دیگرش وزندای آویخته شده باشد، با شکلی که يك ورقهٔ مستطیلی قابل انعطاف اختیار می‌کند وقتی که دو ضلع مقابل آن به طور افقی ثابت در يك ارتفاع نگهداشته شود و در همان حال مایع سنگینی روی آن ریخته شود، و شکل بادبانی مستطیل شکلی که از باد پرباشد. وی همچنین مسئلهٔ شکلهای هم پیرامون (مسیرهای مسطح بسته‌ای از انواع مفروض که محیط آنها ثابت و مساحت آنها ماکزیموم باشد) را مطرح و دربارهٔ آنها بحث کرد و بنابراین یکی از اولین ریاضیدانانی بود که در حساب تغییرات کار کرد. وی همچنین (همانطور که در بخش ۱۵-۳ خاطر نشان شد) یکی از اولین دانشوران در احتمال ریاضی بود. کتاب او در این زمینه، فن حدس‌زدن، بعد از مرگ وی در ۱۷۱۳ چاپ شد. چیزهای زیادی وجود دارند که در حال حاضر نام یا کوب برنولی بر آنها گذاشته شده است. از جملهٔ آنها توزیع برنولی و قضیهٔ برنولی در نظریهٔ آمار و احتمال است. معادلهٔ برنولی که هر دانشجوی اولین درس معادلات دیفرانسیل با آن برخورد می‌کند، اعداد برنولی و چند جمله‌ایهای برنولی مخص نظریهٔ اعداد، و لیمیتسکات برنولی که در اولین درس حسابان به آن برخورد می‌شود. در جواب برنولی به مسئلهٔ منحنی همزمان، که برای اولین بار در اعمال دانشوران در ۱۶۹۵ چاپ شد، برای اولین بار با کلمهٔ «انتگرال» در معنی حسابان آن بومی‌خویریم. لاینیتز حساب انتگرال را حساب مجموعهات^۱ نامیده بود؛ در ۱۶۹۶ لاینیتز و یوهان برنولی موافقت کردند که آن را حساب انتگرال^۲ بنامند. این مطلب که مارپیچ لگاریتمی تحت تبدیلات گوناگون مجدداً مارپیچی از نوع خود پدیدمی‌آورد، باعث اعجاب یا کوب برنولی شد و، به تقلید از شمیدس، وصیت کرد که این مارپیچ را همراه با جملهٔ «آدام موتاتارسورگو»^۳ («من، هر چند دگرگون، باز بر خواهم‌خاست»)، بر سنگ قبرش حك کنند.

یوهان برنولی در ریاضیات حتی سهمی برابرتر از برادرش یا کوب داشت. گرچه وی مردی حسود و بدخو بود، یکی از موفقترین معلمین زمان خود بود. او به حسابان غنای زیادی بخشید. در شناساندن قدرت حسابان در بزر اروپا تأثیر زیادی داشت. همچنانکه دیده‌ایم (در بخش ۱۱-۱۵)، مقالات متعلق به او بود که مارکی دولوپیتال (۱۶۶۱-۱۷۵۴)، تحت موافقتنامهٔ مالی عجیبی با یوهان، در سال ۱۶۹۶ در قالب اولین کتاب درسی حسابان گردآوری و منتشر کرد. بدین طریق بود که روش آشنای محاسبهٔ صورت مبهم $0/0$ ، در

1. calculus summatorius 2. calculus integralis
3. Eadem mutata resurgo

متون درسی بعدی حسابان، بغلط به قاعده هویپیتال شهرت یافت. یوهان برنولسی در زمینه‌های کاملاً گوناگونی آثاری به رشته تحریر درآورد، پدیده نورشناختی مربوط به انعکاس وانکسار، تعیین مسیرهای متعامد خانواده منحنیها، محاسبه طول قوس منحنیها، تعیین مساحت منحنیها به کمک سریها، مثلثات تحلیلی، حسابان توابع مجهول القوا، و دیگر موضوعات از جمله اینهاست. یکی از برجسته‌ترین قطعات آثار او سهم وی در مسئله گوناخته‌ترین زمان - تعیین منحنی که ذره وزنی که در يك میدان جاذبه‌ای بین دو نقطه مفروض حرکت می‌کند، طی آن سریع‌ترین نزول را دارد - می‌باشد؛ این منحنی قوسی از يك منحنی سیکلوئید مناسب ازکار درآمد. این مسئله را یاکوب برنولی هم مورد بحث قرار داد. منحنی سیکلوئیدی جواب مسئله همزمانی - تعیین منحنی که يك ذره وزین در امتداد آن در مدت زمان ثابتی به نقطه مفروضی از منحنی می‌رسد، صرف‌نظر از اینکه از چه نقطه اولیه‌ای بر منحنی به حرکت آغاز کرده باشد - نیز هست. مسئله اخیر، که به صورتی کلیتر توسط یوهان برنولی، اوپلر، و لاگرانژ مورد بحث واقع شد، قبلاً به وسیله هویگنس (سال ۱۶۷۳) و نیوتن (سال ۱۶۸۷) حل شده و هویگنس در ساختن پاندول ساعت (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۷۰۱۰ (ج)) آن را مورد استفاده قرار داده است.

یوهان برنولی سه پسر داشت، نیکولائوس (۱۶۹۵-۱۷۲۶)، دانیل (۱۷۰۰-۱۷۸۲)، و یوهان (II) (۱۷۱۰-۱۷۹۰)، که همه آنها به عنوان ریاضیدانان و دانشمندان قرن هجدهم به شهرت رسیدند. نیکولائوس، که استعداد زیادی از خود در زمینه ریاضیات نشان می‌داد، به آکادمی سن پترزبورگ دعوت شد، و در آنجا متأسفانه فقط هشت ماه بعد به علت غرق شدن از دنیا رفت. وی درباره منحنیها، معادلات دیفرانسیل، و احتمالات مطالبی نوشت. مسئله وی در زمینه احتمالات، که در سن پترزبورگ مطرح کرده، بعدها به پارادوکس سن پترزبورگ مشهور شد. آن مسئله این است: اگر A با آمدن شیر در نخستین پرتاب سکه يك ریال دریافت کند و در صورت نیامدن شیر تا پرتاب دوم ۲ ریال دریافت کند، در صورت نیامدن شیر تا پرتاب سوم ۴ ریال دریافت کند، و همینطور الی آخر، امید ریاضی A چیست؟ نظریه ریاضی نشان می‌دهد که امید ریاضی A بینهایت است، که نتیجه پارادوکس گونه‌ای است. این مسئله را دانیل برادر نیکولائوس، که در سن پترزبورگ جانشین نیکولائوس شده بود، مورد تحقیق قرار داد. دانیل هفت سال بعد به بال بازگشت. وی از سه پسر یوهان مشهورتر نشان بود، و قسمت عمده توان خود را صرف احتمالات، نجوم، فیزیک، و تئیدودینامیک کرد. در احتمالات وی مفهوم امید اخلاقی را ابداع کرد، و در تئیدودینامیک^۲، مربوط به سال ۱۷۳۸، اصول تئیدودینامیک که در همه متون فیزیک مقدماتی امروزی نام او را بر خود دارند، ظاهر می‌شود. وی مقالاتی در باره جذر و مد نوشت، نظریه جنبشی گازها را تدوین کرد، به مطالعه تارهای مرتعش پرداخت، و در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیشگام بود. یوهان (II)، کوچکترین پسران، تحصیل حقوق کرده، ولی سالهای آخر عمر را به عنوان استاد ریاضیات در دانشگاه بال سپری کرد. وی بخصوص به



یوهان برنولی
(مجموعه دیوید اسمیت)

نظریه ریاضی گرما و نور علاقمند بود.

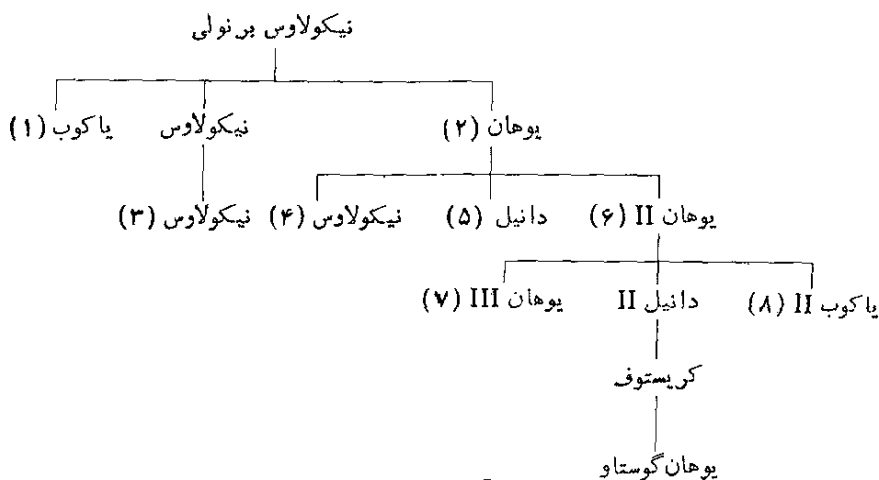
نیکولایوس برنولی (۱۶۸۷-۱۷۵۹) دیگری مربوط به قرن هجدهم، از برادرزادگان یاکوب و یوهان، هم بود که در ریاضیات به شهرتی دست یافت. این نیکولایوس، برای مدتی، کرسی ریاضیات در پادوا را که زمانی در اختیار گالیله بود، عهده‌دار شد. وی در باره هندسه و معادلات دیفرانسیل مطالب گسترده‌ای نوشت. در سالهای واپسین زندگی‌اش وی به تدریس منطق و حقوق پرداخت.

یوهان برنولی (II) پسری به نام یوهان (III) (۱۷۴۴-۱۸۰۷) داشت که، نظیر پدرش، تحصیل حقوق کرد ولی سپس به ریاضیات روی آورد. هنوز کمتر از ۱۹ سال داشت که، به عنوان استاد ریاضیات به آکادمی برلین دعوت شد. وی درباره نجوم، آموزه شانس، اعشار متناوب، و معادلات نامعین مطالبی نوشت.

اختلاف کم‌اهمیت‌تر برنولی عبارتند از دانیل (II) (۱۷۵۱-۱۸۳۴) و یاکوب (II) (۱۷۵۹-۱۷۸۹)، دو پسر دیگر یوهان (II)، کریستوف (۱۷۸۲-۱۸۶۳)، پسر دانیل (II)، و یوهان گوستاو (۱۸۱۱-۱۸۶۳)، پسر کریستوف. شکل ۱۵۵ شجره‌نامه برنولیاها را نشان می‌دهد.

۱۲-۳ دوموآور و نظریه احتمالات

در قرن هجدهم افکار پیش‌تازانه فرما، پاسکال، و هویگنس در نظریه احتمالات به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساخته و پرداخته شدند و این نظریه پیشرفته‌ای سریعی کرد، و نتیجه این شد که در



شکل ۱۰۵

پی فن حدس‌زدن یاکوب برنولی مطالعات بیشتری در بارهٔ این موضوع صورت گرفت. یکی از افراد مهمی که سهمی در نظریهٔ احتمالات داشت ابراهام دموآور (۱۶۶۷-۱۷۵۴) بود. دموآور يك هوگنوی^۱ فرانسوی بود که پس از نسخ فرمان نانت^۲ در سال ۱۶۸۵، به فضای سیاسی مساعدتر لندن مهاجرت کرد. وی زندگی خود را در انگلیس از طریق تدریس خصوصی گذرانید، و از دوستان صمیمی آیزک نیوتن گردید.

دموآور بخصوص به خاطر اثرش *قسط‌السنین* عمر^۳، که نقش مهمی در تاریخ ریاضیات آمارگری دارد، اثر دکترین شانس^۴، که حاوی مطالب جدیدتری در بارهٔ نظریهٔ احتمالات است، و اثر جنگ تحلیلی^۵، که دربارهٔ سریهای متناوب، احتمالات، و مثلثات تحلیلی است، شهرت دارد. بررسی انتگرال احتمالاتی

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

برای اولین بار و بررسی منحنی فراوانی نرمال

$$y = ce^{-hx^2}, \quad \text{h و c ثابت اند}$$

که درمبحث آمار اهمیت زیادی دارد به دموآور منسوب است. فرمول استرلینگ^۵، که به غلط چنین نامگذاری شده، وی گوید که به ازای n خیلی بزرگ

۱. نامی که به پروتستانهای فرانسوی قرون ۱۷ و ۱۸ داده شده بود [Hugenot]

۲. فرمان نانت Edict of Nantes، فرمانی که در سال ۱۵۹۸ توسط هانری چهارم، پادشاه فرانسه، صادر شد و به موجب آن به هوگنوهای حقوق مساوی با دیگران داده شد. م.

3. Annuities upon Lives 4. Miscellanea analytica 5. Stirling

$$n! \approx (\pi n)^{1/2} e^{-n} n^n$$

به دموآور منسوب است و برای تقریب فاکتوریل‌های اعداد بزرگ بسیار مفید است. فرمول معروف

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, \quad i = \sqrt{-1}$$

که با نام دموآور شناخته می‌شود و در هر کتاب درس نظریهٔ معادلات دیده می‌شود، در حالتی که n عدد صحیح مثبتی باشد بر دموآور معلوم بوده است. این فرمول اساس مثلثات تحلیلی است. افسانه‌ای که اغلب در بارهٔ مرگ دموآور گفته می‌شود، بسیار جالب است. مطابق این داستان دموآور حس می‌کرد که هر روز یک ربع ساعت بیشتر از روز قبل به خواب نیاز دارد. وقتی این تصاعد عددی به ۲۴ ساعت رسید، دموآور در گذشت.

در امر بیمه در قرن هجدهم گام‌های بلندی برداشته شد، و عده‌ای از ریاضیدانان به نظریهٔ احتمالاتی که در پس آن نهفته بود، جلب شدند. در نتیجه، علاقه به تلاش برای کاربرد احتمالات در زمینه‌های جدید ایجاد شد. در این راستا، ژرژ لسوئی لکلرک^۱، کنت دوبوفون (۱۷۵۷-۱۷۸۸)، که مدیر پاری ژاردن دوروا^۲ بود و به خاطر اثر مطبوع ۳۶ جلدی‌اش در بارهٔ تاریخ طبیعی شهرت داشت، در سال ۱۷۷۷ اولین مثال از احتمال هندسی را ارائه داد، که «مسئلهٔ سوزن» مشهور او برای تقریب تجربی مقدار π بود (نگاه کنید به بخش ۴-۸ و مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲۰۱۲). برای کاربرد نظریهٔ احتمالات در موارد داورى انسان، نظیر محاسبهٔ شانس اینکه محکمه‌ای در صورت اختصاص دادن عددی به هر یک از اعضای هیأت منصفه که معرف میزان شانس سخن گفتن به نفع حقیقت یا درک حقیقت وی است، به‌رأی صحیحی دست یابد، نیز تلاش‌هایی به عمل آمد. این احتمال داورى^۳ در همنوایی با فلسفهٔ روشنگری، در کار آنتوان-نیکولا کاریتا^۴، مارکی دو کندورسه (۱۷۳۳-۱۷۹۴)، که با وجود هواداری از انقلاب فرانسه، یکی از روشنفکرانی که قربانی بدقابلی ناشی از زیاده‌رویهای بعد از انقلاب شد، اهمیت اساسی داشت. یکی از نتایجی که کندورسه به آن رسیده بود، این بود که حکم اعدام باید لغاشود؛ زیرا احتمال صحت یک تصمیم هر اندازه بزرگ باشد، بسیار محتمل خواهد بود که طی سلسله تصمیمات بسیار، شخص بیگناهی به غلط محکوم شود.

۱۲-۴ تیلر و ماکلورن

هر دانشجوی درس حسابان با نام بروک تیلر (۱۶۸۵-۱۷۳۱) انگلیسی و نام کالین ماکلورن (۱۶۹۸-۱۷۴۶) اسکاتلندی، از طریق بسط بسیار مفید تیلر و بسط ماکلورن یک تابع، آشنایی دارد. در سال ۱۷۱۵ بود که تیلر (بدون بحث همگرایی) قضیهٔ معروف بسط خود را منتشر کرد،

1. Georges Louis Leclerc	2. Paris Jardin du Roi
3. Probabilité des jugements	4. Antoine- Nicolas Caritat
5. Marquis de Condorcet	

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots$$

در سال ۱۷۱۷ تیلر سری خود را در حل معادلات عددی به صورت زیر به کار گرفت: فرض کنید a تقریبی برای یکی از ریشه‌های $f(x) = 0$ باشد؛ قرار دهید $f(a) = k$ ، $f'(a) = k'$ ، $f''(a) = k''$ ؛ $x = a + h$ ؛ $0 = f(a+h)$ را به صورت سری بسط دهید؛ همه توانهای بالاتر از دوی h را کنکار بگذارید؛ به جای k ، k' و k'' مقادیر آنها را قرار دهید و نتیجه را بر حسب h حل کنید. با کاربردهای متوالی این فرایند، تقریبهای نزدیک و نزدیکتری را می‌توان به دست آورد. برخی از کارهای انجام شده توسط تیلر در نظریهٔ پرسپکتیو، اخیراً در مطالعهٔ ریاضی فوتوگرامتری^۱، علم مساحی به کمک تصاویری که از هواپیمای برداشته می‌شود، کاربرد پیدا کرده است.

وقوف به اهمیت واقعی سری تیلر تا سال ۱۷۵۵ که اوایل آنها را در حساب دیفرانسیل، و حتی تا زمان بعدتری که لاگرانژ سری با باقیمانده را به عنوان مبنای نظریهٔ توابع خود به کار برد، حاصل نگردید.

ماکلورن یکی از مستعدترین ریاضیدانان قرن هجدهم بود. بسط موسوم به ماکلورن چیزی جز بسط تیلر در حالت $\alpha = 0$ نیست و در واقع به صراحت توسط تیلر و نیز توسط جیمز استرلینگ یک ربع قرن قبل از آنکه ماکلورن آن را، با ذکر نام تیلر، در رسالهٔ فلوکسیونهای خود (در دو جلد، سال ۱۷۴۲) به کار برد، داده شده بود. ماکلورن در هندسه، به ویژه در مطالعهٔ منحنیهای مسطح درجات بالا، کاربرد جسته‌ای انجام داد، و توانایی زیادی در کار بردن هندسهٔ کلاسیک در مسائل فیزیکی نشان داد. در بین مقالات متعدد او در ریاضیات کاربردی مقاله‌ای در بارهٔ نظریهٔ ریاضی جزر و مد است که برندهٔ جایزه شده است، در رسالهٔ فلوکسیونها تحقیقات او در بارهٔ رابایش متقابل دو بیضوی دوار ظاهر می‌شود.

ماکلورن از نوادر عالم ریاضیات است. وی در سن یازده سالگی به دانشگاه گلاسگو^۲ راه یافت. در ۱۵ سالگی درجهٔ فوق لیسانس خود را دریافت کرد و دفاع علنی فوق العاده‌ای از پایان نامهٔ خود در بارهٔ نیروی جاذبه انجام داد. در ۱۹ سالگی برای کرسی استادی ریاضیات در کالج ماریشال^۳ در آبردين انتخاب شد، و در ۲۱ سالگی اولین اثر مهم خود، هندسهٔ ذاتی^۴ را منتشر کرد. در ۲۷ سالگی معاون یا دستیار استادی ریاضیات در دانشگاه ادینبورو شد. برای پرداخت حقوق استادیاری او مشکلاتی پیش آمد، و نیوتن پیشنهاد کرد که مخارج او را شخصاً عهده‌دار می‌شود تا دانشگاه از خدمات چنان جوان برجسته‌ای بهره‌مند شود. ماکلورن بعداً به جای همین مرد نشست که به کمک او آمده بود. رسالهٔ او در بارهٔ فلوکسیونها وقتی که وی ۴۴ سال داشت، تنها چهار سال قبل از مرگش منتشر شد؛ این اثر اولین شرح منطقی و اصولی روش نیوتن در بارهٔ فلوکسیونها بود و ماکلورن آن را به عنوان جوابی به حملهٔ اسقف بارکلی به اصول حسابان نوشته است.

بعد از پرداختن به تیلر و ماکلورن، دو مردی که دانشجویان در حسابان مقدماتی به نامهایشان برمی خوردند، می توان فرد سوم را هم ذکر کرد که بانامش به طریق مشابهی مواجه می شویم. این شخص سوم، که تا حدودی بر دو مرد فوقمقدم بود، میشل رول است که در آمریکا، اوورزی، در سال ۱۶۵۲ متولد شد و در سال ۱۷۱۹ در پاریس وفات یافت. وی با وزارت جنگ فرانسه مرتبط بود و کتابهایی در هندسه و جبر نوشت. قضیه حسابان مقدماتی (۱۶۹۱) به او منسوب است که نام وی را بر خود دارد و می گوید که $f'(x) = 0$ حداقل يك ریشه حقیقی بین دو ریشه متوالی $f(x) = 0$ دارد. «قضیه مقدار میانگین» درس حسابان که بسیار مفید است، در کتابهای درسی معمولاً از این قضیه استخراج می شود.

۱۲-۵ اوایل

در این کتاب قبلاً به نام لئونهارت اوایلر بارها اشاره شده است. اوایلر در شهر بال سوئیس در سال ۱۷۰۷ به دنیا آمد. بعد از قدم گذاشتن در عرصه علوم الهی، اوایلر پیشه واقعی خود را در ریاضیات یافت. در این مورد پدرش، که کشیشی از پیروان کالون^۳ بود و به ریاضیات علاقه داشت، با آموختن پایه های موضوع به پسرش به وی کمک کرد. پدر، ریاضیات را نزد یاکوب برنولی تحصیل کرده بود و تربیتی داده شد که پسر نزد یوهان برنولی درس بخواند.

در سال ۱۷۲۷، وقتی اوایلر فقط بیست سال داشت، دو دوست او دانیل و نیکولاوس برنولی، که به آکادمی سن پترزبورگ که مؤسس آن پتر کبیر بود، وابسته بودند پستی برای اوایلر در آکادمی روس تأمین کردند. دانیل به زودی روسیه را ترک گفت تا کرسی ریاضیات شهر بال را عهده دار شود و اوایلر سر ریاضیدان آکادمی گردید.

بعد از اعتلا بخشیدن به آکادمی سن پترزبورگ به مدت چهارده سال، اوایلر دعوتی را که از طرف فردریک کبیر به عمل آمده بود، پذیرفت تا برای سرپرستی آکادمی پروس به برلین برود. اوایلر به مدت بیست و پنج سال در آکادمی پروس ماند ولی شخصیت بی آرایش او با نوع پر جلالتری که مورد توجه فردریک بود، تطبیق نکرد و وی سالهای زیادی را از ناگواریها در رنج بود. روسها به اوایلر احترام زیادی می گذاشتند و حتی بعد از اینکه وی به پروس رفت ارسال کمی حقوق را به او ادامه دادند.

گرمی احساسات روسها به او، در تقابل با سردی دربار فردریک کبیر موجب شد که اوایلر در ۱۷۶۶ دعوت کاترین کبیر را برای بازگشت به آکادمی سن پترزبورگ بپذیرد. وی هفده سال باقی مانده از عمر خود را در آنجا ماند. اوایلر به طور کامل^۴ ناگهانی در ۱۷۸۳ وقتی که هفتاد و شش سال داشت، درگذشت.

اوایلر نویسنده کثیر التالیفی در ریاضیات، و در واقع، پر تألیف ترین نویسنده در تاریخ این موضوع است؛ نام وی به هر شاخه ای از این علم پیوسته است. جالب است بدانیم

که در بازدهی شگفت آور وی وقتی که، در حدود سال ۱۷۶۶، دچار مصیبت نابینایی کامل گردید، کمترین خللی وارد نشد. به کمک حافظه‌ای شگفت انگیز و توانایی تمرکز حواس حتی با وجود سروصدای زیاد، به کار خلاق خود با دیکته کردن به یک منشی و با نوشتن فرمولها روی تخته بزرگی که منشی اش از روی آن رونویسی کند، ادامه داد. وی ۵۳۰ کتاب و مقاله در طول عمرش منتشر نمود، و در موقع مرگش به قدری دستنوشته از خود به جا گذاشت که خلاصه مذاکرات^۱ آکادمی سن پترزبورگ را به مدت ۴۷ سال دیگر غنا بخشیده. یک چاپ تاریخی از آثار کامل اوایلر، شامل ۸۸۶ مقاله و کتاب را، در ۱۹۰۹ انجمن علوم طبیعی سوئیس^۲ آغاز و برای ۷۳ جلد با قطع خشتی بزرگ طرحریزی کرد. سهم اوایلر در ریاضیات خیلی زیادتر از آن است که بتوان آن را به تفصیل در اینجا بیان نمود، ولی می توان برخی از کارهای او را در زمینه ریاضیات مقدماتی ذکر کرد. مقدم بر همه، ما رسمیت یافتن نمادهای زیر را به اوایلر مدیونیم:

$f(x)$ به نشانه نماد تابع

e برای پایه لگاریتم طبیعی

a, b, c برای اضلاع مثلث ABC

s برای نصف محیط مثلث ABC

r برای شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC

R برای شعاع دایره محیطی مثلث ABC

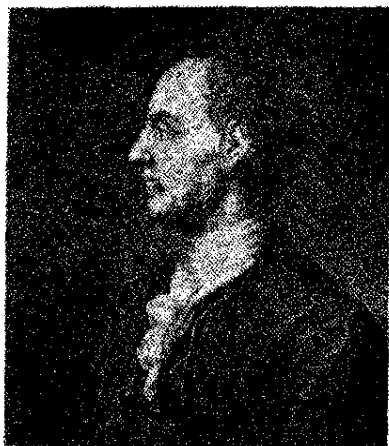
$\sum$ برای علامت مجموعیابی

i برای واحد انگاری، $\sqrt{-1}$

*

فرمول بسیار مهم

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



لئونهارت اوایلر

(کتابخانه کنگره [امریکا])

را هم به اویلر مدیونیم، که، به ازای $x = \pi$ ، به صورت

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

در می آید، رابطهای که پنج تا از مهمترین اعداد ریاضیات را به هم مربوط می کند. بسا روشهایی صرفاً صوری، اویلر به تعداد زیادی رابطه عجیب، نظیر

$$i^i = e^{-\pi/2}$$

دست یافت و توانست نشان دهد که هر عدد حقیقی غیر صفر r (در پایه مفروضی) بینهایت لگاریتم دارد که همه آنها موهومی اند هرگاه $r < 0$ ، و همه جز یکی موهومی اند هرگاه $r > 0$. در هندسه مقدماتی دانشگاهی به خط اویلر مثلث برمی خوریم (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۰۴)، در دروس مقدماتی دانشگاهی درباره نظریه معادلات دانشجو به روش اویلر برای حل معادلات درجه چهارم برخورد می کند، و حتی در مقدماتی ترین دروس نظریه اعداد شخص با قضیه اویلر و تابع ϕ اویلر مواجه می شود (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۵۰۱۰). توابع بتا و گاما در حسابان پیشرفته به اویلر منسوب اند گرچه طرح ابتدایی آنها توسط والیس داده شده است. اویلر فکری فاکتور انتگرال را در حل معادلات دیفرانسیل به کار گرفت، روش سیستماتیک امروزی حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را ارائه کرد و بین معادلات دیفرانسیل خطی همگن و غیر همگن تمایز قائل شد. معادله دیفرانسیل

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x),$$

که در آن نماهای داخل پرانتز مرتبه مشتق را نشان می دهند، امروزه معادله دیفرانسیل اویلر موسوم اند. اویلر نشان داد که جانشین کردن $x = e^t$ معادله را به یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تحویل می کند. قضیه اگر $f(x, y)$ همگن از مرتبه n باشد، در این صورت با ضرایب ثابت تحویل می کند. قضیه $xf_x + yf_y = nf$ امروزه به قضیه اویلر درباره توابع همگن موسوم است. اویلر یکی از اولین کسانی بود که نظریه ای برای کسرها ی مسلسل به وجود آورد، در زمینه های هندسه دیفرانسیل و حساب تغییرات سهمی ایفا کرد، و به طور قابل توجهی نظریه اعداد را غنا بخشید. در یکی از مقالات کوتاهش رابطه

$$v - e + f = 2$$

دیده می شود که قبلاً بر دکارت معلوم بود و v عدد رأسها، e عدد یالها، و f عدد وجوه هر چندوجهی بسته ساده را به هم ربط می دهد. در مقاله دیگری وی به تحقیق در منحنیهای مداری شکل ۱، یا منحنیهایی که، نظیر دایره، مرغانه های محدبی با پهنای ثابت اند، می پردازد. تعداد زیادی از مقالات وی به تفریحات ریاضی، نظیر منحنیهای یک پیمایه [اونیکورسال^۲] و چند پیمایه [مولتی کورسال^۳] (به الهام از هفت پل کونیگسبرگ^۴)، مسیر چندقسمتی و درون سوی

حرکت اسب بريك صفحه شطرنج، و مربعات یونانی-لاتین اختصاص دارند. البته زمینه اصلی انتشارات او درپهنه ریاضیات کاربردی، به ویژه نظریه حرکت ماه، مسئله سه جسم مکانیک سماوی، ربایش بیضوی، تئودرولیک، کشتی سازی، توپخانه، و نظریه موسیقی است. طرح دیاکرام اوایل که برای آزمون درستی براهین استقرایی به کار برده می شود، به توسط اوایلر در یکی از نامه هایش به شاهزاده خانم فیلیپین، نوۀ فردرک کبیر سلطان پروس، داده شده است. در دوران جنگ ۷ ساله (۱۷۵۶-۱۷۶۳) اتمام کاخ سلطنتی برلین در ماگدبورگ مستقر شده بود و اوایلر از راه مکاتبه از اقامتگاه خود در برلین، بر تحصیل شاهزاده خانم نظارت می کرد.

اوایلر نویسنده زبردست کتابهای درسی بود و مطالب خود را در آنها با وضوح زیاد، به تفصیل، و کامل ارائه می کرد. در بین این کتابها اثر والامقام دو جلدی مدخل در آنالیز بینهایت کوچکها^۱ به سال ۱۷۴۸، اثر بغایت غنی تأسیس حساب دیفرانسیل^۲ به سال ۱۷۵۵، و کتاب سه جلدی همراه آن، تأسیس حساب انتگرال^۳ مربوط به سالهای ۱۷۶۸-۷۴ است. این کتابها، همراه با کتابهای دیگری درباره مکانیک و جبر، بیشتر از هر نوشته دیگری از لحاظ سبک، محتسوا، و نمادگذاری به عنوان الگویی برای بسیاری از کتابهای درسی دانشگاهی امروز به خدمت گرفته شدند. کتابهای اوایلر از محبوبیت طولانی و قابل ملاحظه برخوردار بوده و تا به امروز نوشته هایی جالب و قابل استفاده باقی مانده اند. میزان باروری خارق العاده اوایلر شخص را شگفت زده می سازد، و تعجب آور نیست که اگر بسیاری از ریاضیدانان بزرگ بعد از اوایلر خود را مرهون اوایلر بدانند.

شاید بجا باشد خاطر نشان کنیم که برخی از کارهای اوایلر مثالهای برجسته ای از صورتگرایی، یا به کار بردن فرمولهای متضمن فرایندهای نامتناهی، بدون توجه کافی به موارد مربوط به همگرایی یا وجود از لحاظ ریاضی در قرن هجدهم است. وی در به کار بردن سریهای نامتناهی بی احتیاط بود و اغلب قواعدی را در مورد آنها به کار می برد که فقط در مورد مجموعه های متناهی معتبر بودند. با تلقی سریهای توانی به عنوان چند جمله ایهای از مرتبه بینهایت، وی با بی مبالائی خواص چند جمله ایهای متناهی را در مورد آنها تعمیم داد. اغلب، با چنان روشهای توأم با بی دقتی، وی از بخت خوش نتایج کاملاً درستی به دست آورد (به عنوان مثالی، نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۲.۶).

دانش و علاقه اوایلر به هیچ عنوان فقط به ریاضیات و فیزیک محدود نبود. وی عالمی برجسته، با دانش وسیع در نجوم، پزشکی، گیاهشناسی، شیمی، الهیات، و زبانهای شرقی، بود. وی آثار نویسندگان برجسته رومی را به دقت می خواند، از تاریخ مدنی و ادبی کلیه اعصار و کلیه ملل با اطلاع بود، و آشنایی گسترده ای با زبانها و بسیاری از شاخه های ادبیات داشت. بدون شك کمک بزرگ او در این موضوعات گوناگون حافظه غیر عادی او بود. ستایشهای پر آب و تاب، مانند دومورد زیر به وسیله فرانسوا آراگو^۴ (۱۷۸۶-)

1. Introductio in analysin infinitorum
2. Institutiones calculi
- differentialis
3. Institutiones calculi integralis
4. Francois Arago

۱۸۵۳) فیزیکدان و منجم، از اوایلر به عمل آمده است: «اوایلر را می توان، بدون هیچ استعاره ای و قطعاً بدون هیچ اغراقی، تجسم آنالیز دانست.» « اوایلر بی هیچ تلاش ظاهری محاسبات خود را انجام می داد، درست به گونه ای که انسان نفس می کشد و عقاب خود را در هوا نگاه می دارد.»

اوایلر سیزده فرزند داشت. اولین پسر او، یوهان آلبرشت^۱ اوایلر (۱۷۳۴-۱۸۰۰)، در زمینه فیزیک به شهرتی دست یافت.

۱۲-۶ كلرو، دالامبر، و لامبرت

كلود آلکسی كلرو در سال ۱۷۱۳ در پاریس متولد شد، و در همانجا در سال ۱۷۶۵ درگذشت. وی از اعجوبه های جوان ریاضی بود که درس یازده سالگی مقاله ای درباره منحنیهای درجه سوم تصنیف کرد. این مقاله اول، و مقاله بسیار زیبای بعد از آن درباره هندسه دیفرانسیل منحنیهای پیچانده شده در فضا، برای او کرسی را در آکادمی علوم فرانسه در ۱۸ سالگی، پیش از رسیدن به سن قانونی، به ارمغان آورد. در سال ۱۷۳۶ در هیأتی پیرلوتی مورو دو-موپرتویی^۲ (۱۶۹۸-۱۷۵۹) را به لاپونی^۳ برای اندازه گیری طول يك درجه از یکی از نصف النهارهای زمین همراهی کرد. اعزام این هیأت برای خاتمه بخشیدن به جدالی در مورد شکل زمین صورت گرفت. نیوتن و هوینگنس، بنابر نظریه ریاضی، به این نتیجه رسیده بودند که زمین در قطبین مسطح است. اما در حدود ۱۷۱۲، منجم و ریاضیدان ایتالیائی، جیووانی دومینیکو کاسینی (۱۶۲۵-۱۷۱۲)، و پسر متولد فرانسه اش ژاک کاسینی (۱۶۷۷-۱۷۶۵)، قوسی از طول بین دونکرك^۴ و پرپینان^۵ را اندازه گرفتند، و به نتیجه ای رسیدند که



كلود آلکسی كلرو
(مجموعه دیوید اسمیت)

1. Johann Albrecht
2. Pierre Louis Moreau de Maupertuis
3. Lapland
4. Dunkirk
5. Perpignan

ظاهراً این ادعای دکارتی را که زمین در قطبین کشیده تر می شود، تأیید می کرد. اندازه گیری انجام شده در لاپونی عقیده نیوتن-هویگنس را بی هیچ تردیدی تأیید کرد، و برای موپرتویی لقب «مسطح گر زمین» را به ارمغان آورد. در سال ۱۷۴۳، بعد از بازگشتش به فرانسه، کلرو اثر قاطع خود، نظریه شکل زمین^۱ را منتشر کرد. در سال ۱۷۵۲ به خاطر مقاله نظریه ماه^۲، که مطالعه ریاضی حرکت ماه بود و برخی سؤالات بی پاسخ مانده در آن زمان را روشن می نمود، جایزه ای از آکادمی سن پترزبورگ دریافت کرد. وی فرایند مشتق گیری در مورد معادله دیفرانسیل

$$y = px + f(p), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

را که اینک در کتابهای مقدماتی در باره معادلات دیفرانسیل به عنوان معادله کلرو معروف است، به کاربرد، و جواب تکین را پیدا کرد، ولی این روش قبلاً مورد استفاده بروکتیلر قرار گرفته بود. در ۱۷۵۹ بازگشت ستاره دنباله دار هالی در سال ۱۷۵۹ را، با خطایی در حدود یک ماه محاسبه کرد.

کلرو برادری داشت که ۳ سال از او کوچکتر بود و در تاریخ ریاضیات به «کلروی-کوچک»^۳ (۱۷۱۶-۱۷۳۲) مشهور است و به نحو غم انگیزی در شانزده سالگی بر اثر آبله درگذشت ولی در چهارده سالگی مقاله ای در زمینه هندسه در آکادمی فرانسه قرائت کرد و در پانزده سالگی اثری در هندسه منتشر نمود. پدر کلروها، ژان بابتیست کلرو (که در اوایل سال ۱۷۶۵ درگذشت)، معلم ریاضیات بود، با آکادمی برلین مکاتبه داشت و در هندسه چیز می نوشت. وی بیست فرزند داشت که تنها یکی بعد از او زنده ماند.

در اینجا شاید مناسب باشد که از معادله دیفرانسیل دیگری که در دروس معادلات دیفرانسیل مطرح می شود، و نیز از خانواده ریاضی مشهور دیگری نام ببریم. این معادله، معادله ریکاتی

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

است که به یاد جیا کومو ریکاتی^۴ (۱۶۷۶-۱۷۵۴) نامگذاری شده است که مردی ثروتمند بود و در پادوا در زمانی که نیکولاوس برنولی (برادرزاده یاکوب و یوهان) در آنجا درس می داد، به تحصیل مشغول بود. علاوه بر مطالعه گسترده معادله فوق، ریکاتی در فیزیک، مساحی، و فلسفه نوشته هایی دارد و تلاش زیادی کرده است که کار نیوتن را در ایتالیا بشناساند. حالت های خاصی از معادله ریکاتی را قبلاً یاکوب برنولی و دیگران مورد مطالعه قرار داده بودند و اوایل برای اولین بار خاطر نشان کرد که اگر یک جواب خاص معادله به صورت $y = f(x)$ معلوم باشد، تغییر متغیر $v = (1/z)$ معادله را به معادله ای خطی بر حسب z تبدیل می کند. دومین فرزند جیا کومو ریکاتی، وینچنتسو ریکاتی (۱۷۰۷-۱۷۷۵)، یک

1. Théorie de la figure de la Terre
2. Théorie de la Lune
3. Le cadet Clairaut
4. Giacomo Ricatti
5. Vincenzo

استاد یسوعی ریاضیات شد و در معادلات دیفرانسیل، سریهای نامتناهی، محاسبه مساحات، و تابعهای هذلولوی کار کرد. فرزند سوم جیا کومو، جیوردانو^۱ ریکاتی (۱۷۰۹-۱۷۹۰)، نوشته‌هایی درباره کار نیوتن، هندسه، معادلات درجه سوم، و مسائل فیزیکی دارد. پنجمین فرزند، فرانچسکو^۲ ریکاتی (۱۷۱۸-۱۷۹۱)، در مورد کار بردهنده در معماری مطلب نوشت. ژان لورون دالامبر (۱۷۱۷-۱۷۸۳)، مانند آلکسی کلو، در پاریس چشم به جهان گشود و در همانجا درگذشت. در نوزادی نزدیک کلیسای سن ژان لورون سر راه گذاشته شد و ژاندارمی که او را پیدا کرده بود، شتابزده نام جایی را که وی را در آنجا یافته شده بود بر او نهاد. بعداً، به دلایلی نامعلوم، نام دالامبر هم بر نام او اضافه گردید.

بین دالامبر و کلو رقابتی علمی، که اغلب دوستانه هم نبود، وجود داشت. در ۲۴ سالگی، دالامبر به آکادمی فرانسه پذیرفته شد. در سال ۱۷۴۳ رساله^۳ دینامیک^۳ خود را بر مبنای اصل مهم انرژی جنبشی که نام خود او بر آن گذاشته شده است، منتشر کرد. در سال ۱۷۱۴ اصل خود را در رساله‌ای در باره تعادل و حرکت مایعات، و در سال ۱۷۴۶ در مقاله‌ای در باره علل ورزش باد به کار برد. در هر یک از این آثار، و نیز در اثری به سال ۱۷۴۷ در باره تارهای مرتعش، وی به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی رسید، و یکی از پیشگامان مطالعه این گونه معادلات شد. به کمک اصل خود، توانست جواب کاملی برای مسئله^۴ به نتیجه نرسیده تقدیم اعتدالین پیدا کند. دالامبر به مبنای آنالیز علاقه نشان می‌داد، و در سال ۱۷۵۴ این پیشنهاد مهم را مطرح کرد که برای دادن آنالیز بر شالوده^۵ محکمی به نظریه^۶ معتبری از حدود نیاز است، ولی معاصرین وی اعتنایی به این پیشنهاد نکردند. دالامبر برای اثبات قضیه^۷ اساسی جبر (که هر معادله^۸ چند جمله‌ای مانند $x = 0$ را با ضرایب مختلط و درجه^۹ $n \geq 1$ حداقل دارای یک ریشه^{۱۰} مختلط است) چنان کوششی به عمل آورد که این قضیه امروزه در فرانسه به قضیه^{۱۱} دالامبر مشهور شده است. دالامبر بود که نام معادله^{۱۲} ریکاتی را به معادله‌ای که در بالا بررسی شد، داد.

دالامبر، مانند اوایلر، تحصیلاتی گسترده داشت و دارای دانش استثنایی در حقوق، ریاضیات، و علوم بود. این دو دانشمند که علایق مشترک زیادی داشتند، در موارد عدیده با هم همکاری داشتند. ماهیت لگاریتم اعداد منفی، دالامبر، و بسیاری دیگر از ریاضیدانان عصر او را سردرگم کرده بود. آنها حس می‌کردند که می‌بایست $\log(-x) = \log(x)$ ، و مبنای استدلال آنها این بود که چون $(-x)^2 = (x)^2$ ، در نتیجه $\log(-x)^2 = \log(x)^2$ و از آنجا $2 \log(-x) = 2 \log(x)$ و سرانجام $\log(-x) = \log(x)$. در ۱۷۴۷ اوایلر توانست در نامه‌ای وضعیت صحیح لگاریتم اعداد منفی را برای دالامبر روشن سازد. زمانی که در پایان دوره^{۱۳} اوایلر، فردریک کبیر از دالامبر برای ریاست آکادمی پروس دعوت به عمل آورد، دالامبر از پذیرش دعوت ابا کرده مدعی شد که هیچ فرد آن عصر را شایستگی آن نیست که از لحاظ برتری آکادمیکی به جای اوایلر بزرگ نشانیده شود. دالامبر را کاترین کبیر هم برای خدمت در روسیه دعوت کرد ولی علی‌رغم پیشنهاد مقررری شایسته‌ای،



ژان لورون دالامبر
(کتابخانه کنگره)

دالامبر از قبول این دعوت هم سرباز زد. در سال ۱۷۵۴ دالامبر دبیر دایمی آکادمی فرانسه شد. در سالهای واپسین عمرش، وی روی دایرةالمعارف^۱ فرانسه که دنی دیدرو^۲ و خود وی آن را شروع کرده بودند، به کار پرداخت. دالامبر در ۱۷۸۳، در همان سال مرگ اوایلر، دیده از جهان فرو بست.

گفته مشهور و بر سر زبانها (که استشهد به آن در جای خود در کلاس جبر مقدماتی مقبول است) از دالامبر نقل است که: «جبر بخشنده است، وی بیش از آنچه که از او بخواهیم به ما می‌دهد.» وی همچنین بمورد خاطر نشان کرده است که: «حقایق هندسی به گونه‌ای مجانب حقایق فیزیکی هستند؛ یعنی دومی به‌اولی بینهایت نزدیک می‌شود، بی آنکه دقیقاً به آن برسد.» شاید قابل درکتر از همه اظهار نظرهای دالامبر درباره ریاضیات این باشد که: «تردید ندارم که اگر انسانها جدا از هم زندگی می‌کردند و در وضعیتی بودند که به چیز دیگری جز حفظ بقای خود نپردازند، آنها مطالعه علوم دقیقه را بر پروردن هنرهای دلبذیر ترجیح می‌دادند. زیرا به‌خاطر دیگران است که انسان در هنر به کمال می‌رسد ولی انسان به‌خاطر خویشتن خود را وقف علوم دقیقه می‌کند. بنابراین، به‌نظر من، در جزیره‌ای متروک یک شاعر به‌ندرت می‌تواند خود را مفید بداند، در حالی که یک ریاضیدان می‌تواند هنوز هم از غرور اکتشاف سرشار باشد.»

یوهان هاینریش لامبرت (۱۷۲۸-۱۷۷۷)، که کمی جوانتر از کلرو و دالامبر بود، در مولوز^۳ (آلزاس^۴)، که در آن زمان قسمتی از قلمرو سوئیس بود، به دنیا آمد. لامبرت ریاضیدانی با کیفیت عالی بود. وی که پسر خیاط فقیری بود عمدتاً پیش خود درس خوانده بود. وی صاحب قوه تخیلی عالی بود، و نتایج خود را با توجه زیاد به دقت ثابت کرد. در واقع لامبرت اولین کسی بود که ناگویا بودن π را به‌طور دقیق ثابت کرد. او نشان

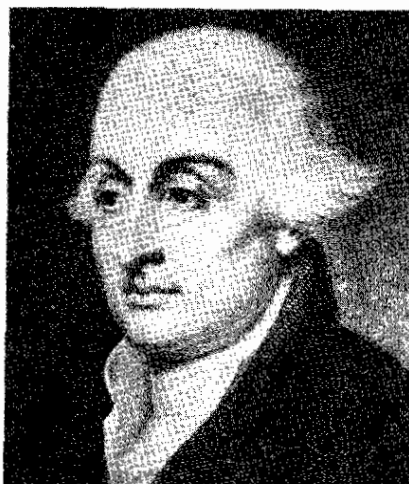


یوهان هاینریش لامبرت
(مجموعه دیوید اسمیت)

داد که اگر x گویا، ولی ناصفر، باشد، آنگاه $\tan x$ نمی تواند گویا باشد؛ چون $\tan \pi/4 = 1$ ، نتیجه می شود که $\pi/4$ ، یا π نمی تواند گویا باشد. همچنین اولین بسط منظم نظریه توابع هذلولوی، و در واقع، نماد امروزی این توابع را به لامبرت مدیونیم. لامبرت دانشمند چندجنبه ای بود و به طور قابل ملاحظه ای در ریاضیات چندین مبحث گوناگون دیگر، نظیر هندسه ترسیمی، تعیین مدارستاره های دنباله دار، و نظریه تصاویری که در ساختن نقشه ها به کار می رود (یکی از این تصاویر پر استعمال امروزه بدنام او اسم گذاری شده است)، سهم داشت. زمانی وی به طرحریزی يك منطق ریاضی از نوعی که رئوس مطالب عمده آن را زمانی لایبنیتز ارائه کرده بود، پرداخت. در سال ۱۷۶۶، تحقیق خود درباره اصل توافی اقلیدس را، که بعد از مرگش منتشر شد، تحت عنوان نظریه توافی^۱ نوشت، اثری که وی را در زمره پیشگامان کشف هندسه نا اقلیدسی (بخش ۱۳-۶) قرار می دهد.

۱۲-۷ لاگرانژ

اویلر و ژوزف لوئی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) دوتن از بزرگترین ریاضیدانان قرن هجدهم بودند، و این امر که کدام يك از اینها بزرگتر از دیگری است، موضوعی است که اغلب حساسیتهای متنوع ریاضی بحث کنندگان را منعکس می کند. لاگرانژ در شهر تورن^۲ ایتالیا به دنیا آمد. در سال ۱۷۶۶، زمانی که اویلر برلین را ترک گفت، فردريك کبیر به لاگرانژ نوشت که «بزرگترین پادشاه اروپا» میل دارد که «بزرگترین ریاضیدان اروپا» را در دربار خود داشته باشد. لاگرانژ این دعوت را پذیرفت و به مدت بیست سال مقامی را که اویلر از آن کناره گرفته بود، به عهده گرفت. چند سال بعد از ترک برلین، و علی رغم اوضاع پر آشوب



ژوزف لوئی لاگرانژ
(برادران براون)

سیاسی فرانسه، لاگرانژ يك مقام استادی در مدرسه جدیدالتاسیس اکول نرمال^۱ [دادالمعلمین] و سپس در اکول پلی تکنیک^۲ [دارالفنون] پذیرفت. از این دو مدرسه، اولین آنها عمر کوتاهی داشت، ولی دومی در تاریخ ریاضیات صاحب آوازه شد بدان جهت که بسیاری از ریاضیدانان بزرگ فرانسه نوین در آنجا تربیت شدند و بسیاری در آنجا مقام استادی یافتند. لاگرانژ در پدید آمدن درجه ممتاز دانش طلبی در ریاضیات که با نام اکول پلی تکنیک مرتبط گردیده کمک مؤثری کرده است.

لاگرانژ به شقاوتهای دوران وحشت بعد از انقلاب فرانسه ابراز انزجار کرد. وقتی شمیمیدان بزرگ، لاووازیه^۳، به زیر گیوتین رفت، لاگرانژ رنجش خود را از سفاهت این حکم چنین اظهار کرد: «يك لحظه طول کشید تا مردم سراو را از تنش جدا کردند ولی برای به وجود آوردن نظیر او يك قرن هم کافی نیست.»

لاگرانژ در سالهای واپسین عمر دستخوش چیرگی شدید دلتنگی و افسردگی قرار گرفت. در ۵۶ سالگی به کمک دختر جوانی که ۴۵ سال جوانتر از او بود، از این مصیبت رها شده شد. این زن، دختر دوست او، لومونیه^۴ منجم بود. این دختر چنان تحت تأثیر شور بختی او قرار گرفت که در ازدواج با او با فشاری کرد. لاگرانژ تسلیم گردید، و این ازدواج کمال مطلوب از آب درآمد.

کارهای لاگرانژ تأثیر عمیقی در تحقیقات ریاضی بعدی داشت، زیرا وی اولین ریاضیدان ممتازی بود که وضعیت کاملاً غیر رضایتبخش مبانی آنالیز را تشخیص داد و بدین جهت به تدقیق حسابان همت گمارد. این کوشش، که بسا موفقیت زیادی توأم نبود، در سال ۱۷۹۷ در کتاب بزرگ او نظریه توابع تحلیلی شامل اصول حساب دیفرانسیل^۵ به عمل آمد. ایده اصلی در اینجا نمایش يك تابع مانند $f(x)$ به وسیله يك سری تیلر بود.

1. École Normale	2. École Polytechnique	3. Lavoisier
4. Lemonnier	5. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel	

مشتقهای $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، ...، بعداً به عنوان ضرایب h ، $h^2/2!$ ، ... در بسط تیلر $f(x+h)$ بر حسب h تعریف شدند. نماد $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، ...، که استفاده از آن بسیار معمول است، به لاگرانژ منسوب است. ولی لاگرانژ توجه زیادی به موضوعات همگرایی و واگرایی نکرد. با این حال در اینجا اولین «نظریهٔ توابع با یک متغیر حقیقی» را داریم. دو اثر دیگر لاگرانژ رسالهٔ در حل معادلات عددی از کلیهٔ درجات^۱ (۱۷۶۷) و اثر ماندگار مکانیک تحلیلی^۲ (۱۷۸۸) است؛ ادلی روشی برای تقریب ریشه‌های حقیقی یک معادله را به کمک کسرهای مسلسل می‌دهد، دومی (که سر ویلیام همپلتن آن را یک «منظومهٔ علمی»^۳ توصیف کرده است) معادلات کلی حرکت یک دستگاه دینامیکی را که امروزه به معادلات لاگرانژ موسوم‌اند، در بردارد. اثر او دربارهٔ معادلات دیفرانسیل (مثلاً، روش تغییر پارامترها)، و به‌ویژه در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بسیار قابل توجه است، و سهم او در حساب تغییرات کمک زیادی به بسط این موضوع کرد. لاگرانژ میل وافری به نظریهٔ اعداد داشت و مقاله‌های مهمی در این زمینه نیز نوشت، نظیر مقاله‌ای که اولین برهان منتشرشدهٔ این قضیه است که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به صورت مجموع نایب‌تر از چهار مربع نشان داد. برخی از کارهای اولیهٔ او در بارهٔ نظریهٔ معادلات بعداً رهنمون گالوا در نظریهٔ گروه‌های وی شد. در واقع، قضیهٔ مهم نظریهٔ گروه‌ها مبنی بر اینکه مرتبهٔ یک زیرگروه از یک گروه متناهی مانند G ، عاملی از مرتبهٔ G است، به قضیهٔ لاگرانژ موسوم است. در قسمت‌های اول این کتاب بارها به نام لاگرانژ اشاره شده است.

در حالی که اوایل آثار خود را با افراط در جزئیات و به خدمت گرفتن آزادانهٔ نیروی شهود می‌نوشت، نوشته‌های لاگرانژ مجمل و دقیق بود. یک دست‌اندرکار رسمی ریاضیات اغلب دستخوش این احساس ناخوشایند می‌شود که نیروی قلمش بر نیروی هوشش برتری دارد؛ این احساسی بود که اوایل اعتراف می‌کرد اغلب قادر به فراموش کردن آن نیست. لاگرانژ ظاهراً شعور ریاضی قوی‌تری داشته است؛ سبک وی «نو» بود و می‌توان وی را اولین آنالیزدان واقعی توصیف کرد. همهٔ موسیقیدانان بزرگ را می‌توان به دو دستهٔ اجراکنندگان یا تصنیف‌کنندگان موفق تقسیم کرد و عدهٔ کمی به هر دو دسته تعلق دارند. به همین گونه، همهٔ ریاضیدانان بزرگ را می‌توان در دو دستهٔ عملگران رسمی خبره یا نظریه‌پردازان خبره قرار داد که عدهٔ کمی هم در هر دو دسته قرار دارند. اوایل در وهلهٔ اول عملگر رسمی خبرهٔ بزرگی بود و لاگرانژ یک نظریه‌پرداز بزرگ، و گاوس دانشمندی سرآمد در هر دو دسته بود. بنا بر این اوایل مانند هافتر^۴ بود، لاگرانژ مانند بنهون، و گاوس مانند یوهان سباستیان باخ^۵.

لاگرانژ خاطر نشان کرده است که یک ریاضیدان به فهم کامل هر بخش از کار خود دست می‌یابد مادام که چنان وضوحی به آن بخشیده باشد که بتواند آن را به نحو قاطعی به

1. Traité de résolution des équations numériques de tous degrés
2. Mécanique analytique
3. scientific poem
4. Heifetz
5. Johann Sebastian Bach



پیرسیمون لاپلاس
(برادران براون)

اولین شخصی که در معبره او برمی خورد، توضیح دهد. گرچه چنین آرمانی اغلب غیرممکن به نظر می رسد، زمان اغلب چنین چیزی را دست یافتنی می کند. قانون جاذبه عمومی نیوتن، که در ابتدا حتی برای افسراد با تحصیلات عالی غیر قابل فهم بود، امروزه جزو دانش عمومی درآمده است. نظریه جاذبه نسبتی اینشتین هم امروزه دستخوش تحول مشابهی شده است.

ناپلئون بوناپارت که با تعدادی از ریاضیدانان بزرگ فرانسه در زمان خود حشر و نشر داشت، ارزیابی خود از لاگرانژ را در این جمله خلاصه کرده است که، «لاگرانژ برج رفیع علوم ریاضی است.»

۱۲-۸ لاپلاس و لژاندر

لاپلاس و لژاندر معاصر لاگرانژ بودند. گرچه آثار اصلی خود را در قرن نوزدهم منتشر کردند. پیرسیمون لاپلاس^۱ در سال ۱۷۴۹ از والدین فقیری به دنیا آمد. استعداد ریاضی زودرس او مقامهای معلمی خوبی برای وی به ارمغان آورد، و به عنوان يك فرصت طلب سیاسی خود را طرف توجه هر حزبی می کرد که در ایام نامطمئن انقلاب فرانسه بر سر قدرت بود. برجسته ترین کار او در زمینه مکانیک سماوی، احتمالات، معادلات دیفرانسیل، و ژئودزی بود. وی دو اثر عظیم منتشر کرد: رساله مکانیک سماوی^۲ (پنج جلد، ۱۷۹۹-۱۸۲۵) و نظریه تحلیلی احتمالات^۳ (۱۸۱۲)، که در مقدمه هر يك از آنها شرح غیر فنی جامعی آورده شده بود. رساله مکانیک سماوی پنج جلدی، که برای او لقب «نیوتن فرانسه» را کسب کرد، همه کشفیات قبلی در این زمینه همراه با سهم خود لاپلاس را در برمی گرفت، و مؤلف را به عنوان استادی بی رقیب در این موضوع متشخص کرد. شاید جالب باشد که دوتا از حکایاتی را که



آدرین ماری ژاندر
(مجموعه دیوید اسمیت)

اغلب در رابطه با این اثر گفته می شود، تکرار کنیم. وقتی نابلیون خرده گیرانه متذکر شد که نام خداوند در رساله او ذکر نشده است، لاپلاس جواب داد، «عالیهضرتا، من به این فرض نیازی نداشتم». ومنجم آمریکایی، ناتانیل باودیچ، وقتی رساله لاپلاس را به انگلیسی ترجمه می کرد، متذکر شد، «هرگز نشد به یکی از عبارات» بنابراین آشکار است «لاپلاس بر بخورم بی آنکه مجبور باشم ساعتها برای پر کردن این شکاف کار کنم تا آن را بفهمم و نشان دهم که این مطلب چگونه به سادگی آشکار است». نام لاپلاس با فرضیه سحابی کیهانزایی و معادله لاپلاس در نظریه پتانسیل (گرچه منشأ هیچیک از این دو کار، لاپلاس نبوده است)، با به اصطلاح تبدیل لاپلاس که بعداً به صورت کلید حساب اوپراتوری هوی سایده در آمد، و نیز با بسط لاپلاس یک دترمینان پیوند یافته است. لاپلاس در ۱۸۲۷، دقیقاً ۱۰۰ سال بعد از مرگ آیزک نیوتن از دنیا رفت. بنابر روایتی، آخرین کلماتی که او بر زبان آورده این بوده است که: «آنچه می دانیم بس اندک، و آنچه نمی دانیم به غایت زیاد است».

داستان زیر در باره لاپلاس جالب توجه و راهنمای خوبی برای کسانی است که درخواست کار می دهند. وقتی لاپلاس در جوانی به عنوان متقاضی استادی ریاضیات به پاریس رفت، توصیه نامه های خود را که توسط افراد برجسته نوشته شده بود به دالامبر تسلیم کرد، ولی دالامبر از قبول آنها خودداری کرد. لاپلاس در بازگشت به منزل خود، نامه ای بسیار عالی به دالامبر درباره اصول عمومی مکانیک نوشت. این نامه فتح بابی شد و دالامبر پاسخ داد که: «عالیجناب، ملاحظه می کنید که من به توصیه نامه های شما توجهی نکردم. شما نیازی به توصیه نامه ندارید؛ شما به نحوی بهتر به معرفی خود پرداخته اید.» چند روز بعد لاپلاس به استادی ریاضیات در مدرسه نظامی پاریس گمارده شد.

لاگرانژ و لاپلاس را بارها باهم مقایسه کرده اند. در وهله اول، تفاوت بارزی در سبک آنها وجود دارد که به طور خلاصه و و. روز بال آن را چنین بیان کرده است: «کار

لاگرانژ هم در صورت و هم در معنی کمال دارد، وی در توضیح شیوه کار خود دقیق است، و گرچه استدلالهای او کلی اند، فهم آنها آسان است. از سوی دیگر لاپلاس هیچ چیز را توضیح نمی دهد، به سبک اعتنا نمی کند، و اگر قانع شود که نتایجش درست اند، خود را راضی می کند که برای آنها برهانی ندهد یا برهان غلطی ارائه کند. «همین تفاوت بارز در نقطه نظرهایی که این دو شخصیت نسبت به ریاضیات داشتند، وجود دارد. در نظر لاپلاس ریاضیات کوله ای از ابزار است که برای توضیح طبیعت به کار می رود. در نظر لاگرانژ، ریاضیات هنری والا است و دلیل وجودی اش خود آن است.

لاپلاس به مبتدیان در تحقیقات ریاضی بسیار سخی بود. وی این گونه مبتدیان را فرزندان ناتنی خود می نامید، و در موارد متعددی وی از انتشار کشف خود، خودداری کرد تا به يك مبتدی اجازه دهد که زودتر از او فرصت انتشار آن را داشته باشد. متأسفانه چنین سخاوتمندی به ندرت در عالم ریاضیات وجود دارد.

ما توصیف کوتاه خود از لاپلاس را با دو نقل قول منسوب به او به پایان می بریم. «همه متعلقات طبیعت پیامدهای ریاضی صرف تعدادی اندک از قوانین لایتنیرند.» «در تحلیل نهایی، نظریه احتمال صرفاً عقل سلیم است که در قالب اعداد بیان می شود.»

شهرت آدرین ماری لژاندر (۱۷۵۲-۱۸۳۳) در تاریخ ریاضیات مقدماتی عمدتاً به خاطر اصول هندسه^۱ معروفش است، که در آن برای اصلاح آموزش اصول اقلیدس از راه تنظیم مجدد و ساده کردن قابل ملاحظه بسیاری از قضایای آن تلاش به عمل آورد. این اثر در امریکا مورد التفات زیادی قرار گرفت و به صورت نمونه کتاب درسی هندسه در این کشور در آمد. در واقع، اولین ترجمه انگلیسی هندسه لژاندر در سال ۱۸۱۹ به دست جان فارار^۲ از دانشگاه هاروارد انجام شد. سه سال بعد ترجمه انگلیسی دیگری، به وسیله ادیب اسکا تلندی تامس کارلایل^۳، که در اوایل زندگی اش يك معلم ریاضیات بود، انجام گردید. ترجمه کارلایل، که بعداً به دست چارلز دیویز^۴، و سپس از سوی ج. ه. وان آمربینج^۵ در آن تجدید نظر شده بود، ۳۳ بار در امریکا تجدید چاپ شد. در چاپهای بعدی هندسه اش، لژاندر سعی کرد که اصل توازی را ثابت کند (نگاه کنید به بخش ۱۳-۶). کار عمده لژاندر در ریاضیات عالی حول نظریه اعداد، توابع بیضوی، روش کمترین مربعات، و انتگرالها متمرکز بود؛ این کار پیشرفته تر از آن است که در اینجا مورد بحث واقع شود. در محاسبه جدولهای ریاضی نیز پشتکار زیاد داشت. نام لژاندر امروزه با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

که در ریاضیات کاربردی اهمیت زیادی دارد، پیوند خورده است. توابعی که در این معادله دیفرانسیل صدق می کنند توابع لژاندر (از مرتبه n) نامیده می شوند. وقتی n يك

-
1. Éléments de géométrie	2. John Farrar	3. Thomas Carlyle
4. Charles Davies	5. J.H. Van Amringe	

عدد صحیح نامنفی باشد، معادله دارای جوابهای چندجمله‌ای به نام چندجمله‌ایهای ژاندر است که مورد توجه ویژه‌ای هستند. نام ژاندر با علامت $(c|p)$ در نظریه اعداد هم مرتبط است. نماد ژاندر $(c|p)$ برابر با ± 1 است بسته به اینکه c ، که نسبت به p اول است، مانده مربعی عدد اول فرد p باشد یا نباشد. (برای مثال $(19|6) = 1$)، زیرا همبستگی (به‌هنگام $19 \equiv 6 \pmod{x}$ دارای جواب است، و $(47|39) = -1$)، زیرا همبستگی (به‌هنگام $47 \equiv 39 \pmod{x}$ دارای جواب نیست).

علاوه بر اصول هندسه‌اش که در ۱۷۹۴ منتشر شد، ژاندر یک اثر ۸۵۹ صفحه‌ای در دو جلد تحت عنوان رساله‌ای درباره نظریه اعداد^۱ (۱۷۹۷-۱۷۹۸) به چاپ رساند که اولین رساله‌ای است که منحصرأ به نظریه اعداد اختصاص دارد. وی بعداً یک رساله سه جلدی تحت عنوان تمرینهای حساب انتگرال^۲ (۱۸۱۱-۱۸۱۹) نوشت که به دلیل قابل درک بودن و جامعیتش با اثر مشابه اوایلر برابری می‌کرد. ژاندر بعداً بخشهایی از این اثر را در قالب یک رساله سه جلدی تحت عنوان رساله توابع بیضوی و انتگرالهای اوپلری^۳ (۱۸۲۵-۱۸۳۲) بسط داد. ژاندر در این کتاب اصطلاح «انتگرالهای اوپلری» را برای توابع بتا و گاما معرفی کرد. ژاندر در ژودزی به خاطر مثلث بندی فرانسه به شهرت قابل توجهی دست یافت.

۱۲-۹ مونژ و کارنو

آخرین ریاضیدانان برجسته‌ای که در این فصل مورد بحث قرار خواهند گرفت دو هندسه‌دان یعنی گاسپارد مونژ^۴ (۱۷۴۶-۱۸۱۸) و لازار کارنو^۵ (۱۷۵۳-۱۸۲۳) هستند.

مونژ در دبیرستان اوراتوریها^۶ در بون^۷، در شهر زادگاهش و در دبیرستان آنها در لیون، که درسش پایین ۱۶ سالگی معلم فیزیک آنجا شد، بدتحصیل پرداخت. نقشه با مقیاس بزرگی که استادان از شهر موطنش ساخته بود، موجب پذیرفته شدن او در مدرسه نظامی زیر^۸ به عنوان طراح شد. وقتی از او خواستند که از روی داده‌هایی که در اختیار او قرار داده شده، محل نصب توپ در یک قلعه نظامی مقروضی را تعیین کند، مونژ برای روشهای حسابی طولانی و ملال آور موجود در آن زمان یک طریقه میانبر سریع هندسی یافت. روش او، که نمایش اشیای سه بعدی به نحوی ظریف به کمک تصاویر مناسبی بر صفحه دو بعدی بود، مورد پذیرش ارتش قرار گرفت و در عداد اسرار نظامی خیلی سری در آمد. این روش بعداً به عنوان هندسه ترسیم^۹ به نحو وسیعی تدریس شد. مونژ در سال ۱۷۶۸ استاد ریاضیات،

1. Essai sur la théorie des nombres

2. Exercices du calcul intégral

3. Traité des fonctions elliptiques et des intégrals eulériennes

4. Gaspard Monge 5. Lazare Carnot

۶. اوراتوریها، Oratorians، پیروان مجمعی دینی که در سال ۱۵۷۵ توسط قدیس فیلیپو دنری (Filippo Deneri) در فلورانس تأسیس شد. م.م.

7. Beaunne 8. Mézières 9. descriptive geometry



گاسپار مونژ
(مجموعه کتابخانه عمومی نیویورک)

و در سال ۱۷۷۱. در مزیر، استاد فیزیک شد. و در سال ۱۷۸۵ به کرسی استادی نیدرولیک در لیسئوم^۱ پاریس منصوب شد.

بر خلاف سه شخص دیگری که نامشان با «ل» شروع می‌شود (لاگرانژ، لاپلاس، و لژاندر)، و از انقلاب فرانسه بدور ماندند. مونژ از انقلاب حمایت کرد. وی به عنوان وزیر نیروی دریایی. وارد خدمت شد و به ساختن اسلحه و باروت برای ارتش پرداخت. در تأسیس اکول پلی تکنیک در سال ۱۷۹۵، تحت نظر دیرکتوار^۲، نیروی عمده به شمار می‌رفت، و در آنجا استاد ریاضیات بود. از دوستی نزدیک ناپلئون و تحسین وی برخوردار بود و همراه با ژوزف فوریه (۱۷۶۸-۱۸۳۱) ریاضیدان، در لشگرکشی بدفرجام مصر او را همراهی کرد. در بازگشت بدفرانسه، مونژ مقام خود را در پلی تکنیک بازیافت و در آنجا به ثبوت رساند که معلمی با استعداد استثنایی است. دروس او در آنجا، الهامبخش تعداد زیادی از هندس‌دانان توانا، از جمله شارل دوپن^۳ (۱۷۸۴-۱۸۷۳) و ژان ویکتور پونسله (۱۷۸۸-۱۸۶۷) شد، که اولی در زمینه هندسه دیفرانسیل، و دومی در زمینه هندسه تصویری سهم داشته است.

علاوه بر ابداع هندسه ترسیمی، مونژ را پدر هندسه دیفرانسیل می‌دانند. اثر او تحت عنوان کاربرد آنالیز در هندسه^۴ پنج بار چاپ شد و یکی از مهمترین مباحث اولیه هندسه دیفرانسیل رویه‌ها بود. در اینجا است که مونژ، علاوه بر چیزهای دیگر، مفهوم خطوط انحنای یک رویه در فضای سه بعدی را معرفی کرده است. سهم مونژ در هندسه دیفرانسیل، اساساً به هندسه عارضی^۵ رویه‌ها (نگاه کنید به بخش ۱۴-۷) مختص شده است.

با دروس مونژ در اکول پلی تکنیک بود که هندسه تحلیلی فضایی آغاز وجود کرد.

-
1. Lyceum	2. Directory	3. Charles Dupin
4. Application de l'analyse à la géométrie	5. extrinsic geometry	

مطالب این دروس توسط مونتر و ژان نیکولاس-پیر هاشت^۱ (۱۷۶۹-۱۸۳۴) در سال ۱۸۰۲ در مقاله جامعی دربارهٔ کاربرد جبر در هندسه^۲ که در مجلهٔ اکول پلی تکنیک^۳ چاپ شد، نوشته شد. قضیهٔ آغازین این اثر تعمیم مشهور قضیهٔ فیثاغورس مربوط به قرن هجدهم است که: مجموع مربعات تصاویر قائم یک سطح مستوی بر سه صفحهٔ دو به دو متعامد برابر با مربع مساحت آن سطح مستوی است. در جای دیگر این اثر بخش عمده مطالب کتابهای امروزی در قسمت هندسهٔ تحلیلی فضایی، نظیر فرمولهای انتقال و دوران محورها، بررسی متداول خطها و صفحهها در فضا، و تعیین صفحات اصلی یک مخروطی وار را می یابیم. در اینجا نشان داده شده است که صفحهٔ مار بر نقطهٔ مفروض (x', y', z') و عمود بر محل تلاقی دو صفحهٔ

$$ax+by+cz+d=0 \text{ و } ex+fy+gz+h=0$$

صفحهٔ

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

است که در آن

$$A=bg-fc, B=ce-ga, C=af-eb.$$

فرمولهای مربوط به فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در فضا و کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط متناظر داده شده اند. در بین نتایج جدیدی که مونتر آنها را داده است، نتایج زیر را می یابیم:

(۱) شش صفحهٔ مار بواسط اضلاع یک چهاروجهی و به ترتیب عمود بر اضلاع مقابل در نقطه ای که قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی چهاروجهی نسبت به مرکز هندسی آن است، یکدیگر را قطع می کنند. (این نقطه را امروزه نقطهٔ مونتر چهار وجهی می نامند.)

(۲) مکان هندسی رأس یک کنج قائم سه وجهی که وجوه آن بر مخروطی وار مرکزی مفروضی مماس اند، کره ای هم مرکز با مخروطی وار است. (این کره امروزه کرهٔ مونتر، یا کرهٔ هادی، مخروطی وار نامیده می شود. نظیر این مکان هندسی در فضای دوبعدی را امروزه دایرهٔ مونتر مقطع مخروطی مرکزی مربوطه می نامند، گرچه این مکان هندسی را یک قرن پیشتر لاهیر با استفاده از روشهای ترکیبی پیدا کرده بود.)

بعدها، در سال ۱۸۰۹، مونتر براهین متعددی برای این نتیجه که خطوط واصل بین اوساط اضلاع مقابل یک چهار وجهی در مرکز هندسی چهاروجهی متقارب اند، ارائه داد. مونتر دوبار داشت که آنها هم استاد ریاضیات بودند.

لازاره نیکول مار گریت کارنو^۴، به پیروی از رسم رایج در بین اغلب فرزندان خانواده های مرفه فرانسوی، خود را آمادهٔ رفتن به ارتش کرد، و بنا بر این به مدرسهٔ نظامی مزیر فرستاده شد،

که در آنجا زیر نظر مونژ تحصیل کرد و در سال ۱۷۸۳ با درجه سروانی رشته مهندسی را تمام کرد. در سال ۱۷۸۴ اولین اثر ریاضی خود را، درباره مکانیک، نوشت، که شامل اولین برهان این نکته بود که انرژی جنبشی در برخورد اجسام نیمه کشسان از بین می رود. با ظهور انقلاب فرانسه، خود را درگیر سیاست کرد و انقلاب را با شوق و ایثار پذیرفت. به تعدادی مقام مهم دست یافت، و، در سال ۱۷۹۳، به اعدام لوئی XVI به اتهام خیانت رأی داد. همچنین در سال ۱۷۹۳، وقتی اروپای متحد يك ميليون سرباز به فرانسه گسیل کرد، کارنو وظیفه به ظاهر غیر ممکن سازماندهی چهارده لشکر را که به طور موفقیت آمیزی با دشمن مقابله کردند، متقبل شد، و برای خود عنوان «سازمانده پیروزی» را کسب کرد. در سال ۱۷۹۶ با کودتای ناپلئون مخالفت کرد، و مجبور به فرار به ژنو شد. که در آنجا يك اثر نیمه فلسفی در باره متافیزیک حسابان نوشت. دو اثر مهم او در هندسه، هندسه وضع^۱ و رساله در باب نظریه مودرها^۲ در سالهای ۱۸۰۳ و ۱۸۰۶ به چاپ رسیدند. به عنوان «دشمن آشتی ناپذیر سلاطین»، در سال ۱۸۱۴، بعد از لشکر کشی بدروسیه، داوطلب رفتن به جبهه به خاطر فرانسه ولی نه به خاطر امپراطوری، شد. بعد از اعاده سلطنت تبعید شد، و در سال ۱۸۲۳ در ماگبورگ^۳ در تنگدستی در گذشت.

در هندسه وضع کارنو است که کمیتهای سودار برای اولین بار در هندسه ترکیبی به طور اصولی به کار گرفته شده اند. به کمک کمیتهای سودار، احکام یا رابطدهای مجزای چندی را می توان در قالب يك حکم یا رابطه کلی واحدی در آورد، و اغلب می توان برهان واحدی را فرمول بندی کرد که در غیر این صورت نیاز به بررسی تعدادی حالات مختلف هست (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۶.۱۲). از مفهوم کمیتهای سودار توسط اوگاستس فردیناند مویوس^۴ (۱۷۹۰-۱۸۶۸) در حساب گرانیگاهی^۵ به سال ۱۸۲۷ استفاده بیشتری به عمل آمد.

قضیه منلائوس (نگاه کنید به بخش ۵-۶) مبنای رساله در باب نظریه مودرها نوشته کارنو است. در اینجا کارنو قضیه منلائوس را به حالتی تعمیم می دهد که در آن به جای قاطع مورد بحث در قضیه منلائوس، يك منحنی دلخواه درجه n م گذاشته می شود. برای مثال، در حالت $n=2$ داریم (نگاه کنید به شکل ۱۰۶): اگر اضلاع AB, CA, BC از مثلث ABC يك مقطع مخروطی را به ترتیب در نقاط (حقیقی یا موهومی) $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ قطع کنند آنگاه

$$4C_1)(AC_2)(BA_3)(BA_2)(CB_1)(CB_2) = (AB_1)(AB_2)(BC_1)(BC_2)(CA_1)(CA_2)$$

که در آن همه پاره خطها، پاره خطهای جهت دار هستند. این قضیه را می توان با گذاشتن يك چندضلعی دلخواه به جای مثلث، تعمیم بیشتری داد.

1. Géométrie de position
2. Essai sur la théorie des transversals
3. Magdeburg
4. Augustus Ferdinand Möbius
5. Der barycentrische Calcul

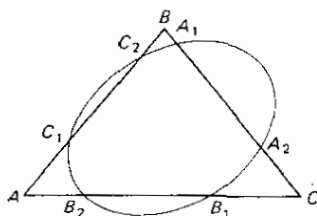


لازار کارنو
(مجموعه دیوید اسمیت)

کارنو همچنین حجم يك چهاروجهی را بر حسب شش یال آن پیدا کرد، و فرمولی (شامل ۱۳۰ جمله) به دست آورد که هر يك از ده پاره خط واصل بین دو نقطه از پنج نقطه تصادفی در فضا را بر حسب نه پاره خط دیگر بیان می کند.

کارنو پسری داشت به نام هیپولیت^{*}، که در سال ۱۸۴۸ وزیر تعلیمات عمومی شد، پسر دیگری به نام سعدی^{**} که فیزیکدان برجسته ای شد، نوه ای هم به نام سعدی که پسر هیپولیت بود و چهارمین رئیس جمهور جمهوری سوم فرانسه شد، و نوه دیگری به نام آدلف که پسر هیپولیت بود و شیمی دان برجسته ای شد.

مونژ و کارنو هر دو انقلابیون دو آتشه ای بودند، ولی کارنو به طور قطع با صداقت تر و ثابت قدم تر از مونژ بود. هر دو به اعدام لوئی شانزدهم رأی دادند، ولی کارنو، گرچه مایل



شکل ۱۰۶

1. Hippolyte 2. Sadi

* هیپولیت متذکر شده است که پدرش به دلیل علاقه ای که به سعدی شیرازی-شاعر نامی ایران- داشته، نام پسر خود را سعدی گذاشته است. -م.

بود که به عنوان سر رشته دار زیر دست نا پلئون خدمت کند، تنها مقام تریونی بود که باشاهمت و اعتقاد کافی بر ضد اعطای عنوان امپراطور به نا پلئون رأی داد، و به خاطر این موضع خود تبعید شد. برعکس مونژ، معبود خود را برده وار در همه احوال از زمانی که سر جو خدای آرمانگرا و انقلابی بود، تا زمانی که امپراطور خودخواه و مستبدی شد، مورد حمایت قرار داد، و مونژ بود که با طیب خاطر کار نفرت آور تعیین اقلامی از گنجینه های هنری را که باید به عنوان غنایم جنگی از ایتالیا به پاریس آورده می شدند، پذیرفت.

۱۲-۱۰ دستگاه متری

اندازه گیری طول، مساحت، حجم، و وزن نقش مهمی در کار بردهای عملی ریاضیات دارد. در میان این واحدهای اندازه گیری، واحد طول جنبه اساسی دارد، زیرا با داشتن يك واحد طول، می توان واحدی برای سایر کمیتها وضع کرد. یکی از دستاوردهای مهم قرن هجدهم ایجاد دستگاه متری بود که به جای دستگاه اوزان و مقادیر کاملاً درهم و برهم و غیر علمی دنیا، دستگاهی منظم، یکنواخت، علمی، دقیق، و ساده گذاشته شود.

بسط دستگاه متری امروزی اولین کوشش برای دایر کردن يك دستگاه علمی اندازه گیری نیست. در سال ۱۶۷۰، ریاضیدان فرانسوی و معاون اسقف کلیسای سنت پل در لیون، کشیش گا بریل موتون^۱، يك دقیقه از محیط زمین را به عنوان واحد طول مطرح کرد، و این واحد را به طور اعشاری تقسیم و ضرب کرد و به اضعاف و مضارب گوناگون آن اصطلاحهای مناسب لاتین اختصاص داد. تقریباً در همان زمان سر کریستوفر رن، در انگلستان، پیشنهاد کرد که طول آونگی که هر نیم ثانیه يك بار در نوسان است، به عنوان واحد طول اختیار شود؛ این واحد تقریبی برای نصف طولی است که عموماً به زراع باستان (فاصله بین آرنج شخص تا نوک انگشت وسط ممتد او) تخصیص داده می شد. در سال ۱۶۷۱ منجم فرانسوی ژان پیکار^۲، و در سال ۱۶۷۳ فیزیکدان هلندی کریستیان هویگنس از انتخاب طول آونگ يك ثانیه در سطح دریا در عرض ۴۵° جغرافیایی هواداری کردند؛ این واحد تنها شش میلی متر کوتاهتر از متر امروزی درمی آمد. در سال ۱۷۴۷، لا کوندامین^۳ آونگ يك ثانیه را در استوا مطرح کرد. در سال ۱۷۷۵، مسیه^۴ طول آونگ يك ثانیه را در عرض ۴۵° جغرافیایی با دقت زیاد اندازه گرفت و بدون توفیق برای انتخاب شدن آن به عنوان واحد طول کوشید.

بحث دامنه دار ایجاد يك دستگاه نوین اندازه گیری موجب شد که در سال ۱۷۸۹ آکادمی علوم فرانسه کمیته ای را برای طرح برنامه قابل قبولی منصوب نماید. سال بعد سر جان میلر^۵ در مجلس عوام انگلیس، يك دستگاه اندازه گیری یکنواخت برای بریتانیای کبیر پیشنهاد کرد. تقریباً در همان زمان، تامس جفرسون^۶ يك دستگاه یکنواخت برای ایالات

متحدہ پیشنہاد و طول يك آونگك يك ثانيہ ای در عرض جغرافیایی 38° را، کہ میانگین عرض جغرافیایی ایالات متحدہ در زمان او بود، مطرح کرد.

کمیتهٔ آکادمی علوم فرانسه ضمن کار خود بر يك دستگاه اعشاری توافق نمود و دوشق را برای واحد طول این دستگاه بررسی کرد. یکی از آنها طول آونگك يك ثانيہ بود. چون معادلهٔ آونگك $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ است، طول استاندارد، یا متر، g/π^2 از آن حاصل می‌شود. از آنجا کہ g ہم با عرض جغرافیایی و ہم ارتفاع از سطح دریا تغییر می‌کند، و با توجه بہدقتی کہ لژاندر و دیگران نصف النهار زمینی را اندازه گرفته بودند، کمیته موافقت کرد کہ متر را يك دہ میلیونیم فاصلۂ نصف النهاری از قطب شمال تا استوا انتخاب نماید. در سال ۱۷۹۳، بر اثر فشارهای سیاسی، آکادمی علوم تعطیل ولی کمیتهٔ اوزان و مقادیر ابقا شد. بعضی از اعضای آن مانند لاووازیہ تصفیہ شدند و عدہ ای دیگر بہ عضویت در آمدند کہ زمانی لاگرانژ، لاپلاس، لژاندر، و مونژ را شامل می‌شدند. پیش از ۱۷۹۹ کار کمیته بہ اتمام رسید و دستگاه متری فعلی بہ تحقق پیوست.

در ژوئن ۱۷۹۹ جمهوری فرانسه دستگاه متری اوزان و مقادیر را پذیرفت. امروزہ این دستگاه در ہمہ جای دنیا، بہ جز در ایالات متحدہ کہ آمادۂ الحاق بہ آن است، پذیرفته شدہ است. البتہ دستگاه متری مدتہاست کہ در ایالات متحدہ در مقاصد علمی مورد استفاده است. بہ علت آشکار شدن وجود خطا در اندازه گیری ربع نصف النهاری، متر استاندارد امروزی را بہ عنوان $۱,۶۵۰,۷۶۳,۷۳$ برابر طول موج نوز قرمز نارنجی ایزوتوپ-کریپتون-۸۶ کہ در خلأ اندازه گرفته شود، تعریف می‌کنند.

۱۲-۱۱ خلاصہ

ما بررسی اجمالی خود از ریاضیات قرن ہجدهم را با توجه بہ این نکته خاتمہ می‌دہیم کہ این قرن در همان حال کہ شاہد پیشرفتہای قابل ملاحظہ ای در زمینۂ موضوعاتی مانند مثلثات، هندسۂ تحلیلی، حسابان، نظریۂ اعداد، نظریۂ معادلات، احتمالات، معادلات دیفرانسیل، و مکانیک تحلیلی بود، شاہد بہ وجود آمدن برخی زمینہ‌های جدید مانند علوم آمارگری، حساب تغییرات، توابع از درجات بالا، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، هندسۂ ترسیمی، و هندسہ دیفرانسیل نیز بود. قسمت عمدۂ تحقیقات ریاضی این قرن از مکانیک و نجوم نشأت والہام گرفته‌اند، ولی در توجہ دالامبر بہ مبانی سست آنالیز، در کار لامبرت در بارۂ اصل توازی، در تلاش لاگرانژ برای دقیقتر کردن حسابان، و در افکار فلسفی کارنو، ما اشاراتی بہ آزادی قریب الوقوع هندسہ وجبر، و توجہ عمیق بہ مبانی ریاضیات را، کہ در قرن نوزدهم بہ وقوع پیوست، می‌بینیم. بعلاوہ، پیدایش ریاضیدانانی با تخصص در زمینہ‌های محدود، مانند مونژ در هندسہ، آغاز شد. همچنین باید خاطر نشان کرد کہ در ۲۲ ژوئن ۱۷۹۹، بعد از انقلاب فرانسه، جمهوری فرانسه سیستم متری اوزان و مقادیر را پذیرفت

پیشامد مهم دیگری که در قرن هجدهم به وقوع پیوست، ورود جدی زنان به پهنه‌های ریاضیات و علوم دقیقه بود. چنین پیشه‌هایی مورد بی‌مهری زنان و چنین فرصتهایی برای آنان عملاً ناموجود بود. در قرن هجدهم بود که ماریا گکتانا آنیزی (۱۷۹۹-۱۷۱۸) و سوفی ژرمن^۱ (۱۷۷۶-۱۸۳۱) بر پهنه ریاضیات تأثیر بخشیدند. قبلاً به ذکر ماریا آنیزی در بخش ۱۰-۳ پرداخته‌ایم. سوفی ژرمن، که در پاریس به دنیا آمد، ریاضیدانی نسبتاً توانا تر بود. گرچه، به علت زن بودن، از ثبت نام در اکول پلی تکنیک منع شده بود، یادداشت‌های درسی اساتید زیادی از آن مدرسه را تهیه کرد و از طریق اظهار نظرهای کتبی که تحت نام مستعار م. لوبلان^۲ به عمل می‌آورد، تحسین لاگرانژ را برانگیخت. وی بعدها مورد تعریف و تمجید گاوس قرار گرفت. همچنین در سال ۱۸۱۶، آکادمی فرانسه به خاطر مقاله‌ای در نظریه ریاضی کشسانی جایزه‌ای بدوی اعطا کرد. در ۱۸۳۱ وی مفهوم مفید انحنا می‌انگین (می‌انگین حسابی دوانحنا اصلی) را به عالم هندسه دیفرانسیل رویدها معرفی کرد.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱۲ اعداد برنولی

فرمولهای

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k-1)^3 = \frac{k^4}{4} - \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{4},$$

که مجموع

$$S_n(k) \equiv 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (k-1)^n$$

را به ازای $n = 1, 2, 3$ به صورت چندجمله‌ایهایی بر حسب k بیان می‌کند، از زمانهای بسیار دور معلوم بوده‌اند. یاکوب برنولی به ضرایب $B_1, B_2, B_3, \dots$ ، وقتی $S_n(k)$ به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب k به صورت زیر بیان می‌شود، علاقمند شد

$$S_n(k) = \frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{k^n}{2} + B_1 C(n, 1) \frac{k^{n-1}}{2} - B_2 C(n, 2) \frac{k^{n-2}}{4} + \dots,$$

که در آن $C(n, r) = n(n-1) \dots (n-r+1)/r!$. این ضرایب، که امروزه به‌عنوان اعداد برنولی شناخته می‌شوند، نقش مهمی در آنالیز دارند و دارای برخی خواص جالب حسابی‌اند.

(الف) اگر $n = 2r + 1$ ، می‌توان نشان داد که

$$B_1 C(n, 2) - B_3 C(n, 4) + B_5 C(n, 6) - \dots + (-1)^{r-1} B_r C(n, 2r) = r - (1/2).$$

با استفاده از این فرمول، B_1 تا B_8 را حساب کنید.

(ب) يك عدد اول مانند p را منظم گویند هرگاه آن عدد هیچيك از صورت‌های $B_1, B_2, \dots, B_p$ را موقعی که این اعداد به شکل تحویل‌ناپذیر نوشته شوند، عاد نکند. در غیر این صورت p را نامنظم گویند. با دانستن اینکه

$$B_{16} = \frac{7709321041217}{510},$$

نشان دهید که ۳۷ نامنظم است.

در سال ۱۸۵۰، ا. کومر ثابت کرد که آخرین «قضیه» فرما به‌ازای هر نمایی که يك عدد اول منظم باشد، درست است، و تنها اعداد اول نامنظم زیر ۱۰۰ عبارتند از ۳۷، ۵۹ و ۶۷.

(ج) ك. ك. ك. فون اشتاوت قضیه مهم زیر را ثابت کرد:

$$B_r = G + (-1)^r (1/a + 1/b + 1/c + \dots)$$

که در آن G عددی است صحیح و $a, b, c, \dots$ همه اعداد اول مانند p اند به‌طوری‌که $2r/(p-1)$ يك عدد صحیح باشد. قضیه اشتاوت را برای $B_1 = 1/30$ و $B_8 = 3617/510$ تحقیق کنید.

۲۰۱۲ فرمول دموآور

(الف) فرمول دموآور را ثابت کنید:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ و n يك عدد صحیح مثبت است.

(ب) با استفاده از فرمول (الف)، $\cos 4x$ و $\sin 4x$ را بر حسب $\cos x$ و $\sin x$ بیان کنید.

(ج) با استفاده از فرمول دموآور، نشان دهید که $(-1-i)^{15} = -128 + 128i$.

(د) نشان دهید که $i^n = \cos(n\pi/2) + i \sin(n\pi/2)$.

(ه) با استفاده از فرمول دموآور، ریشه هشتم ۱ را پیدا کنید.

۳۰۱۲ توزیعها

(الف) شش سکه به طور همزمان ۱۰۰۰ بار پرتاب می شوند. از این ۱۰۰۰ پرتاب ۹ مورد وجود دارد که در آن هیچ شیر ظاهر نمی شود، ۹۹ مورد که در آن ۱ شیر ظاهر می شود، ۲۴۱ مورد که در آن ۲ شیر ظاهر می شود، ۳۱۳ مورد که در آن ۳ شیر ظاهر می شود، ۲۳۳ مورد که در آن ۴ شیر ظاهر می شود، ۹۵ مورد که در آن ۵ شیر ظاهر می شود، و ۱۰ مورد که در آن ۶ شیر ظاهر می شود. این توزیع فراوانی را با رسم يك منحنی فراوانی نمایش دهید.

(ب) منحنی فراوانی نرمال $y = 10e^{-x^2}$ را رسم کنید.

(ج) میانگین حسابی مجموعه شیر بر پرتاب در آزمایش (الف) را محاسبه کنید.

(د) میانۀ مجموعه ای از مقادیر عددی جمله میانی است موقعی که مقادیر به طور صعودی یا نزولی به ترتیب بزرگی مرتب شوند. میانۀ مجموعه شیر بر پرتاب در آزمایش (الف) چیست؟

(ه) اگر، در مجموعه ای از مقادیر عددی، عددی بیشتر از سایرین تکرار شود، آن را مد مجموعه نامند. مد مجموعه شیر بر پرتاب در آزمایش (الف) چیست؟

(و) وضعیتی را در نظر بگیرید که شخص میلیونری به جامعه کوچکی از مردم کم درآمد می پیوندد. تأثیر این کار در درآمد میانگین، درآمد میانه، درآمد مدی جامعه چیست؟

(ز) يك بازرگان کفش بیشتر به میانگین حسابی اندازه های کفش مردم جامعه اش علاقمند است، به میانه آن، یا به مد آن؟

(ح) درباره میانگین حسابی، میانه، و مد فراوانی توزیع نرمال چه می توان گفت؟

(ی) به کمک فرمول استرلینگ $1000!$ را تقریب کنید.

۴۰۱۲ کار صوری با سریها

(الف) بسط ماکلورن را برای $\sin z$ ، $\cos z$ ، و e^z به دست آورید.

(ب) نشان دهید که بسط ماکلورن $\cos z$ را می توان از راه مشتق گیری، جمله به جمله، بسط ماکلورن $\sin z$ به دست آورد.

(ج) به طور صوری، با استفاده از بسط قسمت (الف)، نشان دهید که

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

(د) با استفاده از بسط ماکلورن $\sin z$ ، نشان دهید که

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \right) = 1.$$

(ه) با استفاده از بسط تیلر $f(x)$ و $g(x)$ حول $x = a$ نشان دهید، وقتی

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0, g(a) = g'(a) = \dots = g^{(k)}(a) = 0, g^{(k+1)}(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k+1)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}.$$

۵.۱۲ يك حدس و يك پارادوکس

(الف) اوپلر حدس زد که به ازای $n > 2$ حداقل n قوه n لازم است تا مجموعه حاصل آید که خود آن يك قوه n باشد. در سال ۱۹۶۶ ل. ج. لاندرا و ت. ر. پارکن^۱، با استفاده از کامپیوترهای پرسرعت، کشف کردند که

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 139^5 = 144^5.$$

در درستی این مثال نقض تحقیق کنید.

(ب) پارادوکس زیر را که موجب دردرس ریاضیدانان عصر اوپلر بود، توضیح دهید: چون $(-x)^2 = (x)^2$ ، داریم $\log(-x)^2 = \log(x)^2$ ، و بنا بر این $2 \log(-x) = \log(-x) = \log(x)$ و از آنجا $2 \log(-x) = 2 \log(x)$.

۶.۱۲ اوپلر و سریهای نامتناهی

(الف) اولدنبرگ^۳، در نامه‌ای به لایبنیتز در سال ۱۶۷۳، مجموع سری نامتناهی زیر را خواست

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$$

لایبنیتز نتوانست جواب را پیدا کند و در ۱۶۸۹ یاکوب برنولی اعتراف کرد که او هم قادر به یافتن جواب نیست. جزئیات روش صوری زیر را که توسط اوپلر برای حل این مسئله به کار گرفته شد، کامل کنید. با سری ماکلورن زیر شروع کنید

$$\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots$$

بنابراین $\sin z = 0$ را می‌توان (بعد از تقسیم بر z) به عنوان چند جمله‌ای نامتناهی

$$1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \dots = 0$$

یا، با قراردادن w به جای z^2 ، به عنوان معادله

$$1 - w/3! + w^2/5! - w^3/7! + \dots = 0$$

تلقی کرد، بنا بر نظریهٔ معادلات، مجموع معکوسهای ریشه‌های این معادله ضریب جمله خطی با علامت منفی، یعنی $1/6$ است. چون ریشه‌های چندجمله‌ای بر حسب z ، π ، 2π ، 3π ، ... است، نتیجه می‌شود که ریشه‌های چندجمله‌ای بر حسب w عبارت‌اند از $(2\pi)^2$ ، $(3\pi)^2$ ، ... بنا بر این

$$1/6 = 1/\pi^2 + 1/(2\pi)^2 + 1/(3\pi)^2 + \dots$$

یا

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$$

(ب) روش اولر در قسمت (الف) را در مورد بسط ماکلورن $\cos z$ به کار برد تا مجموع زیر را پیدا کنید

$$\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots$$

(ج) با استفاده از (الف) و (ب)، به‌طور صوری نشان دهید که

$$\pi^2/12 = 1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \dots$$

در کتاب مدخل خود مربوط به سال ۱۷۴۵، اولر مجموع

$$1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots$$

را برای مقادیر زوج n از $n=2$ تا $n=26$ داد. دستیابی به حالتیابی که در آنها n فرد است هنوز هم مشکل است، و حتی معلوم نیست که مجموع معکوسهای مکعبهای اعداد صحیح مثبت مضرب گویایی از π^3 باشد. اولر از طریق اعمال قواعدی که برای چندجمله‌ایهای متناهی معتبرند در مورد چندجمله‌ایهای نامتناهی (سریهای توانی) به نتایج زیادی رسید، که امروزه درست بودن آنها معلوم است.

۷.۱۲ منحنیهای مداری شکل

يك منحنی مداری شکل، یا منحنی با پهنای ثابت، يك مرغانهٔ محدب مستوی است با این خاصیت که فاصلهٔ بین دو مماس موازی بر منحنی ثابت است.

(الف) نشان دهید که مثلث رولو^۱، که توسط سه قوس مستدیر که مراکز آنها رئوس يك مثلث متساوی الاضلاع اند و شعاع آنها برابر با ضلع مثلث است، تعریف می‌شود، يك منحنی مداری شکل است. (مته‌هایی بر اساس شکل مثلث رولو طرح شده‌اند که برای کندن سوراخهای مربع شکل به کار می‌روند.)

(ب) نشان دهید که چگونه، با شروع از يك مثلث، می‌توان يك منحنی مداری شکل

مرکب از ۵ قوس مستدیر ساخت.

(ج) با شروع از يك پنتاگرام محدب که قطرهایش با هم برابر باشند، يك منحنی مداری شکل مرکب از ۵ قوس مستدیر بسازید.

(د) نشان دهید که چگونه، با شروع از يك پنج‌ضلعی محدب، می‌توان يك منحنی مداری شکل مرکب از ۱۰ قوس مستدیر ساخت.

(ه) يك منحنی مداری شکل بسازید که هیچ قوس مستدیر نداشته باشد.

(ز) نقطه‌ای مانند P بريك منحنی مداری شکل يك نقطه معمولی نسامیده می‌شود هر گاه منحنی در نقطه P دارای يك مماس با چرخش پیوسته باشد. دوانتهای وتری با طول ماکزیموم يك منحنی مداری شکل نقاط متقابل منحنی نسامیده می‌شوند. قضایای زیر را در باره منحنیهای مداری شکل ثابت کنید. (۱) هیچ قسمت از يك منحنی مداری شکل مستقیم نیست. (۲) اگر P_1 و P_2 دو نقطه متقابل معمولی يك منحنی مداری شکل باشند، آنگاه P_1P_2 در P_1 و P_2 بر منحنی قائم است. (۳) اگر r_1 و r_2 شعاعهای انحنا در دو نقطه متقابل معمولی P_1 و P_2 از يك منحنی مداری شکل با پهنای ثابت d باشند، آنگاه $r_1 + r_2 = d$.

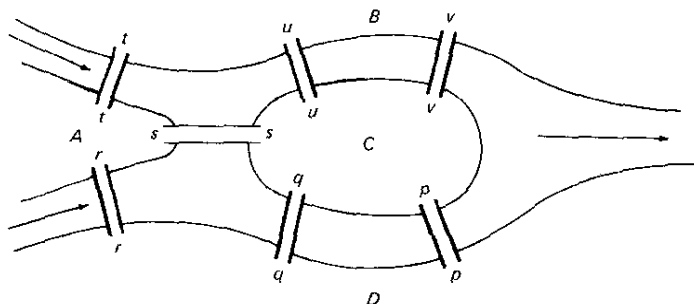
(۴) قضیه باریه^۱: محیط يك منحنی مداری شکل با پهنای ثابت d ، برابر πd است.

(ج) نشان دهید که اگر يك مثلث رولو حول یکی از محورهای تقارنش دوران داده شود، جسمی با پهنای ثابت به دست می‌آید. (درباره اجسام با پهنای ثابت کمتر از منحنی‌های با پهنای ثابت اطلاعاتی در دست است. گرچه برای قضیه باریه مستقیماً مشابهی وجود ندارد، مینکوفسکی^۲ خاطر نشان کرده است که سایدهای حاصل از تصویر قائم جسمی با پهنای ثابت، دوایری با محیط ثابت اند.)

۸۰۱۲ گرافهای يك پیمایه‌ای و چندپیمایه‌ای

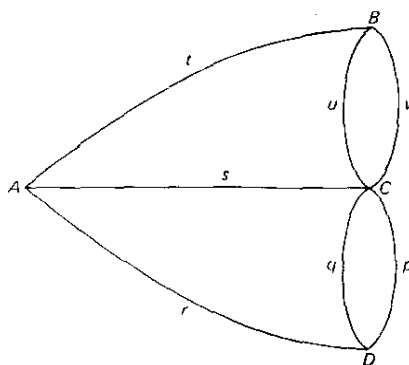
در سال ۱۷۳۶ اولر سؤالی را که در آن زمان مورد بحث بود، پاسخ داد. سؤال به این مضمون بود که آیا ممکن است در شهر کونیگسبرگ چنان گردش کرد که از هر پل شهر یکبار و فقط یکبار عبور کرد و به نقطه شروع بازگشت. این شهر نزدیک به مصب رود پرگل^۳ واقع بود، هفت پل داشت، و به طوری که در شکل ۱۰۷ نشان داده شده، شامل يك جزیره می‌شد. اولر مسئله را به مسئله پیمودن گراف وابسته شکل ۱۰۸، به نحوی که هر خط گراف یکبار و فقط یکبار طی شود، و نقطه پیماینده به نقطه شروع منتهی شود، تحويل کرد.

هنگام بررسی مسئله کلی، تعاریف زیر مفیدند. يك بند نقطه‌ای از گراف است که خطوط از آن منشعب می‌شوند. شاخه خطی از گراف است که دو بند متوالی را به هم وصل می‌کند. مرتبه يك بند تعداد شاخه‌هایی است که از آن منشعب می‌شوند. يك بند را زوج یا فرد نامند بسته به اینکه مرتبه آن زوج یا فرد باشد. يك مسیر مرکب از تعدادی شاخه است که بتوان آنها را بی آنکه هیچ شاخه‌ای بیش از يك بار پیموده شود، طی کرد. گرافی

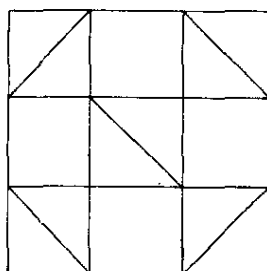


شکل ۱۰۷

- را که بتوان طی یک مسیری کرد، یک پیمایه می‌نامند، در غیر این صورت آن را چند پیمایه می‌نامند. درباره این مفاهیم اوایلر موفق به اثبات قضایای زیر شد:
۱. در هر گراف تعداد بندهای فرد زوج است.
 ۲. یک گراف بدون بندهای فرد را می‌توان به‌طور یک پیمایه‌ای در امتداد یک مسیر تودفته که به نقطه آغازش ختم می‌شود، پیمود.
 ۳. گرافی با دقیقاً دو بند فرد را می‌توان به‌طور یک پیمایه‌ای با شروع از یکی از بندهای فرد و سپس رسیدن به دیگری پیمود.
 ۴. گرافی با بیش از دو بند فرد، چند پیمایه‌ای است.
- (الف) با استفاده از قضایای اوایلر، سؤال پل کونیگسبرگ را که جوابش منفی است، پاسخ دهید.
- (ب) نشان دهید که گراف شکل ۱۰۹ یک پیمایه‌ای است، در حالی که گراف شکل ۱۱۰ چند پیمایه‌ای است.



شکل ۱۰۸



شکل ۱۰۹

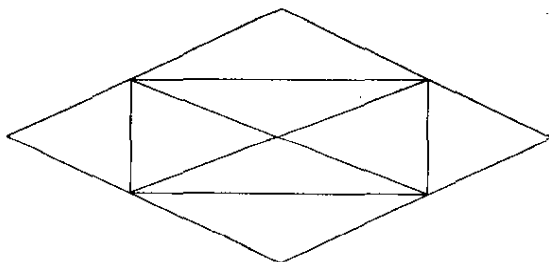
- (ج) شکل ۱۱۱ خانه‌ای را با اطاقها و درهای آن به صورتی که مشخص شده‌اند، نشان می‌دهد. آیا ممکن است که به‌طور متوالی از هر دریك فقط يك بار گذشت؟
- (د) قضایای اویلر را که در بالا بیان شده‌اند، ثابت کنید.
- (ه) نتیجه لیستینگ را که فرع قضیه چهارم اویلر است، ثابت کنید: گرافی با دقیقاً $2n$ بند فرد را می‌توان طی n مسیر مجزا کاملاً پیمود. صحت این نتیجه را در مورد گراف شکل ۱۱۰ تحقیق کنید.

۹.۱۲ چند معادله دیفرانسیل

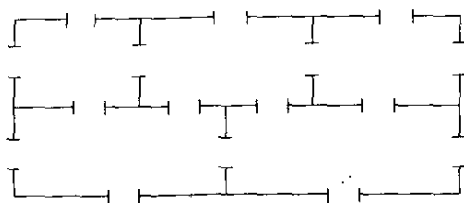
(الف) معادله دیفرانسیل

$$y^{n-1}(dy/dx) + a(x)y^n = f(x)$$

به معادله برنولی معروف است. نشان دهید که تبدیل $y^n = v$ معادله برنولی را به يك



شکل ۱۱۰



شکل ۱۱۱

معادله دیفرانسیل خطی بدل می کند.
(ب) معادله دیفرانسیل

$$y = px + f(p),$$

که در آن $p = dy/dx$ ، به معادله کلرو معروف است. نشان دهید که جواب معادله کلرو

$$y = cx + f(c),$$

است.

(ج) معادله دیفرانسیل

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x),$$

که در آن نماهای داخل پرانتز مرتبه مشتق گیری را نشان می دهند، به معادله اوایلر معروف است. نشان دهید که تغییر متغیر $x = e^t$ معادله اوایلر را به يك معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیل می کند.

(د) معادله دیفرانسیل

$$dy/dx = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

به معادله ریکاتی معروف است. نشان دهید که اگر $v = f(x)$ يك جواب ویژه معادله باشد، در این صورت تغییر متغیر $y = v + 1/z$ معادله را به يك معادله دیفرانسیل خطی برحسب z تبدیل می کند.

۱۰۱۲ توابع هذلولوی

(الف) توابع سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی را می توان به صورت

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

تعریف کرد، و سپس تانژانت هذلولوی، کتانژانت هذلولوی، سکانت هذلولوی، و کوسکانت هذلولوی را به صورت $\tanh u = \sinh u / \cosh u$ ، $\coth u = 1 / \tanh u$ ، $\operatorname{csch} u = 1 / \sinh u$ ، $\operatorname{sech} u = 1 / \cosh u$ تعریف نمود. نشان دهید که

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \quad ۱.$$

$$\tanh u = (e^u - e^{-u}) / (e^u + e^{-u}) \quad ۲.$$

$$\coth^2 u - \operatorname{csch}^2 u = 1 \quad ۳.$$

$$\tanh^2 u + \operatorname{sech}^2 u = 1 \quad ۴.$$

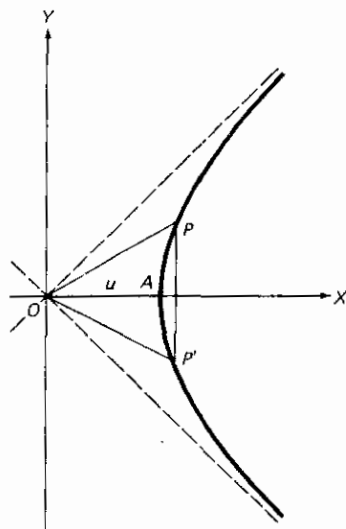
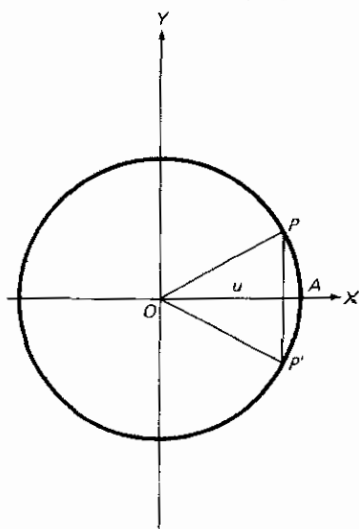
$$\operatorname{csch}^2 u - \operatorname{sech}^2 u = \operatorname{csch}^2 u \operatorname{sech}^2 u \quad ۵.$$

$$\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v \quad ۶.$$

$$\cosh(u \pm v) = \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v \quad ۷.$$

$$d(\cosh u) / du = \sinh u, d(\sinh u) / du = \cosh u \quad ۸.$$

(ب) دایره و آخذ $x^2 + y^2 = 1$ و یک هذلولی متساوی الساقین واحد $x^2 - y^2 = 1$ را، به صورتی که در شکل ۱۱۲ تصویر شده‌اند، در نظر بگیرید. مساحت قطاعی $OPAP'$ را با u نمایش دهید. نشان دهید که، برای دایره داریم $x = \cos u$ ، $y = \sin u$ ، و برای هذلولی، $x = \cosh u$ ، $y = \sinh u$ ، که در آن (x, y) مختصات P است.



شکل ۱۱۲

$$A = (1/2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad V = (1/6) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

را برای مساحت A از مثلثی که رأسهای آن نقاط (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) و حجم V از چهاروجهی که رأسهای آن نقاط (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2) ، (x_3, y_3, z_3) هستند، داد. وی همچنین فرمول زیر را برای فاصله D ی نقطه (p, q, r) تا صفحه $ax + by + cz = d$ داد.

$$D = \frac{ap + bq + cr - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(الف) فرمول مساحت مثلث را ثابت کنید.

(ب) فرمول فاصله يك نقطه از صفحه را ثابت کنید.

۱۲.۱۲ مسئله سوزن بوفون

مسئله‌ای که در سال ۱۷۷۷ توسط کنت دو بوفون مطرح، و حل، شد این است: فرض کنید يك سوزن همگن یکنواخت به طول l به تصادف بر روی يك صفحه افقی که خطوط موازی به فاصله $a < l$ از یکدیگر بر آن کشیده شده، پرتاب می‌شود. احتمال اینکه سوزن یکی از خطوط را قطع کند، چیست؟

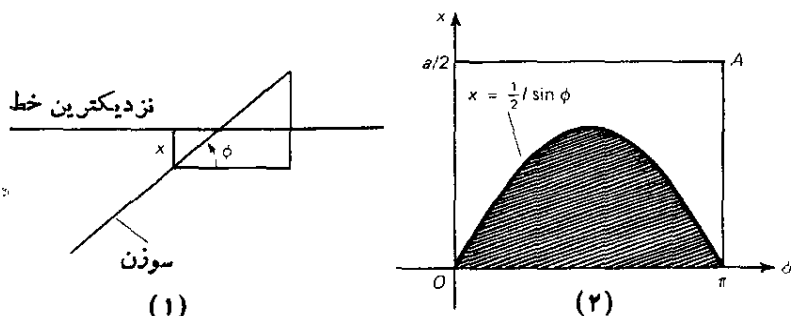
فرض می‌کنیم که در اینجا «به تصادف» بدان معنی است که افتادن مرکز سوزن بر هر نقطه صفحه به يك اندازه محتمل، و قرار گرفتن سوزن در هر جهت نیز به يك اندازه محتمل باشد و این دو متغیر مستقل از یکدیگر باشند. فاصله مرکز سوزن از نزدیکترین خط موازی را y نشان دهید. فرض کنید که ϕ جهت سوزن را نسبت به جهت خطوط موازی نشان دهد.

(الف) با توجه به شکل ۱۱۳ (۱)، نشان دهید که سوزن یکی از خطوط را قطع می‌کند اگر و فقط اگر $x < (1/2)l \sin \phi$.

(ب) در صفحه‌ای با مختصات دکارتی قائم x و ϕ (نگاه کنید به شکل ۱۱۳ (۲)) مستطیل OA را که نقاط داخلی آن در نامساویهای

$$0 < x < a/2, \quad 0 < \phi < \pi$$

صدق می‌کنند، در نظر بگیرید. به هر نقطه در این مستطیل يك و فقط يك وضعیت (x) و جهت (ϕ) از سوزن متناظر است؛ به هر نقطه در ناحیه پرداز خورده شکل ۱۱۳ (۲) يك و فقط يك



شکل ۱۱۳

وضعیت (۲) و یک جهت (ϕ) از سوزن به طوری که سوزن یکی از خطوط موازی را قطع کند، متناظر است. نشان دهید که احتمال مطلوب نسبت ناحیه پرداز خورده به کل سطح مستطیل OA است.

(ج) حال نشان دهید که احتمال مطلوب با فرمول زیر داده می‌شود:

$$\phi = \frac{\frac{l}{2} \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}.$$

(د) لاپلاس، در کتاب نظریه تحلیلی احتمالات خود مربوط به سال ۱۸۱۲، با اثبات نتیجه زیر، نتیجه بوفون را تعمیم داد: اگر دو مجموعه خطوط متعامد هم‌فاصله داشته باشیم به طوری که فاصله خطوط یک مجموعه a و فاصله خطوط مجموعه دیگر b باشد، در این صورت p احتمال اینکه سوزنی به طول $l < a, b$ که به طور تصادفی پرتاب شده بر روی یکی از خطوط بیفتد، چنین است

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

نتیجه بوفون را با فرض اینکه در نتیجه لاپلاس $b \rightarrow \infty$ ، به دست آورید.

۱۳.۱۲ وتر تصادفی در یک دایره

این مطالعه مسئله‌ای، مشکلی را که اغلب در تعیین اینکه در یک مسئله احتمال هندسی، چه مجموعه‌ای از حالات مساوی احتمال بیشتر مورد نظر است، توضیح می‌دهد. این مسئله را در نظر بگیرید: احتمال اینکه یک وتر تصادفی رسم شده در یک دایره مفروض طولتر از یک

ضلع يك مثلث متساوی الاضلاع محاطی باشد، چیست؟

(الف) نقطه دلخواه A را بر روی دایره مفروضی انتخاب و يك وتر تصادفی را از A رسم کنید. با فرض اینکه همه وترهای مار بر A متساوی الاحتمال باشند، نشان دهید که احتمال مورد نظر $1/3$ است.

(ب) جهت دلخواه d را انتخاب و يك وتر تصادفی به موازات d رسم کنید. با فرض اینکه همه وترهای موازی d متساوی الاحتمال هستند، نشان دهید که احتمال مطلوب $1/2$ است.

(ج) نقطه دلخواهی در داخل دایره مفروض را نقطه وسط يك وتر تصادفی انتخاب و آن وتر را رسم کنید. با فرض اینکه همه نقاط داخل دایره مفروض به عنوان نقاط وسط وتر متساوی الاحتمال باشند، نشان دهید که احتمال مطلوب $1/4$ است.

۱۴۰۱۲ روش کمترین مربعات

به عنوان حالت ساده ای از يك مسئله اساسی در روش کمترین مربعات، فرض کنید که مشاهدات منجر به $n > 2$ معادله خطی تقریبی زیر شده اند که دو متغیر x و y در آنها صدق می کنند.

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

در این صورت بنا بر استدلالهای مبتنی بر احتمال، ثابت شده است که «بهترین» مقادیری که باید برای x و y اتخاذ شوند، مقادیری هستند که از حل دو معادله زیر با هم، به دست می آیند

$$(\sum a_i^2)x + (\sum a_i b_i)y + \sum a_i c_i = 0,$$

$$(\sum b_i a_i)x + (\sum b_i^2)y + \sum b_i c_i = 0.$$

(الف) با استفاده از روش کمترین مربعات، «بهترین» مقادیر x و y را که در معادلات زیر صدق می کنند، پیدا کنید.

$$x - y + 1 = 0,$$

$$3x - 2y - 2 = 0,$$

$$2x + 3y - 2 = 0,$$

$$2x - y = 0.$$

(ب) در تعیین ضریب c ی انبساط طولی میله فلزی معینی، طول میله در دماهای مختلف اندازه گرفته شده و جدول زیر حاصل شده است:

طول مشاهده شده (میلی‌متر)	دما (درجه سانتی‌گراد)
۱۰۰۰۰۲۲	۲۰
۱۰۰۰۰۶۵	۴۰
۱۰۰۰۰۹۰	۵۰
۱۰۰۰۱۰۵	۶۰

با فرض اینکه L_0 معرف طول میله در 0 درجه سانتی‌گراد و L طول میله در دمای T باشد، داریم

$$L_0 + Tc = L.$$

با استفاده از روش کمترین مربعات، «بهترین» مقدار c را که از اندازه‌گیریهای داده شده حاصل می‌شود، پیدا کنید.

(ج) نشان دهید که اگر در فرمولهایی که در ابتدای این مطالعه مسئله‌ای معرفی کردیم، n را برابر ۲ اختیار کنیم، در این صورت «بهترین» مقادیر x و y از حل دستگاه معادلات زیر بدست می‌آیند.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

۱۵-۱۲ کمی هندسه مونژ

از دانشجویان علاقمند می‌خواهیم که قضایای زیر را، چه به روش ترکیبی، چه به روش تحلیلی، ثابت کنند.

(الف) مجموع مربعات تصاویر قائم یک مساحت مستوی بر سه صفحه دایره دو متعامد برابر با مربع مساحت مستوی است.

(ب) قضیه مونژ درباره چهار وجهیها، به صورتی که در بخش ۱۲-۹ بیان شده است.

(ج) قضیه مانهایم^۱. در یک چهاروجهی چهار صفحه ماربر هر ارتفاع و محل تلاقی سه ارتفاع وجه متناظر بدین ارتفاع، در نقطه مونژ چهاروجهی هم‌رس‌اند.

(د) نقطه مونژ یک چهاروجهی، از هر ارتفاع چهاروجهی وعمود وارد بوجه متناظر از نقطه تلاقی ارتفاعهای آن به یک فاصله است.

(ه) مرکز کره‌ای که توسط اوساط میانه‌های یک چهاروجهی معین می‌شود بر خط اوایلر چهاروجهی واقع است. (خطی که مرکز کره محیطی، مرکز هندسی، و نقطه مونژ را در بر دارد. به خط اوایلر چهاروجهی معروف شده است.)

(و) نقطه مونژ و مرکز هندسی یک چهاروجهی برهم منطبق‌اند اگر و فقط اگر

چهاروجهی متساوی الساقین باشد. (يك چهاروجهی متساوی الساقین است وقتی فقط وقتی که هر یال چهاروجهی با یال مقابلش برابر باشد.)
(ز) پنج خطی که هر يك از پنج نقطه مفروض واقع بر يك کره را به نقطه مونژ چهار-وجهی حاصل از چهار نقطه دیگر وصل می کنند، هم رس اند.

۱۶۰۱۲ کمیت های جهت دار

کارنو استفاده اصولی از کمیت های جهت دار را در هندسه وضع خود به سال ۱۸۵۳ وارد کرد. تحت این مفهوم بر هر خط، جهتی را، فرضاً، به عنوان جهت مثبت و جهت دیگر را به عنوان جهت منفی انتخاب می کنیم. در این صورت پاره خطی مانند AB را بر این خط مثبت یا منفی تلقی می کنیم بسته به اینکه جهت آن روی خط از نقطه A به نقطه B جهت مثبت یا منفی روی خط باشد. در این صورت با استفاده از کمیت های جهت دار داریم $AB = -BA$ و $AB + BA = 0$. قضایای زیر را که در آن همه پاره خطها جهت دار هستند، ثابت کنید.

(الف) به ازای هر سه نقطه همخط مانند A, B, C , $AB + BC + CA = 0$.

(ب) فرض کنید O نقطه دلخواهی بر محمل پاره خط AB باشد. در این صورت $AB = OB - OA$.

(ج) قضیه اوایلر (۱۷۴۷). اگر A, B, C, D چهار نقطه همخط دلخواه باشند، آنگاه $(AD)(BC) + (BD)(CA) + (CD)(AB) = 0$.

(د) اگر A, B, P همخط باشند و M نقطه وسط AB باشد، آنگاه $PM = (PA + PB) / 2$.

(ه) اگر O, A, B, C همخط باشند و $OA + OB + OC = 0$ ، و اگر P نقطه دلخواهی بر خط AB باشد، آنگاه $PA + PB + PC = 3PO$.

(و) اگر بر خطی داشته باشیم $OA + OB + OC = 0$ و $O'A' + O'B' + O'C' = 0$ آنگاه $AA' + BB' + CC' = 3OO'$.

(ز) اگر A, B, C همخط باشند و P, Q, R به ترتیب اواسط BC, CA, AB باشند، آنگاه اواسط CR و PQ بر هم منطبق اند.

(ح) اگر دو خط مار بر نقطه ای مانند P دایره ای را به ترتیب در نقاط A و B و در نقاط C و D قطع کنند، آنگاه $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.

۱۷۰۱۲ قضیه کارنو

(الف) قضیه کارنو را (نگاه کنید به بخش ۱۲-۹) برای مثلی که توسط يك منحنی جبری درجه n قطع شده، بیان کنید.

(ب) تعمیم قضیه کارنو را که در آن به جای مثلث يك چندضلعی دلخواه گذاشته شده باشد، بیان کنید.

(ج) بر نقطه‌ای مانند O ، غیر واقع بر يك منحنی درجه n م مفروض، دو خط در جهات معین رسم شده‌اند که این منحنی را به ترتیب در نقاط $P_1, P_2, \dots, P_n$ و $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ قطع می‌کنند. با استفاده از يك دستگاه دکارتی مایل که محورهای آن با دو جهت مفروض موازی باشند، نشان دهید که نسبت

$$(OP_1)(OP_2) \dots (OP_n) / (OQ_1)(OQ_2) \dots (OQ_n)$$

از وضعیت نقطه O مستقل است.

(د) با استفاده از (ج)، تعمیم قضیه کارنو در قسمت (ب) را ثابت کنید.

عنوان مقاله

- ۱/۱۲ خانواده‌های مشهور ریاضی.
- ۲/۱۲ کتیبه‌های پیمدا شده بر گورهای ریاضیدانان.
- ۳/۱۲ لویپیتال وقاعده او.
- ۴/۱۲ ریاضیدان نابینای کیمبرج.
- ۵/۱۲ اسقف جورج بارکلی (۱۶۸۵-۱۷۵۳).
- ۶/۱۲ کالین ماکلورن (۱۶۹۸-۱۷۴۶).
- ۷/۱۲ پیر لوئی مورو دو موپرتویی (۱۶۹۸-۱۷۵۹).
- ۸/۱۲ ماریا گکتانا آنیزی (۱۷۱۸-۱۷۹۹).
- ۹/۱۲ لطیفه‌ای مربوط به اوایلر-دیدرو.
- ۱۰/۱۲ دیاگرامهای اوایلر در برابر دیاگرامهای ون.
- ۱۱/۱۲ اوایلر به عنوان نویسنده کتبهای مهم درسی.
- ۱۲/۱۲ برجسته‌ترین ریاضیدان قرن هجدهم که بود؟
- ۱۳/۱۲ ناپلئون بوناپارت و ریاضیات.
- ۱۴/۱۲ داستان تعمیم یافتن دالامبر.
- ۱۵/۱۲ آکادمیهای سن پترزبورگ و برلین.
- ۱۶/۱۲ تأثیر لژاندر بر تدریس هندسه در آمریکا.
- ۱۷/۱۲ تامس کارلایل و ریاضیات.
- ۱۸/۱۲ سه ریاضیدان برجسته فرانسوی که از انقلاب حمایت کردند.
- ۱۹/۱۲ اوزان و مقادیر پیش از دستگاه متری.
- ۲۰/۱۲ اشتباه تأثر آور پیرمیسن.
- ۲۱/۱۲ تاریخچه علامت دلار.

- Ball, W. W. R., *Mathematical Recreations and Essays*. Revised by H. S. M. Coxeter. New York: Macmillan, 1939.
- BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
- BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949.
- BURLINGAME, ANNE E., *Condorcet, the Torch Bearer of the French Revolution*. Boston: Stratford, 1930.
- CADWELL, J. N., *Topics in Recreational Mathematics*. New York: Cambridge University Press, 1966.
- COOLIDGE, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
- DICKSON, L. E., *History of the Theory of Numbers*. 3 vols. New York: Chelsea, 1952.
- DUGAS, RENÉ, *A History of Mechanics*. New York: Central Books, 1955.
- EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. Vol. 2. Boston: Allyn and Bacon, 1965.
- GILLESPIE, C. C., *Lazare Carnot, Savant*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971.
- GRIMSLEY, RONALD, *Jean d'Alembert (1717-83)*. Oxford: The Clarendon Press, 1963.
- HOFFMAN, J. E., *Classical Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1959.
- LAGRANGE, J. L., *Lectures on Elementary Mathematics*. 2nd ed. Translated by T. J. McCormack. Chicago: Open Court, 1901.
- LAPLACE, P. S., *The System of the World*. 2 vols. Translated by H. H. Harte. London: Longmans-Green, 1830.
- , *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York: John Wiley, 1902.
- LEGENDRE, A. M., *Elements of Geometry and Trigonometry*. Translated by Davis Brewster, revised by Charles Davies. New York: A. S. Barnes, 1851.
- MACLAURIN, COLIN, *A Treatise of Fluxions*. 2 vols. Edinburgh, 1742.
- MAISTROV, L. E., *Probability Theory, A Historical Sketch*. Translated by Samuel Kotz. New York: Academic, 1974.
- MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, the Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, 1961.
- NORTHROP, E. P., *Riddles in Mathematics, A Book of Paradoxes*. New York: D. Van Nostrand, 1944.
- ORE, OYSTEIN, *Number Theory and its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- ROEVER, W. H., *The Mongean Method of Descriptive Geometry*. New York: Macmillan, 1933.
- TAYLOR, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*. New York: Cambridge University Press, 1954.
- , *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England*. New York: Cambridge University Press, 1966.
- TODHUNTER, ISAAC, *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*. London, 1861.
- , *History of the Mathematical Theory of Attraction and the Figure of the Earth*. London, 1873.
- , *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea, 1949.
- TURNBULL, H. W., *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1951.
- , *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
- TWEEDIE, CHARLES, *James Stirling. Sketch of His Life and Works*. Oxford: The Clarendon Press, 1922.
- WATSON, S. J., *Carnot*. London: Bodley Head, 1954.

اوایل قرن نوزدهم و آزاد شدن هندسه و جبر

۱-۱۳ امیر ریاضیات

قرن هجدهم و نوزدهم در زیر سیطرهٔ دهای ریاضی پرصلابت کارل فریدریش گاوس، همچون گسترهٔ خلیج رودس در زیر پای تندیس عظیم آپولون، قرار دارد. وی را عموماً بزرگترین ریاضیدان قرن نوزدهم و همراه با ارشمیدس و نیوتن، یکی از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ اعصار برشمرده‌اند.

کارل در برونسویک آلمان، در سال ۱۷۷۷ به دنیا آمد. پدرش کارگر زحمت‌کشی بود که نسبت به تحصیلات رسمی نظرات سرسختی نشان می‌داد و آن را بی‌ارزش می‌دانست. ولی، مادرش، گرچه خود تحصیلاتی نداشت، همواره مشوق تحصیلات فرزند خود بود و درس‌رأسر عمر به دستاوردهای او مباحثات می‌کرد.

کارل یکی از کودکان اعجوبه‌ای بود که گهگاه در پهنهٔ گیتی ظاهر می‌شوند. در بارهٔ او این داستان باورنکردنی را گفته‌اند که در سه سالگی یک خطای محاسبه‌ای را در دستک پدرش کشف کرده است. و حکایتی که مکرراً گفته می‌شود اینکه در ده سالگی‌اش، در مدرسهٔ ابتدایی، معلمش برای مشغول کردن کلاس، به شاگردان دستور داد که حاصل جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورند. تقریباً بلافاصله، کارل تختهٔ خود را، که طرف نوشته شدهٔ آن رو به پائین گرفته شده بود، بر روی میز معلم بر آشفته، قرار داد. وقتی همهٔ تخته‌ها سرانجام

تحویل داده شدند؛ معلم، حیرت زده، دریافت که تنها کارل جواب صحیح را، که ۵۵۵۰ است، بسدون محاسبات لازم داده است. کارل به طور ذهنی مجموع تصاعد حسابی $۱۰۰ + ۹۹ + ۹۸ + \dots + ۳ + ۲ + ۱$ را بسا توجه به اینکه $۱۰۱ = ۱ + ۱۰۰$ ، $۱۰۱ = ۲ + ۹۹$ ، $۱۰۱ = ۳ + ۹۸$ ، و الی آخر، برای ۵۰ زوج اعداد نظیر بالا، پیدا کرده بود که بدین ترتیب جواب ۱۰۱×۵۰ ، یا ۵۵۵۰ است. گاوس بعدها بشوخی می گفت که قبل از آنکه زبان باز کند قادر به حساب کردن بوده است.

رشد پیشرس گاوس مورد عنایت دولک برونسویک قرار گرفت و او، به عنوان مشوقی مهربان و فهم، پسرك را در سن ۱۵ سالگی به کالج برونسویک، و بعداً در سن ۱۸ سالگی به دانشگاه گوتینگن فرستاد. دولد از اینکه به فقه اللغه بپردازد یا ریاضیدان شود (با اینکه قبلاً روش کمترین مربعات را یک دهه پیش از آنکه لژاندر مستقلاً به انتشار آن دست بزند، ابداع کرده بود). وی تصمیم خود را به طور قاطع در ۳۰ مارس ۱۷۹۶، هنگامی که هنوز یک ماه تا نوزدهمین سالروز تولدش فاصله داشت، گرفت. حادثه‌ای که منجر به این تصمیم شد، موفقیت‌های اعجاب آوری بود که در ساختن چند ضلعی‌های منتظم به روش اقلیدس به دست آورده بود و بخصوص کشف این مطلب که هفده ضلعی منتظم را می توان بدچنان روشی ترسیم کرد. قبلاً گزارش این کار را در بخش ۵-۶ داده ایم.

درست در همان روز که گاوس کشف خود را راجع به چند ضلعی‌های منتظم به عمل آورد، یادداشت‌های مشهور روزانه ریاضی خود را شروع کرد، و از کشف بسیاری از بزرگترین کشفیات خود را به صورت رمز به این دفتر سپرد. چون گاوس، مانند نیوتن در انتشار آثارش کندی و کراحت داشت، این دفتر یادداشت، که تا سال ۱۸۹۸ به دست نیامد، اغلب مباحثات مربوط به تقدم در انکشاف را فرو نشانده. این دفتر شامل ۱۴۶ مدخل کوتاه است، که آخرین آن به تاریخ ۹ ژوئیه سال ۱۸۱۴ می باشد. به عنوان مثالی از ماهیت رمزی مداخل این دفتر یادداشت مدخل مربوط به دهم ژوئیه سال ۱۷۹۶ را در نظر بگیرید که به این صورت است



کارل فریدریش گاوس
(کتابخانه کنگره)

$$\text{ETPHKA!} \quad \text{num} = \Delta + \Delta + \Delta,$$

و کشف برهانی از این حقیقت را که هر عدد صحیح مثبت مجموع سه عدد مثلی است، نشان می‌دهد. بخش عمدهٔ رموز مداخل دفتر به‌جز در دو مورد کشف شده‌اند. مدخل مورخ ۱۹ مارس ۱۷۹۷، نشان می‌دهد که گاوس قبل از آن موعد تناوب مضاعف برخی توابع بیضوی را کشف کرده بوده (در آن موقع هنوز ۲۰ سالش نشده بود)، و مدخل متأخری نشان می‌دهد که وی تناوب مضاعف را در حالت کلی تشخیص داده‌است. تنها همین یک کشف، در صورتی که گاوس آن را منتشر می‌کرد، کافی برای بدشهرت رسانیدن او در ریاضیات می‌شد. اما گاوس هرگز آن را منتشر نکرد!

در رسالهٔ دکترایش که در دانشگاه هلمشتات و در سن بیست سالگی نوشته شده‌است، گاوس اولین برهان کاملاً رضایتبخش قضیهٔ اساسی جبر (که یک معادلهٔ چند جمله‌ای با ضرایب مختلط و از درجهٔ $n > 0$ حداقل یک ریشهٔ مختلط دارد) را ارائه داد. تلاشهای بیحاصلی برای اثبات این قضیه از سوی نیوتن، اویلر، دالامبر، ولاگرانژ به‌عمل آمده بود. ایدهٔ برهان گاوس قرار دادن $x + iy$ به جای z در یک معادلهٔ چند جمله‌ای کلی $f(z) = 0$ بود. از جدا کردن قسمتهای حقیقی و انگاری معادلهٔ حاصل، دو معادلهٔ حقیقی $g(x, y) = 0$ و $h(x, y) = 0$ بر حسب متغیرهای حقیقی x و y به‌دست می‌آید. گاوس نشان داد که نمودارهای دکارتی $g(x, y) = 0$ و $h(x, y) = 0$ همواره دست کم یک نقطهٔ برخورد حقیقی مانند (a, b) دارند. نتیجه می‌شود که $f(z) = 0$ دارای ریشهٔ مختلط $a + ib$ است. برهان، متضمن ملاحظات هندسی است. در تلاش برای یافتن برهانی کاملاً جبری، تقریباً بیست سال بعد، در سال ۱۸۱۶، گاوس دو برهان جدید، و بعداً در سال ۱۸۵۰ برهان چهارمی را منتشر کرد.

بزرگترین اثر منتشر شدهٔ گاوس تحقیقات حسابی^۲ اوست، اثری که در نظریهٔ نوین اعداد دارای اهمیت اساسی است. یافته‌های گاوس در مورد ساختمان چندضلعیهای منتظم در این اثر ظاهر می‌شود. نماد روشن و آسان برای همنهشتی (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای (۲۰۱۳) و اولین برهان قانون زیبایی تقابل مربعی نیز در همین جا آمده‌است. قانون تقابل مربعی، در قالب نماد لژاندر که در پایان بخش ۱۲-۸ تعریف شد، بیان می‌کند که اگر $p = 2P + 1$ و $q = 2Q + 1$ اعداد اول نابرابری باشند، آنگاه

$$(p|q)(q|p) = (-1)^{PQ}$$

گاوس سهم ارزنده‌ای در نجوم، زمین‌سنجی، و الکتروسیسته داشت. در سال ۱۸۰۱ وی، به‌روش جدید و با اطلاعات ارضادی ناقص، مدار سیارک سرس^۳ را که در آن زمان به‌تازگی کشف شده بود، و در سال بعد مدار سیارک پالاس را محاسبه کرد. در سال ۱۸۰۷ وی استاد ریاضیات و سرپرست رصدخانهٔ گوتینگن گردید، مقامی که تا زمان مرگش حفظ کرد. در سال ۱۸۲۱ وی مثلث‌بندی شهر هانوور را انجام داد، یک فوس نصف‌النهاری را اندازه گرفت،

و هلیوتروپ^۱ (یا هلیوگراف [نورنگار]) را اختراع کرد. در سال ۱۸۳۱ وی کار مشترک خود با همکارش ویلهلم وبر^۲ (۱۸۰۴-۱۸۹۱) را در زمینه تحقیقات اساسی درباره الکتریسیته و مغناطیس آغاز کرد، و در سال ۱۸۳۳ این دو دانشمند تلگراف الکتریکی و مغناطیسی را اختراع کردند.

در سال ۱۸۱۲، در مقاله‌ای درباره سری فوق هندسی. اولین تحقیق اصولی خود را درباره همگرایی سریها به عمل آورد. شاهکار گاوس درباره نظریه سطوح، تحقیقات کلی درباره دویه‌های منحنی^۳. در سال ۱۸۲۷ منتشر شد، و مطالعه هندسه ذاتی سطوح در فضا را فتح باب کرد (نگاه کنید به بخش ۱۴-۶). تقدم او در کشف هندسه نااقلیدسی، در بخش ۱۳-۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

این گفته گاوس که «ریاضیات ملکه علوم، و نظریه اعداد ملکه ریاضیات است» معروف است. گاوس را «پادشاه ریاضی» که از جایگاه رفیعش به یک نظاره، ستاره و مفاخره را در احاطه داشت توصیف کرده‌اند. در نوشته‌های علمی اش، گاوس کمال گرا بود. با دعوی اینکه کلیسا، کلیسا نمی‌شود مگر اینکه آخرین قطعه داربستش برداشته شود، اوسعی می‌کرد که با زدودن هر گونه اثر از تجزید و تحلیلی که او را به نتایجش رسانیده است، همه آثارش را کامل، مجمل، صیقل یافته، و متقاعد کننده عرضه نماید. از این روی به عنوان مهر خود درختی را که تنها چند میوه داشت، و بر آن شعار: پائوکا سد ماتورا^۴ (کم، دلی رسیده) نقش شده بود، برگزید. گاوس به عنوان شعار دیگرش ابیات زیر از شاه لیرا انتخاب کرد:

ای طبیعت، تو الهه منی و در خدمت به قوانین تو
کمر همت بستدام.

بدین ترتیب گاوس معتقد بود که ریاضیات باید، برای الهام گرفتن. جهان واقعی را لمس نماید. به گفته ووردزورث^۵، «دانشها بیشتر از پرداختن به پیرامون خود به دست می‌آیند، نه از سیر در جهان خیال و اندیشه».

گاوس در خانه‌اش در رصدخانه گوتینگن در سال ۱۸۵۵ درگذشت، و بلافاصله بعد از آن، پادشاه هاننور دستور داد که مدال یادبودی به افتخار او تهیه شود. این مدال سی و هفت میلی‌متری را در سال ۱۸۷۷ مجسمه‌ساز و مدال‌ساز مشهور، فریدریش برمر از اهالی هاننور کامل کرد. بر این مدال جمله زیر منقوش شده است:

جرج پنجم، پادشاه هاننور
به امیر ریاضیات^۶

از آن به بعد، گاوس به «امیر ریاضیات» معروف شده است.

1. heliotrope
2. Wilhelm Weber
3. Disquisitiones generales circa superficies curvas
4. Pauca sed matura
5. Wordsworth
6. George V. rex Hannoverge Mathematicorum Principi

۱۳-۲ فوریه و پواسون

وقتی با بدقرون نوزدهم می گذاریم، شمار ریاضیدانان توانا و خلاق کثرت فراوان می یابد، و ما مجبوریم که تنها معدودی از درخشانترین ستاره های آسمان خیره کننده ریاضیات را برای بحث برگزینیم. دوتا از این ستارگان. که اگر از قدر اول نباشند بی تردید از قدر دوم اند، ژان باپتیست ژوزف فوریه^۱ و سیمون دنی پواسون^۲ هستند. این دو، که معاصر نزدیک بودند، هر دو در فرانسه متولد شدند، هر دو در زمینه ریاضیات کاربردی کار کردند، و هر دو در مدرسه پلی تکنیک سمت استادی داشتند.

فوریه در سال ۱۷۶۸ در اوسر^۳ متولد شد و در سال ۱۸۳۵ در پاریس درگذشت. وی که پسر یک خیاط بود و در هشت سالگی یتیم شده بود، در مدرسه نظامی که توسط بندیکتینها^۴ اداره می شد، تعلیم دید. سپس در آنجا مدرس ریاضیات شد. وی به پا گرفتن انقلاب فرانسه کمک کرد و در قبال آن یک کرسی در مدرسه پلی تکنیک به او داده شد. او از این سمت استعفا داد تا بتواند، همراه بامونژ، ناپلئون را در لشکر کشی مصر همراهی نماید. در سال ۱۷۹۸ به فرمانداری مصر سقلی منصوب شد. بعد از پیروزیهای بریتانیا و تسلیم فرانسه در سال ۱۸۰۱، فوریه به فرانسه بازگشت و به فرمانداری گرنوبل^۵ گماشته شد. در زمان اقامتش در گرنوبل بود که تحقیقات خود را در زمینه حرارت آغاز کرد.

در ۱۸۰۷، فوریه مقاله ای در مقابل آکادمی علوم فرانسه عرضه کرد که آغاز گرافیکی جدید و بسیار پرثمر در تاریخ ریاضیات بود. موضوع این مقاله مسئله عملی جریان حرارت در میله ها، ورقه ها، و اجسام فلزی بود. در جریان عرضه این مقاله، فوریه این ادعای تکان دهنده را به عمل آورد که هر تابع را، که در بازه متناهی بسته ای توسط منحنی دلخواهی رسم شده، می توان به مجموع دو تابع سینوسی و کسینوسی تجزیه کرد. به طور صریحتر، وی مدعی شد که هر تابع را، صرف نظر از آنچه هر اندازه با بی قاعده گی در بازه $(-\pi, \pi)$ تعریف شده باشد، می توان در این بازه با

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نمایش داد که، در آن a و b اعداد حقیقی مناسبی هستند. این سری به سری مثلثاتی معروف است و برای ریاضیدانان آن عصر تازگی نداشت. در واقع نشان داده شده بود که تعدادی تابع کم و بیش خوش رفتار قابل نمایش توسط چنان سریایی هستند. اما فوریه مدعی شد که هر تابعی را که در بازه $(-\pi, \pi)$ تعریف شده، می توان بدین گونه نمایش داد. دانشمندان آکادمی در صحت

1. Jean Baptiste Joseph Fourier 2. Siméon Denis Poisson 3. Auxerre

۴. بندیکتینها یا بندیکتیان (Benedictines)، فرقه راهبان کاتولیک رومی که توسط قدیس بندیکتوس در مونته کاسینو تأسیس گردید. بندیکتیان برخلاف راهبان اولیه به زندگی جامعه وار اهمیت می دهند و دیرهای آنان مانند خانه های مسیحیان است و رؤسای آنها حکم پدر را دارند. در قرون وسطی برای حفظ فضل و دانش کوشش می کردند.

5. Grenoble

ادعای فوریه تردید زیادی داشتند، و این مقاله که توسط لاگرانژ، لاپلاس، ولژاندر مورد داوری قرار گرفت، رد شد. مع هذا برای ترغیب فوریه به بسط دقیقتر نظرات خود، آکادمی فرانسه مسئله انتشار گرامار موضوع جایزه بزرگی که باید در ۱۸۱۲ اعطا می شد، قرارداد. فوریه مقاله تجدید نظر شده ای را در ۱۸۱۱ تسلیم کرد که توسط گروهی که از جمله، شامل سه داور پیشین می شد، مورد داوری قرار گرفت و برنده جایزه شد، گرچه به علت فقدان دقت مورد انتقاد واقع شد و در نتیجه چاپ آن در یادداشت های آکادمی توصیه نشد.

رنجیده از این موضوع، فوریه به تحقیقات خود در زمینه حرارت ادامه داد و در سال ۱۸۲۲، بعد از کوچیدن به پاریس در ۱۸۱۶، یکی از آثار بزرگ کلاسیک ریاضیات، نظریه تحلیلی حرارت^۱ را منتشر کرد. دو سال بعد از چاپ این اثر بزرگ، فوریه دبیر آکادمی فرانسه شد، و در این سمت، قدرت آن را یافت که مقاله سال ۱۸۱۱ خود را در شکل اصلی آن در یادداشت های آکادمی به چاپ رساند.

گرچه نشان داده شده است که ادعای فوریه در این خصوص که هر تابع را می توان به وسیله یک سری مثلثاتی (یا سری فوریه که امروزه عموماً مورد اطلاق است) نشان داد، کاملاً نامعقول است، دسته توابعی که این گونه قابل نمایش اند، بسیار وسیع است. سربهای فوریه ارزش زیاد خود را در زمینه های علمی نظیر آکوستیک، اپتیک، الکترو دینامیک، ترمودینامیک، و موضوعات دیگر به ثبوت رسانیده اند و در آنالیز هارمونیک، مسائل تیرها و پلها، و حل معادلات دیفرانسیل نقشی اساسی دارند. در واقع، سری فوریه انگیزه روش جدید در موضوع فیزیک ریاضی است که متضمن آنگرال گیری معادلات دیفرانسیل جزئی با قید شرایط مرزی است. در بخش ۱۵-۳ نقش مهمی را که سری فوریه در تکامل مفهوم تابع بازی کرده، خواهیم دید. در اثری که پس از مرگ او، در سال ۱۸۳۱ ویرایش و منتشر شد، ما، در بین مطالب دست اول دیگر، به کار فوریه درباره وضعیت ریشه های یک معادله چند جمله ای (که امروزه



ژوزف فوریه
(مجموعه دیوید اسمیت)

در کتابهای درسی راجع به نظریه معادلات بررسی می شوند) برمی خوریم. این موضوع از سال ۱۷۸۹ به بعد علاقه او را کراراً به خود جلب کرده بود. معاصر فوریه، سعدی کارنو (۱۷۹۶-۱۸۳۲)، پسر هندسه دان برجسته ای که در بخش ۱۲-۹ مورد بحث بود، نیز به نظریه ریاضی حرارت، که نظریه نوین ترمودینامیک از آن شروع می شود، علاقه نشان می داد. لرد کلوین^۱ (ویلیام تامسن^۲، ۱۸۲۴-۱۹۰۷) مدعی بود که خط مشی او در فیزیک-ریاضی، کلاً از اثر فوریه درباره حرارت متأثر بوده است، و کلرک ماکسول^۳ (۱۸۳۱-۱۸۷۹) رساله فوریه را «یک منظومه عظیم ریاضی» نامیده است.

داستان جالبی درباره فوریه و علاقه او به حرارت گفته شده است. ظاهراً از مشاهداتش در مصر، و شاید کارش در زمینه حرارت، متقاعد شده بود که گرمای صحرا کمال مطلوب برای تندرستی است. بدین لحاظ خود را در چندین لایه پارچه می پیچید و در اطاقهایی که به طور غیر قابل تحملی گرم بودند، زندگی می کرد. برخی گفته اند که وسواس ذهنی اش در باره حرارت، مرگ او را بر اثر بیماری قلبی، در حالی که از گرما پخته بود، در سن شصت و سه سالگی جلو انداخت.

جمله ای از فوریه که شاید بیشتر از همه نقل می شود (و در اثر اولیه اش درباره نظریه ریاضی حرارت دیده می شود) این است که: «مطالعه ژرف طبیعت، پر بارترین منبع اکتشافات ریاضی است.»

پواسون در سال ۱۷۸۱ در پیتیبوریه^۴ به دنیا آمد و در سال ۱۸۴۰ در پاریس درگذشت. وی زیر نظر پدرش، تأیینی که بعد از بازنشستگی شغل اجرایی کوچکی در دهکده اش به دست آورده، و بعد از وقوع انقلاب فرانسه اداره همان محل را عهده دار شده بود، تعلیم دید. بستانگان پواسون جوان می خواستند او را، برخلاف خواسته اش، وادار به تحصیل در پزشکی کنند. آموزش او را یکی از اعموهایش به عهده گرفت و کار او بانیشتن زدن بدرگه های برگهای یک کلم شروع شد. وقتی در این کار مهارت پیدا کرد به وی جواز درمان آبله داده شد. اما تقریباً در اولین موردی که وی این کار را رأساً انجام داد، بیمار مورد مداوایش ظرف چند ساعت درگذشت. گرچه پزشکان بدو اطمینان خاطر دادند که «این حادثه بسیار معمولی است»، وی با خود عهد کرد که دیگر گرد این حرفه نگردد.

بعد از آنکه از روی بیعلاقگی تحصیل طب را آغاز کرد، برای مطالعه ریاضیات وارد مدرسه پلی تکنیک شد و استعداد او لاگرانژ و لاپلاس را تحت تأثیر قرار داد، و همین که تحصیلاتش به اتمام رسید، به سمت مدرسی در مدرسه پلی تکنیک انتخاب شد. مابقی زندگی او در سمتهای اداری و استادی گذشت. وی که تاحدی سوسیالیست بود، تا سال ۱۸۱۵ جمهوریخواه ثابت قدمی باقی ماند، و در این سال به سلطنت طلبان پیوست.

آثار منتشر شده ریاضی پواسون متعدد و شماره آنها بین ۳۰۰ و ۴۰۰ بوده است. رسالات عمده او عبارت اند از اثر دوجلدی رساله مکانیک^۵، چاپ ۱۸۱۱ و ۱۸۳۳،

1. Lord Kelvin
2. William Thomson
3. Clerk Maxwell
4. Pithiviers
5. Traité de mécanique



سیمون پواسون
(مجموعه دیوبنداسمیت)

نظریه نوین عمل موئین^۱ به سال ۱۸۳۱، نظریه ریاضی حرارت^۲ به سال ۱۸۳۵، و تحقیقات در باب احتمال داورها^۳ به سال ۱۸۳۷. در مقالات خود وی به بررسی موضوعاتی از قبیل نظریه ریاضی الکتریسیته و مغناطیس، نجوم فیزیکی، ربایش بیضویها، انتگرالهای معین، سریها، و نظریه کشسانی پرداخته است. دانشجویان با قلابهای پواسون (در معادلات دیفرانسیل)، ثابت پواسون (در الکتریسیته) نسبت پواسون (در کشسانی)، انتگرال پواسون و معادله پواسون (در نظریه پتانسیل)، و توزیع پواسون (در نظریه احتمالات) آشنایی دارند. نظیر مورد فوریه، داستان جالبی پواسون را بدیگی از علایق حرفه‌ای اش پیوند می‌دهد. وقتی بچه بود وی را تحت مراقبت یک پرستار قرار دادند. یک روز، وقتی پدرش بدیندن او آمد، پرستار بیرون رفته بود و او را از رکاب شلوارش به میخی در دیوار آویزان کرده بود - تا او را، به گفته پرستار، از آلودگی و کثافت کف اطاف محافظت نماید. پواسون گفته است که کوششهای ورزشی وی موقعی که بدین طریق آویزان بوده، موجب شده است که بدجلو و عقب تاب بخورد، و بدین طریق بوده است که وی از همان اوایل با آونگ، که مطالعه آن قسمت عمده زندگی آتی او را اشغال کرد، آشنا شده است.

پواسون خاطر نشان کرده است که: «زندگی تنها برای دو چیز خوب است، کشف ریاضیات و تدریس ریاضیات.» او در هر دو پیشه به کمال رسید.

۱۳-۳ کوشی

تذقیق آنالیز در قرن نوزدهم را لاگرانژ و گاوس آغاز کردند. این کار توسط ریاضیدان

1. Théorie nouvelle de l'action capillaire
2. Théorie mathématique de la chaleur
3. Recherches sur la probabilité des jugements

بزرگ فرانسوی، اوگوستین - لوئی کوشی^۱، برجسته ترین آنالیزدان نیمه اول قرن نوزدهم وسعت وقوت بیشتری یافت.

کوشی در سال ۱۷۸۹ در پاریس متولد شد و تعلیمات ابتدایی را از پدر خود فراگرفت. بعداً در مدرسه سانترال پانتئون^۲، در مطالعات کلاسیک باستان به مدارج عالی رسید. در سال ۱۸۰۵ وی وارد مدرسه پلی تکنیک شد و تحسین لاگرانژ و لاپلاس را برانگیخت، دو سال بعد در مدرسه راه و ساختمان^۳ پاریس نام نویسی کرد تا خود را برای مهندسی در راه و ساختمان آماده سازد. در اثر ترغیب لاگرانژ و لاپلاس، تصمیم گرفت که از مهندسی راه و ساختمان به نفع علوم مجرد دست بکشد، و یک سمت تدریس در مدرسه پلی تکنیک را بپذیرد. کوشی هم در زمینه ریاضیات مجرد و هم در ریاضیات کاربردها بسیار زیاد و به غایت مطلب نوشته است. احتمالاً می توان او را از لحاظ حجم بازدهی بعد از اوایلر قرار داد*. مجموعه آثار او، علاوه بر چندین جلد کتاب، شامل ۷۸۹ مقاله است که برخی از آنها آثار بسیار جامعی هستند، و ۲۴ مجلد خشتی را پرمی کنند. این اثر از نظر کیفیت ناهمگون است. در نتیجه کوشی (درست برخلاف گاوس) به علت پرنویسی و تصنیف عجولانه مورد انتقاد قرار گرفته است. داستان جالبی در رابطه با پرنویسی شگفت آور کوشی گفته شده است. در سال ۱۸۳۵ آکادمی علوم، انتشار مجله گزارشها^۴ را شروع کرد. کوشی چنان به سرعت مقاله تحویل این مجله می داد که آکادمی از هزینه های روبه افزایش چاپ دچار نگرانی شد، و لذا قانونی را، که هنوز هم به قوت خود باقی است، تصویب کرد که همه مقاله های چاپ شده را به حداکثر



اوگوستین - لوئی کوشی
(مجموعه دیوید اسمیت)

1. Augustin - Louis Cauchy
2. École Centrale du Panthéon
3. École des Ponts et Chaussées

* دومین نویسنده کثیر التالیف در ریاضیات یا کوشی و یا آرثر کیلی (Arthur Cayley) است، و شاید برای تعیین این که کدامیک افتخار این عنوان را دارند به شمارش صفحات آثار نشر شده آنان نیاز باشد.

4. Comptes Rendus

چهار صفحه محدود می کرد. کوشی می بایست برای مقالات بلندش، که بعضی از آنها متجاوز از ۱۰۰ صفحه بود، در جستجوی مجاری دیگری در آید.

کارهای پر شمار کوشی در ریاضیات پیشرفته شامل تحقیقاتی در همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی، نظریه توابع حقیقی و مختلط، معادلات دیفرانسیل، دترمینانها، احتمالات، و فیزیک ریاضی است. دانشجویان درس حسابان در به اصطلاح آزمون دیشه کوشی و آزمون نسبت کوشی برای همگرایی یا واگرایی يك سری با جملات مثبت، و در حاصل ضرب کوشی دوسری مفروض به نام کوشی برمی خورند. حتی در اولین درس نظریه توابع مختلط، به نامسادی کوشی، فرمول انتگرال کوشی، و معادلات دیفرانسیل کوشی - دیمان برمی خوریم. قسمت عمده مباحث حسابان امروزی دانشگاه؛ نظیر مفاهیم اساسی حد و پیوستگی، نتیجه کار کوشی است. کوشی مشتق $y = f(x)$ نسبت به x را به صورت حد خارج قسمت

تفاضل

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، تعریف کرد. گرچه وی به خوبی از سهولت عملیاتی دیفرانسیلها آگاه بود، برای آنها نقش درجه دومی قائل شد. اگر dx کمیتی متناهی باشد، وی dy تابع $y = f(x)$ را صرفاً به صورت $f'(x) dx$ تعریف کرد. در حالی که در طول قرن هجدهم، انتگرال گیری را عموماً معکوس عمل مشتق گیری می دانستند. کوشی ترجیح می داد که انتگرال معین را به عنوان حد مجموعی از مجموعه ای نامتناهی افزایش یابنده از اجزاء بسیار کوچکی که به صفر میل می کنند تعریف نماید، بسیار نظیر کاری که امروزه انجام می شود. رابطه بین انتگرال و تابع اولیه بعداً به کمک قضیه مقدار میانگین برقرار می شود.

سهم کوشی در نظریه دترمینانها، که بایک مقاله طویل ۸۴ صفحه ای در سال ۱۸۱۲ آغاز می شود، او را به عنوان پربارترین نویسنده در این زمینه متشخص می کند. کوشی در مقاله ۱۸۱۲ خود، اولین برهان این قضیه مهم و مفید را که اگر A و B هر دو ماتریسهای $n \times n$ باشند، آنگاه $|AB| = |A||B|$ ، می دهد. ضمناً کوشی بود که، در ۱۸۴۰، کلمه «متشخص» را با «معادله مشخصه» ماتریس A نامیدن معادله $|A - \lambda I| = 0$ ، وارد نظریه ماتریسها کرد.

آثار کوشی نشان دهنده توجه فراوان او به دقت است، و همین است که این آثار الهامبخش دیگر ریاضیدانان در طرد اعمال صوری کورکورانه و براهین شهودی از آنالیز بوده اند. کوشی از هواداران دو آتشه بوربونها^۱ بود و پس از انقلاب سال ۱۸۳۰، به اجبار مقام استادی مدرسه پلی تکنیک را رها کرد و به مدت هجده سال از کلیه کارهای دولتی برکنار ماند. بخشی از این دوران را در تبعید در تورن و پراگ گذراند، و بخشی را به تدریس در برخی از مدارس وابسته به کلیسا در پاریس سپری کرد. در سال ۱۸۴۸ اجازه بازگشت

به مقام استادی در مدرسه پلی تکنیک به او داده شد بی آنکه مجبور به ادای سوگند وفاداری نسبت به حکومت جدید باشد. در مذهب فردی متعصب بود و مذاهب دیگر را تحمل نمی کرد. قسمت عمده زندگی خود را صرف در تلاش برای در آوردن دیگران به کیش خاص خود کرد. در سراسر عمرش کوشنده ای خستگی ناپذیر بود، و جای تأسف است که دچار خودبینی و تنگ نظری بود و اغلب کوششهای شایسته جوانترها را به هیچ می گرفت. با این حال، از سوی دیگر، باید خاطر نشان کرد که در سال ۱۸۴۳ کوشی دفاع باشکوهی از آزادی وجدان و اندیشه را، در قالب یک نامه سرگشاده، منتشر کرد. این نامه حکومت را به احمقانه بودن اختناق علمی آگاه کرد، و وقتی لوئی فیلیپ^۱ از سلطنت خلع شد، یکی از اولین فرامین حکومت موقت بعد از او، لغو ادای سوگند وفاداری مورد نفرت همگان بود.

کوشی در ۲۳ مه سال ۱۸۵۷، در ۶۸ سالگی، به ناگهان در گذشت. وی برای استراحت و معالجه يك ناراحتی روی به بیلاق رفته بود، که ناگهان دچار تب مهلکی شد. درست قبل از مرگش وی با اسقف اعظم پاریس مشغول صحبت بود. آخرین سخنان او، خطاب به سراسقف، این بود: «انسانها می میرند، اما کرده های آنان می مانند.»

۱۳-۴ آبل و گالوا

طبیعی است که، بنا به بعضی دلایل، برخی از مردان تاریخ ریاضیات را دو به دو به هم وابسته کنند. این امر درباره هاریوت و اوترد (دو جبردان انگلیسی همعصر)، والیس و برو (دو تالی بلا فصل آیزک نیوتن در زمینه حسابان)، تیلر و ماکلورن (دو ریاضیدان انگلیسی همعصر که عمدتاً به خاطر سهمشان در بسط سریهای نامتناهی معروف اند)، مونژ و کارنو (دو هندسه دان فرانسوی همعصر)، و فوریه و بواسون (دو محقق همعصر در فیزیک ریاضی) صادق است. دو تن دیگر از این قبیل نیلس هنریک آبل و اوارست گالوا هستند. این دو، گرچه معاصر هم بودند، در اینجا به خاطر ملیت یکسان یا به علت علاقه های ریاضی مشابه به هم مرتبط نشده اند، بلکه به این دلیل که هر کدام، مانند شهاب ثاقبی در آسمان ریاضیات، به سرعت درخشیدند و سپس به طور ناگهانی و رقت انگیز در یک مرگ زودرس به خاموشی گراییدند، مع هذا از خود مطالب ارزنده ای باقی گذاشتند تا ریاضیدانان آتی بر آنها کار کنند. آبل در بیست و شش سالگی در اثر بیماری سل و سوء تغذیه در گذشت، و گالوا در دوئل احمقانه ای در بیست و یک سالگی از جهان رفت، هیچیک از آنها در طول زندگی شان به خاطر نبوغی که داشتند، به نحو شایسته مورد قدر دانی قرار نگرفتند.

آبل، متولد سال ۱۸۰۲ در فیندو^۲ در نروژ، پسریک کشیش ده بود. وقتی در کریستیانیا^۳ دانشجوی بود، به نظرش آمد که چگونگی حل جبری يك معادله درجه پنجم کلی را کشف کرده است، ولی به زودی طی يك مقاله منتشره به سال ۱۸۲۴ نظر خود را اصلاح کرد. در این مقاله اولیه، آبل امتناع حل يك معادله درجه پنجم کلی را به کمک رادیکالها ثابت کرد و بدین ترتیب



نیلس هنریک آبل
(مجموعه دیوید اسمیت)

سرانجام به مسئله دشواری کسه ریاضیدانان را از زمان بومیلی تا ویت (نگاه کنید به بخش ۸-۸) دچار گیجی کرده بود، پایان بخشید. در نتیجه این مقاله، آبل مقرری کوچکی که بدو امکان سفر به آلمان، ایتالیا، و فرانسه را می داد، دریافت کرد. طی این سفرهای تعدادی مقاله در زمینه های مختلف ریاضیات، مثلاً در باب همگرایی سریهای نامتناهی، درباره اصطلاح انتگرالهای آبل، و درباره توابع بیضوی نوشت.

تحقیقات آبل درباره توابع بیضوی به رقابت دوستانه و مهیجی با ژاکوبی^۱ انجامید. لواندر پیر، که کارهای پیشقدمانه ای درباره توابع بیضوی انجام داده بود، عمیقاً تحت تأثیر اکتشافات آبل قرار گرفت. خوشبختانه آبل محملی برای درج مقالاتش در مجله جدید التاسیس مجله ریاضیات محض و کار بسته^۲ (که عموماً به مجله کرله^۳ معروف است) به دست آورد، در واقع اولین مجلد این مجله (۱۸۲۶) شامل دست کم پنج مقاله از آبل بود، و در جلد دوم (۱۸۲۷) کار آبل که موجب پیدایش نظریه توابع متناوب مضاعف گردید، ظاهر شد.

هر دانشجوی درس آنالیز با معادله انتگرالی آبل و قضیه آبل درباره مجموع انتگرالهای توابع جبری که به توابع آبلی منجر می شوند، مواجه می شود. در کار سریهای نامتناهی آزمون همگرایی آبل و قضیه آبل درباره سریهای توانی را داریم. در جبر مجرد گروههای جابه جایی را داریم که امروزه گروههای آبلی نامیده می شوند.

آبل که در سرتاسر عمرش دچار فقر و فاقه بود و از ناراحتی روی رنج می برد، نتوانست شغل معلمی به دست آورد. وی در سال ۱۸۲۹ به نحو اسفباری در فroland^۴ در نروژ درگذشت. دو روز پس از مرگش، نامه ای با تأخیر تحویل شد که در آن کار از کار گذشته، يك سمت تدریس در دانشگاه برلین به آبل پیشنهاد شده بود.

1. Jacobi
3. Crelle

2. Journal für die reine und angewandte Mathematik
4. Froland

گرچه آبل در زمان حیات مورد اعتنای حکومت کشورش قرار نگرفت، در حال حاضر تصویر او روی تمبرهای پستی* کم بها دیده می شود. اما ریاضیدانان، به روش معمول خود، بناهای یادبود بسیار دیرپاتری برای آبل بنا کرده اند، زیرا امروزه نام آبل در قضایا و نظریه های فراوانی جاودانی شده است. ارمیت در باره آبل گفته است که، «از او برای ریاضیدانان چیزی باقی مانده است که آنها را پانصد سال مشغول می کند.» دوست نزدیک آبل، ماتئاس کیل هاو، به فکر برپا کردن بنای یادبود سنتی تری، در محل آرامگاه ابدی او افتاد. سیاحانی که به زیارت کلیسای فرولاند می روند، می توانند بنای یادبودی را که کیل هاو برای دوستش ساخته مشاهده کنند.

وقتی از او راز پیشرفت سریعش به صفوف اول ریاضیدانان را پرسیدند، آبل جواب داد: «با خواندن آثار استادان، و نه شاگردان آنها.»

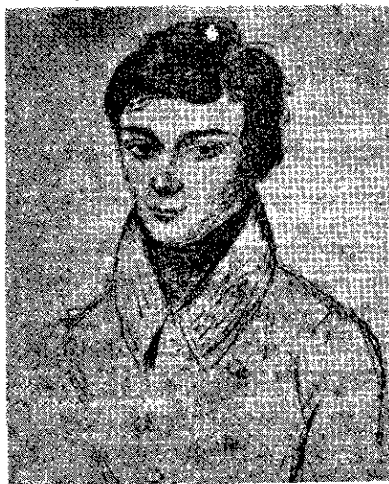
زندگی او اریست گالوا حتی کوتاهتر و تأثیر انگیز تر از زندگی آبل بود. وی که به سال ۱۸۱۱ در پاریس به دنیا آمد، پسر شهردار شهر کوچکی بود و استعداد فوق العاده ریاضی وی کمی بعد از پانزدهمین سالروز تولدش بروز کرد. وی دوبار سعی کرد که وارد مدرسه پلی تکنیک شود، ولی در هر دو بار ازدادن پذیرش به او به دلیل عدم توانایی وی در پاسخگویی به سؤالات رسمی متحین، که از درک نبوغ او کاملاً عاجز مانده بودند، امتناع شد. سپس ضربه دیگری بر او وارد شد؛ پدرش که حس می کرد از سوی روحانیون مورد تعقیب است، دست به خودکشی زد. گالوا با پشتکار خود سرانجام در سال ۱۸۲۹ وارد اکول نرمال [دارالمعلمین] شد تا خود را آماده تدریس نماید، ولی، به دلیل حس آزادیخواهی، به آشوبهای انقلاب سال ۱۸۳۰ کشیده و از این مدرسه اخراج شد و چندین ماه را در زندان گذراند. مدت کوتاهی بعد از آزادی در سال ۱۸۳۲، وقتی هنوز ۲۱ سالش نشده بود، به دام يك دوئل با پادشاه برسر يك ماجرای عشقی کشانده شد و به قتل رسید.

گالوا بر کتب درسی عصر خود، به سادگی خواندن کتابهای داستان تسلط پیدا کرد، کار را با خواندن مقاله های لژاندر، ژاکوبی، و آبل ادامه داد، و سپس به آفرینش ریاضیات

* ریاضیدانان دیگری که تصاویرشان در تمبرهای پستی چاپ شده عبارت اند از: ارشمیدس، ارسطو، فورکوش بویوئی، یانوش بویوئی، بوسکویچ (Boscovich)، براهه، بوفون، ل.ن.م. کارنو، ن.ل.س. کارنو، چنانک هونک (Ch'ang Hong)، چئون چی (Ch'unh Chih)، شاپلیژین (Chaplygin)، کپرنیک، کریستسکو (Cristescu)، کوزانوس (Cusanus)، دالامبر، داوینچی، دکارت، دویت (de Witt)، دورر، اینشتین، اوپلر، گالیله، گوس، زری، همیلتن، هلمهولتز، هیپارخوس، هوینگس، کپلر، کوالفسکی، کریلوف (Krylov)، لاگرانژ، لایلاس، لایبنیتز، لیاپونوف (Liapunov)، لیاچفسکی، لودنتس، مرکاتور، موئر، خواجه نصیرالدین طوسی، نیوتن، اوستروگراسکی (Ostrogradsky)، پاسکال، پوانکاره، پاپوف (Popov)، فیثاغورس، دمنوجن، ریس (Riese)، استوین، تایشایرا (Teixeira)، تیتایکا (Titeica)، و تورپلی. روسیه و فرانسه در چاپ تمبرهای پستی برای ریاضیدانان از همه بیشتر سخاوت به خرج داده اند؛ انگلستان هم گزینش کاری نکرده و آمریکا يك بار این کار را کرده است. داوینچی، گالیله، کپرنیک، و اینشتین در تمبرهای چهار کشور یا بیشتر ظاهر شده اند.

مختص خودش پرداخت. در هفده سالگی به نتایج پراهمیتی دست یافت، ولی دومقاله‌ای که برای آکادمی فرانسه فرستاد به نحوی توجیه‌ناپذیر مفقود شد، و این بر حرمان وی افزود. مقاله‌ای کوتاه از او دربارهٔ معادلات در سال ۱۸۳۰ به چاپ رسید و نتایجی در آن ارائه شد که ظاهراً مبتنی بر یک نظریهٔ کاملاً کلی بوده‌اند. شب قبل از دوئل، با تشخیص اینکه به احتمال قوی کشته خواهد شد، وصیت‌نامهٔ علمی خود را در قالب نامه‌ای به یکی از دوستانش نوشت. این وصیت‌نامه، که بعداً برای شرح آن تواناییهای برخی ریاضیدانان بزرگ لازم گردید، معلوم شد که حاوی نظریهٔ گروهها و به اصطلاح نظریهٔ گالوایی معادلات است. نظریهٔ گالوایی معادلات، مبتنی بر مفاهیم نظریهٔ گروهها، محکهای برای امکان حل يك ساختمان هندسی با ابزارهای اقلیدسی و برای امکان حل يك معادلهٔ جبری به کمک رادیکالها را در اختیار می‌گذارد.

چندین مقالهٔ علمی و دستنویسهایی از گالوا که بعداً مرگش به دست آمد توسط ژوزف لیوویل^۱ (۱۸۰۹-۱۸۸۲) در سال ۱۸۴۶ در مجلهٔ دیاضیات^۲ او به چاپ رسید. مع هذا برای درك كامل دستاوردهای او باید تا سال ۱۸۷۰، که در آن کامیل ژوردان^۳ (۱۸۳۸-۱۹۲۲) در رسالهٔ جایگشتها^۴ به توضیح آنها پرداخت، و نیز بعدها تا به کارگیری دایمان آنها در هندسه توسط فلیکس کلاین^۵ (۱۸۴۰-۱۹۲۵) و سوفوس لی^۶ (۱۸۴۲-۱۸۹۹) درنگ می‌شد. گالوا اساساً نظریهٔ گروهها را خلق کرد. وی اولین کسی بود که (در سال ۱۸۳۰) کلمهٔ «گروه» را به معنی فنی آن به کار برد. تحقیقات در نظریهٔ گروهها بعداً توسط اوگوستین-لوئی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) و تالیانش تحت عنوان ویژهٔ گروههای جایگشتی انجام



اواریت گالوا
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

1. Joseph Liouville
3. Camille Jordan
5. Felix Klein

2. Journal de mathématique
4. Traité des substitutions
6. Sophus Lie

گرفت. با کارهای پر عظمت آثر ترکیلی (۱۸۲۱-۱۸۹۵)، لودویگ سیلوی^۱ (۱۸۳۲-۱۹۱۸) سوفوس لی، گئورگ فروبنیوس^۲ (۱۸۴۸-۱۹۱۷)، فلیکس کلاین، هانری پوانکاره^۳ (۱۸۵۴-۱۹۱۲)، اوتوهولد^۴ (۱۸۵۹-۱۹۳۷)، و دیگران، مطالعه گروهها شکل مجر دستقل خود را پیدا کرد، و با سرعت زیادی گسترش یافت. مفهوم گروه نقش مهمی در رده بندی هندسه پیدا کرده است (نگاه کنید به بخش ۱۴-۸) و نقش آن در جبر بدسان ساختار ذره ای نیروی گسرنش ذرات، عامل مهمی در پیدایش جبر مجرد در قرن بیستم شده است. نظریه گروهها هنوز هم، که تقریباً به انتهای نیمه دوم قرن بیستم رسیده ایم، میدان بسیار فعالی در تحقیقات ریاضی است.

۱۳-۵ ژاکوبی و دیریکله

انقلاب فرانسه، با قطع پیوند عقیدتی اش با گذشته و تغییرات همه جانبه اش، شرایط بسیار مساعدی برای رشد ریاضیات ایجاد نمود. از این رو، ریاضیات در قرن نوزدهم، ابتدا در فرانسه، و بعدها که نیروهای محرکه به اروپای شمالی گسترش یافت، در آلمان و سپس اندکی دیرتر در انگلیس دستخوش جنبش عظیمی شد. ریاضیات جدید شروع به راه کردن خود از بندهای مکانیک و نجوم نمود، و دیدگاه نابتری تکامل یافت. دو ریاضیدان برجسته ای که نقش اولیه ای در انتقال مرکز فعالیت ریاضی از فرانسه به آلمان داشتند، کارل گوستاو یاکوب ژاکوبی^۵ (۱۸۵۴-۱۸۵۱) و پتر گوستاو لوژون دیریکله^۶ (۱۸۵۹-۱۸۵۵) بودند.

ژاکوبی در سال ۱۸۵۴ از والدینی یهودی در پوتسدام^۷ به دنیا آمد و در دانشگاه برلین تحصیل کرد، و در سال ۱۸۲۵ به اخذ درجه دکتری نایل آمد. دو سال بعد به سمت استاد بدون کرسی ریاضیات در کونیگسبرگ منصوب شد، و دو سال بعد از آن به استادی رسمی ریاضیات آنجا ارتقاء یافت. در سال ۱۸۴۲، با دریافت مقرری ازدولت پروس، کرسی خود در کونیگسبرگ را ترک کرده به برلین رفت و تا زمان مرگ زودرسش در سال ۱۸۵۱ در آنجا اقامت داشت.

محققین برجسته ریاضی در عین حال به ندوت معلم برجسته ریاضی از کار در آمده اند. ژاکوبی یکی از استنها بود. بی چون و چرا بزرگترین معلم ریاضی دانشگاه نسل خود بوده و تعداد بی سابقه ای از دانشجویان مستعد را برانگیخته و آنها را تحت تأثیر قرار داده است. مشهورترین تحقیقات او در ریاضیات در زمینه توابع بیضوی است. او آبل مستقل از هم و به طور همزمان نظریه این توابع را تأسیس کردند، و ژاکوبی اساس نمادگذاری امروزی برای آنها را معرفی کرد. ژاکوبی، بعد از کوشی، شاید پرکارترین فرد در نظریه دترمینانها بود. توسط او بود که کلمه «دترمینان» پذیرش نهایی خود را یافت. وی بدو

1. Ludwig Sylow	2. Georg Frobenius	3. Henri Poincaré
4. Otto Hölder	5. Carl Gustav Jacob Jacobi	
6. Peter Gustav Lejeune Dirichlet	7. Potsdam	



کارل گوستاو ژاکوبی
(مجموعه دیوید اسمیت)

دترمینان تابعی را که بعداً سیلوستر آن را ژاکوبین نامید، و هر دانشجوی نظریه توابع با آن مواجه می‌شود، به کار برد. وی همچنین در نظریه اعداد، نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی، حساب تغییرات، مسئله سه جسم، و دیگر مسائل دینامیکی سهم داشت.

بسیاری از دانشجویان حس می‌کنند که قبل از اینکه به تحقیق پردازند، لازم است به آنچه که قبلاً انجام شده تسلط یابند. برای مقابله با این تصور، و برای برانگیختن علاقه به کار مستقل، ژاکوبی به ایراد این تمایل می‌پردازد: «هرگاه پدر شما اصرار می‌کرد که پیش از ازدواج با دختری، با همه دختران عالم آشنا شود، هرگز ازدواج نکرده بود و شما هرگز به دنیای نمی‌آمدید.» در دفاع از تحقیق ناب در مقابل تحقیق کار بسته، وی خاطر نشان کرد که، «مقصود واقعی علم عظمت روح انسان است.» به تقلید افلاطون که گفته بود، «خداوند همواره در حال پرداختن به هندسه است.» گفت، «خداوند همواره در حال پرداختن به حساب است.»

ژاکوبی در بیاناتش نسبت به سایر ریاضیدانان معاصر بزرگ همواره سخاوت به خرج می‌داد. در مورد یکی از شاگردان آبل چنین گفت، «بالا تر از ستایش من و بالاتر از کار من است.»

در یکله در سال ۱۸۰۵ در دورن^۱ به دنیا آمد، و متوالیاً در برسلایو^۲ و برلین سمت استادی داشت. با مرگ گاوس در سال ۱۸۵۵ به عنوان جانشین گاوس در گوتینگن منصوب شد که نشان شایسته‌ای برای ریاضیدانی چنین مستعد که از شاگردان سابق گاوس و ستایشگر دائمی مری خود بود، محسوب می‌شد. زمانی که در گوتینگن بود، امید داشت که آثار ناتمام

گاوس را به پایان برساند، ولی مرگ زودرس او در سال ۱۸۵۹ مانع از آن شد. دیریکله که به زبانهای آلمانی و فرانسه مسلط بود، به طور تحسین برانگیزی نقش رابط بین ریاضیات و ریاضیدانان این دو ملیت را به عهده گرفت و شاید مشهورترین دستاورد ریاضی او تحلیل ژرف او از همگرایی سریهای فوریه بود، کاری که او را در تعمیم مفهوم تابع راهبرشد (نگاه کنید به بخش ۱۵-۳). وی سعی زیادی در تسهیل درک برخی از روشهای غامض گاوس به عمل آورد، و خود او سهم قابل ذکری در نظریه اعداد داشت، کتاب دروس نظریه اعداد زیبای او هنوز هم یکی از سلیس ترین مقدمه ها بر تحقیقات گاوس در نظریه اعداد است. دیریکله از دوستان نزدیک ژاکوبی، داماد و شارح آثار او بود. دانشجویان ریاضیات با نام او در رابطه با سری دیریکله، تابع دیریکله، و اهل دیریکله برخورد می کنند.

داستان رقت انگیزی درباره دیریکله و معلم کبیرش گاوس گفته شده است. در ۱۶ ژوئیه ۱۸۴۹، دقیقاً ۵ سال بعد از دریافت درجه دکترایش، گاوس در جشنی به مناسبت پنجاهمین سال این واقعه در گوتینگن شرکت داشت. به عنوان قسمتی از این «نمایش»، گاوس می بایست در مرحله ای از جریان مراسم، پیپ خود را باتکه ای از نسخه اصلی دستنویس اثر تحقیقات حسابی اش روشن نماید. دیریکله، که در جشن حضور داشت، از انجام این کار که به نظر وی توهین به مقدساتش محسوب می شد، مضطرب بود. در آخرین لحظه وی جسورانه کاغذ را از دست گاوس قاپید و این یادگاری را در مابقی عمر برای خود حفظ کرد؛ بعد از مرگ او این کاغذ را ناشرین آثارش در بین کاغذهای او پیدا کردند.



لوژون دیریکله

(مجموعه دیوید اسمیت)

۱۳-۶ هندسه نوافلیدسی

دو رویداد ریاضی مهم و انقلابی در نیمه اول قرن نوزدهم به وقوع پیوست. اولین آنها کشف هندسه خودسازگاری، غیر از هندسه مرسوم اقلیدس، در حدود سال ۱۸۲۹ بود؛ دومی کشف جبری متفاوت با جبر معمولی دستگاه اعداد حقیقی، در سال ۱۸۴۳، بود. اکنون توجه خود را به بررسی این دو رویداد معطوف کرده ابتدا آن را که در زمینه هندسه است، مورد بحث قرار می‌دهیم.

شواهدی در دست است که بسط منطقی نظریه موازیها یونانیان قدیم را به طور قابل ملاحظه‌ای دچار دردسر کرده بود. اقلیدس با تعریف خطوط موازی به عنوان خطوطی واقع در یک صفحه که هر اندازه آنها را در هر جهت امتداد دهیم یکدیگر را تلاقی نمی‌کنند، و با پذیرفتن اصل تساوی خود به عنوان یک اصل موضوع، که امروزه مشهور است، به این مشکلات پاسخ داد. این اصل (برای دیدن بیان آن نگاه کنید به بخش ۵ - ۷) که اینجا از سایر اصول را ندارد، به هیچ وجه واجد صفت «بدیهی» نیست. در واقع این اصل، عکس قضیه I ۱۷ است، و بیشتر به یک قضیه شباهت دارد تا یک اصل. بعلاوه، اقلیدس از این اصل توازی تا وقتی که به قضیه I ۲۹ می‌رسد، استفاده نمی‌کند. طبیعی بود که لزوم واقعی این اصل مورد سؤال قرار گیرد و چنین تصور شود که شاید بتوان آن را به عنوان قضیه‌ای از نه «اصل متعارفی» و «اصل موضوع» دیگر استخراج کرد، یا حداقل، بتوان به جای آن معادل قابل قبول‌تری را قرارداد.

از جانشینهای متعددی که برای قراردادن به جای اصل توازی اقلیدس ابداع شده‌اند، رایج‌ترینشان اصلی است که در اعصار جدید توسط فیزیکدان و ریاضیدان اسکاتلندی، جان پلی‌فیر^۱ (۱۷۴۸ - ۱۸۱۹) معروف شده است، گرچه این بدیل خاص توسط دیگران مورد استفاده بوده و توسط پروکلوس در قرن پنجم بیان شده بوده است. این، جایگزینی است که معمولاً در کتابهای دبیرستانی دیده می‌شود، یعنی: بر یک نقطه مفروض تنها می‌توان یک خط به موازات خط مفروض (سم‌کرد*) چند بدیل پیشنهادی دیگر برای اصل توازی عبارتند از: (۱) حداقل یک مثلث وجود دارد که مجموع سه زاویه آن برابر با دو قائمه است. (۲) دو مثلث متشابه غیر متساوی وجود دارند. (۳) دو خط مستقیم وجود دارند که همه جا از هم به یک فاصله‌اند. (۴) بر هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط می‌توان دایره‌ای گذراند. (۵) بر هر نقطه داخل زاویه‌ای کمتر از 60° می‌توان خط مستقیمی کشید که هر دو ضلع زاویه را قطع کند.

تلاشها در جهت استخراج اصل تساوی به عنوان قضیه‌ای از نه «اصل متعارفی» و «اصل موضوع» دیگر هندسه‌دانان را برای متجاوز از دو هزار سال مشغول کرد و منجر به برخی

1. John playfair

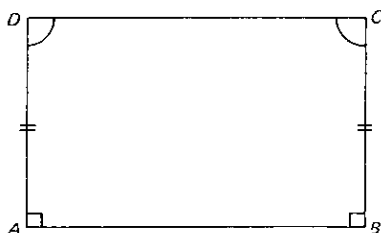
* قضیه I ۲۷ وجود حداقل یک خط موازی را تضمین می‌کند.

از دورسترین پیشرفتهای ریاضیات نوین شد. «براهین» متعددی برای این اصل ارائه شد، اما طولی نکشید که نشان داده شد که هر یک از آنها مبتنی بر یک فرض تلویحی معادل با خود اصل بوده‌اند.

در سال ۱۷۳۳ اولین پژوهش علمی واقعی، توسط کشیش یسوعی ایتالیایی جیرولامو ساکری (۱۶۶۷-۱۷۳۳) به چاپ رسید.

در بارهٔ زندگی ساکری چیز زیادی نمی‌دانیم. وی در سان‌رمو^۱ به دنیا آمد، در نوجوانی آثار پیشرفتگی ذهنی آشکاری از خود نشان داد، دورهٔ آموزش خود را برای ورود به فرقهٔ یسوعی در بیست و سه سالگی به اتمام رسانید، و سپس مابقی عمر را با عهده‌داری متوالی سمتهای تدریس دانشگاهی صرف کرد. طی تدریس علم معانی و بیان، فلسفه، و الاهیات در یک دانشکدهٔ یسوعی در میلان، ساکری اصول اقلیدس را خواند و شیفتهٔ روش قدرتمند برهان خلف شد. بعداً، موقعی که در تورین^۲ فلسفه درس می‌داد، کتاب برهان منطقی^۳ خود را منتشر کرد که نوآوری عمده در آن کاربرد روش برهان خلف در مبحث منطق صوری است. چند سال بعد، زمانی که استاد ریاضیات در پاویا بود، این اندیشه به ذهن او خطور کرد که روش برهان خلف مورد علاقهٔ خود را به منظور مطالعهٔ اصول توازی اقلیدس به کار گیرد، و وی اجازهٔ چاپ کتاب کوچکی تحت عنوان اقلیدس مبری از هر خطا^۴ را دریافت کرد، و این کتاب در میلان، در سال ۱۷۳۳، تنها چند ماه پیش از مرگش به چاپ رسید.

ساکری در کار خود روی اصل توازی، بیست و هشت قضیهٔ اول اصول اقلیدس را می‌پذیرد، که مطابق آنچه در بالا گفتیم، در اثباتشان نیازی به اصل توازی نیست. به کمک این قضایا سپس به مطالعهٔ یک چهار ضلعی $ABCD$ (نگاه کنید به شکل ۱۱۴) که در آن زوایای A و B قائمه و اضلاع AD و BC برابرند، می‌پردازد. با رسم قطرهای AC و BD و استفاده از قضایای همنهشتی ساده (که در بین بیست و هشت قضیهٔ اول اقلیدس موجودند)، ساکری به آسانی نشان می‌دهد که زوایای C و D برابرند. بنابراین سه‌امکان وجود دارد: زوایای D و C زوایای حادهٔ برابرند، زوایای قائمهٔ برابرند، یا زوایای منفرجهٔ برابرند.



شکل ۱۱۴

این سه امکان توسط ساکری فرض زاویه حاده، فرض زاویه قائمه، فرض زاویه منفرجه نام گرفتند. طرح کار، نشان دادن این مطلب بود که هر يك از فرضهای زاویه حاده یا منفرجه به يك تناقض منجر خواهد شد. آنگاه بنا بر برهان خلف، فرض زاویه قائمه باید برقرار باشد و ساکری نشان داد که این فرض برهانی از اصل توازی را با خود به همراه دارد. با فرض تلویحی لایتنهای بودن خط مستقیم، ساکری بلافاصله فرض زاویه منفرجه را نفی کرد، ولی حالت زاویه حاده خیلی مشکلتر از کار درآمد. بعد از به دست آوردن بسیاری از قضایای اینکلاسیک به اصطلاح هندسه ناکلیدسی، ساکری تناقض نامتناقض کننده ای را که شامل مفاهیم مبهمی در باب عناصر لایتنهای بود، به زحمت در بحث خود وارد کرد. اگر وی این اندازه مشتاق نشان دادن تناقضی نمی شد، و به جای آن عدم توانایی خود را برای یافتن تناقضی می پذیرفت، افتخار کشف هندسه ناکلیدسی بدون تردید امروزه نصیب او می شد. کار او کمتر مورد اعتنای معاصرینش قرار گرفت و به زودی به بوته فراموشی سپرده شد* و در سال ۱۸۸۹ بود که توسط هموطن وی ائوجینیو بلترامی^۱ (۱۸۳۵ - ۱۹۰۰) مجدداً احیا گردید.

سی و سه سال بعد از انتشار اثر ساکری، یوهان هاینریش لامبرت^۲ (۱۷۲۸ - ۱۷۷۷) سوییسی، رساله تحقیقی مشابهی تحت عنوان نظریه موازیها^۳ نوشت، که تا بعد از مرگش به چاپ نرسید. لامبرت يك چهارضلعی را با سه زاویه قائمه (نصف چهارضلعی ساکری) به عنوان شکل بنیادی خود برگزید، و سه فرض را، بسته به اینکه زاویه چهارم حاده، قائمه، یا منفرجه باشد، در نظر گرفت. او در استخراج قضایای تحت فرضهای زوایای حاده و منفرجه به مراتب از ساکری پیشتر رفت. مثلاً، مانند ساکری نشان داد که با رعایت این سه فرض مجموع زوایای يك مثلث به ترتیب کمتر از، برابر با، یا بزرگتر از دو قائمه خواهد شد، و سپس، افزون بر کار ساکری، نشان داد که تفاضل مجموع زوایا از دو قائمه در فرض زاویه حاده و زیادتى مجموع زوایا از دو قائمه در فرض زاویه منفرجه، با مساحت مثلث متناسب اند. وی به شباهت هندسه ناشی از فرض زاویه منفرجه و هندسه کروی، که در آن مساحت مثلث با زیادتى کروی آن متناسب است، پی برد، و حدس زد که هندسه ناشی از فرض زاویه حاده را شاید بتوان بر کره ای با شعاع موهومی تحقیق کرد. فرض زاویه منفرجه با پذیرش همان فرض تلویحی که ساکری کرده بود، کنار گذاشته شد، اما نتایج وی در رابطه با فرض زاویه حاده مبهم و غیر رضایتبخش ماندند.

آدرین ماری لژاندر (۱۷۵۲ - ۱۸۳۳)، یکی از برجسته ترین آنالیزدانهای فرانسه، کار را از سر گرفت و سه فرض بسته به اینکه مجموع زوایای يك مثلث کمتر از، برابر با، یا

* توضیح داستان گونه ای برای توجیه بی اعتنائى طولانى نسبت به شاهکار ساکری داده شده است که ضمن آن سخن از همانند غیر مستقیم از انتشار کار ساکری می رود. نگاه کنید، مثلاً به ،

E. T. Bell. The Magic of Numbers, chapter 25.

1. Eugenio Beltrami

2. Johann Heinrich Lambert

3. Die Theorie der Parallellinien

بیشتر از دو قائمه باشند، در نظر گرفت. با فرض تلویحی لایتناهی بودن يك خط مستقیم، وی توانست فرض سوم را نفی کند، ولی، گرچه کوششهای متعددی انجام داد، نتوانست در مورد فرض اول کاری صورت دهد. این تلاشها در ویرایشهای متوالی اصول هندسه وی، که مقبولیت عام داشت، ظاهر شد. بدین ترتیب وی در رواج دادن مسئله اصل موضوع توازی نقش زیادی داشت.

تعجب آور نیست که در فرض زاویه حاده هیچ تناقضی یافته نشد، زیرا امروزه معلوم شده است که هندسه ای که از مجموعه ای از اصول مشکل از يك مجموعه اساسی، بعلاوه فرض زاویه حاده بسط یافته است همان قدر سازگار است که هندسه اقلیدسی که از همان مجموعه اساسی بعلاوه فرض زاویه قائمه بسط یافته است؛ یعنی، اصل توازی از بقیه اصول مستقل است و بنا بر این قابل نتیجه گیری از آنها نیست. اولین کسانی که به این حقیقت ظن بردند گاوس آلمانی، یانوش (یا یوهان) بویوئی^۱ (۱۸۵۲-۱۸۶۵) مجارستانی، و نیکلای ایوانوویچ-لباچفسکی^۲ (۱۷۹۳-۱۸۵۶) روسی بودند. اینان موضوع را از دید شکل اصل توازی پلی فیر با در نظر گرفتن سه امکان زیر مورد توجه قرار دادند: از يك نقطه مفروض می توان بیش از يك خط، یا فقط يك خط به موازات يك خط مفروض رسم کرد، یا هیچ خطی نمی توان رسم کرد. این موارد، به ترتیب، با فرضهای زاویه حاده، قائمه، و منفرجه معادل اند. مجدداً، با فرض لایتناهی بودن يك خط مستقیم، حالت سوم به سادگی نفی می شود. هر يك از این سه ریاضیدان که بعد از مدتی به وجود هندسه سازگاری تحت اولین فرض بوبرده بودند، مستقلاً بسطهای هندسی و مثلثاتی فرض زاویه حاده را به انجام رسانیدند.

معملاً گاوس اولین کسی بوده که به نتایج نافذی درباره فرض زاویه حاده رسیده است، ولی از آنجا که وی در سرتاسر زندگی توفیق به چاپ چیزی در باره این مطلب نیافت، افتخار کشف این هندسه نااقلیدسی خاص باید بین بویوئی و لباچفسکی تقسیم شود.



نیکلای لباچفسکی
(مجموعه کتابخانه عمومی نیو یورک)

بویوئی کشفیات خود را در سال ۱۸۳۲ در ضمیمه‌ای بر کارهای ریاضی پدرش به چاپ رسانید. بعداً معلوم شد که لباچفسکی کشفیات مشابهی را زودتر، در سالهای ۱۸۲۹-۱۸۳۰، منتشر کرده است. ولی، به دلیل موانع زبانی و کندی در گسترش اکتشافات جدید موجود در طی آن سالها، کار لباچفسکی چند سالی در اروپای غربی ناشناخته ماند. به نظر می‌رسد نیازی به بحث درباره نظریه‌های بفرنج، و احتمالاً بی‌اساس، دایر بر اینکه چگونه هر يك از این سه تن اطلاعاتی از کشفیات یکی دیگر به دست آورده و به خود منتسب کرده است، نباشد. در آن زمان هم سوءظن و هم متهم کردن دیگران تاحد زیادی وجود داشته است.

یانوش (با یوهان) بویوئی يك افسر مجارستانی در ارتش اطریش و فرزند فوركوش (یا وولفگانگ) بویوئی^۱، يك معلم ریاضی ولایتی و دوست دیرینه گاوس بود. بدون شك محرك بویوئی جوان در مطالعه اصل توازی پدرش بود، که پیشتر از آن علاقه‌مندی خود را به این مسئله نشان داده بود. پیش از سال ۱۸۲۳، یانوش بویوئی شروع به درك ماهیت واقعی مسئله‌ای که با آن مواجه بود، کرد، و در نامه‌ای که طی این سال به پدر نوشت، شیفتگی خود را به کار خود نشان می‌دهد. در این نامه، وی عزم خود را برای چاپ رساله‌ای در باب نظریه موازی، به محض آنکه زمان و فرصت تنظیم مطالب را پیدا کند، اعلام کرده و ندا در می‌دهد که «من از هیچ، جهانی تازه و شگفت‌انگیز آفریده‌ام». پدر اصرار می‌کند که مقاله مورد نظر به عنوان ضمیمه‌ای بر اثر نیمه فلسفی حجیم و دو جلدی خود او درباره ریاضیات مقدماتی چاپ شود. بسط و تنظیم اندیشه‌ها کندتر از آنچه یانوش انتظار داشت، پیش رفت، ولی سرانجام، در سال ۱۸۲۹، وی دستنویس پایان یافته را به پدر تسلیم کرد و سه سال بعد، در ۱۸۳۲، رساله به صورت يك ضمیمه بیست و شش صفحه‌ای در انتهای جلد اول اثر پدرش ظاهر می‌شود.^۲ یانوش بویوئی دیگر چیزی چاپ نکرد، گرچه انبوهی از دستنوشته‌ها از خود به جای گذاشت. علاقه اصلی او به چیزی بود که وی آن را «دانش مطلق فضا» نامید و منظور وی از آن مجموعه‌ای از قضایا بود که مستقل از اصل توازی بودند و در نتیجه هم در هندسه اقلیدسی و هم در هندسه جدید برقرار بودند.

نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی قسمت عمده زندگی خود را در دانشگاه کازان^۳، ابتدا به صورت دانشجو، بعداً به عنوان استاد ریاضیات، و سرانجام به عنوان رئیس دانشکده گذراند، و نخستین مقاله او درباره هندسه نااقلیدسی در سالهای ۱۸۲۹-۱۸۳۰ در بولتن کازان^۴، دو یا سه سال پیش از آنکه اثر بویوئی به چاپ برسد، منتشر شد. این یادداشت توجه اندکی را در روسیه جلب کرد، و چون به زبان روسی نوشته شده بود، در جاهای دیگر عملاً مورد هیچ توجهی واقع نشد. لباچفسکی تلاش اولیه خود را با نوشته‌های دیگر دنبال

1. Farkas (or Wolfgang) Bolyai

* برای ترجمه این ضمیمه نگاه کنید به

R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*

یا به

D.E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, pp. 375.388

که در کتابنامه انتهای فصل فهرست شده‌اند.

2. Kasan

3. Kasan Bulletin

نمود. مثلاً، به امید یافتن گروه وسیعتری خواننده، وی در سال ۱۸۴۰ کتاب کوچکی به زبان آلمانی تحت عنوان تحقیقات هندسی در باب نظریه موازیها^۱ منتشر کرد^۲، و باز بعداً، در سال ۱۸۵۵، یک سال پیش از مرگش و بعد از آنکه نابینا شده بود، رساله‌ای نهایی و خلاصه‌تر به زبان فرانسه تحت عنوان هندسه عام^۳ به چاپ رساند^۴. اطلاعات اکتشافات جدید در آن روزها چنان به کندی انتشار می‌یافت که گاوس احتمالاً چیزی از کار لباچفسکی تا زمان انتشار آن به آلمانی در سال ۱۸۴۰، نشنید و یا نوش بویوئی تا سال ۱۸۴۸ از آن بی‌خبر بود. خود لباچفسکی چندان نزیست که کار خود را مورد تأیید عامه ببیند، ولی به هندسه نااقلیدسی که او پدید آورد، امروز اغلب هندسه لباچفسکی اطلاق می‌شود.

استقلال واقعی اصل موضوع توازی از سایر اصول موضوعه هندسه اقلیدسی تا زمان به دست آمدن براهین سازگاری برای فرض زاویه حاده به گونه‌ای که سؤال برانگیز نباشد، ثابت نشد. ارائه این براهین چندان طول نکشید و توسط بلترامی، آرثر کیلی، فلیکس کلاین، هانری پوانکاره، و دیگران فراهم شد. روش آن، عبارت بود از وضع مدلی در هندسه اقلیدسی که بتواند به سبب انتزاعی فرض زاویه حاده تعبیری عینی در قسمتی از فضای اقلیدسی بدهد. در این صورت هر ناسازگاری در هندسه نااقلیدسی موجب یک ناسازگاری متناظر در هندسه اقلیدسی می‌شود (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۱-۱۳).

در سال ۱۸۵۴، ریمان نشان داد که اگر نامتناهی بودن خط مستقیم کنار گذاشته شود و صرفاً بی‌کرانگی آن مورد پذیرش واقع شود، آنگاه با چند جرح و تعدیل جزئی اصول موضوعه دیگر، هندسه سازگار نااقلیدسی دیگر را می‌توان از فرض زاویه حاده به دست آورد. کلاین در سال ۱۸۷۱ به این سه هندسه، یعنی هندسه بویوئی و لباچفسکی، هندسه اقلیدس، و هندسه ریمان، نامهای هندسه هذلولوی، هندسه سهموی، و هندسه بیضوی داد.

البته نتیجه مستقیم کشف این اولین هندسه نااقلیدسی به سرانجام رسیدن مسئله دیرینه اصل موضوع توازی بود - نشان داده شد که اصل موضوع توازی مستقل از اصول موضوعه دیگر هندسه اقلیدسی است. اما پیامدی دورتر از این، آزاد شدن هندسه از قالب سنتی آن بود. این عقیده ریشه‌دار قرنهای متعادی که تنها یک هندسه ممکن می‌تواند موجود باشد، خدشه‌دار شد، و راه برای ایجاد چندین دستگاه مختلف هندسه گشوده شد. با امکان خلق چنین هندسه‌های کاملاً «مصنوعی»، آشکار شد که هندسه لزوماً به فضای مادی واقعی گره نخورده

1. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien

* برای ترجمه آن نگاه کنید به

R. Bolona, *Non - Euclidean Geometry*

که در کتابنامه انتهای این فصل فهرست شده است.

2. Pangéométrie

** برای ترجمه آن نگاه کنید به

D.E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, pp. 360-374

که در کتابنامه انتهای این فصل فهرست شده است.

است. اصول موضوعه هندسه، برای ریاضیدان صرفاً فرضیهایی شدند که درستی یا نادرستی فیزیکی آنها برای او مطرح نیست. ریاضیدان می تواند اصول موضوعه خود را برای ارضای خاطر خود اختیار کند، بشرطی که سازگاری آنها با یکدیگر محفوظ بماند.

۱۳-۷ ظهور ساختار جبری

جمع و ضرب معمولی که بر روی مجموعه اعداد صحیح مثبت انجام می شوند، اعمال دوتایی اند؛ به هر زوج مرتب از اعداد صحیح، مانند a و b ، اعداد صحیح مثبت یکنای c و d ، به ترتیب بانامهای مجموع a و b و حاصلضرب a و b تخصیص داده می شوند که باعلامتهای

$$c = a + b, \quad d = a \times b$$

نشان داده می شوند. این دو عمل دوتایی جمع و ضرب که بر روی مجموعه اعداد صحیح مثبت صورت می گیرد دارای برخی خواص است. مثلاً، اگر a, b, c معرف اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند، داریم

$$۱. \quad a + b = b + a, \text{ موسوم به قانون جابجایی جمع.}$$

$$۲. \quad a \times b = b \times a, \text{ قانون جابجایی ضرب.}$$

$$۳. \quad (a + b) + c = a + (b + c), \text{ قانون شرکتپذیری جمع.}$$

$$۴. \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c), \text{ قانون شرکتپذیری ضرب.}$$

$$۵. \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \text{ قانون توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع.}$$

در اوایل قرن نوزدهم، جبر صرفاً حساب علامتی تلقی می شد*. بدعبارت دیگر، به جای کار کردن با اعداد معین، به طریقی که در حساب عمل می شود، در جبر حرفی را که معرف این اعدادند به کار می بریم. در این صورت، پنج عمل بالا، گزارههایی هستند که همیشه در جبر اعداد صحیح مثبت صادق اند. ولی، چون این گزارهها علامتی هستند، قابل تصور است که در مورد برخی مجموعهها به غیر از اعداد صحیح مثبت قابل کارگیری باشند، مشروط بر اینکه تعریفهای مناسبی برای دو عمل دوتایی متضمن در آنها فراهم کنیم. در واقع چنین هم هست (مثلاً، نگاه کنید به امثلهای که در مطالعه مسئلهای ۱۳.۱۳ داده شده اند).

نتیجه می شود که پنج خاصیت اساسی اعداد صحیح مثبت مندرج در بالا را می توان بدعنوان خواص دستگاههای عناصر دیگری کاملاً متفاوت با اعداد نیز تلقی کرد. پیامدهای این پنج خاصیت، جبری را تشکیل می دهد که قابل استفاده در اعداد صحیح مثبت است، ولی روشن است که نتایج این خاصیت تشکیل جبری می دهد که قابل استفاده در دستگاههای دیگر نیز هست. بدعبارت دیگر، یک ساختار جبری مشترك (پنج خاصیت اساسی و پیامدهای آنها) بدیسیاری از دستگاههای متفاوت وابسته است. این پنج خاصیت اساسی را می توان بدعنوان اصول موضوعه نوع خاصی از ساختار جبری تلقی کرد. و هر قضیه ای که از این اصول ناشی

* همان دیدی که هنوز نسبت به جبر دبیرستانی و اغلب جبر سال اول دانشگاهها وجود دارد.

می شود بر هر تعبیری که پنج خاصیت اصلی را بر آورده می کند، قابل اعمال است. لذا با چنین دیدگاهی، جبر ارتباط خود را با حساب گسسته، و به شکل يك موضوع فرضی - استنتاجی صوری درمی آید.

نخستین سوسوهای دیدگاه جدید فوق الذکر در جبر در حدود سال ۱۸۳۰ در انگلستان، با کار جورج پیکاک^۱ (۱۷۹۱-۱۸۵۸)، فارغ التحصیل و معلم کیمبرج، و سپس سرپرست کلیسای ایلی^۲، پدیدار شد. پیکاک از نخستین کسانی بود که به مطالعه جدی اصول بنیادی جبر پرداخت. و در سال ۱۸۳۰ رساله در باب جبر^۳ خود را منتشر کرد، که ضمن آن کوشش کرد تا به جبر، پرداختی منطقی، قابل مقایسه با اصول اقلیدس، بدهد و بدین ترتیب برای خود عنوان «اقلیدس جبر» را کسب نماید. او بین آنچه که وی آن را «جبر حسابی» و «جبر نمادی» نامید، تمایز قایل شد. پیکاک اولی را به عنوان مبثی تلقی می کرد که از کاربرد علائم برای نشان دادن اعداد اعشاری معمولی مشیت، همراه با علامتهای این اعمال، نظیر جمع و تفریق، که روی این اعداد عمل می شوند، ناشی می شوند. اما در «جبر حسابی» برای کاربرد برخی اعمال محدودیتهایی وجود دارد. مثلاً، در تفریق، $a-b$ ، باید داشته باشیم $a > b$. از سوی دیگر «جبر نمادی» پیکاک اعمال «جبر حسابی» را می پذیرد ولی محدودیتهای آنها را نادیده می گیرد. بدین ترتیب، تفریق در «جبر نمادی» با تفریق در «جبر حسابی» متفاوت است از این جهت که در اولی این عمل همواره انجام شدنی است. توجیه تعمیم این قواعد «جبر حسابی» برای «جبر نمادی» توسط پیکاک، اصل تداوم صورتهای معادل^۴ نامیده شد. «جبر نمادی» پیکاک، يك «جبر حسابی» عام است که اعمال آن، مادامی که دو جبر به طور مشترک پیش می روند، توسط اعمال «جبر حسابی» تعیین می شوند و در سایر موارد بر طبق اصل تداوم صورتهای معادل معین می گردند.

اصل تداوم صورتهای معادل، مفهوم توانایی در ریاضیات تلقی شد، و در مواردی مانند بسط اولیه حساب دستگاه اعداد مختلط و توسیع قوانین نماها از نمای اعداد صحیح مشیت به نماهایی از نوع کلیتر. نقش تاریخی ایفا کرد. در نظریه نماها، به عنوان مثال، اگر a يك عدد گویای مثبت n عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه a^n ، بنا بر تعریف، حاصل ضرب n بار a در خود است. از این تعریف بلافاصله نتیجه می شود که، به ازای هر دو عدد صحیح مثبت مانند m و n ، $a^m a^n = a^{m+n}$. بنا بر اصل تداوم صورتهای معادل، پیکاک پذیرفت که در «جبر نمادی»، ماهیت پایه a یا نماهای m و n هر چه باشند، داریم $a^m a^n = a^{m+n}$. اصل مبهم تداوم صورتهای معادل امروز کنار گذاشته شده است، ولی هنوز هم اغلب، در تلاش برای تعمیم يك تعریف. بدست می رویم که تعاریف طوری تدوین شوند که برخی خواص تعریف قدیم همچنان محفوظ بمانند.

معاصرین بریتانیایی پیکاک، مطالعات او را ارتقا دادند و مفهوم جبر را به مفهوم امروزی

1. George Peacock
2. Ely
3. Treatise on Algebra
4. Principle of the permanence of equivalent forms

آن نزدیک کردند. مثلاً دانکن فارکوثرسن گرگوری^۱ (۱۸۱۳-۱۸۴۴) مقاله‌ای در سال ۱۸۴۵ منتشر کرد که در آن قوانین جابجایی و توزیع پذیری در جبر به صراحت ابراز شده‌اند. پیشرفتهای بیشتر در فهم مبانی جبر توسط اوگاستس دمورگن^۲ (۱۸۵۶-۱۸۷۱)، عضو دیگر مکتب جبر یون بریتانیایی انجام شد. در کارهای نسبتاً کورمال گونه مکتب بریتانیا، می‌توان اثر ظهور ایده ساختار جبری و تدارک برای برنامه اصل موضوعی در بسط جبر را پیدا کرد. طولی نکشید که افکار مکتب بریتانیا در اروپای قاره‌ای منتشر شدند و در آنجا در سال ۱۸۶۷ توسط مورخ ریاضی آلمانی، هرمان هانکل (۱۸۳۹-۱۸۷۳) تمام و کمال مورد بررسی قرار گرفتند. اما، حتی قبل از پدیدار شدن بررسی هانکل، ویلیام راوین همیلتن^۳ (۱۸۵۵-۱۸۶۵)، ریاضیدان ایرلندی، و هرمان گونترگراسمان^۴ (۱۸۵۹-۱۸۷۷)، ریاضیدان آلمانی، نتایجی را منتشر کرده بودند که ماهیت دورستری داشتند، نتایجی که منجر به‌رهایی جبر، عمدتاً به همان کیفیت شد که کشفیات لیاچفسکی و بویوئی منجر به‌رهایی هندسه شدند، وسیل بندهای جبر مجرد نوین را از فرا راه آن گشودند. این کار قابل توجه همیلتن و گراسمان در فصل بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱۳-۸ آزاد شدن جبر

دیدیم که هندسه، پایبند توصیفی بود که اقلیدس از آن کرده بود تا اینکه لیاچفسکی و بویوئی، در سال ۱۸۲۹ و در سال ۱۸۳۲، آن را با ابداع هندسه‌ای به همان سازگاری که در آن یکی از اصول موضوعه اقلیدس برقرار نیستند، از قیود خود رها کردند. با این کار، اعتقاد قبلی مبنی بر اینکه تنها یک هندسه امکان وجود دارد، خدشه دار شد و راه برای خلق هندسه‌های جدید متعددی گشوده شد.

نظیر همین داستان را برای جبر هم می‌توان گفت. در اوایل قرن نوزدهم، قابل تصور نبود که جبری دگر گونه با جبر معمولی حساب موجود باشد. مثلاً، کوشش برای ساختن جبر سازگاری که در آن قانون جابجایی ضرب برقرار نباشد، نه تنها احتمالاً در آن زمان به ذهن کسی نمی‌رسید. بلکه حتی اگر هم به ذهن کسی خطور می‌کرد مطمئناً به عنوان فکر کاملاً مسخره‌ای دور افکنده می‌شد؛ با همه اینها، چگونه می‌شد احتمالاً جبری منطقی داشت که در آن $a \times b$ مساوی $b \times a$ نباشد؛ درباره جبر احساس چنین بود تا آنکه، در سال ۱۸۴۳، ویلیام راوین همیلتن، بنا بر ملاحظات در فیزیک، مجبور به اختراع جبری شد که در آن قانون جابجایی ضرب برقرار نیست. این مرحله اساسی در حذف قانون جابجایی به آسانی به ذهن همیلتن خطور نکرد؛ این فکر پس از سالها تأمل درباره مسئله خاصی، به مخیله او رسید. پرداختن به انگیزه فیزیکی که در پشت ابداع همیلتن قرار داشت، مارا بیش از حد از موضوع بحث خارج می‌کند. شاید بهترین روش، برای مقاصد ما، از طریق بحث زیبایی

باشد که همیلتن دربارهٔ اعداد مختلط به عنوان زوج اعداد حقیقی کرده است.* از لحاظ ریاضیدانان عصر وی، يك عدد مختلط، عددی بود به شکل $a+bi$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی بودند و $i^2 = -1$. جمع و ضرب اعداد مختلط با در نظر گرفتن $a+bi$ به عنوان يك چند جمله‌ای خطی نسبت به i و گذاشتن $i^2 = -1$ به جای i^2 ، هر جا که ظاهر می‌شد، صورت می‌گرفت. بدین طریق، برای مجموع رابطه

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

و برای ضرب

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

را داریم. اگر این نتایج را به عنوان تعریف جمع و ضرب زوجهای اعداد مختلط برگزینیم، دشوار نیست نشان دهیم که جمع و ضرب جابجایی و شرکتپذیر، و ضرب نسبت به جمع توزیعپذیر است.

حالا، چون يك عدد مختلط مانند $a+di$ به طور کامل توسط دو عدد حقیقی a و b معین می‌شود، این فکر در همیلتن پیدا شد که عدد مختلط را توسط زوج اعداد حقیقی مرتب (a, b) نمایش دهد. وی دو زوج از این گونه اعداد مانند (a, b) و (c, d) را برابر تعریف کرد اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$. جمع و ضرب چنین زوج اعدادی را وی به صورت

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \text{ و } (a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

تعریف کرد (تا با نتایج بالا مطابقت داشته باشند). با این تعریفها بسادگی می‌توان نشان داد که جمع و ضرب زوج اعداد حقیقی مرتب جابجایی و شرکتپذیرند، و ضرب نسبت به جمع توزیعپذیر است، البته، به شرطی که پذیریم این قوانین برای جمع و ضرب اعداد حقیقی برقرارند. باید توجه کرد که دستگاه اعداد حقیقی در دستگاه اعداد مختلط نشانده شده است. منظور از این بیان آن است که اگر يك عدد حقیقی مانند r با زوج اعداد متناظر $(r, 0)$ یکی گرفته شود، آنگاه این تناظر تحت عمل جمع و ضرب اعداد مختلط حفظ می‌شود، زیرا داریم

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0) \text{ و } (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

در عمل به جای عدد مختلطی به شکل $(r, 0)$ می‌توان متناظر حقیقی آن یعنی r را قرارداد. برای به دست آوردن شکل قبلی يك عدد مختلط از شکل همیلتنی آن، توجه می‌کنیم که هر عدد مختلط (a, b) را می‌توان به صورت

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

* که در سال ۱۸۳۳ از سوی همیلتن برای آکادمی سلطنتی ایرلند فرستاده شده است.

نوشت، که در آن $(0, 1)$ بانماد i نشان داده می‌شود و $(a, 0)$ و $(b, 0)$ با اعداد حقیقی a و b یکی گرفته می‌شوند. بالاخره ملاحظه می‌کنیم که

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

دستگاه اعداد مختلط دستگاه اعداد بسیار مناسبی برای مطالعهٔ بردارها و دوران در صفحه است.* همیلتن در تلاش برای ابداع دستگاه مشابهی از اعداد برای مطالعهٔ بردارها و دورانها در فضای سه بعدی بود. در تحقیقات خود، وی بدین نتیجه رسید که نه تنها باید زوج اعداد حقیقی مرتب (a, b) را که اعداد حقیقی را در خود نشانده باشد، در نظر گیرد، بلکه باید چهار تاییهای اعداد حقیقی مرتب مانند (a, b, c, d) را که هم اعداد حقیقی و هم اعداد مختلط در آن نشانده شده باشد، در نظر گیرد. به عبارت دیگر، دو چنین چهار تایی مانند (a, b, c, d) و (e, f, g, h) برابر تعریف می‌شوند اگر و فقط اگر $a = e, b = f, c = g, d = h$ همیلتن لازم دید تاجمیع و ضرب چهار تاییهای اعداد حقیقی مرتب را چنان تعریف کند، که در حالت خاص، روابط

$$(a, 0, 0, 0) + (b, 0, 0, 0) = (a + b, 0, 0, 0),$$

$$(a, 0, 0, 0)(b, 0, 0, 0) = (ab, 0, 0, 0),$$

$$(a, b, 0, 0) + (c, d, 0, 0) = (a + c, b + d, 0, 0),$$

$$(a, b, 0, 0)(c, d, 0, 0) = (ac - bd, ad + bc, 0, 0)$$

را داشته باشد. با کواثر نیون (حقیقی) نامیدن چنین چهار تاییهای اعداد حقیقی مرتب، همیلتن دریافت که باید تعریفهای زیر را برای جمع و ضرب کواثر نیونهای خود تدوین کند:

$$(a, b, c, d) + (e, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h),$$

$$(a, b, c, d)(e, f, g, h) = (ae - bf - cg - dh, af + be + ch - dg, ag + ce + df - bh, ah + bg + de - cf).$$

به ازای عدد حقیقی دلخواهی مانند m ، با یکی دانستن کواثر نیون $(m, 0, 0, 0)$ با m

$$m(a, b, c, d) = (a, b, c, d)m = (ma, mb, mc, md).$$

با این تعریفها، می‌توان نشان داد که اعداد حقیقی و اعداد مختلط بین کواثر نیونها نشانده شده‌اند، جمع و ضرب کواثر نیونها جابجایی و شرکتپذیرند، و ضرب کواثر نیونها شرکتپذیر و نسبت به جمع توزیعپذیر است. اما قانون جابجایی ضرب برقرار نیست. برای ملاحظهٔ

* این مناسب بودن ناشی از این حقیقت است که وقتی يك عدد مختلط مانند $a + bi$ به عنوان معرف نقطه Z با مختصات دکارتی قائم (a, b) تلقی می‌شود، آنگاه عدد مختلط Z را می‌توان به عنوان معرف بردار OZ تلقی کرد، که در آن O مبدأ مختصات است.

این مطلب، در حالت خاص، دو کوآترنیون $(0, 1, 0, 0)$ و $(0, 0, 1, 0)$ را در نظر بگیرید. می توان دید که

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$$

در حالی که

$$(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -(0, 0, 0, 1) ;$$

یعنی، قانون جابجایی ضرب شکسته می شود، در واقع اگر واحدهای کوآترنیونی $(1, 0, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0, 0)$ ، $(0, 0, 1, 0)$ ، $(0, 0, 0, 1)$ را به ترتیب با $1, i, j, k$ نشان دهیم، می توانیم تحقیق کنیم که جدول ضرب زیر حکم فرماست؛ یعنی، نتیجه مطلوب در خانه ای که مشترک بین سطری که سرسطر آن اولین عامل ضرب است و ستونی که سرستون آن عامل ضرب دوم است، پیدا می شود:

X	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

همیلتن حکایت کرده است که فکر کنار گذاشتن قانون جابجایی ضرب، پانزده سال بعد از تفکر بی ثمر، موقعی که باز نش در کناره رویال کانال نزدیک دو بلین اندکی پیش از تارک شدن هوا، قدم می زده، مثل برق در ذهنش خطور کرده است. وی از این فکر دور از باور چنان به هیجان درمی آید که قلم تراش خود را از جیب در آورده و لب جدول ضرب بالا را بر یکی از سنگهای پل براوم^۲ حک می کند. امروزه لوحه ای که در سنگهای پل کار گذاشته شده، روایتگر این ماجراست (نگاه کنید به شکل زیر). بدین گونه یکی از لحظات بزرگ در ریاضیات به یادگار مانده است.

می توان کوآترنیون (a, b, c, d) را به شکل $a + bi + cj + dk$ نوشت. وقتی دو کوآترنیون بدین شکل نوشته می شوند می توان آنها را نظیر چند جمله ایهای بر حسب i, j, k در هم ضرب کرد، و سپس حاصل ضرب را به کمک جدول ضرب بالا به همان شکل

اینجا، به هنگام قدم زدن

در شانزدهم اکتبر ۱۸۴۳

سرویلیام راولن همیلتن

در برقی از نیوگ فرمول اساسی

ضرب کواتر نیونها

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

را کشف و آن را بر سنگی از این پل کند.

در آورد.

در سال ۱۸۴۴، هرمان گونتر گراسمان اولین چاپ اثر مهم خود حساب توسیعیها را منتشر کرد، که در آن دسته‌ای از جبرها با تعمیم بسیار بیشتری نسبت به جبر کواتر نیون همیلتن بسط یافته بودند. به جای اینکه فقط مجموعه‌های چهار تایی از اعداد حقیقی در نظر گرفته شوند، گراسمان مجموعه‌های مرتب از n عدد حقیقی را در نظر گرفت. به هر مجموعه‌ای مانند $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، گراسمان عدد ابرمختلطی به شکل $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ را نسبت داد که در آن $e_1, e_2, \dots, e_n$ واحدهای بنیادی جبر او هستند. دو عدد ابرمختلط از این نوع، نظیر چند جمله‌ایهایی بر حسب $e_1, e_2, \dots, e_n$ جمع و ضرب می‌شوند. در این صورت جمع دو چنین عددی، عددی از همان نوع به دست می‌دهد. برای آنکه حاصل ضرب دو عدد از این گونه، عددی از همین نوع را به وجود آورد، ساختن جدول ضربی برای واحدهای $e_1, e_2, \dots, e_n$ مشابه با جدول ضرب همیلتن برای واحدهای $1, i, j, k$ لازم است. در اینجا آزادی عمل زیادی وجود دارد، و جبرهای مختلفی را می‌توان با ساختن جداول ضرب مختلف به وجود آورد. هر جدول ضرب تابع مورد استعمال آن و قوانینی از جبر است که حفظ آنها مورد نظر است.

قبل از ختم این بخش، یک جبر غیر جابجایی دیگر را در نظر می‌گیریم - جبر ماتریسی که توسط ریاضیدان انگلیسی آرثر کیلی (۱۸۲۱ - ۱۸۹۵) در سال ۱۸۵۷ ابداع شد. کیلی در رابطه با تبدیل خطی از نوع زیر متوجه ماتریسها شد

$$x' = ax + by,$$

$$y' = cx + dy,$$

که در آن a, b, c, d اعداد حقیقی‌اند، و می‌توان آن را به عنوان نگاشتی در نظر گرفت که نقطه (x, y) را به نقطه (x', y') می‌برد. روشن است که تبدیل بالا توسط چهار ضریب

a, b, c, d کاملاً معین می‌شود، و لذا این تبدیل را می‌توان با آرایهٔ مربعی زیر در قالب نماد درآورد:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

که ما آن را يك ماتریس (مربعی از مرتبهٔ دوم) می‌نامیم. چون دو تبدیل مورد بحث در صورتی و فقط در صورتی یکی هستند که دارای ضرایب یکسان باشند، ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

را بنا بر تعریف برابر می‌گیریم اگر و فقط اگر $a=e, b=f, c=g, d=h$. اگر به دنبال تبدیل بالا تبدیل

$$x'' = ex' + fy'$$

$$y'' = gx' + hy'$$

انجام شود، به کمک جبر مقدماتی، می‌توان نشان داد که نتیجهٔ آن تبدیل زیر است

$$x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y,$$

$$y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y.$$

این کار به تعریف زیر برای ضرب ماتریسها منجر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}.$$

جمع ماتریسها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix},$$

و، اگر m عددی حقیقی باشد، تعریف زیر را می‌کنیم:

$$m \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{bmatrix}.$$

در جبر ماتریسها که این گونه به دست می‌آید، می‌توان نشان داد که جمع هم جابجایی و هم شرکتپذیر است و اینکه ضرب شرکتپذیر و نسبت به جمع توزیعپذیر است، اما ضرب،

همچنانکه با مثال ساده زیر نشان داده می شود، جا بجایی نیست،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

با سبب جبرهایی با قوانین ساختاری متفاوت با قوانین جبر معمولی، همیلتن، گراسمان، و کیلی سیل بندهای جبر مجرد نوین را گشودند. در واقع با تضعیف یا حذف اصول موضوعه گوناگون جبر معمولی، یا با گذاشتن يك يا چند اصل موضوع به جای اصول دیگر، که با بقیه اصول موضوعه سازگار باشند، دستگاههای گوناگون متعددی را می توان مطالعه کرد. به عنوان برخی از این دستگاهها، دستگاههای زیر را داریم: گروهوارها، شبه گروهها، طوقه ها، نیمگروهها، تکراره ها، گروهها، حلقه ها، حوزه های صحیح، شبکه ها، حلقه های تقسیم، حلقه های بولی، هیأتها، فضاهای برداری، جبرهای ژوردان، وجبرهای لی، که دو جبر اخیر مثالهایی از جبرهای غیرشرکتپذیرند. این گفته احتمالاً صحیح است که ریاضیدانان، تا به امروز، بالغ بر ۲۵۰ تا از چنین ساختارهای جبری را مطالعه کرده اند. قسمت اعظم این کار به قرن بیستم تعلق دارد و انعکاسی از روح تعمیم و تجریدی است که این گونه در ریاضیات امروز متداول است. جبر مجرد به واژگان قسمت اعظم ریاضیات امروزی بدل شده است.

۱۳-۹ همیلتن، گراسمن، بول، و دمورگن

ویلیام راوثن همیلتن، که بی چون و چرا مشهورترین چهره ایرلندی در زمینه ریاضیات است، در سال ۱۸۰۵ در دوبلین به دنیا آمد و، جز دیدارهای کوتاه از سایر جاها، تمام زندگی خود را در همانجا به سربرد. خیلی زود دیتیم شد، اما قبل از آن هم، وقتی تنها يك سال داشت، پرورش او به عمویی واگذار شد که به تعلیم جدی ولی نامتوازن او پرداخت در حالی که بر یادگیری زبانها تأکید فراوان داشت. ویلیام نشان داد که اعجوبه ای است کم نظیر و وقتی به سن ۱۳ رسید تعداد زبانهای خارجی که در حد تسلط با آنها آشنایی یافته بود، به عدد سنین او بود. وی به آثار کلاسیک علاقمند شد و بدون آنکه واقعاً توفیقی داشته باشد، به تفنن در چیزی پرداخت که برای او به عنوان میلی مادام العمر در آمد - گفتن شعر. در سلك دوستان صمیمی شاعر بزرگ ویلیام وردزورث^۱ در آمد و ضمن تحسین وی، مورد تمجید او نیز قرار گرفت.

در ۱۵ سالگی تغییر علاقه داد و به ریاضیات دلبستگی پیدا کرد. این تغییر از ملاقات او با زراکولرین^۲، محاسب برق آسای امریکایی حاصل شد، که زرا، گرچه خود جوانکی بیش نبود، قدرت خود را در نمایشگاهی در دوبلین به عرضه گذاشت. اندک زمانی بعد تصادفاً نسخه ای از حساب عمومی نیوتن به دست همیلتن رسید. وی با حرص و ولع آن را خواند و بعداً بر هندسه تحلیلی و حسابان تسلط یافت. سپس چهار جلد پرینسپیا را خواند و به آثار بزرگ ریاضی قاره اروپا رو کرد. با خواندن مکانیک سماوی لاپلاس، پرده از

يك خطای ریاضی برداشت و در سال ۱۸۲۳ مقاله‌ای در باره آن نوشت که توجه زیادی را به خود جلب کرد. سال بعد وارد کالج ترینیتی در دUBLIN شد.

دوران شغلی همیلتن در دانشگاه منحصر به فرد بود، زیرا در سال ۱۸۲۸، وقتی فقط ۲۱ سال داشت و هنوز دانشجوی دوره لیسانس بود، هیئت منتخبین او را به سمت منجم سلطنتی ایرلند، سرپرست رصدخانه دانسینگ^۱، و استاد نجوم در دانشگاه برگزیدند. به فاصله کوتاهی بعد از آن، تنها در زمینه نظریه ریاضی، وی انکسار مخروطی در بلورهای دوجوری را پیش بینی کرد، که بعداً به طور تجربی توسط فیزیکدانها تأیید شد. در سال ۱۸۳۳ مقاله مهم خود را به آکادمی ایرلند عرضه کرد که در آن جبر اعداد مختلط به عنوان جبر زوجهای مرتب اعداد حقیقی ظاهر می شود (نگاه کنید به بخش ۱۳-۸). در سال ۱۸۳۵ به دریافت عنوان شهبواری [شوالیه] نائل شد.

بعد از مقاله ۱۸۳۳ش، همیلتن برای مدتهای مدید به تفکر درباره جبر سه تاییها و چهار تاییهای مرتب اعداد حقیقی پرداخت، ولی مسئله تعریف ضرب به گونه ای که قوانین آشنای این عمل را حفظ کند، همواره به عنوان مانعی در برابر او جلوه گر می شد. سرانجام در سال ۱۸۴۳، هنگامی که درآمد دکانال سلطنتی^۲ در خارج شهر دUBLIN قدم می زد، از راه شهود در ذهنش چنین آمد که انتظارش بیجا بوده و باید قانون جابجایی را فدا کند، و چنین شد که جبر کواترنیونها، اولین جبر غیر جابجایی، دفعتاً تکوین یافت (نگاه کنید به بخش ۱۳-۸). در طی حدود ۲۵ سالی که از عمرش باقی مانده بود، همیلتن قسمت اعظم وقت و توان خود را به بسط کواترنیونهای خود، که حس می کرد در فیزیک ریاضی اهمیتی ریشه ای خواهد داشت، صرف کرد. اثر بزرگ او، ده ساله در باب کواترنیونها^۳، در سال ۱۸۵۳ منتشر



ویلیام راون همیلتن
(مجموعه گرانجر^۴)

شد، که پس از آن وی خود را وقف آماده کردن کتاب حجیمتر اصول کواترانیونها^۱ کرد، ولی پیش از اتمام کتاب در سال ۱۸۶۵ در دUBLIN، بهمرگی که عمدتاً بر اثر الکلیسم و شرایط عموماً ناگوار ناشی از یک زندگی زناشویی بسیار نامناسب بود، درگذشت. مبحث کواترانیونها برای مدتی عده‌ای طرفدار را بهتقدم پیدا کرد، ولی به موقع خود آنالیز برداری انعطاف پذیرتر فیزیکدان و ریاضیدان امریکایی، جوسایا ویلارد گیبس^۲ (۱۸۳۹-۱۹۰۳) از دانشگاه ییل، و نیز مبحث عامتر n - تاییهای مرتب هرمان گوتترگراسمان، نظریه کواترانیونها را به مقامی رساند که تنها چیزی بسیار جالب ولی سزاوار موزه در تاریخ ریاضیات گردید. همیلتن علاوه بر کار در کواترانیونها، در اپتیک، دینامیک، و حل معادلات درجه پنجم، تابعهای نوسان کننده، منحنی شتاب نمای یک ذره متحرک^۳، و حل عددی معادلات دیفرانسیل مطلب نوشت. دانشجویان فیزیک به نام همیلتن در باصلاح تابع همیلتنی، و در دینامیک با معادلات دیفرانسیل همیلتن - ژاکوبی برمی خوردند. در نظریه ماتریس، قضیه، معادله، و چند جمله‌ای همیلتن - کیلی را داریم و در تقریحات ریاضی به بازی همیلتنی برمی خوریم که بر روی دوازده وجهیهای منتظم انجام می شود. (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۲۴.۱۳)

شاید یاد آوری این نکته باعث خوشایند آمریکاییان شود که در سالهای واپسین و غم آلود بیماری و نزارهای زندگی زناشویی همیلتن، آکادمی ملی علوم ایالات متحده^۴، که جدیداً تأسیس شده بود، همیلتن را به عنوان اولین عضو خارجی برگزید. افتخار کم سابقه دیگری که نصیب همیلتن کردند، به هنگام شرکت او در دومین گردهمایی انجمن بریتانیایی در کیمبرج، در سال ۱۸۴۵ بود که به مدت یک هفته در اطاقهای مقدس کالج ترینیتی به اوجا دادند، که بنا به روایات آیزک نیوتن کتاب پرنسیپیا را در آنجا تصنیف کرده است.

سر ویلیام راوثن همیلتن را نباید با معاصرش، سر ویلیام همیلتن (۱۷۸۸ - ۱۸۵۶)، فیلسوف برجسته‌ای از ادینبورو، مشبه کرد. دومی این عنوان را به ارث برد؛ ولی آن را کسب کرد. گراسمان در اشتتن^۵ آلمان، در سال ۱۸۰۹ پا به عرصه وجود گذاشت، و در همانجا در سال ۱۸۷۷ از دنیا رفت. وی مردی با علاقه‌های وسیع فکری بود. وی نه تنها یک معلم ریاضی، بلکه معلم مذهب، فیزیک، شیمی، لاتین، تاریخ، و جغرافیا بود. وی در فیزیک مطالبی نوشت و به تدوین کتابهای درسی مدارس در زبانهای آلمانی و لاتین، و ریاضیات پرداخت. وی ناشر مشترک یک هفته نامه سیاسی در سالهای طوفانی ۱۸۴۸ و ۱۸۴۹ بود. او به موسیقی علاقمند بود و در سالهای ۱۸۶۰ منقاد او برایی یک روزنامه بود. وی رساله‌ای در فقه اللغة گیاهان آلمانی تهیه کرد و یک مقاله در میسیونری را ویرایش نمود. به تحقیق در قواعد آواشناختی پرداخت، فرهنگی برای ریگ - ودا^۶ نوشت و ریگ - ودا را به شعر ترجمه

1. Elements of Quaternions 2. Josiah Willard Gibbs

* انتهای برداری که از نقطه ثابتی برابر با بردار سرعت نقطه متحرکی رسم شود، یک منحنی را می‌پیماید که شتاب نمای (Hodograph) نقطه متحرک نامیده می‌شود.

3. National Academy of Sciences of the United States 4. Stettin

۵. ریگ - ودا یکی از چهار بخش کتاب ودا، کتاب مقدس هندوان، است که سرود ستایش خدایان هندوان است. م.

کرد، آهنگهای محلی سه‌صدایی را تنظیم کرد، رسالهٔ عظیم حساب توسیعیها را تدوین نمود، و نه تا از یازده فرزند خود را به‌ثمر رسانید.

در سال ۱۸۴۴ گراسمن اولین ویرایش کتاب مهم حساب توسیعیهای خود را منتشر کرد. متأسفانه بیان ضعیف و گفتار مبهم وی باعث شد که این اثر عملاً بر معاصرین او ناشناخته بماند. تدوین مجددی که در ۱۸۶۲، بیرون آمد، توفیق بیشتری به‌دست نیاورد. سرخورده از عدم استقبال از اثرش، گراسمن ریاضیات را کنار گذاشت تا به مطالعهٔ زبان سانسکریت و ادبیات بپردازد و در این زمینه تعدادی مقاله درخشان نوشت.

گراسمن تمام عمر خود را به‌جز سالهای ۱۸۳۴ تا ۱۸۳۶ را که در یک مدرسهٔ صنعتی در برلین جانشین پاکوب اشتاینر شده و ریاضیات درس می‌داد، در شهر زادگاه خود در اشتتین به‌سربرد. دروس او کلاً در سطح متوسطه بود، گرچه وی امیدوار بود که سمتی در دانشگاه به‌دست آورد. پدر او در دانشکدهٔ اشتتین معلم ریاضیات و فیزیک بود. پس‌او هرمان گراسمان^۱ (متولد ۱۸۵۹) نیز یک ریاضیدان شد. پدر او دو جلد کتاب در ریاضیات نوشت و پسر رساله‌ای در هندسهٔ تصویری.

حساب توسیعیها کاربرد وسیعی دارد، بدون آنکه (آن‌طور که در بخش ۱۳-۸ بحث شد) محدودیتی در تعداد ابعاد موجود باشد. در سالهای اخیر غنا و عمومیت شگفت‌آور کار گراسمن درک شده و روشهای گراسمن عموماً، و بخصوص در بر اروپا و در آمریکا، در ترجیح بر روشهای همیلتن، دنبال شده‌اند.

اینک به ذکر کوتاهی از دو ریاضیدان انگلیسی، جورج بول^۲ و اوگاستس دمورگن می‌پردازیم که، از جملهٔ سایر کارها، مطالعهٔ علمی اصول اساسی جبر را که توسط همیلتن و گراسمان آغاز شده بود، ادامه دادند.

جورج بول در لینکلن^۳ انگلستان، در سال ۱۸۱۵ به دنیا آمد. پدر او کاسب تلاشگر خرده‌فایی بود، و بنابراین بول تنها تحصیلاتی معمولی یافت؛ ولی توانست یونانی و لاتین را پیش‌خود فراگیرد. بعداً، زمانی که به‌عنوان معلم مدرسهٔ ابتدایی کار می‌کرد، ریاضیات را با خواندن آثار لاپلاس و لاگرانژ فراگرفت، زبانهای خارجی را یادگرفت، و از طریق دوستش دمورگن، به‌منطق صوری علاقمند شد. در سال ۱۸۴۷ جزوه‌ای تحت عنوان آنالیز ریاضی^۴ منتشر کرد که دمورگن آن را به‌عنوان اثر دوران ساز مورد تحسین قرار داد. بول در این اثر اظهار عقیده کرد که ماهیت اساسی ریاضیات در صورت آن نهفته است و نه در محتوای آن؛ ریاضیات (برخلاف آنچه هنوز بعضی از فرهنگها ادعا می‌کنند) صرفاً «علم اندازه‌گیری و عدد» نیست و بلکه، به‌طور وسیعتر، هر گونه مطالعه‌ای متشکل از نمادها همراه با قواعد مشخصی برای عمل بر آن نمادهاست، و این قواعد تنها مقید به شرط سازگاری درونی هستند. دو سال بعد، بول به‌سمت استادی ریاضیات در کویینز کالج^۵ جدیدالتأسیس در کورک^۶ در ایرلند منصوب شد. در سال ۱۸۵۴، بول ضمن بسط و ایضاح اثر پیشین خود

1. Hermann Grassmann 2. George Boole 3. Lincoln
4. The Mathematical Analysis of Logic 5. Queen's College 6. Cork

مربوط به ۱۸۴۷، آن را در قالب کتابی تحت عنوان تفحص در قوانین تفکر^۱ در آورد که در آن، هم منطق صوری و هم جبر جدید، یعنی جبر مجموعه‌ها را که امروزه به جبر بولی^۲ موسوم است، تأسیس کرد. در سالهای اخیر، جبر بولی کاربردهایی، همچون در نظریه مدارهای الکتریکی، راه یافته است. در سال ۱۸۵۹ بول (مسئله در باب معادلات دیفرانسیل^۳ و سپس، در سال ۱۸۶۰، مسئله در باب حساب تفاضلات متناهی^۴ را به چاپ رسانید. کتاب دوم تا به امروز هم اثری استاندارد باقی مانده است. بول در ۱۸۶۴ در کورک در گذشت.

اواگاستس دمورگن، که نامش در چندین جای دیگر این کتاب آمده است، در سال ۱۸۰۶ در مدرس، محل کار پدرش به عنوان شریک در کمپانی هند شرقی، (نایبنا از یک چشم) به دنیا آمد. وی در تربیتی کالج کیمبریج تحصیل کرد، به عنوان رانگلر چهارم فارغ التحصیل شد، و در ۱۸۲۸ در دانشگاه لندن (که بعدها یونیورسیتی کالج^۵ نامگذاری شد) که در آن زمان تازه تأسیس شده بود، به سمت استادی رسید و در آنجا، از طریق کارها و دانشجو یانش، نفوذ گسترده‌ای در ریاضیات انگلیس اعمال کرد. وی مطالعه وسیعی در فلسفه و تاریخ ریاضیات داشت، و آثاری در زمینه بنیادهای جبر، حساب دیفرانسیل، منطق، و نظریه احتمالات نگاشت. او شارحی بسیار روشن نویس بود. کتاب بذله آمیز و سرگرم کننده او، مجموعه یادداشتها، هنوز برای سرگرمی خواننده می شود. وی کار بول را در جبر مجموعه‌ها دنبال کرد، و اصل دوگانی در نظریه مجموعه‌ها را بیان نمود که قوانین موسوم به قوانین دمورگن مثالی از آن است: اگر A و B زیر مجموعه‌های یک مجموعه مرجع باشند، آنگاه متمم اجتماع A و B اشتراک متممهای A و B است، و متمم اشتراک A و B ، اجتماع متممهای A و B است (با استفاده از نمادها: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $(A \cup B)' = A' \cap B'$)، که در آن پریم معرف متمم است). نظیر بول، دمورگن ریاضیات را مطالعه مجردی از نمادها مقید به مجموعه‌ای از اعمال نمادی می دانست. دمورگن مدافع صریح الهیة آزادیهای علمی و مباحثات مذهبی بود. وی خوب فلوت می نواخت و همواره مصاحبی خوش مشرب، و دوستدار مسلم زندگی در شهرهای بزرگ بود. اوشیفته چیستانها و معماهای جناسی بود، و وقتی سن یا سال تولد او را می پرسیدند، جواب می داد، «من در سال x^2 ، x ساله بودم». وی در سال ۱۸۷۱ در لندن در گذشت.

1. Investigation of the Laws of Thought

2. Boolean algebra

3. Treatise on Differential Equations

4. Treatise on the Calculus of Finite Differences

۵. در دانشگاه کیمبریج، قبول شدگان در امتحانی به نام تریپوس (Tripos) که فارغ التحصیلان ممتاز حق شرکت در آن دارند، به چهار بخش تقسیم می شود، که بخش صدری آن را رانگلر (Wrangler) نامند.

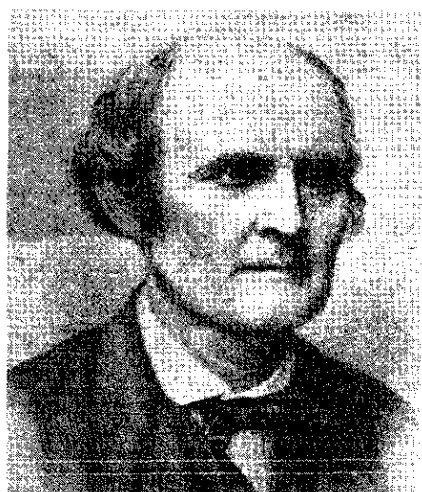
6. University College

۱۳-۱۰ کیلی، سیلوستر، و آرمیت

قسمت عمده این بخش به دو ریاضیدان برجسته انگلیسی، آرثر کیلی و جیمز جوزف سیلوستر اختصاص دارد، که بسیار انگیزه بخش یکدیگر بودند، اغلب در مسائل ریاضی واحدی تحقیق می کردند، مقدار زیادی ریاضیات نو به وجود آوردند، ولی با این همه، در خلق و خو، سبک، و دیدگاه باهم مقایرت داشتند.

آرثر کیلی در سال ۱۸۲۱ در ریچموند، در ساری^۱، متولد شد و در ترینیتی کالج، کیمبریج، تحصیل کرد و در سال ۱۸۴۲ به عنوان رانگلر ارشد در تربوس ریاضی فارغ التحصیل شد، و در همان سال در امتحان مشکلتر جایزه اسمیت^۲ نفر اول شد. برای مدت چندین سال به مطالعه حقوق و وکالت پرداخت، و همواره احتیاط می کرد که اشتغال به حقوق مانع کارش در ریاضیات نشود. وقتی دانشجوی حقوق بود به دو بلین رفت و در درس همیلتن در باره کوآرنیوینها حضور یافت. موقعی که کرسی استادی سادلری^۴ در سال ۱۸۶۳ در کیمبریج تأسیس شد، این کرسی به کیلی پیشنهاد شد، که او آن را پذیرفت، و بنا بر این حرفه قضایی را که آینده پرسودی داشت در مقابل معیشت کم زندگی علمی رها کرد. اما در این صورت می توانست تمام وقتش را وقف ریاضیات کند.

کیلی سومین نویسنده کثیرالتألیف ریاضیات در تاریخ این موضوع است، و تنها اوایل و کوشی بر او پیشی دارند. وی موقعی که هنوز دانشجوی دوره لیسانس در کیمبریج بود، به نشر آثار پرداخت و بین ۲۰۰ تا ۳۰۰ مقاله در طی اشتغال به حقوق بیرون آورد، و در مابقی عمر طولانی اش به کار نشر پر کثرت خود ادامه داد. مجموعه مقالات ریاضی^۵ حجیم کیلی مشتمل بر ۹۶۶ مقاله است و سیزده مجلد بزرگ به قطع ربعی به طور متوسط ۶۰۰



آرثر کیلی
(کتابخانه کنگره)

1. Richmond
2. Surrey
3. Smith's prize
4. Sadlerian
5. Collected Mathematical Papers

صفحه در هر جلد را پرمی کند. به ندرت می توان زمینه ای در ریاضیات مجرد را سراغ گرفت که نبوغ کیلی بر آن دست نیازیده باشد یا بر غنای آن نیفزوده باشد. قبلا، در بخش ۱۳-۸، ما کار او را در جبر ماتریسها بررسی کرده ایم. وی سهم پیشگازانه ای در هندسه تحلیلی، نظریه تبدیلهای، نظریه دترمینانها، هندسه با ابعاد بالاتر، نظریه افراز، نظریه منحنیها و رویهها، مطالعه صورتهای دودویی و سه سببی، نظریه تابعهای آبلی، تتا و بیضوی دارد. اما شاید مهمترین کار او ابداع و بسط نظریه پایاها باشد. نقطه های این نظریه رامی توان در نوشته های لاگرانژ، گاوس، و به ویژه، بول یافت. مسئله اساسی نظریه پایاها یافتن تابعهایی از ضرایب معادله جبری مفروضی است که وقتی متغیرهای معادله در معرض یک تبدیل خطی کلی قرار می گیرند، به جز در مورد فاکتوری که تنهاتمضمین ضرایب تبدیل است، بلا تغییر باقی می ماند. سیلوستر به همین مبحث علاقمند شد، و این دو شخصیت، که هر دو در آن موقع در لندن زندگی می کردند، پشت سرهم کشفیات تازه ای را بیرون دادند.

سبک ریاضی کیلیی تربیت قضایی او را آشکار می کند، زیرا مقاله های او دقیق، سراسر است، با اسلوب، و روشن اند. وی حافظه ای شگفت انگیز داشت و چنین می نمود که هر گز چیزی را که دیده یا خوانده، فراموش نمی کند. وی همچنین خوبی به طور استثنایی آرام و ملایم داشت. او را «ریاضیدان ریاضیدانان» نامیده اند.

کیلی اشتیاق غریبی به خواندن رمان پیدا کرد. وی در موقع مسافرت، در وقت انتظار برای شروع گردهماییها، و در هر فرصتی که پیش می آمد، رمان می خواند. در طول زندگی اش وی هزاران کتاب رمان، نه تنها به زبان انگلیسی، بلکه به یونانی، فرانسوی، آلمانی و ایتالیایی خواند. وی از نقاشی کردن، به ویژه آبرنگ، لذت زیادی می برد، و استعداد زیادی در نقاشی آبرنگ از خود بروز داد. او دوستدار سرسخت آموختن گیاهشناسی و به طور کلی طبیعت شناسی بود.

کیلی، به سنت حقیقی انگلیسی، کوهنورد دوستگاری بود، و برای راه پیماییهای طولانی و صعود به کوه، سفرهای متعددی به قاره اروپا کرد. حکایت کرده اند که به ادعای خودش، دلیل مبادرت او به کوهنوردی آن بود که، گرچه صعود از کوهها را دشوار و خسته کننده می یافت، احساس نشاط عظیمی که بعد از فتح قله به او دست می داد، نظیر احساسی بود که بعد از حل یک مسئله ریاضی مشکل یا کامل کردن نظریه ریاضی پیچیده ای به او دست می داد، و برای او آسانتر بود که این احساس خوش را با صعود به کوه به دست آورد.

کیلی در سال ۱۸۹۵ درگذشت. به فاصله کوتاهی بعد از آن، شارل ارمیت^۱ در گزاده^۲ چنین نوشت: «مشخصه استعداد ریاضی کیلی وضوح و زیبایی غایی صورت تحلیلی آن است؛ این استعداد را ظرفیت کار بی نظیر وی که موجب شده است این عالم برجسته با کوشی مقایسه شود، تقویت می کند.»

جیمز جوزف سیلوستر^۳ در سال ۱۸۱۴ در لندن به دنیا آمد و آخرین فرزند خانواده

در بین چند فرزند بود. شهرت خانواده در ابتدا جوزف بود، ولی بزرگترین پسر خانواده به آمریکا مهاجرت کرد، و به علتی که امروزه معلوم نیست، شهرت جدید سیلوستر را برگزید، و این شهرت را بقیه اعضای خانواده پذیرفتند. این برادر آمریکایی آمارگر بود، و به هیئت مدیره بیمانکاران بخت آزمایشهای ایالات متحده پیشنهاد کرد که مسئله مشکلی درباره ترتیبهها را که باعث زحمت آنان شده بود، به برادرش جیمز، که در آن موقع تنها شانزده سال داشت، واگذار کنند. جواب کامل و اقناع کننده جیمز به مسئله سبب آن شد که هیئت مدیره به ریاضیدان جوان يك جایزه ۵۰۰ دلاری اعطا نماید.

در سال ۱۸۳۱ جیمز وارد کالج سنت جیمز^۱ کیمبریج شد و شش سال بعد رانگلر دوم شد. از سال ۱۸۳۸ تا ۱۸۴۰ به عنوان استاد فلسفه طبیعی [فیزیک] در دانشگاه لندن به خدمت پرداخت و سپس، در سال ۱۸۴۱، سمت استادی ریاضیات. در دانشگاه ویرجینیا^۲ در آمریکا را پذیرفت و این بست را چند ماه بعد به دلیل آنکه وارد نزاعی با دو تن از دانشجویانش شد، ترك گفت. با بازگشت به انگلستان، وی در يك شرکت بیمه مشغول کار شد و در سال ۱۸۵۰ اجازه وکالت دعاوی گرفت. در سال ۱۸۴۶ همکاری خود را با آرثر کیلی شروع کرد.

از سال ۱۸۵۵ تا ۱۸۷۰، سیلوستر استاد ریاضیات آکادمی سلطنتی نظامی^۳ در ولویچ^۴ شد. در سال ۱۸۷۶ وی به عنوان استاد ریاضیات در دانشگاه جان هاپکنیز^۵ در شهر بالتیمور^۶ به آمریکا بازگشت و هفت سال خوش و بسیار پرثمر را در آنجا به سربرد و در سال ۱۸۷۸ مؤسس و سردبیر مجله آمریکایی (ریاضی)^۷ شد. هنگام خدمت در دانشگاه جان هاپکنیز، کیلی را برای ایراد سلسله دروسی درباره توابع آبلی به دانشگاه دعوت کرد، و خود او هم در کلاسهای درس وی حضور یافت. در سال ۱۸۸۴ کرسی ساویلی هندسه را در دانشگاه آکسفورد پذیرفت. در ۱۸۹۷، در هشتاد و سه سالگی در لندن درگذشت.

اولین مقاله های ریاضی سیلوستر در نظریه نوری فرنل^۸ و قضیه استورم^۹ بود. سپس، به تشویق کیلی به نوشتن مقالات مهمی در جبر جدید پرداخت. وی مقالاتی در نظریه حذف، نظریه تبدیل، صورتهای کانونی، درمیانها، حساب صورتهای، نظریه افسراز، نظریه پایاها، روش چیشف در خصوص تعداد اعداد اول در حدود معین، مقادیر و بسط ماتریسها، نظریه معادلات، جبر چندگانیهها، نظریه اعداد، ماشینهای مفصلی، نظریه احتمالات، و عکس سازها نوشت. وی سهم زیادی در واژه شناسی ریاضی داشت و آن قدر واژه ریاضی نو ساخت که او را «حضرت آدم ریاضیات^{۱۰}» نامیده اند.

همانطور که قبلاً ذکر شد، کیلی و سیلوستر از لحاظ خلق و خو، سبک، و دیدگاه نقطه

-
1. St. John's College 2. University of Virginia
 3. Royal Military Academy 4. Woolwich
 5. the Johns Hopkins University 6. Baltimore
 7. American Journal of Mathematics 8. Fresnel
 9. Sturm
 10. the Adam of mathematics

مقابل هم بودند. درحالی که کیلی آرام و خونسرد بود، سیلوستر اغلب آتشی مزاج بود و خیلی زود به هیجان می آمد. تدریس کیلی با اسلوب و تدارك یافته بود؛ در حالی که تدریس سیلوستر بی برنامه و سرزبانی بود. کیلی با دقت و مرتب می نوشت؛ سیلوستر پراکنده و در مواقعی که حالت وجد به او دست می داد، می نوشت. درس کیلی آثار کاملی بودند؛ سیلوستر اغلب ریاضیات را در کلاس درس خلق می کرد. کیلی حافظه ای شگفت انگیز داشت؛ سیلوستر اغلب حتی برخی کشفیات خود را به خاطر نمی آورد. کیلی دستاوردهای ریاضی دیگران را می خواند؛ سیلوستر خواندن کارهای دیگران را کسل کننده می شمرد. کیلی اصول اقلیدس را تحسین می کرد؛ سیلوستر از این اثر بیزار بود. کیلی، گرچه قوی و پر طاقت بود، جثه کوچکی داشت، سیلوستر تنومند، عضلانی، و چارشاه بود.

سیلوستر علاقه ای جاودانی به شعر داشت و با سرودن شعر خود را سرگرم می کرد. شبی، در انستیتوی پی بادی^۱ در بالتیمور، وی شعر روزالیند^۲، سروده خود را می خواند که مشتمل بر ۴۰۰ بیت بود که همه با شیر زن قهرمان «روزالیند» هم قافیه بودند. برای آنکه شعر را در نیمه قطع نکند، وی ابتدا يك ساعت و نیم صرف خواندن پانوشتهای توضیحی کرد، که بسیاری از آنها منجر به توضیحات ارتجالی بیشتر شد. سپس، برای باقی مانده حصار، خود شعر را خواند. در سال ۱۸۷۰ وی کتابچه کوچکی تحت عنوان قوانین شعر^۳ منتشر کرد که ارزش زیادی برای آن قابل بود.

سیلوستر به موسیقی هم علاقمند بود و خواننده دوستگاری با صدایی ظریف بود و زمانی از آهنگساز معروف فرانسوی شارل فرانسوا گونو^۴ درس موسیقی فرا گرفته بود. گاهگاهی درگردهماییهای کاریزی با خواندن آواز دیگران را سرگرم می کرد، و گفته اند که او بیشتر به صدای کنترالتوی بالای خود در موسیقی می بالید تا به کارهای خود در نظریه پایاها در ریاضیات. در پانوشتی بر مقاله اش، «در باره قاعده نیوتن برای یافتن ریشه های موهومی» وی چنین داد سخن می دهد: «آیا نباید موسیقی را ریاضی احساس خواند، و ریاضی را موسیقی عقل؟ روح هر دو یکی است! پس در احساس موسیقیدان، ریاضی جلوه گراست، و در تفکر ریاضیدان موسیقی.»

شاید ذکر این نکته جالب باشد که برجسته ترین شاگرد خصوصی که در روزهای سخت اوایل زندگی سیلوستر پیش او درس می خواند، زن جوانی به نام فلورانس نایتینگل^۵ بود که بعدها به عنوان اصلاحگر روش پرستاری بیمارستانی به شهرت جهانی رسید.

بسیاری از کشفیات زیبای کیلی و سیلوستر را در رساله های ستایش برانگیز جورج-سمن^۶ (۱۸۱۹ - ۱۹۰۴)، رئیس کالج تروینیتی، در دUBLIN، و یکی از بهترین نویسندگان کتابهای پیشرفته درسی زمان خود، می توان یافت.

قسمت عمده کار کیلی و سیلوستر را ریاضیدان با استعداد فرانسوی، شارل ارمیت

-
1. Peabody Institute
 2. Rosalind
 3. The Laws of Verse
 4. Charles Francois Gounod
 5. Florence Nightingale
 6. George Salmon

دنبال کرده آن را بسط داد. شارل ارمیت سهم مهمی در جبر و آنالیز دارد. ارمیت در دیوزا، در لورن، در سال ۱۸۲۲ به دنیا آمد و بعد از تحصیلاتی نامنظم، ابتدا در دیرستان لوئی-لو-گران^۲ و سپس به مدت کوتاهی در اکول پلی تکنیک، در سال ۱۸۴۸ سمت ممتحن پذیرش و طراح سؤال اکول پلی تکنیک شد. وی بعداً به عنوان استاد اکول پلی تکنیک و سوربن^۳ به خدمت پرداخت، و تا زمان بازنشستگی در سال ۱۸۹۷ در مؤسسه اخیر ماند. وی در سال ۱۹۰۱ در پاریس درگذشت.

گرچه ارمیت نویسنده کثیر التالیفی نبود، بیشتر مقاله های وی به مسائل پر اهمیت می پردازند و روشهای او اصالت زیاد و قابلیت کارگیری وسیع دارند. حتی موقعی که در لوئی-لو-گران بود، ارمیت دو مقاله نوشت که یکی از آنها از کیفیتی استثنایی برخوردار بسود و در سالنامه جدید ریاضیات، مجله ای که در ۱۸۴۲ تأسیس شد و به علاقی دانشجویان مدارس عالی اختصاص یافت، برای نشر پذیرفته شد. استاد راهنمای او، پروفیسور لویی پلامیل ریشارد^۴، خود را موظف دید که این نکته را با پدر ارمیت در میان گذارد که شارل «یک لاگرانژ جوان است». تحقیقات ارمیت محدود به جبر و آنالیز نبود. وی درباره نظریه اعداد، ماتریسها، کسرها، مسلسل جبری، پایاها و همپایاها، کوانتیکها، اوکتانها، انتگرالهای معین، نظریه معادلات، توابع بیضوی، توابع آبلی، و نظریه توابع مقالاتی نوشت. در زمینه نظریه توابع وی بزرگترین نویسنده عصر خود بوده است. مجموعه آثار ارمیت، که توسط امیل پیکارد^۵ ویراستاری شده، چهار مجلد را شامل می شود.

دو نتیجه ریاضی مهم منسوب به ارمیت که از همه بیشتر مورد توجه عامه است، راه حل مربوط به سال ۱۸۵۸ او برای معادلات درجه پنجم کلی به کمک توابع بیضوی، و برهان مربوط به سال ۱۸۷۳ او از متعالی بودن عدد e است. توفیق ارمیت در حل معادلات درجه پنجم بعداً منجر به معلوم شدن این حقیقت شد که ریشه ای از معادله درجه n کلی را می توان بر حسب ضرایب معادله و به کمک توابع فوقی بیان کرد، و روشی را که او برای اثبات متعالی بودن e به کار برد در سال ۱۸۸۲، لیندمان^۸ برای اثبات متعالی بودن π به کار گرفت.

ارمیت با نقص عضو در پای راست به دنیا آمد و در سرتاسر عمرش لنگ بود، و برای آمد و شد به عصا نیاز داشت. یکی از محاسن غلیل بودنش این بود که مانع پیوستن به هر نوع خدمت نظام شد. زیان این نقص عضو آن بود که پس از یک سال تحصیل در اکول پلی تکنیک، او را به این دلیل که بنا بر ادعای مقامات مدرسه پای لنگش او را از احراز مشاغل که برای

1. Dieuze 2. Louis – le – Grand lycée 3. Sorbonne

4. Louis Paul Émile Richard 5. Quantics [توابع همکن جبری چند متغیره]

۶. اوکتان Evectant، پادوردا (contravariant)یی است که از عمل یک اوکتور vector بر یک پایا یا چند پایا تشکیل می شود. خود اوکتور عملگری است که از یک کوانتیک تشکیل می شود. —.

7. Émile Picard 8. Lindemann

دانشجویان موفق مدرسه موجود بود باز می‌داشت، کنار گذاشتند. علی‌رغم لنگی‌بایش و مشکلاتی که در ابتدا برای یافتن شغل مناسبی داشت، ارمیت همواره مردی خلیق بود و این امر موجب می‌شد که محبوب همه کسانی باشد که او را می‌شناختند. برخی ریاضیدانان مردان جوانی را که خواهان شناخته شدن هستند، بیدریغ راهنمایی می‌کنند؛ ارمیت را بی‌چون و چرا عالیت‌ترین شخصیتی از این نوع در سرتاسر تاریخ ریاضیات دانسته‌اند. در سال ۱۸۵۶، به دنبال یک بیماری سخت، وی که از پیروان میانه‌روی مذهب لادری بود، توسط کوشی به مذهب رومن کاتولیک گروید.

مسئله وجود ریاضی موضوعی بسیار جدل‌آمیز است. به عنوان مثال، آیا ذوات ریاضی و خواص آنها از پیش در نوعی برزخ سرمدی و ویژه خود وجود دارند، و ما، که سرگشته در چنین عالمی هستیم، تصادفاً آنها را کشف می‌کنیم؟ آیا در این عالم برزخ، میانه‌های یک مثلث همواره یکدیگر را در نقطه‌ای که هر میانه را به سه قسمت می‌کند، قطع می‌کنند، و قطع می‌کرده‌اند، و کسی، احتمالاً در زمانهای گذشته، سرگشته با خیال خود در این عالم برزخ، به این خاصیت قبلاً موجود در باره میانه‌های مثلث برخورد کرده است؟ در این عالم برزخ، خواص قابل ملاحظه بسیاری از اشکال هندسی همواره موجود بوده‌اند، اما هنوز کسی به آن برخورد نکرده، و ممکن است بعد از سالیانی به آن برخورد، یا هیچ وقت به آن برخورد. در این عالم برزخ، اعداد طبیعی و خواص زیبای متعدد آنها همواره وجود داشته‌اند و دارند، اما این خواص تنها زمانی در عالم واقعی انسانها وجود پیدا خواهند کرد که یکی از سرگشتگان در این برزخ با آنان مواجه شود.

فیثاغورس و ریاضیدانان بسیاری بعد از او این فکر وجود ریاضی را در سر می‌پروردند. ارمیت اعتقاد مسلمی به این سرزمین برزخی وجود ریاضی داشت. در نظر او، اعداد و همه خواص زیبای آنها همواره موجودیتی از آن خود داشته‌اند، و یک کریستوف کلمب ریاضی گاهگاهی تصادفاً به یکی از این خواص قبلاً موجود برمی‌خورد و سپس کشف خود را به جهان‌نیان اعلام می‌دارد.

۱۳-۱۱ آکادمیها، انجمنها، و نشریات ادواری

افزایش فوق‌العاده در فعالیت‌های علمی و ریاضی، در زمانی که هیچ نشریه ادواری موجود نبود، به پیدایش تعدادی محفل بحث و گفتگو منجر گردید که در اوقات منظمی تشکیل می‌شدند. برخی از این گروه‌ها سرانجام در قالب آکادمیها تبلور یافتند، و اولین آنها در سال ۱۵۶۵ در ناپل بود، که بعد از آن آکادمی ملی لینچی^۱ در سال ۱۶۵۳ در رم به وجود آمد. سپس، به تبع از حرکت فعالیت‌های ریاضی به سمت شمال اروپا در قرن هفدهم، انجمن سلطنتی^۲ در

1. Accademia dei lincei

2. Royal Society

سال ۱۶۶۲ در لندن و آکادمی فرانسه^۱ در سال ۱۶۶۶ در پاریس بنا گردیدند. این آکادمیها مراکزی بودند که مقالات پژوهشی رامی شد در آن عرضه کرد و در باب آنها به مباحثه پرداخت.

اما نیاز به نشریات ادواری به منظور اشاعه سریع یافته‌های علمی و ریاضی جدید به طور روزافزونی حس شد، تا اینکه امروزه چنین نشریاتی وسعتی گزاف یافته‌اند. بنا بر حسایی، قبل از سال ۱۷۵۰ تنها ۱۷ نشریه حسابی مقالات ریاضی وجود داشته‌اند، که اولین آنها در سال ۱۶۶۵ منتشر شده بود. در قرن هجدهم، ۲۱۵ نشریه از این قبیل پدیدار شدند، و در قرن نوزدهم، عده مجلات جدید از این دست، ۹۵۰ بود. ولی بسیاری از اینها در اغلب موارد چیز زیادی درباره ریاضیات محض نداشتند. شاید قدیمی ترین مجله موجود، که عمدتاً یا کاملاً^۲ به ریاضیات پیشرفته اختصاص داشت، مجله مددسه پلی تکنیک^۳ باشد، که انتشار آن در سال ۱۷۹۴ شروع شد. تعدادی مجله ریاضیات مقدمانی تر قبلاً^۴ آغاز شده بودند، ولی هدف بسیاری از اینها بیشتر سرگرم کردن مشترکین بامعماها، و مسائل بود تا بالابردن دانش ریاضی. برخی از نشریات ریاضی درجه اول امروزی در طول نیمه اول قرن نوزدهم آغاز به کار کردند. در پیشاپیش آنها مجله آلمانی تحت عنوان مجله ریاضیات محض و کادسته^۵ است، که اولین بار در سال ۱۸۲۶ توسط ا. ل. کرله چاپ شد، و مجله فرانسوی تحت عنوان مجله ریاضیات محض و کادسته^۶ است، که در سال ۱۸۳۶ به سردیری ژ. لیوویل ظاهر گردید. این دو مجله، به یاد بنیانگذاران شان، اغلب مجله کرله^۷ و مجله لیوویل^۸ نامیده می شوند. در انگلستان مجله ریاضی کیمبریج^۹ در سال ۱۸۳۹ بنیان گذاشته شد، از سال ۱۸۴۶ تا ۱۸۵۴ به مجله ریاضی کیمبریج و دویلین^{۱۰} تبدیل شد، و در سال ۱۸۵۵ عنوان مجله فصلنامه ریاضیات محض و کادسته^{۱۱} را یافت. مجله آمریکایی ریاضی^{۱۲} در سال ۱۸۷۸ به سردیری ج. ج. سیلوستر تأسیس شد. اولین نشریات ادواری دائمی که اختصاصاً علاقه دبیران ریاضی را مدنظر داشتند تا تحقیقات ریاضی، عبارتند از آشیو ریاضیات و فیزیک^{۱۳}، تأسیس به سال ۱۸۴۱، و سالنامه جدید ریاضیات^{۱۴}، که یک سال بعد تأسیس شد.

در نیمه دوم قرن نوزدهم، تحول نیرومندی موجب افزایش تعداد مجلات ریاضی درجه اول شد. این تحول عبارت بود از تشکیل تعدادی از انجمنهای ریاضی بزرگ که نشریات

-
1. French Academy
 2. Journal de l'École Polytechnique
 3. Journal für die reine und angewandte Mathematik
 4. Journal de mathématiques pures et appliquées
 5. Crelle's Journal
 6. Liouville's Journal
 7. Cambridge Mathematical Journal
 8. Cambridge and Dublin Mathematical Journal
 9. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics
 10. American Journal of Mathematics
 11. Archiv der Mathematik und Physik
 12. Nouvelles annales de mathématiques

ادواری به عنوان ارگانهای رسمی از خود داشتند. قدیمیترین این انجمنها، انجمن ریاضی لندن^۱ بود که در سال ۱۸۶۵ سازمان یافت و بلافاصله به انتشار خلاصه مذاکرات^۲ پرداخت. این انجمن به صورت انجمن ملی ریاضی انگلیس درآمد است. هفت سال بعد، انجمن ریاضی فرانسه^۳ در پاریس تأسیس شد، و مجله رسمی آن به بولتن^۴ معروف است. در ایتالیا، در سال ۱۸۸۴، انجمن ریاضی محفل ریاضی پالرمو^۵ سازمان داده شد، و سه سال بعد به انتشار خلاصه گزارشها^۶ پرداخت. در همین اوان انجمن ریاضی ادینبورگ^۷ در اسکاتلند بنیانگذاری شد، و از آن به بعد خلاصه مذاکرات خود را حفظ نموده است. انجمن آمریکایی ریاضی^۸، تحت نام دیگری، در سال ۱۸۸۸ سازماندهی شد، و به نشر بولتن خود، و سپس، در سال ۱۹۰۰ به نشر گزینهای^۹ و در همین اواخر، در سال ۱۹۵۰، به نشر خلاصه مذاکرات پرداخت. آلمان آخرین کشور عمده از نظر ریاضی بود که به سازماندهی يك انجمن ریاضی اقدام کرد، ولی در سال ۱۸۹۰، اتحادیه ریاضیدانان آلمانی^{۱۰} سازمان داده شد، که در سال ۱۸۹۲، شروع به نشر گزارش سالانه^{۱۱} کرد. مجله اخیر تعدادی گزارش جامع درباره پیشرفتهای نوین در زمینه ریاضیات در برداشت، چنین گزارشهایی بعضاً به چندین صد صفحه بالغ می شد. این گزارشها را می توان به عنوان پیشاهنگان دائرة المعارفهای بزرگ ریاضی ادوار بعد تلقی کرد. مجلات ریاضی بسیار عالی اتحاد شوروی را، گرچه منشأ جدیدتری دارند، نباید نادیده گرفت.

امروزه تقریباً هر کشوری انجمن ریاضی مختص به خود را دارد، و بسیاری از آنها مجامع دیگری دارند که به سطوح مختلف تعلیم ریاضیات اختصاص دارند. این انجمنها و مجامع به عوامل نیرومندی در سازماندهی و پیشرفت فعالیتهای تحقیق در ریاضیات، و در اصلاح روشهای تدریس این موضوع تبدیل شده اند. به طور کلی، هر يك از این انجمنها و مجامع سرپرستی انتشار حداقل يك مجله را به عهده دارد.

با افزایش فوق العاده در تخصصی شدن ریاضیات در قرن بیستم، تعداد کثیری مجله ریاضی جدید پدیدار شده اند که به زمینه های بسیار محدود این موضوع اختصاص یافته اند. مجله نقد ریاضی^{۱۲}، که توسط گروههای ریاضی در آمریکا و در خارج سازمان یافته است، برای محققین بسیار ارزشمند است. این مجله در سال ۱۹۴۰ پدید آمد و شامل چکیده ها و نقد ادبیات ریاضی میباشد.

-
1. London Mathematical Society	2. Proceedings
3. Société Mathématique de France	4. Bulletin
5. Circolo Matematico di Palermo	6. Rendiconti
7. Edinburgh Mathematical Society	
8. American Mathematical Society	9. Transactions
10. Deutsche Mathematiker - Vereinigung	11. Jahresbericht
12. Mathematical Review	

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱.۱۳ قضیه اساسی جبر

با استفاده از روشی که گاوس در اولین برهانش برای قضیه اساسی جبر به کار برد، نشان دهید که

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & \text{معادله } z^2 - 4z = 0 \text{ يك ریشه مختلط دارد.} \\ \text{(ب)} \quad & \text{معادله } z^2 + 2iz + i = 0 \text{ يك ریشه مختلط دارد.} \end{aligned}$$

۲.۱۳ خواص اساسی همنهشتی

در اولین فصل تحقیقات حسابی، گاوس تعریف و نماد زیر را (که در اینجا کمی مختصر شده) می‌دهد: دو عدد a و b را همنهشت به‌هنگ n (که در آن n عدد صحیح مثبتی است) نامند و با

$$a \equiv b \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n)$$

نشان می‌دهند اگر فقط اگر n تفاضل $a-b$ را عا کند. گاوس سپس بسط جبر رابطه همنهشتی را ادامه می‌دهد، که خواص مشترك زیادی با جبر رابطه تساوی معمولی دارد، ولی تفاوت‌های زیادی نیز با آن دارد. اگر n عدد صحیح و مثبت ثابتی باشد و a, b, c, d اعداد صحیح دلخواه باشند، نشان دهید که

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & a \equiv a \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n) \quad (\text{خاصیت انعکاسی}). \\ \text{(ب)} \quad & a \equiv b \pmod{n}, \text{ آنگاه } b \equiv a \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n) \quad (\text{خاصیت تقارنی}). \\ \text{(ج)} \quad & \text{اگر } a \equiv b \pmod{n} \text{ و } b \equiv c \pmod{n}, \text{ آنگاه } a \equiv c \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n) \quad (\text{خاصیت تعدی}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(د)} \quad & \text{اگر } a \equiv b \pmod{n} \text{ و } c \equiv d \pmod{n}, \text{ آنگاه } a+c \equiv b+d \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n) \text{ و } ac \equiv bd \pmod{n}. \\ \text{(ه)} \quad & \text{اگر } a \equiv b \pmod{n}, \text{ آنگاه } a+c \equiv b+c \pmod{n} \text{ و } ac \equiv bc \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(و)} \quad & \text{اگر } a \equiv b \pmod{n}, \text{ آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت } k \\ & a^k \equiv b^k \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ز)} \quad & \text{اگر } ca \equiv cb \pmod{n}, \text{ آنگاه } a \equiv b \pmod{n/d} \quad (\text{به هنگ } n/d), \text{ که در آن } d \\ & \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترك } c \text{ و } n \text{ است.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ح)} \quad & \text{اگر } ca \equiv cb \pmod{n} \text{ و } c \text{ و } n \text{ متباین باشند، آنگاه } a \equiv b \pmod{n}. \\ \text{(ط)} \quad & \text{اگر } ca \equiv cb \pmod{p}, \text{ که در آن } p \text{ عدد اولی است و } c \text{ را عا نمی‌کند،} \\ & \text{آنگاه } a \equiv b \pmod{p} \quad (\text{به هنگ } p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ی)} \quad & \text{اگر } ab \equiv 0 \pmod{n}, \text{ و اگر } a \text{ و } b \text{ متباین باشند، آنگاه } a \equiv 0 \pmod{n} \text{ یا } b \equiv 0 \pmod{n} \quad (\text{به هنگ } n). \end{aligned}$$

(ک) اگر a نسبت به n اول باشد، آنگاه همبستگی خطی (به هنگ n) $ax \equiv b$ تنها يك جواب مثبت x ناييستر از n دارد.

۳۰۱۳ گاوس و اعداد

(الف) اساساً با استفاده از روش گاوس، در دوران شاگرد مدرسه بودنش، مجموع جمله يك تصاعد حسابي را كه جمله اول آن a و جمله آخر آن l است، پيدا كنيد.

(ب) با اختيار 0 به عنوان اولين عدد مثلي، هريك از اعداد طبيعي از ۱ تا ۱۰۰ را به صورت مجموع سه عدد مثلي بيان كنيد.

(ج) با توجه به قانون تقابل مربعي، نشان دهيد كه اگر p و q اعداد اول متمايزي باشند، آنگاه $(p|q) = -(q|p)$ ، اگر فقط اگر (به هنگ ۴) $p \equiv q \equiv 3$.

۴۰۱۳ سريهای فوريه

با فرض اينكه از سري مثلثاتي بخش ۱۳-۲ بتوان جمله به جمله از $-\pi$ تا π انتگرال گرفت، مي توان نشان داد كه اگر تابعي مانند $f(x)$ را بتوان به كمك يك سري نمايش داد، در اين صورت ضرايب سري چنين اند

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned} \quad (n \geq 0)$$

(الف) نشان دهيد كه $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$ وقتي $n \neq 0$.

(ب) نشان دهيد كه سري فوريه براي تابع $f(x)$ كه با تعريف زير

$$\begin{aligned} f(x) &= 2, & -\pi < x < 0 \\ f(x) &= 1, & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

داده مي شود، به صورت زير است

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

(ج) با قرار دادن $x = \pi/2$ در سري فوريه قسمت (ب)، رابطه زير را به دست آوريد

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(د) نشان دهید که تابع قسمت (ب) را می‌توان در برد داده شده توسط معادله واحد زیر نشان داد

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2|x|}.$$

۵.۱۳ کوشی و سریهای نامتناهی

(الف) با استفاده از آزمون نسبت کوشی، همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را ثابت کنید.

$$۱. \quad ۱ + ۱/۲! + ۱/۳! + \dots$$

$$۲. \quad ۱/۵ - ۲/۵^2 + ۳/۵^3 - \dots$$

$$۳. \quad ۱ + ۲^2/۲! + ۳^3/۳! + \dots$$

(ب) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون ریشه کوشی ثابت کنید.

$$۱. \quad |\sin \alpha|/۲ + |\sin^2 \alpha|/۲^2 + |\sin^3 \alpha|/۲^3 + \dots$$

$$۲. \quad ۲|\sin \alpha| + ۲^2|\sin^2 \alpha| + ۲^3|\sin^3 \alpha| + \dots$$

(ج) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون انتگرال کوشی ثابت کنید.

$$۱. \quad ۱/e + ۲/e^2 + ۳/e^3 + \dots$$

$$۲. \quad ۱/(۲ \ln ۲) + ۱/(۳ \ln ۳) + ۱/(۴ \ln ۴) + \dots$$

۶.۱۳ نظریه گروهها

يك گروه مجموعه‌ای ناتهی مانند G از عناصر است که بر روی آن يك عمل دوتایی مانند * تعریف شده و در اصول زیر صدق می‌کند:

$$\text{گک ۱: به ازای هر } a, b, c \text{ در } G, (a*b)*c = a*(b*c).$$

$$\text{گک ۲: عنصری مانند } i \text{ از } G \text{ وجود دارد به طوری که، به ازای هر } a \text{ در } G, a*i = a.$$

(عنصر i همانی گروه نامیده می‌شود.)

$$\text{گک ۳: به ازای هر عنصر مانند } a \text{ از } G \text{ عنصری مانند } a^{-1} \text{ از } G \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$a*a^{-1} = i \quad (a^{-1} \text{ عنصر معکوس } a \text{ نامیده می‌شود}).$$

قضایای زیر درباره گروه را ثابت کنید.

$$\text{(الف) اگر } a, b, c \text{ عضو } G \text{ باشند و } a*b = b*c, \text{ آنگاه } a = b.$$

- (ب) به ازای هر a در G ، $i*a = a*i$ ،
 (ج) یک گروه دارای عنصر همانی یکتایی است.
 (د) به ازای هر a از G ، $a^{-1}*a = a*a^{-1}$ ،
 (ه) اگر a, b, c در G باشند و $c*a = c*b$ ، آنگاه $a = b$ ،
 (و) هر عنصر یک گروه عنصر معکوس یکتایی دارد.
 (ز) اگر a در G باشد، آنگاه $(a^{-1})^{-1} = a$ ،
 (ح) اگر a و b در G باشند، آنگاه عناصری مانند x و y از G موجودند به طوری که
 $y*a = b$ و $a*x = b$

۷.۱۳ مثالهایی از گروهها

- نشان دهید که هر یک از دستگاهاهای زیر یک گروه است.
 (الف) مجموعه اعداد صحیح تحت عمل جمع معمولی.
 (ب) مجموعه همه اعداد گویای ناصفر تحت عمل ضرب معمولی.
 (ج) مجموعه همه انتقالهای

$$T: \begin{aligned} x' &= x + h, \\ y' &= y + k, \end{aligned}$$

- صفحه دکارتی، که در آن h و k اعداد حقیقی هستند، و $T_1 * T_2$ نتیجه انجام اولین انتقال یعنی T_1 و سپس انتقال T_2 است.
 (د) چهار عدد $1, -1, i, -i$ (که در آن $i^2 = -1$) تحت عمل ضرب معمولی.
 (ه) چهار عدد صحیح $1, 2, 3, 4$ تحت ضرب به هنگ ۵.
 (و) شش عبارت

$$r, 1/r, 1-r, 1/(1-r), (r-1)/r, r/(r-1),$$

- که در آن $a*b$ معرف نتیجه قرار دادن عبارت b به جای r در عبارت a است. (این گروه، گروه نسبت خاجی نامیده می شود.)

۸.۱۳ گروههای آبلی

گروهی که در اصل موضوع اضافی؛

گ ۴: اگر a و b در G باشند، آنگاه $a*b = b*a$ ،

صدق کنند، یک گروه جابجایی یا آبلی نامیده می شود. کدامیک از گروههای مطالعه مسئله ای ۷.۱۳ آبلی اند.

۹.۱۳ چهارضلعیهای ساکری

يك چهارضلعی ساکری چهار ضلعی است مانند $ABCD$ که در آن ساقهای AD و BC برابرند و زوایای A و B قائمه‌اند. ضلع AB به قاعده، ضلع مقابل، DC ، به تارک، و زوایای D و C به زوایای تارک معروف‌اند. به کمک قضایای تساوی ساده (که مستلزم اصل توازی نیستند)، روابط زیر را ثابت کنید:

(الف) زوایای تارک يك چهارضلعی ساکری برابرند.

(ب) خطی که اوساط قاعده و تارک يك چهارضلعی ساکری را به هم وصل می‌کند بر هر دوی آنها عمود است.

(ج) عمودهایی که از دوسر قاعده مثلثی بر خطی که اوساط دوساق آن را به هم وصل می‌کند، وارد شوند يك چهار ضلعی ساکری تشکیل می‌دهند.

(د) خطی که اوساط دوساق برابر يك چهارضلعی ساکری را به هم وصل می‌کند بر خط واصل بین اوساط قاعده و تارک آن عمود است.

۱۰.۱۳ فرض زاویه حاده

فرض زاویه حاده می‌پذیرد که زوایای برابر تارک در يك چهارضلعی ساکری حاده‌اند، یا اینکه زاویه چهارم يك چهار ضلعی لامبرت حاده است. در زیر فرض زاویه حاده را می‌پذیریم.

(الف) فرض کنید ABC يك مثلث قائم‌الزاویه دلخواه و M وسط وتر AB باشد. در A زاویه BAD را برابر زاویه ABC [در خارج مثلث] بسازید. از M عمود MP را بر CB رسم کنید. بر AD ، AQ را برابر PB جدا کنید و MQ را رسم نمایید. ثابت کنید که مثلثهای AQM و BPM برابرند، بدین ترتیب نشان می‌دهید که زاویه AQM قائمه است و نقاط Q, M, P همخط هستند. آنگاه $ACPQ$ يك چهارضلعی لامبرت باز زاویه حاده A است. حال نشان دهید که، تحت فرض زاویه حاده، مجموع زوایای هر مثلث قائم‌الزاویه کمتر از دو قائمه است.

(ب) فرض کنید زاویه A از مثلث ABC کوچکتر از زاویه B یا زاویه C نباشد. ارتفاع مار بر A را رسم کنید و، به کمک (الف)، نشان دهید که، تحت فرض زاویه حاده، مجموع زوایای هر مثلث کمتر از دو قائمه است. تفاضل بین دو قائمه و مجموع زوایای يك مثلث به کاستی مثلث معروف است.

(ج) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را در نظر بگیرید که در آن زوایای متناظر برابر باشند. اگر $A'B' = AB$ ، آنگاه این مثلثها همنهشت‌اند. فرض کنید $A'B' < AB$. بر AB ، AD را برابر $A'B'$ ، و بر AC ، AE را برابر $A'C'$ جدا کنید. آنگاه مثلثهای ADE و $A'B'C'$ مساوی‌اند. نشان دهید که E نمی‌تواند روی C بیفتد، چون در این صورت زاویه BCA بزرگتر از زاویه DEA خواهد بود. همچنین نشان دهید که E نمی‌تواند روی امتداد AC قرار گیرد، چون در این صورت DE ، BC را در نقطه‌ای مانند F قطع خواهد کرد و مجموع زوایای مثلث FCE بزرگتر از دو قائمه خواهد شد. بنابراین، E بین A و C قرار دارد،

و $BCED$ يك چهار ضلعی محدب است. نشان دهید که مجموع زوایای این چهار ضلعی برابر با چهار زاویه قائمه است. اما تحت فرض زاویه حاده این امر غیر ممکن است. بنابراین نتیجه می شود که نمی توانیم داشته باشیم $AB < A'B'$ و تحت فرض زاویه حاده، دو مثلث همنهشت اند اگر سه زاویه یکی برابر سه زاویه دیگری باشد. به عبارت دیگر، در هندسه هذلولوی شکلهای متشابه نابرابر موجود نیستند.

(د) پاره خطی که رأس مثلثی را به نقطه ای واقع بر ضلع مقابل وصل می کند، يك مورب نامیده می شود. يك مورب مثلث را به دو مثلث جزء تقسیم می کند، که هر يك از آنها را می توان به طور مشابه مجدداً به دو جزء تقسیم نمود، و همینطور الی آخر. نشان دهید که اگر مثلثی توسط موربها به تعدادی متناهی از مثلثهای جزء افراز شود کاستی مثلث اصلی برابر است با مجموع کاستیهای مثلثهای افرازی.

۱۱.۱۳ يك مدل اقلیدسی برای هندسه هذلولوی

دایره ثابتی مانند Σ در صفحه اقلیدسی اختیار کنید و درون Σ را صفحه هذلولوی، يك نقطه اقلیدسی درون Σ را يك «نقطه» از صفحه هذلولوی و قسمتی از يك «خط» اقلیدسی واقع در درون Σ را يك خط هذلولوی، تعبیر کنید. در این مدل، صحت گزاره های زیر را تحقیق کنید.

(الف) دو «نقطه» يك و فقط يك «خط» را معین می کنند.

(ب) دو «خط» متمایز حداکثر در يك «نقطه» یکدیگر را تلاقی می کنند.

(ج) اگر يك «خط» مانند l و يك «نقطه» مانند P غیر واقع بر l مفروض باشند، بر P می توان «خطوط» بیشماري رسم کرد که «خط» l را تلاقی نکنند.

(د) فرض کنید خط اقلیدسی که توسط «نقاط» P و Q معین شده است، Σ را در T و S به ترتیب S, P, Q, T قطع کند. در این صورت ما «فاصله» هذلولوی از P تا Q را به عنوان $\log [(QS)(PT)/(PS)(QT)]$ تعبیر می کنیم. اگر P, Q, R سه «نقطه» بر يك «خط» باشند، نشان دهید که

$$PQ \text{ «فاصله»} + QR \text{ «فاصله»} = PR \text{ «فاصله»}$$

(ه) فرض کنید «نقطه» P ثابت باشد و نقطه Q روی «خط» ثابتی مار بر P به سمت T حرکت کند. نشان دهید که $\infty \rightarrow PQ \text{ «فاصله»}$.

این مدل توسط فلیکس کلاین ابداع شد. با تعابیر بالا، همراه با تعبیر مناسبی از «زاویه» بین خطوط، می توان نشان داد که همه اصول موضوعه هندسه مسطحه اقلیدسی، به جز اصل توازی، در هندسه این مدل گزاره های درست اند. در قسمت (ج)، دیده ایم که اصل توازی اقلیدسی چنان گزاره ای نیست، بلکه به جای آن اصل توازی لباچفسکییی برقرار است. بدین ترتیب این مدل ثابت می کند که اصل توازی اقلیدسی را نمی توان از دیگر اصول موضوعه هندسه اقلیدسی استنتاج کرد، زیرا اگر این اصل از دیگر اصول موضوعه هندسه اقلیدسی لازم می آمد، می بایست گزاره درستی در هندسه این مدل باشد.

۱۲.۱۳ هندسه نااقلیدسی و فضای مادی

به علت پیچش به ظاهر ناگشودنی فضا و ماده شاید تعیین اقلیدسی یا نااقلیدسی بودن فضای مادی، به کمک روشهای نجومی محال باشد. چون همه اندازه گیریهام متضمن فرضهای فیزیکی و هم متضمن فرضهای هندسی هستند، هر نتیجه مشهود را می توان صرفاً با تغییرات جبران کننده مناسبی در چگونگیهای فضا و ماده که پذیرفته ایم، بیان کرد. مثلاً، کاملاً ممکن است که اختلاف مشهود در مجموع زوایای يك مثلث را بتوان با حفظ فرضهای هندسه اقلیدسی ولی در عین حال با اصلاح برخی قوانین فیزیکی، نظیر برخی قوانین نورشناسی، توضیح داد. و نیز، فقدان هر گونه اختلافی از این دست، ممکن است با اصول يك هندسه نا اقلیدسی، همراه با برخی جرح و تعدیلهای مناسب در مفروضات ما درباره ماده سازگار باشد. برای اساس، هانری پوانکاره مدعی بود که این سؤال که کدام هندسه درست است، سؤالی است بیمعنی. برای روشن نمودن این دیدگاه، پوانکاره يك جهان انگاری مانند Σ طرح کرد که درون کره‌ای به شعاع R را که قوانین فیزیکی زیر در آن برقرارند، اشغال می کند:

۱. در هر نقطه P از Σ دمای مطلق با $T = k(R^2 - r^2)$ داده می شود، که در آن r فاصله P از مرکز Σ و k يك ثابت است.

۲. ابعاد خطی يك جسم مادی مستقیماً با دمای مطلق محل استقرار جسم تغییر می کنند.

۳. همه اجسام مادی در Σ بلافاصله دمای محل استقرارشان را به خود می گیرند.

(الف) نشان دهید که برای یکی از ساکنین Σ امکان آن هست که از این سه قانون فیزیکی حاکم در جهان خود کاملاً بیخبر باشد.

(ب) نشان دهید که فرد ساکن Σ بر اساس اینکه بعد از برداشتن N گام متناهی، هر اندازه که N بزرگ اختیار شود، هرگز به کرانه‌ای نخواهد رسید؛ حس خواهد کرد که جهان او از نظر وسعت لایتنه‌ای است.

(ج) نشان دهید که ژئودزیکیهای Σ منحنیهایی هستند که انتهای آنها به سمت مرکز Σ متوجه است. در واقع، می توان نشان داد که ژئودزیک مار بر دو نقطه A و B از Σ قوسی از يك دایره مار بر A و B است که صفحه آن، کره محیطی Σ را به طور عمودی قطع می کند. (د) با فرض اینکه نور در امتداد ژئودزیکیهای Σ سیر می کند، قانون فیزیکی دیگری را بر جهان Σ اعمال می کنیم. این شرط را می توان با پر کردن Σ با گازی که شاخص انکسار مناسبی در هر نقطه Σ داشته باشد، تحقق بخشید. حال نشان دهید که ژئودزیکیهای Σ به نظر ساکنین Σ مستقیم جلوه خواهند کرد.

(ه) نشان دهید که در هندسه ژئودزیکیها در Σ اصل توازی لباچفسکیبی برقرار است، به طوری که ساکنین Σ تصور خواهند کرد که در يك دنیای نااقلیدسی زندگی می کنند. در اینجا ما قطعه‌ای از فضای معمولی، و با فرض اقلیدسی داریم که، به دلیل قوانین فیزیکی متفاوت، نااقلیدسی به نظر می رسد.

۱۳.۱۳ دستگاههایی با ساختار جبری مشترك

نشان دهید که هر يك از مجموعه‌های زیر با تعریفهای همراه از اعمال $+$ و $\times$ دارای پنج

خاصیت اساسی داده شده در ابتدای بخش ۱۳-۷ هستند.

(الف) مجموعه کلیه اعداد صحیح مثبت، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(ب) مجموعه اعداد گویا، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(ج) مجموعه کلیه اعداد حقیقی، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(د) مجموعه همه اعداد حقیقی به شکل $m + n\sqrt{2}$ ، که در آن m و n اعداد صحیح اند، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(ه) مجموعه اعداد صحیح گاوسی (اعداد مختلط $m + in$ ، که در آن m و n اعداد صحیح معمولی اند و $i = \sqrt{-1}$)، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی دارند.

(و) مجموعه همه زوجهای مرتب اعداد صحیح، که در آن $(a, b) + (c, d) = (a+b, c+d)$ و $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$.

(ز) مجموعه زوجهای مرتب از اعداد صحیح، که در آن $(a, b) + (c, d) = (ad+bc, bd)$ و $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$.

(ح) مجموعه کلیه زوجهای مرتب از اعداد صحیح، که در آن $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ و $(a, b) \times (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$.

(ط) مجموعه کلیه چندجمله‌ایها بر حسب متغیر حقیقی x ، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی چندجمله‌ایها دارند.

(ی) مجموعه کلیه توابع پیوسته حقیقی از متغیر x که بر بازه بسته $0 \leq x \leq 1$ تعریف شده‌اند، با اعمال $+$ و $\times$ که دلالت بر جمع و ضرب معمولی چنان توابعی دارند.

(ک) مجموعه متشکل از فقط دو عنصر m و n ، که در آن تعریف می‌کنیم

$$m + m = m, \quad m \times m = m,$$

$$m + n = n + m = n, \quad m \times n = n \times m = m,$$

$$n + n = m, \quad n \times n = n.$$

(ل) مجموعه کلیه مجموعه‌های نقطه‌ای صفحه، با $a+b$ که دلالت بر اجتماع a و b دارد و $a \times b$ دلالت بر اشتراك مجموعه‌های a و b دارد. به عنوان مجموعه نقطه‌ای خاصی از صفحه ما يك مجموعه آرمانی، مجموعه تهی، را معرفی می‌کنیم که نقطه‌ای در خود ندارد.

۱۴.۱۳ قوانین جبری

عضو سمت چپ هر يك از تساویهای زیر را با استفاده متوالی از قانون شرکت پذیری، جابجایی، یا توزیع پذیری به عضو طرف راست تبدیل کنید. به تبع از رسوم، در اینجا گاهی ضرب با نقطه (.) و گاهی تنها با کنار هم گذاشتن عاملها نشان داده شده‌اند.

$$(الف) \quad 5(6+3) = 30.5 + 5.6$$

$$(ب) \quad 5(6.3) = (30.5)6$$

$$(ج) \quad 4.6 + 5.4 = 4(5+6)$$

$$(د) \quad a[b+(c+d)] = (ab+ac)+ad$$

$$(ه) \quad a[b(cd)] = (bc)(ad)$$

$$(و) \quad a[b(cd)] = (cd)(ab)$$

$$(ز) \quad (ad+ca)+ab = a[(b+c)+d]$$

$$(ح) \quad a+[b+(c+d)] = [(a+b)+c]+d$$

۱۵.۱۳ مطالب بیشتری در باره قوانین جبری

تعیین کنید که آیا اعمال دوتایی * و | در زیر، که برای اعداد صحیح مثبت تعریف شده‌اند، از قوانین جابجایی و شرکتپذیری تبعیت می‌کنند، و آیا عمل | نسبت به عمل * شرکتپذیر است.

$$(الف) \quad a|b = 2ab, \quad a*b = a+2b$$

$$(ب) \quad a|b = ab^2, \quad a*b = a+b^2$$

$$(ج) \quad a|b = a^2b^2, \quad a*b = a^2+b^2$$

$$(د) \quad a|b = b, \quad a*b = a^b$$

۱۶.۱۳ اعداد مختلط به عنوان زوج مرتب از اعداد حقیقی

در بحث همیلتن از اعداد مختلط به عنوان زوجهای مرتب اعداد حقیقی، نشان دهید که

$$(الف) \quad \text{جمع جابجایی و شرکتپذیر است.}$$

$$(ب) \quad \text{ضرب جابجایی و شرکتپذیر است.}$$

$$(ج) \quad \text{ضرب نسبت به جمع توزیعپذیر است.}$$

$$(د) \quad (a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0)$$

$$(ه) \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

$$(و) \quad (0, b) = (b, 0)(0, 1)$$

$$(ز) \quad (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

۱۷.۱۳ کواترنیونها

$$(الف) \quad \text{دو کواترنیون } (1, 0, -2, 3) \text{ و } (1, 1, 2, -2) \text{ را با هم جمع کنید.}$$

$$(ب) \quad \text{دو کواترنیون } (1, 0, -2, 3) \text{ و } (1, 1, 2, -2) \text{ را، در هر دو ترتیب، در}$$

هم ضرب کنید.

$$(ج) \quad \text{نشان دهید که جمع کواترنیونها جابجایی و شرکتپذیر است.}$$

$$(د) \quad \text{نشان دهید که ضرب کواترنیونها شرکتپذیر و نسبت به جمع توزیعپذیر است.}$$

(ه) نشان دهید که اعداد حقیقی در داخل کوواترینیونها نشانده شده‌اند.

(و) نشان دهید که اعداد مختلط در داخل کوواترینیونها نشانده شده‌اند.

(ز) دو کوواترینیون $a+bi+cj+dk$ و $e+fi+gj+hk$ را نظیر چند جمله‌ایهایی بر حسب k, i, j, k در هم ضرب و به کمک جدول ضرب واحدهای کوواترینیونی تحقیق کنید که در تعریف حاصلضرب دو کوواترینیون صدق می‌کند.

۱۸۰۱۳ ماتریسها

(الف) اگر

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, & x'' &= ex' + fy', \\y' &= cx + dy, & y'' &= gx' + hy',\end{aligned}$$

نشان دهید که

$$\begin{aligned}x'' &= (ea + fc)x + (eb + fd)y, \\y'' &= (ga + hc)x + (gb + hd)y.\end{aligned}$$

(ب) با مفروض بودن ماتریسهای

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A^2 و $BA, AB, A+B$ را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که جمع ماتریسها جابجایی و شرکتپذیر است.

(د) نشان دهید که ضرب ماتریسها شرکتپذیر و نسبت به جمع توزیعپذیر است.

(ه) نشان دهید که درجبر ماتریسها، ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حکم واحد را دارد، و ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ حکم صفر را.}$$

(و) نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

کدام دو قانون آشنای جبر معمولی در اینجا نقض شده‌اند؟

(ز) نشان دهید که ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ دارای جذر نیست.

(ح) نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی مانند k ، داریم

$$\begin{bmatrix} k & 1+k \\ 1-k & -k \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

که بنا بر آن ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بی‌نهایت جذر دارد.

(ط) نشان دهید که می‌توان اعداد مختلط را به صورت ماتریسهای به شکل

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

که در آن a و b حقیقی‌اند، تعریف کرد، به شرطی که جمع و ضرب، همان جمع و ضرب ماتریسها باشد.

(ی) نشان دهید که کوآترنیونهای حقیقی را می‌توان به صورت ماتریسهای به شکل

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix},$$

که در آن a, b, c, d اعداد حقیقی‌اند، و $i^2 = -1$ تعریف کرد، به شرط آنکه از تعریفهای معمولی جمع و ضرب ماتریسها پیروی شود.

۱۹.۱۳ جبرهای ژوردان ولی

اعضای يك جبر (خاص) ژوردان، که در مکانیک کوانتومی از آن استفاده می‌شود، ماتریسهای مربعی هستند که تساوی و جمع در آن مانند جبر ماتریس کیلی تعریف شده‌اند، ولی ضرب دوماتریس A و B به صورت $A * B = (AB + BA) / 2$ تعریف می‌شود، که در آن AB معرف ضرب کیلی دوماتریس A و B است. گرچه در این جبر، ضرب شرکتپذیر نیست ولی آشکارا جابجایی است. تفاوت جبر ژوردان، مذکور در فوق، با جبر لی در این است که در جبر اخیر حاصلضرب دوماتریس A و B با $A \circ B = AB - BA$ تعریف می‌شود، که در آن AB معرف حاصلضرب کیلی ماتریسهای A و B است. در این جبر، ضرب نه شرکتپذیر است و نه جابجایی.

(الف) با اختیار

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به عنوان اعضای يك جبر ژوردان، $A+B$ ، $A*B$ ، $B*A$ ، $A*(B*C)$ ، و $(A*B)*C$ را محاسبه کنید.

(ب) با اختیار A, B, C از قسمت (الف) به عنوان اعضای يك جبر لی، $A+B$ ،
 $A \circ B$ ، $B \circ A$ ، $A \circ (B \circ C)$ ، $A \circ (C \circ B)$ و $(A \circ B) \circ C$ را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که روابط زیر در يك جبر ژوردان برقرارند.

$$A * B = B * A : ۱$$

$$k(A * B) = A * (kB) = k(A * B) : ۲$$

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C) : ۳$$

$$(B + C) * A = (B * A) + (C * A) : ۴$$

$$A^2 = A * A = AA \text{ که در آن } A * (B * A^2) = (A * B) * A^2 : ۵$$

نام جبر ژوردان توسط آ. آ. آلبرت^۱ در سال ۱۹۴۶ معمول شد، به این دلیل که مطالعه این جبرها در سال ۱۹۳۳ توسط پاسکوال یوردان^۲ فیزیکی دان، یکی از بنیانگذاران مکانیک کوانتوم نوین، آغاز شد. رابطه ۵ قانون شرکت پذیری خاصی برای جبرهای ژوردان است.

(د) نشان دهید که رابطه های زیر در يك جبر لی برقرارند.

$$A \circ B = -(B \circ A) : ۱$$

$$k(A \circ B) = B \circ (kA) = k(A \circ B) \text{ که } k \text{ عدد دلخواهی است} : ۲$$

$$A \circ (B + C) = (A \circ B) + (A \circ C) : ۳$$

$$(B + C) \circ A = (B \circ A) + (C \circ A) : ۴$$

$$A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0 : ۵$$

جبرهای لی را به یاد ریاضیدان نروژی، ماریوس سوفوس لی^۳ (۱۸۴۲-۱۸۹۹) نامگذاری کرده اند که کار آغازین در گروه های پیوسته را انجام داد. رابطه ل ۵ به اتحاد ژاکوبی در جبرهای لی موسوم است.
 (ه) نشان دهید که

$$A \circ (B * B) = 2[(A \circ B) * B],$$

$$A \circ (B \circ C) = 2[A * B] * C - (A * C) * B,$$

$$AB = (A * B) + (A \circ B) / 2.$$

(و) ترانهادۀ A' يك ماتریس مربع مانند A ماتریسی است که سطرهای متوالی آن، ستونهای متوالی A است. ماتریس A را متقارن چپ نامند اگر $A' = -A$. نشان دهید که ل ۶: اگر A و B متقارن چپ باشد، در این صورت $A \circ B$ متقارن چپ است.
 قضیه زیبایی در بارۀ ماتریسهای متقارن چپ در سال ۱۸۲۷ توسط ژاکوبی ثابت شد. وی نشان داد که در مینان يك ماتریس متقارن چپ از مرتبۀ فرد برابر صفر است.

کوآترنیونهای همیلتن و، تا حدودی، حساب توسیع گراسمن توسط خالقین آنها به عنوان ابزارهای ریاضی جهت کاوش در فضای مادی ابداع شدند. این ابزارها پیچیده‌تر از آن از کار درآمدند که به سرعت بتوان بر آنها تسلط پیدا کرد و به آسانی آنها را به کار برد، ولی از آنها موضوع آنالیز برداری که خیلی ساده‌تر قابل آموختن است و به سهولت می‌توان آن را به کار برد، پدیدار شد. کشف این موضوع را، که هردانشجوی فیزیک مقدماتی به آن برمی‌خورد، اصولاً مدیون فیزیکدان آمریکایی جوسایا ویلارد گیبس^۱ (۱۸۳۹-۱۹۰۳) هستیم. در فیزیک مقدماتی، یک بردار به‌طور نموداری به صورت پاره خط جهت دار، یا پیکانی تلقی می‌شود، و تعاریف زیر را از برابری، جمع، و ضرب این بردارها داریم:

۱. دو بردار مانند ba بایزند اگر و فقط اگر طول یکسان و جهت یکسان داشته باشند.
۲. فرض کنید ba دو بردار دلخواه باشند. بر نقطه‌ای از فضا بردارهای a' و b' را، به ترتیب، برابر با بردارهای ba رسم کنید، و متوازی‌الاضلاع حاصل از a' و b' را کامل کنید. در این صورت مجموع $a+b$ ، از بردارهای ba برداری است که طول و جهت آن، طول و جهت قطری است که بین مبدأ مشترک a' و b' و رأس چهارم متوازی‌الاضلاع رسم می‌شود.
۳. فرض کنید ba دو بردار دلخواه باشند. منظور از حاصلضرب برداری، $a \times b$ این دو بردار، برداری است که طول آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع تعریف (۲) است، و جهت آن جهت حرکت یک بیچ معمولی است وقتی که در امتداد عمود بر a' و b' قرار داده شود و به اندازه زاویه‌ای نایب‌تر از 180° پیچانده شود تا بردار a' بر بردار b' منطبق شود.

(الف) نشان دهید که جمع برداری جابجایی و شرکتپذیر است.

(ب) نشان دهید که ضرب برداری غیر جابجایی و غیر شرکتپذیر است.

(ج) نشان دهید که ضرب برداری نسبت به جمع برداری توزیعپذیر است.

گیبس، که از اهالی نیوهمپتون^۲ بود، ریاضیات و فیزیک را در دانشگاه ییل تحصیل کرد و در سال ۱۸۶۳ دکترای فیزیک دریافت کرد. وی سپس به تحصیلات بیشتری در ریاضیات و فیزیک در پاریس، برلن، و هایدلبرگ پرداخت. در سال ۱۸۷۱ به استادی ریاضیات دانشگاه ییل منصوب شد. به عنوان یک فیزیکدان بسیار خلاق، سهم زیادی به فیزیک ریاضی ایفا کرد. کتاب آنالیز برداری^۳ او در سال ۱۸۸۱ و یک بار دیگر در سال ۱۸۸۴ منتشر شد. در سال ۱۹۰۲ اصول مقدماتی مکانیک آماری^۴ خود را چاپ کرد. هردانشجوی آنالیز همساز با پدیده گیبس^۵ در سری فوریه مواجه می‌شود.

1. Josiah Willard Gibbs

2. New Haven 3. Vector Analysis

4. Elementary Principles of Statistical Mechanics

5. Gibbs' phenomenon

۲۱.۱۳ يك جبر جالب

مجموعه کلیه زوجهای مرتب اعداد حقیقی را در نظر بگیرید و چنین تعریف کنید: (۱)
 $(a, b) = (c, d)$ اگر فقط اگر $a = c$ و $b = d$ ؛ (۲) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ؛
 (۳) $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ ؛ (۴) $k(a, b) = (ka, kb)$.

(الف) نشان دهید که ضرب جابجایی، شرکتپذیر، و نسبت به جمع توزیعپذیر است.

(ب) نشان دهید که حاصلضرب سه عامل یا بیشتر همیشه برابر $(0, 0)$ است.

(ج) يك جدول ضرب برای واحدهای $u = (1, 0)$ و $v = (0, 1)$ درست کنید.

۲۲.۱۳ يك جبر نقطه‌ای

فرض کنید حروف بزرگ P, Q, R ... معرف نقاط صفحه باشند. جمع نقاط P و Q را با
 $P + Q = R$ تعریف کنید، که در آن مثلث PQR يك مثلث متساوی الاضلاع در جهت مخالف
 عقربه‌های ساعت است.

(الف) نشان دهید که جمع نقاط صفحه غیر جابجایی و غیر شرکتپذیر است.

(ب) نشان دهید که اگر $P + Q = R$ ، آنگاه $Q + R = P$.

(ج) اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$1. (P + (P + (P + (P + (P + (P + Q)))))) = Q$$

$$2. P + (P + (P + Q)) = (Q + P) + (P + Q)$$

$$3. (P + Q) + R = (P + (Q + R)) + Q$$

۲۳.۱۳ يك گروه غیر آبدلی نامتناهی

(الف) نشان دهید که مجموعه همه ماتریسهای 2×2 در $\mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

که در آن a, b, c, d اعدادی گویا هستند به طوری که $ad - bc \neq 0$ ، تحت ضرب ماتریس
 کیلی يك گروه تشکیل می‌دهد.

(ب) معکوس A^{-1} از ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید، و نشان دهید که

حاصلضرب AA^{-1} ماتریس همانی است.

۲۴.۱۳ بازی همیلتنی

بازی همیلتنی عبارت است از تعیین مسیری در امتداد یالهای يك دوازده وجهی منتظم که
 يك بار فقط يك بار از هر رأس دوازده وجهی عبور می‌کند. بازی توسط سرویلیام رامزن-
 همیلتن اختراع شد، که او رأسهای دوازده وجهی را با حروفی به نشانه شهرهای مختلف

نشان می‌داد. همیلتن تعدادی مسئله در ارتباط با این بازی مطرح کرد.

۱. اولین مسئله، رفتن «دوردنیا» است. یعنی، با شروع از شهر مفروض، از هر شهر دیگر یک بار و فقط یک بار دیدار کرده به شهر اول برگردید، که در آن مرتبه $n \geq 5$ شهر را می‌توان از قبل معین کرد. همیلتن جوابی برای این مسئله را در گردهمایی سال ۱۸۵۷ انجمن انگلیسی در دوبلین ارائه کرد.

۲. مسئله دیگری را که همیلتن مطرح کرد، مسئله شروع از شهر مفروض آغازین، دیدار از شهرهای معین به ترتیب مشخص، و سپس رفتن به هر شهر دیگر یک بار و فقط یک بار و ختم سفر در یک شهر مفروض دیگر است.

از دانشجو دعوت می‌شود که نظریه بازی همیلتنی را، مثلاً، در مقالات و تفریحات ریاضی، نوشته‌و. و. روزبال، و تجدید نظر ه. س. م. کاکستر بخواند.

عنوان مقاله

۱/۱۳ بزرگترین ریاضیدان قرن نوزدهم.

۲/۱۳ داستانها و حکایات راجع به گاوس.

۳/۱۳ صفحهٔ وسل - آرگاند - گاوس.

۴/۱۳ نفوذ کوشی بر دانشجویان ریاضی امروز.

۵/۱۳ توابع بیضوی - این توابع چیستند و چرا چنین نامگذاری شده‌اند؟

۶/۱۳ موارد اکتشافات مستقل و تقریباً همزمان در هندسه در نیمهٔ اول قرن نوزدهم.

۷/۱۳ دوسرویلیام همیلتن.

۸/۱۳ دمو رگن به عنوان ریاضیدانی که بیشتر از همه ذکر او در بین است.

۹/۱۳ اصل تداوم صورتهای معادل.

۱۰/۱۳ انجمن تحلیلی.

۱۱/۱۳ سیلوستر در آمریکا.

۱۲/۱۳ موسیقی و ریاضیدانان.

۱۳/۱۳ برخی ریاضیدانان اعجوبهٔ قرن نوزدهم.

۱۴/۱۳ برخی ریاضیدانان قرن نوزدهم که دچار مرگ زودرس شدند.

۱۵/۱۳ برخی از ریاضیدانان قرن نوزدهم که اغلب دوبه دو به هم وابسته شده‌اند و علل آن.

۱۶/۱۳ اعجوبه‌های محاسب؛ کولبرن، بیدر، دازه.

۱۷/۱۳ جبر در قرن نوزدهم و این نظر غالب الذکر که بیشتر کشفیات ریاضی به دست مردان

جوان انجام شده است.

۱۸/۱۳ ریاضیدانان کیمبرج در قرن نوزدهم.

۱۹/۱۳ سوفی ژرمن (۱۷۷۶ - ۱۸۳۱).

۲۰/۱۳ نیلس آبل (۱۸۰۲ - ۱۸۲۹).

- ALTSHILLER-COURT, NATHAN, *Modern Pure Solid Geometry*. 2d edition. New York: Chelsea, 1964.
- BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
- BOLYAI, JOHN, "The Science of Absolute Space." Translated by G. B. Halsted, 1895. See BONOLA.
- BONOLA, ROBERTO, *Non-Euclidean Geometry*. Translated by H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955. Containing BOLYAI and LOBACHEVSKY.
- BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949.
- BÜHLER, W. K., *Gauss, A Biographic Study*. New York: Springer-Verlag, 1981.
- BURTON, D. M., *Elementary Number Theory*. Rev. edition. Boston: Allyn and Bacon, 1980.
- CAYLEY, ARTHUR, *Collected Mathematical Papers*. 14 vols. Cambridge: 1889-1898.
- CROWE, M. J., *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1967.
- DE MORGAN, AUGUSTUS, *A Budget of Paradoxes*. 2 vols. in one. New York: Dover, 1954.
- DE MORGAN, SOPHIA ELIZABETH, *Memoir of A. D. M. by His Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters*. London: 1882.
- DUNNINGTON, G. W., *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science: A Study of His Life and Work*. New York: Hafner, 1955.
- EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston: Allyn and Bacon, 1965.
- , *Elementary Matrix Theory*. New York: Dover, 1980.
- , and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- FORDER, H. G., *The Calculus of Extension*. New York: Cambridge University Press, 1941.
- FOURIER, J. B. J., *The Analytical Theory of Heat*. New York: Dover, 1955.
- GANS, DAVID, *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Academic, 1973.
- GAUSS, C. F., *Inaugural Lecture on Astronomy and Papers on the Foundations of Mathematics*. Translated by G. W. Dunnington. Baton Rouge, La: Louisiana State University, 1937.
- , *Theory of the Motion of Heavenly Bodies*. New York: Dover, 1963.
- , *General Investigation of Curved Surfaces*. Translated by Adam Hildebrandt and James Morehead. New York: Raven Press, 1965.
- , *Disquisitiones arithmeticae*. English translation by A. A. Clarke. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1966.
- GIBBS, J. W., and E. B. WILSON, *Vector Analysis*. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1901.
- GRAVES, R. P., *Life of Sir William Rowan Hamilton*. 3 vols. Dublin: Hodges, Figgis, 1882.
- HALL, TORD, *Carl Friedrich Gauss*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.
- HERIVEL, J., *Joseph Fourier, The Man and the Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- HOYLE, FRED, *Ten Faces of the Universe* (Chap. 1). San Francisco: W. H. Freeman, 1977.
- INFELD, LEOPOLD, *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- KAGAN, V. N., *Lobachevsky and His Contribution to Science*. Moscow: Foreign Languages Publishing House, 1957.
- LANGER, R. E., *Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory*. Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America, 1947.
- LOBACHEVSKY, NICHOLAS, "Geometrical Researches on the Theory of Parallels." Translated by G. B. Halsted, 1891. See BONOLA.
- MACFARLANE, ALEXANDER, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century*. New York: John Wiley, 1916.
- MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- , *Evolution of Mathematical Thought*. San Francisco: Holden-Day, 1965.
- MERZ, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century*. New York: Dover, 1965.
- MIDONICK, HENRIETTA O., *The Treasury of Mathematics: A Collection of Source Material in Mathematics Edited and Presented with Introductory Biographical and Historical*

- Sketches. New York: Philosophical Library, 1965.
- MUIR, JANE, *Of Men and Numbers: The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, Mead, 1961.
- MUIR, THOMAS, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. 4 vols. in two. New York: Dover, 1960.
- ORE, OYSTEIN, Niels Henrik Abel, *Mathematician Extraordinary*. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1957.
- PEACOCK, GEORGE, *Treatise on Algebra*. 2 vols., 1840-1845. New York: Scripta Mathematica, 1940.
- PRASAD, GANESH, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century, Their Lives and their Works*. 2 vols. Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934.
- Quaternion Centenary Celebration. Dublin: Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 50, 1945. [Among the articles is "The Dublin Mathematical School in the First Half of the Nineteenth Century," by A. J. McConnell.]
- SARTON, GEORGE, *The Study of the History of Mathematics*. New York: Dover, 1957.
- SCHAAF, W. L., *Carl Friedrich Gauss*. New York: Watts, 1964.
- SIMONS, L. G., *Bibliography of Early American Textbooks on Algebra*. New York: Scripta Mathematica, 1936.
- SMITH, D. E., *Source Book in Mathematics*. New York: Dover, 1958.
- , and JEKUTHIEL GINSBURG, *A History of Mathematics in America Before 1900*. Chicago: Open Court, 1934.
- SOMMERVILLE, D. M. Y., *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*. London: Harrison, 1911.
- TAYLOR, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England*. New York: Cambridge University Press, 1966.
- TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
- WHEELER, L. P., *Josiah Willard Gibbs: The History of a Great Mind*. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1962.
- WOLFE, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.
- YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. New York: Dover, 1955.

اواخر قرن بیستم و حسابیدن آنالیز

۱۴-۱ پیگیری کار اقلیدس

تا اعصار جدید چنین تصور می شد که یونانیان بحث هندسه ترکیبی مقدماتی مثلث و دایره را به اتمام رسانده اند. اما بهیچوجه چنین نبود، زیرا قرن نوزدهم شاهد گشایش مجدد اعجاب آور باب این مبحث بود. اکنون به نظر می رسد که این زمینه تحقیق باید نامحدود باشد، زیرا تعداد بسیار زیادی مقاله راجع به بررسی ترکیبی مثلث و نقاط، خطوط، و دایره وابسته، بیرون آمده و در حال بیرون آمدن هستند. عمده این مطالب برای چهار وجهی و نقاط، صفحات، خطوط و کره های وابسته به آن تعمیم داده شده اند. پرداختن به تاریخ تفصیلی این مبحث غنی و گسترده در اینجا کاری بسیار سنگین خواهد بود. بسیاری از نقاط، خطوط، دایره، صفحات، و کره های خاص به نام تحقیق کنندگان اصلی یا بعدی نامگذاری شده اند. در زمره این نامها، نامهای ژرگون، نیگل^۱، فوئر باخ، هارت^۲، کیسی^۳، بروکار^۴، لموآن^۵، تاکر^۶، نویبرگ^۷، سیمسن^۸، مک کی^۹، اوپلر، گاوس، بودنمیلر^{۱۰}، فورمان^{۱۱}، اسکوت^{۱۲}، اسپیکر^{۱۳}، تیلر، دروز-فارنی^{۱۴}، مورلی^{۱۵}، میکوئل^{۱۶}، هاگک^{۱۷}، پوسلیه^{۱۸}، اشتاینر^{۱۹}، تار^{۲۰}، و بسیاری دیگر را داریم.

-
1. Nagel	2. Hart	3. Casey	4. Brocard	5. Lemoine
6. Tucker	7. Neuberg	8. Simson	9. McCay	
10. Bodenmiller	11. Fuhmann	12. Schoute	13. Spieker	
14. Droz-Farny	15. Morley	16. Miquel	17. Hagge	
18. Peaucellier	19. Steiner	20. Tarry		

ورای چند اکتشاف اولیهٔ پراکنده، نظیر قضیهٔ کومانندینو به سال ۱۵۶۵ (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲۰۱۴) و قضیهٔ سوا به سال ۱۶۷۸ (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰۰۹)، تا قرن نوزدهم چیز جدید و مهمی در هندسهٔ ترکیبی مثلث و چهاروجهی کشف نشده بود. درست است که اوایلر خط اوایلر يك مثلث (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰۱۴) را در سال ۱۷۶۵ کشف کرد، ولی برهان او تحلیلی بود. اولین برهان ترکیبی توسط ل. ن. م. کارنو در هندسهٔ وضع به سال ۱۸۰۳ داده شد. تعدادی از عناصر مهم وابسته به مثلث، نظیر دایرهٔ نه نقطه و نقاط بروکار-که کشف آنها به اشتباه به او نسبت داده شده است- در نیمهٔ اول قرن نوزدهم کشف شدند. اما در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم بود که این موضوع شکوفایی واقعی یافت و به نحو شگفت‌انگیزی رشد یافت. اغلب این کشفیات از فرانسه، آلمان، وانگلستان سرچشمه گرفت. امروز هم ادای سهم به این زمینه ادامه دارد، و این کار تقریباً از همهٔ قسمتهای دنیا انجام می‌شود.

بخشهای بزرگی از مطالب فوق خلاصه شده و در کتابهای اخیر متعددی که عنوان هندسهٔ نوین یا هندسهٔ کالج دارند، تدوین شده‌اند. این گفته گزافه نیست که درسی در این ماده برای هر معلم آتی هندسهٔ دبیرستانی بسیار مطلوب است. این ماده قطعاً مقدماتی است ولی ساده نیست و فوق‌العاده جذاب می‌باشد.

۱-۲ امتناع حل سه مسئله مشهور با ابزارهای اقلیدسی

در قرن نوزدهم بود که سرانجام امتناع حل سه مسئله مشهور دوران باستان با ابزارهای اقلیدسی، نشان داده شد. براهین این حقیقت را اکنون می‌توان در بسیاری از کتابهای درسی راجع به نظریهٔ معادلات یافت، که در آنها نشان داده می‌شود که محکهای لازم برای ساختنی-بودن اساساً ماهیت جبری دارند. به‌ویژه، دو قضیهٔ زیر اثبات می‌شوند:

۱. کمیت هر طول ساختنی با ابزارهای اقلیدسی از يك واحد طول مفروض يك عدد جبری است.

۲. ساختن قطعه خطی از يك واحد طول مفروض با ابزارهای اقلیدسی که کمیت طول آن ریشهٔ يك معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب گویا ولی بدون ریشهٔ گویا باشد، غیرممکن است.

تکلیف مسئلهٔ تریبک با قضیهٔ اول معلوم می‌شود. زیرا اگر شعاع دایرهٔ مفروض را واحد طول اختیار کنیم، ضلع مربع مطلوب $\sqrt{3}$ می‌شود. بنابراین اگر مسئلهٔ تریبک با ابزارهای اقلیدسی مقدور بود، می‌توانستیم از پاره خط واحد پاره خط دیگری به طول $\sqrt{3}$ بسازیم. اما این کار غیرممکن است، چون لیندمان در سال ۱۸۸۲ نشان داد که π ، و در نتیجه $\sqrt{\pi}$ ، غیر جبری است.

* نگاه کنید، مثلاً، به

قضیه دوم تکلیف دوم مسئله دیگر را روشن می‌کند. مثلاً، در مسئله تضعیف، ضلع مکعب مفروض را واحد طول اختیار کنید و ضلع مکعب مطلوب را با x نشان دهید. در این صورت باید داشته باشیم $x^3 = 2$. اگر مسئله با ابزارهای اقلیدسی قابل حل باشد ساختن پاره خطی به طول x از پاره خط واحد ممکن خواهد شد. اما این کار غیرممکن است، چون $x^3 = 2$ يك معادله درجه سوم با ضرایب گویا ولی بدون ریشه گویاست.^۹

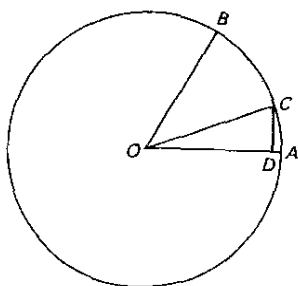
با نشان دادن این نکته که زاویه خاصی را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی تثلیث کرد، می‌توان ثابت کرد که زاویه کلی را نمی‌توان با این ابزار تثلیث نمود. حال، در مثلثات اتحاد زیر را داریم

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) - 3 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right).$$

با اختیار $\theta = 60^\circ$ و قرار دادن $x = \cos(\theta/3)$ این اتحاد به صورت

$$4x^3 - 3x - 1 = 0$$

درمی‌آید. فرض کنید OA واحد طول مفروضی باشد. دایره به مرکز O و به شعاع OA را رسم کنید، و به مرکز A و به شعاع AO قوسی رسم کنید تا دایره را در B قطع کند (نگاه



شکل ۱۱۵

* یادآوری می‌شود که اگر معادله چند جمله‌ای

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

با ضرایب صحیح $a_0, a_1, \dots, a_n$ يك ریشه گویای تجویل یافته مانسند a/b داشته باشد، آنگاه، a یکی از عوامل a_n است و b يك عامل a_0 . بنابراین کلیه ریشه‌های گویای $x^3 - 2 = 0$ بین $1, -1, 2, -2$ واقع خواهند بود. چون با امتحان مستقیم هیچ يك از این اعداد در معادله صدق نمی‌کنند، پس معادله دارای ریشه‌های گویا نیست.

کنید به شکل (۱۱۵). در این صورت زاویه BOA مساوی ۶۰° است. فرض کنید که OC ، که زاویه $COA = ۲۰^\circ$ را می‌سازد، دایره را در C قطع کند، و فرض کنید D پای عمود وارد از C بر OA باشد. در این صورت $OD = \cos ۲۰^\circ = x$. نتیجه می‌شود که اگر یک زاویه ۶۰° را بتوان با ابزارهای اقلیدسی ثلث کرد، به عبارت دیگر اگر OC را بتوان با این ابزارها رسم کرد، می‌توان از پاره خط واحد OA پاره خط دیگری به طول x ساخت. اما این کار، بنا بر قضیه دوم، غیر ممکن است، چون معادله درجه سوم فوق دارای ضرایب گویا ولی بدون ریشه‌های گویاست.

باید متذکر شد که ما ثابت نکرده‌ایم که هیچ زاویه‌ای را با ابزارهای اقلیدسی نمی‌توان ثلث کرد، بلکه تنها ثابت کرده‌ایم که نمی‌توان هر زاویه‌ای را به این نحو ثلث کرد. حقیقت مطلب اینکه ۹۰° و تعداد بینهایتی از سایر زوایا را می‌توان با استفاده از ابزارهای اقلیدسی ثلث کرد.

۱۴-۳ تنها پرگار یا تنها ستاره*

هندسه‌دان و شاعر قرن هجدهم ایتالیا، لورنتسو ماسکرونی^۱، این نکته شگفت‌انگیز را کشف کرد که همه ترسیمات هندسه اقلیدسی، مادام که عناصر مفروض و نیز مطلوب نقاط باشند، با پرگار تنها انجام پذیر هستند، و بدین ترتیب ستاره ابزار زایدی است. البته خطوط مستقیم را نمی‌توان با پرگار رسم کرد، ولی هر خط مستقیمی که در یک ساختمان اقلیدسی لازم می‌آید، با پیدا کردن دو نقطه در آن، تنها با پرگار قابل تعیین است. این کشف در سال ۱۷۹۷ در هندسه پرگار^۲ ماسکرونی ظاهر شد.

از آنجا که در یک ساختمان اقلیدسی نقاط جدید از نقاط قدیم با (۱) پیدا کردن یکی از نقاط تلاقی دو دایره، (۲) پیدا کردن یکی از نقاط تلاقی خطی با دایره، (۳) پیدا کردن محل تلاقی دو خط مستقیم، پیدا می‌شوند، تنها کاری که ماسکرونی باید می‌کرد نشان دادن این مطلب بود که چگونه، با پرگار تنها، مسائل (۲) و (۳) را وقتی که از خط مستقیمی دو نقطه در دست است، باید حل کرد.

کمی قبل از سال ۱۹۲۸، یکی از دانشجویان ی. یلمسلو^۳ (۱۸۷۳-۱۹۵۰)، ریاضیدان دانمارکی در حال پرسه در کتابفروشی در کپنهاگ، به نسخه‌ای از یک کتاب قدیمی به نام اقلیدس دانمارکی^۴ برخورد که در سال ۱۶۷۲ توسط نویسنده گمنامی به نام گئورگ موهر^۵ چاپ شده بود. در بررسی این کتاب، یلمسلو در کمال شگفتی کشف ماسکرونی را، همراه با برهانی که ۱۲۵ سال قبل از انتشار اثر ماسکرونی به آن دست یافته شده بود، در آن یافت. در سال

* برای بررسی کاملتر مطالب این فصل، همراه با برهین، نگاه کنید، مثلاً، به

Howard Eves, *A Survey of Geometry*, Vol. 1, Chapter IV.

1. Lorenzo Mascheroni

2. Geometria del compasso

3. J. Hjelmslev

4. Euclides Danicus

5. Georg Mohr



لورنتسو ماسکرونی
(مجموعه دیوید اسمیت)

۱۸۹۵، هندسه‌دان و نیززی، اوگوست آدلر^۱ (۱۸۶۳-۱۹۲۳) برهان جدیدی از قضایای ماسکرونی را، با استفاده از تبدیل معکوس، منتشر کرد.

با الهام از کشف ماسکرونی، ریاضیدان فرانسوی ژان ویکتور پونسله ساختمانهای تنها با ستاره را مدنظر قرار داد. حال گرچه نمی‌توان به کلیه ساختمانهای اقلیدسی فقط با ستاره دست یافت، ولی، کاملاً عجیب آنکه، با داشتن يك دایره و مرکز آن که در صفحه ساختمان رسم شده باشد، همه ساختمانهای اقلیدسی را می‌توان با ستاره انجام داد. این قضیه مهم در سال ۱۸۲۲ به ذهن پونسله رسید و سپس، در سال ۱۸۳۳، به‌طور کامل توسط هندسه‌دان نابغه سوئسی-آلمانی یاکوب اشتاینر بسط یافت. در اینجا لازم است نشان داده شود که، با داشتن يك دایره و مرکز آن، ساختمانهای (۱) و (۲) را می‌توان تنها با ستاره حل کرد، که در آن اکنون يك دایره با داشتن مرکز و نقطه‌ای بر محیط آن مفروض شمرده می‌شود.

در حدود سال ۹۸۵ بود که ریاضیدان ایرانی، ابوالوفای بوزجانی استفاده از ستاره تنها را همراه با پرگارهای زنگ‌زده^۲، یعنی پرگارهایی با گشادگی ثابت، مطرح کرد. با توجه به قضیه پونسله-اشتاینر، در واقع لازم است که از پرگار فقط يك بار استفاده کرد و بعداً آن را کنار گذاشت. در سال ۱۹۵۴، فرانچسکو سوری^۳ ایتالیائی گامی پیشتر رفت، و نشان داد که تنها چیزی که مورد نیاز است، قوسی، هر اندازه کوچک، از يك دایره و مرکز آن است تا آنکه همه ساختمانهای اقلیدسی با ستاره تنها انجام شوند. همچنین، توسط آدلر و دیگران، نشان داده شد که هر ساختمان اقلیدسی را می‌توان با يك ستاره دلبه انجام داد، خواه این لبه‌ها موازی باشند و یا نباشند. قضایای ساختمانی جالب از این گونه بسیارند،

که اثبات آنها مستلزم ذکاوت فراوان است.

اخیراً*، نشان داده شده است که گئورگ موهر فوق‌الذکر مؤلف جزوه‌ای بینام بوده که تحت عنوان خلاصه‌ای از شگفتیهای اقلیدس^۱ به چاپ رسیده و در سال ۱۶۷۳ منتشر شده است و در آن در واقع نشان داده شده است که همه ساختمانهای اصول اقلیدس با ستاره و پرگار با گشادگی ثابت شدنی‌اند.

مسئله یافتن «بهترین» راه حل اقلیدسی برای يك ساختمان مورد سؤال نیز تحت مطالعه قرار گرفته است، و دانش هندسه نگاری^۲ در سال ۱۹۵۷ توسط امیل لموان (۱۸۴۰-۱۹۱۲) برای مقایسه کمی ساختمان‌های با ساختمان دیگر به وجود آمد. برای این منظور لموان، پنج عمل زیر را مطمح نظر قرارداد:

S_1 : گذراندن ستاره از يك نقطه مفروض،

S_2 : کشیدن يك خط مستقیم،

C_1 : منطبق کردن يك پای پرگار بر يك نقطه،

C_2 : منطبق کردن يك پای پرگار با هر نقطه از يك مکان هندسی،

C_3 : رسم يك دایره.

اگر اعمال بالا m_1, m_2, n_1, n_2, n_3 بار در يك ساختمان انجام شوند، آنگاه به عنوان علامت^۳ ساختمان تلقی می‌شود. تعداد کل اعمال، $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ ، سهولت^۴ ساختمان نامیده می‌شود، و عده کل انطباقها، $m_1 + n_1 + n_2$ ، دقت^۵ ساختمان نامیده می‌شود. عده کل مکانهای هندسی رسم شده، یعنی $m_2 + n_3$ ، برابر اختلاف بین سهولت و دقت ساختمان است. علامت رسم خط راستی بر نقاط A و B عبارت از $S_1 + S_2$ است، علامت رسم دایره‌ای به مرکز C و شعاع AB عبارت از $3C_1 + C_3$ است.

۴-۱۲ هندسه تصویری

صرف نظر از کشف هندسه نااقلیدسی، در قرن نوزدهم گامهای بلندی در زمینه هندسه به جلو برداشته شد. همچنانکه قبلاً خاطر نشان کردیم، پیشرفت دامنه‌داری در دنباله کارهای اقلیدس پدید آمد که به نحو چشمگیری بر پایه بودند. در بخش حاضر خواهیم دید که هندسه تصویری

* نگاه کنید به A.E.Hallerberg, «The geometry of the fixed-compass» *The Mathematics Teacher*, Apr. 1959, pp. 230-44.

و

A.E. Hallerberg, «Georg Mohr and Euclidis Curiosi, *The Mathematics Teacher*, February 1960 pp. 127-32.

1. Compendium Euclidis Curiosi
2. geometrography
3. symbol
4. simplicity
5. exactitude

نیز به دستاوردهایی مؤثر و بسیار ثمر بخش نایل شد. فصل ۱۴-۵ به گسترش قابل ملاحظه روشهای هندسه تحلیلی در قرن نوزدهم اختصاص دارد و بخش ۱۴-۶ به بررسی رشد فوق العاده هندسه دیفرانسیل در این قرن.

گرچه دزارگ، مونژ، و کارنو مطالعه هندسه تصویری را آغاز کرده بودند، بسط واقعی آن به طور کامل^۱ مستقل به دست ژان ویکتور پونسله (۱۷۸۸-۱۸۶۷) صورت گرفت. پونسله در متس^۲ در سال ۱۷۸۸ به دنیا آمد، در همانجا به مدرسه رفت، و سپس از سال ۱۸۰۷ تا ۱۸۱۰ در اکول پلی تکنیک زیر نظر مونژ به تحصیل پرداخت. در سال ۱۸۱۲، بعد از استفاده از مقرری دانشجویی آکادمی نظامی متس با درجه ستوان مهندس، وارد ارتش شد و در لشکرکشی پرماجرایی ناپلئون به روسیه شرکت کرد. پونسله که در جریان عقب نشینی فرانسویان از مسکو به عنوان مرده در میدان جنگ کراسنوی^۳ رها شده بود، به اسارت درآمد و، بعد از يك راهپیمایی اجباری تقریباً پنج ماهه، او را در ساراتوف^۴، بر ساحل رود ولگا حبس کردند. در آنجا، بدون آنکه کتابی در اختیار داشته باشد، وی طرح کتاب عظیم خود، رساله خواص تصویری اشکال^۵ را ریخت که بعد از رهایی و بازگشت به متس در اواخر سال ۱۸۱۴، آن را تدوین کرد و در سال ۱۸۲۲ در پاریس به چاپ رساند. پونسله باقی عمر را وقف مشاغل نظامی کرد و در لابلای آن به نوشتن مطالبی در باره مکانیک، تئیدرولیک، سربهای نامتناهی، و هندسه پرداخت. وی رساله ای در باره مکانیک کاربردی (۱۸۲۶)، مقاله جالبی در باره آسیاهای آبی (آن نیز در ۱۸۲۶)، گزارشی در باره ماشین آلات و ادوات انگلیسی در نمایشگاه بین المللی لندن در سال ۱۸۵۱، نسخه مبسوطی از اثر قبلی اش در دومجلد (۱۸۶۲، ۱۸۶۵) و مقالات متعددی در هندسه در صفحات مجله کرله نوشت. با آنکه پونسله در سرتاسر عمرش از لحاظ سلامتی دستخوش نامایمات بود، در مأموریت های نظامی اش همواره جدی، کارآ، و قابل اعتماد بود، و استعداد های خلاقه خود در ریاضیات را تقریباً تا زمان مرگ حفظ کرد. وی در سال ۱۸۶۷ در پاریس در سن هفتاد و نه در گذشت.

کتاب رساله خواص تصویری اشکال رویدادی مهم در تاریخ هندسه است. این اثر تحرك شدیدی در مطالعه این موضوع پدید آورد و موجب گشوده شدن به اصطلاح «دوران کبیر» در تاریخ هندسه تصویری شد. گروهی ریاضیدان بعداً در این زمینه ظاهر شدند که در بین آنها ژرگون، بریانشون، شال^۵، پلوکر، اشتاینر، اشتاوت، ری^۶، و کرمونا^۷ قرار داشتند که نامهایی بزرگ در تاریخ هندسه و به ویژه در تاریخ هندسه تصویری هستند. ما در اینجا خود را تنها به بررسی دو وسیله ریاضی که توسط پونسله در بسط هندسه تصویری به دست او، به کار گرفته شد، محدود می کنیم. این دو وسیله عبارت اند از اصل دوگانی و اصل پیوستگی.

1. Metz	2. Krasnoi	3. Saratoff	4. Traité des propriétés
Projectives des figures	5. Chasles	6. Reye	
7. Cremona			



وان ویکتور پونسله
(کولورسرویس)

در هندسه تصویری مسطحه، در صورت استفاده از عناصر آرمانی در بینهایت، تقارن قابل ملاحظه‌ای بین نقاط و خطوط وجود دارد، به طوری که اگر در گزاره درستی درباره «نقاط» و «خطوط» نقش این دو واژه را باهم عوض کنیم، و احیاناً بیان را تلطیف کنیم، گزاره درست دیگری درباره «خطوط» و «نقاط» به دست می‌آوریم. به عنوان مثال ساده‌ای دو گزاره زیر را که بدین طریق به هم مربوط اند، در نظر بگیرید:

هر دو نقطه متمایز يك خط و فقط يك خط را معین می‌کنند که هر دو بر آن واقع‌اند.
هر دو خط متمایز يك نقطه و فقط يك نقطه را معین می‌کنند که هر دو بر آن می‌گذرند.

این تقارن، که به زوجی کردن گزاره‌های هندسه تصویری مسطحه منجر می‌شود، اصل فراگیری است موسوم به اصل دوگانی. به محض آنکه اصل دوگانی ثابت شود، آنگاه برهان گزاره‌ای در يك زوج دوگان، برهان دیگری را با خود به همراه می‌آورد. می‌خواهیم قضیه پاسکال را به صورت دوگانی درآوریم. ابتدا قضیه پاسکال را به شکلی بیان می‌کنیم که شاید دوگانی کردن آن را آسان‌تر کند.

شش رأس يك شش ضلعی بر يك مقطع مخروطی واقع‌اند اگر فقط اگر نقاط تلاقی سه زوج اضلاع متقابل بر يك خط واقع باشند.
با دوگانی کردن به دست می‌آوریم:

شش ضلع يك شش ضلعی بر يك مقطع مخروطی مماس‌اند اگر و فقط اگر خطوط واصل بین سه زوج رئوس متقابل در يك نقطه متلاقی باشند.

این قضیه را ابتدا ش. ژ. بریانشون (۱۷۸۳-۱۸۶۴)، وقتی که در اکول پلی تکنیک در پاریس دانشجو بود، در سال ۱۸۰۶، تقریباً ۲۰۰ سال بعد از آنکه پاسکال قضیه خود را بیان کرده بود، منتشر کرد.

اصل دوگانی را می توان به چند طریق ثابت کرد. می توان مجموعه ای از اصول موضوعه برای هندسه تصویری داد که خود آنها در قالب زوجهای دوگانی مرتب شده باشند. نتیجه می شود که دوگان هر قضیه ای را که از چنان مجموعه ای از اصول موضوعه استخراج شده است، می توان صرفاً از طریق دوگانی کردن مراحل برهان قضیه اصلی معتبر دانست. اصل دوگانی را می توان بلافاصله بعد از آنکه مفاهیم «مختصات» يك خط و «معادله» يك نقطه فرمولبندی شدند (بخش ۱۴-۵)، به طریق تحلیلی ثابت کرد. سرانجام، دانشجویی که با مفاهیم اولیه قطب و قطبی نسبت به يك مقطع مخروطی مبنا آشنا باشد، تشخیص می دهد که، تحت تناظری که بدین ترتیب بین قطب و قطبی ایجاد می شود، به هر شکلی متشکل از خطوط و نقاط، يك شکل دوگانی وابسته می شود که متشکل از نقاط و خطوط است. به روش اخیر بود که اثبات اصل دوگانی برای بار اول توسط ژرگون و پونسله انجام گرفت. اصطلاح قطب، در سال ۱۸۱۵ توسط ریاضیدان فرانسوی ف. ژ. سرووا^۱ (۱۷۶۷ - ۱۸۴۷)، و اصطلاح تناظر قطبی سه سال بعد توسط ژرگون معمول شد.

جالب توجه است اشاره کنیم که اصول دوگانی در چندین شاخه دیگر ریاضیات، نظیر هندسه تصویری فضایی، جبر بولی، نظریه اتحادهای مثلثاتی، هندسه کروی، مجموعه های جزئاً مرتب، و حساب گزاره ها برقرار شده اند.

وسیله ریاضی دیگر پونسله، اصل پیوستگی، را می توان به كمك مثال زیر شرح داد. وضعیت دو دایره را در نظر بگیرید که در دو نقطه حقیقی A و B یکدیگر را قطع کرده اند. دانش آموزان درس هندسه مقدماتی می توانند به آسانی ثابت کنند که مکان هندسی نقطه ای مانند P که نسبت به دو دایره قوت مساوی داشته باشد، خط AB است. این خاصیت، وقتی که برقرار بودن آن ثابت شد، باید به روشهای هندسه تحلیلی قابل اثبات باشد. اما روشهای هندسه تحلیلی به این امر که نقاط تلاقی دو دایره، A ، B ، حقیقی یا موهومی هستند، وقوفی ندارد. بنابراین سلسله معادلاتی که قضیه را در حالت حقیقی بودن A و B ثابت می کنند، در حالت موهومی بودن A و B نیز آن را ثابت می کنند. از اینجا نتیجه می شود که وقتی دو دایره متقاطع نیستند، مکان هندسی نقطه ای مانند P که نسبت به دو دایره قوت های مساوی دارند باز هم يك خط مستقیم است. این روش استدلال، که در آن از اثبات قضیه ای برای وضعیت حقیقی، قضیه ای برای وضعیت موهومی به دست می آید، توسط پونسله اصل پیوستگی هندسه نامیده شد. در هندسه تصویری موارد زیادی وجود دارد که در آن قضیه ای را که می توان در حالت يك تصویر حقیقی ثابت کرد، می توان به كمك اصل پیوستگی به حالت يك تصویر موهومی تعمیم داد.

اصل پیوستگی پونسله با مقاومت هایی از طرف عده ای از هندسه دانان روبرو شد، و بسیاری از مقالات پونسله در هجئه کرله به دفاع از این اصل و تشریح آن اختصاص یافته است.

بسیاری از اندیشه های پونسله در هندسه تصویری، بعداً توسط هندسه دان سوئیسی،

یاکوب اشتاینر (۱۷۹۶-۱۸۶۳)، یکی از بزرگترین دانشمندان هندسه ترکیبی که تاکنون دنیا به خود دیده است، بسط یافت. اشتاینر در اوگتسنز دورف^۱ در سال ۱۷۹۶ به دنیا آمد و تا چهارده سالگی نوشتن را نیاموخت. در هفده سالگی شاگرد یوهان هاینریش پستالوتسی^۲ (۱۷۴۶-۱۸۲۷)، آموزگار مشهور سوئسی شد که کم‌کم عشق به ریاضیات را در اشتاینر برانگیخت. بعداً، در سال ۱۸۱۸، در هایدلبرگ به دانشگاه رفت و در آنجا استعداد خود را در ریاضیات به سرعت نشان داد. در سال ۱۸۲۱ در برلین شروع به تدریس خصوصی ریاضیات کرد و به‌زودی به سمت معلمی در دانشکده بازرگانی و صنایع^۳ برگزیده شد. نام او از طریق مقالاتش که در مجله جدید التأسيس مجله کرله چاپ می‌شد، مشهور شد و او و آبل بیشترین سهم را در نوشتن مقالات این مجله داشتند. در سال ۱۸۳۴، با نفوذ ژاکوبی، کرله، و فون هومبولت^۴، یک کرسی استادی برای او در دانشگاه برلین تأسیس شد که وی بقیه دوره تدریس خود را در آنجا گذراند. سالهای واپسین عمرش با ناخوشی، در سوئیس سپری شد. وی در سال ۱۸۶۳ در برن درگذشت.

اشتاینر که از او به عنوان «بزرگترین هندسه‌دان از زمان آپولونیوس به بعد» یاد شده است، قدرتی خارق‌العاده در استفاده از روش ترکیبی هندسه داشت. وی نویسنده پرکاری در این زمینه شد و تعدادی رساله درجه اول نوشت. گفته‌اند که او از روش تحلیلی در هندسه نفرت داشت و آن را عصای دست کسانی می‌دانست که از لحاظ هندسی ذهنی ناتوان داشتند. وی با چنان سرعت شگفت‌انگیزی به خلق هندسه جدید می‌پرداخت که اغلب فرصت ثبت براهین را نمی‌یافت و نتیجه آن این بود که بسیاری از کشفیات او برای سالها برای کسانی که در جستجوی برهان بودند، همچون معما باقی ماند. کتاب بسطهای منظم^۵ او، چاپ ۱۸۳۲، بلافاصله او را به شهرت رساند. این اثر شامل بحث کاملی است از عکس‌یابی، اصل دوگانگی، تجانس و دسته خطوط، تقسیمات توافقی، و هندسه تصویری مقاطع مخروطی مبتنی بر تعریف بسیار بارور یک مقطع مخروطی به عنوان مکان هندسی نقاط تلاقی خطوط متناظر دو دسته خط‌همنگار با رأسهای متعایز. وی به مطالعه در ضلعیها در فضا، نظریه منحنیها و رویه‌ها، منحنیهای پادکی، چرخهای دنداندار و بیست و هفت خط مستقیم بر یک رویه درجه سوم ایفای سهم کرد. وی به کمک هندسه ترکیبی مبادرت به حل مسائلی درماکریموم و مینیموم کرد که در دست دیگران به ارکان حساب تغییرات نیاز داشت. به نام او در جاهای زیادی در هندسه، مانند جواب اشتاینر به مسئله مالفاتی^۶ و تعمیم آن، زنجیرهای اشتاینر، پورسم اشتاینر، و نقاط اشتاینر شکل هگزآگرام رمزی برمی‌خوریم.

پونسله و اشتاینر در مطالعه هندسه تصویری، مفاهیم تصویری بسیاری را بر خواص متری مبتنی کرده‌اند. هندسه تصویری سرانجام توسط کارل گئورگ فون اشتاوت در کتاب او

1. Utzensdorf 2. Johann Heinrich Pestalozzi
3. Gewerbeakademie 4. Von Humbolt
5. Systematische Entwicklungen 6. Malfatti



یاکوب اشتاینر
(مجموعه دیوید اسمیت)

به نام هندسه وضع^۱ به سال ۱۸۴۷ از هرگونه مبنای متری رهایی کامل یافت. اشتاوت در روتنبرگ^۲ در سال ۱۷۹۸ متولد شد، تصدی کرسی ریاضیات در ارلانگن^۳ را به عهده گرفت و در سال ۱۸۶۷ در ارلانگن درگذشت.

جنبه تحلیلی هندسه تصویری در آثار او گوستوس فردیناند میوس (۱۷۹۵-۱۸۶۸)، میشل شال (۱۷۹۳-۱۸۸۵) و، بخصوص، یولیوس پلوکر (۱۸۵۱-۱۸۶۸) پیشرفتهای چشمگیری کرد. پلوکر به همان گونه که اشتاینر به عنوان قهرمان هندسه ترکیبی شهرت یافته بود، به عنوان قهرمان هندسه تحلیلی شهرت یافت. این موضوع با تفصیل بیشتر در بخش ۱۴-۵ بررسی خواهد شد. میشل شال نیز دانشمند برجسته‌ای در هندسه ترکیبی بود، و اثر او به نام بررسی تاریخی مبدأ وسط دوشها^۴ (۱۸۳۷) هنوز هم اثر استانده‌ای در تاریخ هندسه است. شال در اکول پلی تکنیک، در سال ۱۸۴۱، استاد هندسه و ریاضیات و در سال ۱۸۴۶ در دانشکده علوم استاد هندسه شد. وی به خاطر کتابش به نام رساله مقاطع مخروطی^۵ که در سال ۱۸۶۵ در پاریس منتشر شد، به دریافت مدال کاپلی^۶ انجمن سلطنتی نایل شد. بعداً با اختیار تعریف تصویری مناسبی برای یک متریک، نشان داده شد که چگونه می‌توان هندسه متری را در چارچوب هندسه تصویری مطالعه کرد، و با الحاق یک مقطع مخروطی پایا به هندسه تصویری در صفحه، می‌توان هندسه‌های ناقلیدسی کلاسیک را به دست آورد. در اوایل قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، هندسه تصویری از لحاظ اصل موضوعی مورد بررسیهای چندی قرار گرفت و در نتیجه هندسه‌های تصویری متناهی کشف شدند.

-
1. Geometrie der Lage	2. Rothenburg	3. Erlangen
4. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie		
5. Traité des sections coniques	6. Copley	

با افزایش و تغییر تدریجی اصول موضوعه نشان داده شد که می توان از هندسه تصویری وارد هندسه اقلیدسی شد، و طی آن به چندین هندسه مهم دیگر برخورد کرد.

۱۴-۵ هندسه تحلیلی

علاوه بر دستگاههای مختصات دکارتی متعامد و مایل، دستگاههای مختصاتی دیگری نیز در صفحه وجود دارند. در واقع می توان به سادگی دستگاههای مختصاتی ابداع کرد. تنها چیزی که بدان نیاز است، چارچوب مرجع مناسبی همراه با چند قاعده است که طرز تعیین موضع نقطه ای را در صفحه به کمک مجموعه مرتبی از اعداد نسبت به این چارچوب مرجع بیان کند. مثلاً، در مورد دستگاه دکارتی متعامد، چارچوب مرجع متشکل از دو محور عمودی است، که بر هر یک از آنها مقیاسی وجود دارد، و همه ما با قواعد تعیین موضع يك نقطه نسبت به این چارچوب توسط زوج مرتبی از اعداد حقیقی که نمایش فواصل علامتدار این نقطه از دو محور هستند، آشنا هستیم. دستگاههای دکارتی رایجترین دستگاهها در عمل هستند، و فوق العاده بسط یافته اند. قسمت اعظم اصطلاحات، نظیر دسته بندی منحنیها به منحنیهای خطی، درجه دوم، درجه سوم، و غیره، بر اثر استفاده از این دستگاه، پیدا شده اند. مع هذا معادلات برخی منحنیها نظیر اغلب مارپیچها به دستگاه دکارتی به سختی گردن می گذارند، در حالی که معادلات آنها نسبت به دستگاه مختصات دیگری که استادانه طرح شده باشد، نسبتاً ساده است. بخصوص در مورد مارپیچها، دستگاه مختصات قطبی بسیار مفید است و، یادآوری می کنیم که، در این دستگاه، چارچوب مرجع يك نیمخط است، و در آن جای يك نقطه با زوجی از اعداد حقیقی تعیین می شود، که یکی از آنها نمایش يك فاصله و دیگری يك زاویه است. مفهوم مختصات قطبی ظاهراً در سال ۱۶۹۱ توسط یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۵۵) معرفی شده است.* دستگاههای مختصات دیگر تا نزدیک به اواخر قرن هجدهم مورد تحقیق قرار نگرفتند، و در این موقع هندسه دانان هنگامی که ضرورتهای خاص مسائل مناسبتر بودن دستگاههای دیگر را نشان می دادند به رها کردن دستگاه دکارتی کشانده شدند. به هر صورت، مختصات برای هندسه ساخته شده اند و نه هندسه برای مختصات.

بحث جالبی در دستگاه مختصات توسط هندسه دان پروسی یولیوس پلوکر^۱ (۱۸۵۱-۱۸۶۸) در سال ۱۸۲۹ پیش کشیده شد که وی طی آن متذکر شد عنصر بنیادی ما لزومی ندارد که نقطه باشد، و بلکه می تواند هر موجود هندسی باشد. مثلاً، اگر خط مستقیم را به عنوان عنصر بنیادی خود برگزینیم، می توانیم هر خط مستقیم نا گذرنده بر مبدأ يك چارچوب

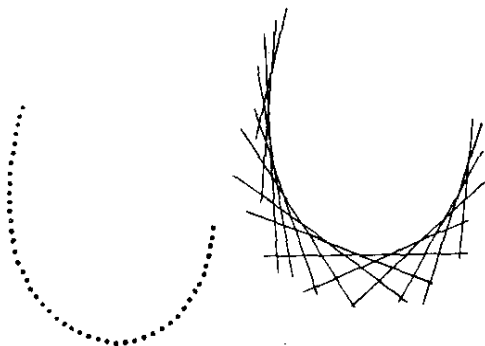
* مع هذا نگاه کنید به

C. B. Boyer, 'Newton as an originator of polar coordinates,' *American Mathematical Monthly*, February 1949, pp. 73 - 78.

1. Julius Plücker

مرجع دکارتی متعامد مفروض را به وسیله، مثلاً، x و y ، یعنی طول از مبدأ خط و عرض از مبدأ خط معین کنیم. پلو کر عملاً "عکسهای این مقادیر را با علامت منفی به عنوان اعداد موضوع خط برگزید و از هندسه تحلیلی این به اصطلاح مختصات خطی استفاده زیادی به عمل آورد. حالا يك نقطه، به جای آنکه دارای مختصات باشد، يك معادله خطی دارد، یعنی معادله ای که مختصات همه خطوط مار بر این نقطه در آن صدق می کنند (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۴.۱۵). تعبیر مضاعف يك زوج مختصات یا به صورت مختصات نقطه ای یا مختصات خطی و تعبیر يك معادله خطی یا به صورت معادله يك خط یا معادله يك نقطه، مبنای برهان تحلیلی پلوکر از اصل دوگانی هندسه تصویری را فراهم کرد. يك منحنی را می توان یا مکان هندسی نقاط آن یا به عنوان پوش مماسهای بر آن تلقی کرد (نگاه کنید به شکل ۱۱۶). اگر، به جای نقاط یا خطوط راست، دایره را به عنوان عناصر بنیادی خود برگزینیم، در این صورت برای تعیین یکی از عناصر خود به طور کامل به يك سه تایی مرتب از اعداد، نیاز خواهیم داشت. برای مثال، در يك چارچوب مرجع دکارتی متعامد، می توانیم دو مختص دکارتی مرکز دایره را همراه با شعاع دایره اختیار کنیم. چنین ایده هایی منجر به تعمیم قابل ملاحظه و به وجود آمدن نظریه ابعاد شد. بعد چندی چند گونایی از عناصر بنیادی به عنوان عده مختصات مستقل لازم برای تعیین موضع يك عنصر بنیادی این چند گونا تلقی می شد. مطابق این مفهوم، صفحه بر حسب نقاط، و نیز خطوط، دو بعدی، ولی نسبت به دایره سه بعدی است. می توان نشان داد که صفحه در صورتی که همه مقاطع مخروطی بنامی در صفحه به عنوان چند گونای عناصر بنیادی اختیار شوند، پنج بعدی خواهد بود. البته نظریه ابعاد، بسیار فراتر از این مفهوم مقدماتی رفته است، و امروزه موضوعی با وسعت و ژرفای زیاد است.

گرچه دکارت به هندسه تحلیلی اجسام صلب اشاره کرده بود، ولی وارد جزئیات آن نشده بود. دیگران، نظیر فرانس وان سخوتن، لاهیر، و یوهان برنولی به طرح هندسه تحلیلی اجسام صلب امروزی پرداختند، ولی در سال ۱۷۰۰ بود که این موضوع به طور منظم، توسط



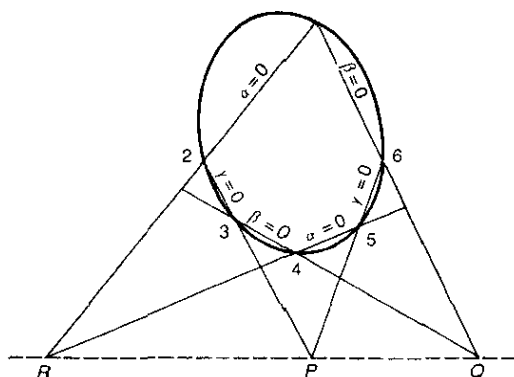
آنتوان پاری^۱ (۱۶۶۶ - ۱۷۱۶) در مقاله‌ای که به آکادمی فرانسه عرضه شد، بسط یافت. ا.ک. کلرو (۱۷۱۳ - ۱۷۶۵) در سال ۱۷۳۱، اولین کسی بود که به‌طور تحلیلی دربارهٔ منحنیهای فضایی غیرواقع در یک صفحه، چیز نوشت. او یلر بعداً کل این موضوع را از مراحل مقدماتی به سطح بالاتری ارتقاء داد. این کارورزان اولیه، نقطه را به عنوان عنصر بنیادی انتخاب کردند. گرچه فضا برحسب نقاط سه بعدی است، می‌توان نشان داد که برحسب خطوط و نیز کرات چهار بعدی است. مع‌هذا، فضا برحسب صفحات، سه بعدی است (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۶.۱۴).

در حالی که هندسه ترکیبی دانان به دستاوردهای سهل الوصول و جالب توجه می‌رسیدند، هندسه تحلیلی دانان در باطلاق محاسبات جبری فرو رفته بودند. اگر هندسه تحلیلی در صدد رقابت موفقیت آمیز با هندسه ترکیبی برمی‌آمد، می‌بایست به بسط روشهای نو و بهبود یافته بپردازد. برخی از سرچنبانان روشهای مختصاتی با شوق و ذوق فراوان در فهرست مدافعین هندسه تحلیلی وارد شدند، و این موضوع دوره طلایی خود را آغاز کرد. در صدر کسانی که در ایجاد روشهای بهبود یافته در هندسه تحلیلی سهم داشتند، یولیوس پلوکر قرار دارد که طی یک سری مقاله و کتاب درسی، به تدبیر روشهایی پرداخت که نشان داد هندسه تحلیلی، موقی که به خوبی به کار گرفته شود، چیزی در زیبایی و سهولت از هندسه ترکیبی کم ندارد.

پلوکر در آلبرفلد^۲ در سال ۱۸۵۱ به دنیا آمد و در بن، برلین، و هایدلبرگ تحصیل کرد، و مدت کمی در پاریس درس خواند، که در آنجا در دروس مونژ و همکارهای او شرکت کرد. بین ۱۸۲۶ و ۱۸۳۶ وی به‌طور متوالی در بن، برلین، و هاله^۳ سمت معلمی داشت. در سال ۱۸۳۶ به عنوان استاد ریاضیات به دانشگاه بن بازگشت و این شغل را در سال ۱۸۴۷ با استادی فیزیک همان دانشگاه تعویض کرد. وی در بن در سال ۱۸۶۸ در گذشت.

کتاب دوجلدی بسط هندسه تحلیلی^۴ پلوکر در سالهای ۱۸۲۸ و ۱۸۳۱ منتشر شد. در جلد اول این اثر، روش نماد مختصر^۵، گرچه قبلاً توسط گابریل لامه^۶ و اتین بوبیلیه^۷ به کار رفته بود، برای اولین بار به‌طور مبسوط مورد بحث قرار می‌گیرد. فکر نماد مختصر مبتنی بر نمایش عبارات طولانی توسط حرفی واحد و مبتنی بر اصل بنیادی زیر است: اگر $\alpha(x, y) = 0$ و $\beta(x, y) = 0$ دو منحنی باشند، در این صورت $u\alpha + v\beta = 0$ که در آن u و v دو مقدار ثابت یا تابعهایی از x و y اند، منحنیی است که بر نقاط تلاقی منحنیهای $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ می‌گذرد. برای قضایایی نظیر قضیهٔ دو مثلث دزارگ و قضیهٔ هگزاگرام رمزی پاسکال که ظاهراً از لحاظ جبری پیچیده‌اند، می‌توان به کمک نماد مختصر براهین نسبتاً زیباتر و مختصرتری داد. به عنوان مثال قضیهٔ اخیر را در نظر بگیرید.

1. Antoine Parent 2. Elberfeld 3. Halle
4. Analytisch - geometrische Entwicklungen
5. Method of abridged notation 6. Gabriel Lamé
7. Étienne Bobillier



شکل ۱۱۷

قضیه هگزگرام رمزی پاسکال. اگر شش نقطه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بزرگ مقطع مخروطی واقع باشند، در این صورت سه نقطه P, Q, R محل تلاقی سه زوج خط ۵۶ و ۲۳، ۱۶ و ۳۴، ۱۲ و ۴۵ هم‌رسانند.

فرض می‌کنیم $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \alpha' = 0, \beta' = 0, \gamma' = 0$ معادلات (نگاه کنید به شکل ۱۱۷) خطوط ۱۲، ۳۴، ۴۵، ۵۶، ۶۱، ۲۳ باشند، منحنی درجه سوم

$$\alpha\beta\gamma + k\alpha'\beta'\gamma' = 0$$

را در نظر گیرید. صرف نظر از مقدار k ، این معادله درجه سوم بر نه نقطه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، P, Q, R می‌گذرد. نقطه دیگری مانند γ را بر مقطع مخروطی اختیار کنید و k را طوری تعیین کنید که معادله درجه سوم بر نقطه γ نیز بگذرد. حال یک منحنی درجه سوم و یک مقطع مخروطی می‌توانند یکدیگر را حداکثر در $6 = (2)(3)$ نقطه قطع کنند، مگر اینکه مقطع مخروطی قسمتی از منحنی درجه سوم باشد، و بقیه آن یک خط مستقیم است. پس باید همینطور باشد، و سه نقطه باقی مانده P, Q, R ، باید بزرگ خط واقع باشند.

در جلد دوم بسط هندسه تحلیلی، مختصات همگن نقاط در صفحه عرضه می‌شود. در این کتاب مختصات دکارتی (همگن) نقطه‌ای مانند P که دارای مختصات دکارتی (X, Y) است، به عنوان هر سه تایی مرتب (x, y, t) به طوری که $X = x/t$ و $Y = y/t$ تعریف می‌شود، نتیجه می‌شود که سه تاییهای مرتب (x, y, t) و (kx, ky, kt) معرف نقطه واحدی هستند. نام همگن از این واقعیت ناشی می‌شود که وقتی معادله $f(X, Y) = 0$ مربوط به منحنی جبری در مختصات دکارتی را به صورت $f(x/t, y/t) = 0$ درمی‌آوریم، همه جمله‌ها در معادله جدید بر حسب متغیرهای جدید درجه واحدی پیدا می‌کنند. امسا، مهمتر از آن، در مختصات همگن یک سه تایی $(x, y, 0)$ ، که همتایی در دستگاه دکارتی ندارد، معرف یک

«نقطه در بینهایت» است، و نقاط آرمانی در بینهایت کپلر، دزارگ، و پونسله اینک نمایشی در یک دستگاه مختصات می یابند. در این صورت معادله $t = 0$ معادله خط آرمانی در بینهایت است. نتیجه می شود که مختصات همگن، ابزار کاملی برای اکتشاف تحلیلی هندسه تصویری است که هم به نقاط متناهی و هم به نقاط نامتناهی صفحه نیاز دارد.

کتاب پلوکر به نام دستگاه هندسه تحلیلی^۱ سال ۱۸۳۵ مشتمل بر رده بندی کاملی از منحنیهای درجه سوم بر مبنای ماهیت نقاط بینهایت آنهاست، و کتاب نظریه منحنیهای جبری^۲ سال ۱۸۳۹ او شمارشی از منحنیهای درجه چهارم و چهار معادله مشهور او که نقاط تکین منحنیهای جبری را بهم مربوط می کنند، می دهد. این معادلات عبارت اند از

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\kappa, \quad n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota$$

$$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\kappa, \quad \kappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota$$

که در آن m رده منحنی (درجه معادله منحنی وقتی که در مختصات خطی بیان شوند)، n درجه منحنی (درجه معادله منحنی وقتی که در مختصات نقطه ای بیان شوند)، δ عده بندها، κ عده نقاط بازگشت، ι عده نقاط عطف منحنی، و τ عده دومماسیها است.

برای مدت تقریباً بیست سال بعد از انتصابش به عنوان استاد فیزیک، پلوکر عمدتاً خود را وقف تحقیقاتی در آنالیز طیفی، مغناطیس، و سطح موجی فرنل کرد. وی در بقیه زندگی اش، به سوی محبوب اولش، ریاضیات، بازگشت و هندسه چهار بعدی خطوط فضایی را همراه با نظریه «همبافتها» و «همتهشتیها»ی خطوط فضایی پدید آورد.

در بررسی مفصلتر رشد قابل ملاحظه هندسه تحلیلی در قرن نوزدهم، افراد زیر باید مورد توجهی غیر گذرا قرار گیرند: ژوزف دیاز ژرگون (۱۷۷۱-۱۸۵۹)، افسر توپخانه، ویراستار، و استاد ریاضیات)، اوگوستوس فردیناند موبیوس (۱۷۹۵-۱۸۶۸)، استاد در لایپزیگ)، گابریل لامه (۱۷۸۵-۱۸۷۵)، مهندس و استاد ریاضیات)، اتین بوبیلیه (۱۷۹۷-۱۸۳۲)، استاد مکانیک)، لوتویک اوتو هسه^۳ (۱۸۱۱-۱۸۷۴)، استاد در کونیگسبرگ)، رودلف فریدریش آلفرد کلبش^۴ (۱۸۳۳-۱۸۷۲)، استاد در کونیگسبرگ و بعداً در گوتینگن)، ژورژ هانری هالفن^۵ (۱۸۴۴-۱۸۸۹)، از اهالی روئن^۶ و معتمدن اکول پلی تکنیک در پاریس)، و دیگران.

بحثی از کاربرد هندسه تحلیلی در مطالعه ابرفضایی که بر حسب نقاط n بعدی ($n > 3$) است به بخش آتی موکول می شود.

1. System der analytischen Geometrie

2. Theorie der algebraischen Curven

4. Rudolph Friedrich Alfred Clebsch

6. Rouen

3. Ludwig Otto Hesse

5. George - Henri Halphen

۱۲-۶ هندسه n - بعدی

نخستین مفاهیم مبهم يك ابرفضای n -بعدی ($n > 3$) برحسب نقاط در تاریکی ایام گذشته محو شده و با افکار ما بعدالطبیعه درهم آمیخته‌اند. اولین مقاله حساب شده‌ای که صراحتاً به هندسه نقطه‌ای با ابعاد بالایی پردازد توسط آرثر کیلی (۱۸۲۱-۱۸۹۵) در سال ۱۸۴۳ نگاشته شده و پس از آن مورد توجه سه ریاضیدان انگلیسی یعنی کیلی، ج. ج. سیلوستر (۱۸۱۴-۱۸۹۷)، و و. ک. کلیفورد (۱۸۴۵-۱۸۷۹) قرار گرفته است. کار پیشگامانه همزمان در هندسه با ابعاد بالا که توسط ه. گ. گراسمن (۱۸۵۹-۱۸۷۷) و لوتویک-اشلفلی^۲ (۱۸۱۲-۱۸۹۵) انجام شده بود، برای مدتی توجه کسی را در قاره اروپا به خود جلب نکرد. در واقع قسمت اعظم کار اشلفلی تا چند سال بعد از مرگ او یعنی تا زمانی که ویکتور اشلگل^۳ (۱۸۴۳-۱۹۰۵) و دیگران در آلمان این موضوع را به اشتها رسانده بودند، منتشر نشد. هندسه تصویری با ابعاد بالا تقریباً به‌طور کامل توسط مکتب هندسه‌دانان ایتالیایی به‌وجود آمده بود، گرچه گشایش باب این مبحث در سال ۱۸۷۸ به‌دست کلیفورد صورت گرفت.

کاملاً مستقل از کاری که در بالا در باره آغاز هندسه نقطه‌ای با ابعاد بالا ذکر شد، به‌پیدایش تدریجی جنبه حسابی این موضوع بر اثر کاربردهای آنالیز، که در آن بحث تحلیلی را می‌توان به آسانی از دویا سه‌متغیر به تعداد دلخواهی متغیر تعمیم داد، برمی‌خوریم. مثلاً جورج گرین^۴ (۱۷۹۳ - ۱۸۴۱)، در سال ۱۸۳۳، مسئله ربایش دوسویه دو جرم بیضوی را به مسئله‌ای در آنالیز تحویل، و سپس آن را با هر تعدادی متغیر حل کرد و افزود که، «دیگر مسئله مانند قبل به‌سه بعد فضا محدود نیست». دیگر نویسندگان تعمیمهای مشابهی را برای تعداد زیادی متغیر دلخواه به‌عمل آوردند، و تنها گامی دیگر لازم بود تا اصطلاحات هندسه در بسیاری از صورتها و فرایندهای جبر و آنالیز به‌کار گرفته شوند. این گام با بیان روشن زیر توسط کوشی، در سال ۱۸۴۷، در مقاله‌ای درباره مکانهای تحلیلی برداشته شد که می‌گفت، «مجموعه‌ای از n متغیر را يك نقطه تحلیلی و يك معادله یادستگاهی از معادلات را يك مکان تحلیلی خواهیم نامید»، و بی‌هیچ تردیدی، مهمترین تجلی گاه اولیه این نقطه-نظر تحلیلی از هندسه با ابعاد بالا در خطابه مهم آزمایشی ریمان به سال ۱۸۵۴ دیده می‌شود، که تا سال ۱۸۶۶ چاپ نشد. در ضمن این خطابه بود که ریمان مفهوم چند گونا‌های n -بعدی و روابط اندازه‌ای آنها را بنیان گذاشت، و در سرتاسر این بحث وی پنداشتها و انگاره‌های هندسی را در نظر داشت.

تعداد مقالات و آثاری که به هندسه با ابعاد بالا اختصاص دارد، بعد از سال ۱۸۷۰ افزایش زیادی یافت. در سال ۱۹۱۱ د. م. ی. سومرویل^۵ اثر خود به نام کتابشناسی

1. W. K. Clifford
2. Ludwig Schläfli
3. Victor Schlegel
4. George Green
5. D. M. Y. Sommerville

نااقلیدسی، به انضمام نظریه موازیها، مبانی هندسه، فضای n - بعدی^۱، را منتشر کرد. در این کتابشناسی، ۱۸۳۲ مرجع درباره هندسه n - بعدی دیده می شود، که حدود ثلث آن ایتالیایی، حدود ثلث آن آلمانی، و بقیه عمدتاً فرانسوی، انگلیسی، وهلمدی هستند.

مطالعه هندسه n - بعدی با وارد کردن مفاهیم مناسب در حساب فضای n - بعدی انجام می شود. فضای حسابی n - بعدی مجموعه همه n - تاییهای مرتب مانند $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اعداد حقیقی است و هر يك از گونه n - تاییها، يك نقطه این فضا نامیده می شود. روابط بین این نقاط به وسیله فرمولهایی مشابه با فرمولهایی که برای روابط بین نقاط، مثلاً، فضاهای نقطه ای دکارتی دو و سه بعدی برقرار است، تعریف می شوند. مثلاً، چون فاصله بین نقاط (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در يك دستگاه دو بعدی دکارتی متعامد به صورت

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2},$$

و فاصله بین دو نقطه (x_1, x_2, x_3) و (y_1, y_2, y_3) در يك دستگاه سه بعدی دکارتی متعامد به صورت

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{1/2}$$

داده می شود، فاصله بین دو نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در فضای n بعدی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}.$$

به طور مشابه، کره n - بعدی به شعاع r و به مرکز $(a_1, \dots, a_n)$ را به عنوان مجموعه کلیه نقاطی مانند $x = (x_1, \dots, x_n)$ به قسمی که داشته باشیم

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2,$$

تعریف می کنیم. يك زوج نقطه را به عنوان يك پاره خط، و هر n - تایی مرتب اعداد به شکل

$$(k(y_1 - x_1), \dots, k(y_n - x_n)), k \neq 0$$

را مؤلفه های هادی پاره خط xy که با نقاط x و y معین می شود، تعریف می کنیم. کسینوس زاویه θ بین دو پاره خط xy و uv را با

$$\cos \theta = \frac{(y_1 - x_1)(v_1 - u_1) + \dots + (y_n - x_n)(v_n - u_n)}{d(x, y) d(u, v)}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $d(x, y)$ فاصله بین نقاط x و y ، و $d(u, v)$ فاصله بین نقاط u و v است. دو پاره خط را متعامد نامیم اگر و فقط اگر کسینوس زاویه بین آنها برابر صفر باشد. تبدیلی به صورت

$$y_i = a_i + x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

که نقطه x را به نقطه y می‌نگارد، يك انتقال نامیده می‌شود. سایر تبدیلهای نقاط فضا بر روی خود را می‌توان به‌طور مشابه تعریف نمود. بیان تعریفی از يك مخروطی دارد n -بعدی و سپس مطالعه قطب، قطبی، و سایر خواص این مخروطی واره‌ها کار ساده‌ای است. يك هندسه n -بعدی از این نوع را می‌توان يك مبحث ناب‌جبری تلقی کرد که از اصطلاحات هندسی استفاده می‌کند.

هندسه‌های با ابعاد بالا در سایر مباحث بدون کاربرد نیستند. در حقیقت، عملاً برخی نیازهای فیزیکی‌دانها و آماردانها بود که عمدتاً موجب بسط و توسعه این موضوع گردید. مثلاً، امروزه، خیلی‌ها حتی غیر اهل فن، می‌دانند که در نظریه نسبیت از مفهوم فضای چهار-بعدی استفاده می‌شود. اما در اینجا می‌توان مثال ساده‌تری را، با نشان دادن اینکه نظریه جنبشی گازها چگونه به استفاده از هندسه ابعاد بالا می‌پردازد، عنوان کرد. ظرف بسته‌ای را که حاوی گازی است، در نظر بگیرید و فرض کنید که این گاز از m مولکول تشکیل شده باشد. این مولکولها در داخل ظرف در حال حرکت هستند، و هر مولکول خاص، در لحظه خاصی، در نقطه‌ای مانند (x, y, z) از فضای معمولی است و، در آن لحظه، دارای مؤلفه‌های تندی معین u, v, w در امتداد محورهای مختصات است. تنها در صورتی که هر شش عدد x, y, z, u, v, w را بدانیم، جای مولکول را در لحظه مفروض، و امتداد و میزان حرکت آن را خواهیم دانست. بدین ترتیب m مولکول گاز داخل ظرف به $6m$ مختص بستگی دارند. در هر لحظه این $6m$ مختص مقادیر معینی دارند که وضعیت گاز را در آن لحظه معین می‌کنند. اما این $6m$ مقدار نقطه‌ای را در يك فضای $6m$ -بعدی معین می‌کنند، و بین این گونه نقاط و وضعیتهای ممکن گاز تناظری يك به يك موجود است. چون وضعیت گاز، به دلیل حرکت مولکولها، تغییر می‌کند، نقطه متناظر به آن مسیر یا يك مکان هندسی را در فضای $6m$ -بعدی به وجود می‌آورد. از اینجا نتیجه می‌شود که رفتار، یا سابقه، این گاز به‌طور هندسی با این مکان هندسی نمایش داده می‌شود.

۱۴-۷ هندسه دیفرانسیل

موضوع هندسه دیفرانسیل مطالعه خواص منحنیها و سطوح، و تعمیم آنها، به کمک حسابان، است.

اگرچه می‌توان استنتاج قضایای هندسی را در مطالعه اشکال تدریجاً تغییر یا بنده در تعیین مساحات و احجام به روش ارشمیدس، مطالعه آپولونیوس از قائمهای بر مقاطع مخروطی، و بعداً از روش تقسیم ناپذیرهای کوالیری و کار زیبای هویگنس درباره انحنا و

گسترده‌ها مشاهده کرد، شاید کاملاً به درستی بتوان گفت که هندسه دیفرانسیل، دست کم در شکل جدیدش، با کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال در هندسه تحلیلی در اوایل قرن هجدهم آغاز شده است. اما اولین انگیزه واقعی در این موضوع را، و رای هندسه دیفرانسیل در صفحه، گاسپار مونژ (۱۷۴۶-۱۸۱۸) فراهم کرده است، و او را می‌توان پدر هندسه دیفرانسیل منحنیها و سطوح در فضا دانست. مونژ معلم برجسته‌ای بود، و دروس او در مدرسه پلی تکنیک پاریس الهامبخش عده زیادی از مردان جوان برای پرداختن به این موضوع گردید. در بین اینها ژ. ب. مونیه^۱ (۱۷۵۴-۱۷۹۳)، ا. ل. مالوس^۲ (۱۷۷۵-۱۸۱۲)، ش. دوپن^۳ (۱۷۸۴-۱۸۷۳)، و ا. رودریگز^۴ (۱۷۹۴-۱۸۵۱) قرار دارند، که همه آنها قضایای مهمی در هندسه دیفرانسیل به نام خود دارند. مونژ و دانشجویان او بانیان مکتب بزرگ فرانسوی هندسه دیفرانسیل دانان شدند، که بعداً افرادی نظیر اوگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، ب. دوسن و نان^۵ (۱۷۹۶-۱۸۸۶)، ف. فرنه^۶ (۱۸۱۶-۱۸۸۸)، ژ. ا. سره^۷ (۱۸۱۹-۱۸۸۵)، و. پوییزو^۸ (۱۸۲۵-۱۸۸۳)، و ژ. برتران^۹ (۱۸۲۲-۱۹۰۰) را در سلك خود قرارداد.

کارکوشی در هندسه دیفرانسیل نشانه پایان نخستین دوره در تارخ این موضوع است. دومین دوره توسط کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) گشوده می‌شود، که روش بسیار پرثمر مطالعه هندسه دیفرانسیل منحنیها و سطوح را به کمک نمایش پارامتری آنها مطرح کرده است. گک. میناردی^{۱۰} (۱۸۵۰-۱۸۷۹)، ژ. پلاتو^{۱۱} (۱۸۰۱-۱۸۸۳)، ک. گک. ژ. ژاکوبی (۱۸۰۴-۱۸۵۱)، ا. بونه^{۱۲} (۱۸۱۹-۱۸۹۲)، د. کوداتسی^{۱۳} (۱۸۲۴-۱۸۷۵)، ا. ب. کریستوفل^{۱۴} (۱۸۲۹-۱۹۰۱)، ا. بلترامی^{۱۵} (۱۸۳۵-۱۹۰۰)، ژ. گک. داربو^{۱۶} (۱۸۴۲-۱۹۱۷)، و بسیاری دیگر از کسانی هستند که در نظریه کلاسیک منحنیها و سطوح در فضا سهمی داشتند.

سومین دوره بزرگ در تارخ هندسه دیفرانسیل با گئورگ برنهارد ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) آغاز شد. در این دوره، این مطلب که گرایش ریاضیات اعصار جدید به تلاش برای بیشترین تعمیمهای ممکن است، به ثبوت می‌رسد. فضای سه بعدی معمولی آشنا پشت سر گذاشته می‌شود، و مطالعه در چیزهایی نظیر چند گوناگونیهای m -بعدی مشقپذیر که در فضای n -بعدی فرو برده شده‌اند، متمرکز می‌شود. دو چیز برای این بسط، لازم شناخته

1. J. B. Meusnier
3. C. Dupin
5. B. de Saint-Venant
7. J. A. Serret
9. J. Bertrand
11. J. Plateau
13. D. Codazzi
15. E. Beltrami

2. E. L. Malus
4. O. Rodrigues
6. J. F. Frenet
8. V. Puiseux
10. G. Mainardi
12. O. Bonnet
14. E. B. Christoffel
16. J. G. Darboux

شدند: اصلاح نماد گذاری و روشی که به ماهیت چند گونا بستگی داشته باشد و نه به دستگاه مختصات خاصی که به کار برده شده است. از این لحاظ حساب تانسوری ابداع گردید، و این موضوع کلی توسط ریاضیدانانی چون گک. ریچی - کورباسترو^۱ (۱۸۵۳-۱۹۲۵)، ت. لوی. چویتیا^۲ (۱۸۷۳-۱۹۴۱)، و آ. اینشتین^۳ (۱۸۷۹-۱۹۵۵) بسط یافت. هندسه های دیفرانسیل تعمیم یافته، موسوم به هندسه های ریمانی، وسیعاً مورد کاوش قرار گرفتند، و اینها به نوبه خود به هندسه های غیر ریمانی و سایر هندسه ها منجر شدند. تحقیقات امروزی در هندسه دیفرانسیل به تعمیم و تجرید می پردازد، و به مطالعه کلاسیک که پیوندهای قوی با موارد ملموس دارد، کمتر شبیه است.

به يك سطح می توان ازدو دیدگاه نظر کرد: یا به عنوان مرز يك جسم صلب یا به عنوان يك پوسته دو بعدی مجزا. اولی شاید طرز تلقی يك مهندس ساختمان از سطح باشد، و دومی شاید طرز تلقی يك مساح از آن. اولین دیدگاه شخص را بر آن می دارد که به جستجوی آن خواص سطح پردازد که آن را به فضای اطراف مربوط می کند، و دومین دیدگاه شخص را بر آن می دارد که در آن خواص سطح تفحص کند که مستقل از فضای اطراف باشند. خواص نوع اول خواص نسبی سطح نامیده می شوند و مطالعه آنها هندسه عارضی سطح نام دارد؛ خواص نوع دوم خواص مطلق سطح نامیده می شوند و مطالعه آنها هندسه ذاتی سطح نام دارد. جالب اینکه دو شخصیت مهمی که در اوایل سهمی در هندسه دیفرانسیل سطوح داشتند، یعنی مونژ و گاوس، به ترتیب به سطح عمدتاً به عنوان مرز يك جسم و عمدتاً به عنوان يك پوسته دو بعدی مجزا توجه کردند. مونژ، از جمله، به خاطر کارش به عنوان يك مهندس ساختمان استحکامات نظامی شهرت دارد، و گاوس، از جمله به خاطر کار در مساحی ژئودزی و ژئودزیک شهرت به هم رسانده است.

۱۴-۸ فلیکس کلاین و برنامه ارلانگر

در سال ۱۸۷۲، هنگام انتصاب به استادی دانشکده فلسفه و عضویت هیأت امنای دانشگاه ارلانگن^۴، فلیکس کلاین (۱۸۴۹ - ۱۹۲۵) به رسم معمول نطق افتتاحیه ای در حوزه تخصص اش ایراد کرد. در این نطق، که مبتنی بر کار خود او و سوفوس لی (۱۸۴۲-۱۸۹۹) در نظریه گروهها بود، تعریف مهمی از «هندسه» داد که اساساً در تدوین کلیه هندسه های موجود آن زمان به کار آمد و شاخه های جدید و پر ثمری را در تحقیقات هندسی در پیش گشود. این نطق، با برنامه مطالعه هندسی مورد توصیه اش، به برنامه ارلانگر مشهور شده است؛ این برنامه درست در زمانی عنوان شده که نظریه گروهها تقریباً کلیه حوزه های ریاضیات را تحت تسلط خود قرار داده بود، و برخی از ریاضیدانان چنین حس می کردند که همه ریاضیات چیزی جز وجهی از نظریه گروهها نیست.

1. G. Ricci - Curbastro

2. T. Levi - Civita

3. A. Einstein

4. Erlangen

5. Erlanger Programm

کاربرد گروهها در هندسه توسط کلاین به مفهوم تبدیل يك مجموعه S به روی خودش بستگی دارد، که منظور از آن صرفاً تناظری است که تحت آن هر عضو S با عضو یکتایی از خودش متناظر می گردد، و هر عضو S نظیر عضو یکتایی از S است. منظور از حاصل ضرب $T_1 T_2$ دو تبدیل T_1 و T_2 مجموعه ای مانند S بر روی خودش، تبدیلی است که ابتدا با انجام تبدیل T_1 و سپس تبدیل T_2 به دست می آید. اگر T تبدیلی از مجموعه S بر روی خود باشد، که هر عضو a از S را به عضو متناظری مانند b از S ببرد، در این صورت تبدیلی که تبدیل T را، با برگرداندن هر عضو b از S به عضو اولیه a از S ، عکس می کند، تبدیل معکوس T نامیده شده و با T^{-1} نشان داده می شود. تبدیلی که هر عضو S را به خود آن عضو می برد، تبدیل همانی بر روی S نامیده شده و با I نشان داده می شود. خاصیت زیر را می توان به آسانی ثابت کرد: مجموعه ای مانند Γ از تبدیلات مجموعه ای مانند S بر روی خودش تحت عمل ضرب تبدیلات تشکیل يك گروه (به معنی فنی آن در جبر مجرد — نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۶.۱۳) می دهد هرگاه (۱) حاصل ضرب دو تبدیل دلخواه از Γ در مجموعه Γ باشد، (۲) معکوس هر تبدیل از مجموعه Γ در مجموعه Γ باشد. هرچنین گروهی از تبدیلات را به اختصار يك گروه تبدیل می نامند.

اینك برای ارائه تعریف مشهور فلیکس کلاین از يك هندسه آماده ایم: يك هندسه مطالعه آن خواص از يك مجموعه S است که وقتی اعضای آن تحت تبدیلهای گروه تبدیلی مانند Γ قرار گیرند، پایا بمانند. این هندسه را می توان به سهولت با نماد $G(S, \Gamma)$ نشان داد.

برای تشریح تعریف کلاین از هندسه، فرض کنید S مجموعه همه نقاط يك صفحه معمولی باشد، و مجموعه Γ از تبدیلات S را در نظر بگیرید که ترکیبی از انتقالها، دوراها، و انعکاسها نسبت به خطوط باشند. چون حاصل ضرب هر دو تبدیلی از این گونه تبدیلات و معکوس هر تبدیلی از این گونه تبدیلات، از نوع این تبدیلات هستند، نتیجه می شود که Γ يك گروه تبدیل است. هندسه حاصل هندسه متریک اقلیدسی مسطحه معمولی است. چون خواصی نظیر طول، مساحت، همبستگی، توازی، تعامد، تشابه اشکال، همخطی نقاط، و همرسی خطوط تحت گروه Γ پایا هستند، این خواص در هندسه متریک اقلیدسی مسطحه مطالعه می شوند. حال اگر Γ با انضمام تبدیلهای تجانس (که در آن هر نقطه مانند P به نقطه ای مانند P' برده می شود به قسمی که $AP' = k \cdot AP$ ، که در آن A يك نقطه ثابت، k يك عدد ثابت مثبت، و A ، P ، P' همخط هستند) به انتقالها، دوراها، و انعکاس نسبت به خطوط تعمیم یابد، هندسه تشابه در صفحه، یا هندسه همشکلی در صفحه به دست می آید. تحت این گروه توسعه یافته خواصی نظیر طول، مساحت، و همبستگی دیگر پایا نمی مانند، و بنا بر این دیگر موضوع مطالعه نیستند، ولی توازی، تعامد، تشابه اشکال، همخطی نقاط، و همرسی خطوط همچنان خواص پایا هستند، و بنا بر این مطالب مورد مطالعه در این هندسه را تشکیل می دهند. از دیدگاه کلاین، هندسه تصویری، مطالعه آن خواصی از نقاط يك تصویر است که بر اثر عمل گروه به اصطلاح تبدیلات تصویری، پایا باقی بمانند. از خواص در پیش گفته شده،

تنها همخطی نقاط و هم‌رسی خطوط همچنان پایا می‌مانند. يك پایای مهم تحت این تبدیله‌ها، نسبت خاجی چهارنقطه همخط است؛ این پایا نقش مهمی در مطالعه هندسه تصویری دارد. هندسه‌های متری مسطحه نااقلیدسی را، که در فصول قبل بررسی شدند، می‌توان مطالعه آن خواصی از نقاط يك صفحه نااقلیدسی تصور کرد که تحت گروه تبدیلهایی مرکب از تبدیله‌ها، دورانها، و انعکاس نسبت به خطوط پایا باقی بمانند.

در کلیه هندسه‌های بالا، عناصر بنیادی که تبدیلهای يك گروه تبدیل بر آنها اعمال می‌شوند، نقاط اند؛ بنا بر این هندسه‌های بالا همه مثالهایی از اصطلاح هندسه‌های نقطه‌ای اند. همچنان که در بخش ۱۴-۵ خاطر نشان شد، هندسه‌هایی وجود دارند که در آنها ذواتی جز نقاط به عنوان عناصر بنیادی انتخاب می‌شوند. مثلاً هندسه دانان، هندسه‌های خطوط، هندسه‌های دایره، هندسه‌های کرات، و سایر هندسه‌های گوناگون را مطالعه می‌کنند. در بنا کردن يك هندسه ابتدا در انتخاب عنصر بنیادی آن (نقطه، خط، دایره، و غیره)؛ سپس، چند گونا یا فضای این عناصر (صفحه نقاط، فضای نقاط معمولی، فضای کروی نقاط، صفحه خطوط، دسته دایره، و غیره)؛ و سرانجام، گروه تبدیلی که روی عناصر بنیادی عمل می‌کند، آزادی عمل وجود دارد. بدین طریق، ساختن يك هندسه جدید مطلب ساده‌ای می‌شود.

جنبه جالب دیگر این هندسه‌ها، نحوه‌ای است که برخی از آنها سایرین را در بر می‌گیرند. مثلاً، چون گروه تبدیل هندسه متری اقلیدسی مسطحه زیر گروهی از گروه تبدیل هندسه هم‌خطی مسطحه است، نتیجه می‌شود که هر قضیه‌ای که در هندسه اخیر صادق باشد، در دومی هم باید صادق باشد. از این دیدگاه می‌توان نشان داد که هندسه تصویری در درون هر يك از دو هندسه قبل قرار داد، و نوعی دنباله هندسه‌های تودرتو پدید می‌آیند. تا این اواخر، گروه تبدیل هندسه تصویری، گروه‌های تبدیل عملاً کلیه هندسه‌های دیگر را که مورد مطالعه قرار گرفته بودند، به عنوان زیرگروه در برداشت. منظور کیلی از این بیان که: «هندسه تصویری هر هندسه‌ای را شامل می‌شود» همین است. در واقع، تا آنجا که به قضایای هندسه‌ها مربوط می‌شود، روی دیگر این مطلب صحیح است. قضایای هندسه تصویری در بین قضایای هر يك از هندسه‌های دیگر قرار می‌گیرند.

تقریباً به مدت ۵۰ سال ترکیب و تدوین هندسه‌ها به سبک کلاین اساساً معتبر ماند. اما به فاصله کوتاهی بعد از تغییر قرن، مجموعه‌ای از قضایای ریاضی، که به نظر ریاضیدانان باید هندسه نامیده می‌شدند، آشکار شدند؛ این مجموعه قضایا را نمی‌شد با چنین نحوه تدوینی مطابقت داد، و دیدگاه جدیدی درباره این موضوع به وجود آمد، که مبنای آن مفهوم فضای مجرد با ساختاری اعمال شده بر آن بود که می‌شد بر حسب گروه تبدیلی قابل تعریف باشد یا نباشد. ما این دیدگاه جدید را در بخش ۱۵-۳ بررسی خواهیم کرد و صرفاً در اینجا خاطر نشان می‌کنیم که برخی از این هندسه‌های جدید کاربردهایی در نظریه جدید فضای فیزیکی پیدا کرده‌اند که با نظریه نسبیت عمومی اینشتین درهم آمیخته‌اند. مفهوم کلاینی هم اکنون نیز هر جا که کاربردی داشته باشد، بسیار مفید است، و می‌توان هندسه‌ای را که تعریف آن مطابق تعریف کلاین به صورت بالا باشد، يك هندسه کلاینی نامید. تلاش‌هایی تا حدی



فلیکس کلاین
(مجموعه دیوید اسمیت)

موفقیت آمیز در قرن بیستم، به ویژه توسط اسوالد وبلن^۱ (۱۸۸۵-۱۹۶۰) و الی کارتان^۲ (۱۸۶۹-۱۹۵۱) به عمل آمد تا تعریف کلاین طوری تعمیم و توسیع یابد که هندسه‌هایی را که خارج از برنامه اصلی کلاین قرار داشتند، دربرگیرد.

فلیکس کلاین در دوسلدورف^۳ در سال ۱۸۴۹ به دنیا آمد. در بن، گوتینگن، و برلین تحصیل کرد، و به عنوان دستیار یولیوس بلوکر در بن به خدمت درآمد. اولین مقام حرفه‌ای او در دانشگاه ارلانگن (۱۸۷۲-۱۸۷۵) بود، که نطق افتتاحیه او در آنجا به گشایش برنامه هندسی فوق‌الذکر منجر شد. سپس در مونیخ، دانشگاه لایپزیگ (۱۸۸۵-۱۸۸۶)، و دانشگاه گوتینگن (۱۸۸۶-۱۹۱۳) در سمت استادی تدریس کرد، و در موسسه اخیر سرپرست بخش شد، وی سردبیر ماتماتیشه آنالین^۴ و پایه‌گذار دائرةالمعارف ریاضی معروف بود. وی مفسری روشن بین، معلمی الهامبخش، و مدرسی با استعداد بود. او در سال ۱۹۲۵ در گوتینگن درگذشت.

در دوره‌ای که کلاین سرپرستی بخش ریاضی دانشگاه گوتینگن را به عهده داشت، این مؤسسه به کعبه دانشجویان ریاضی از سراسر جهان تبدیل شد. تعداد قابل توجهی از ریاضیدانان طراز اول در این دانشگاه تحصیل کردند، یاد آنجا به عنوان جانشینان ارزشمندی برای گاوس، دیریکله، و ریمن به خدمت پرداختند، و مدرسه ریاضی گوتینگن را به صورت یکی از مشهورترین مدارس اعصاب جدید در آوردند. از جمله این ریاضیدانان عبارت‌اند از داوید هیلبرت^۵ (۱۸۶۲-۱۹۴۳)، بزرگترین ریاضیدان دوران اخیر، ادموند لاندائو^۶ (۱۸۷۷-۱۹۳۸)، یک نظریه اعداد دان مشهور، هرمان مینکوفسکی^۷ (۱۸۶۴-۱۹۰۹)،

1. Oswald Veblen 2. Élie Cartan 3. Düsseldorf
4. Mathematische Annalen 5. David Hilbert
6. Edmund Landau 7. Hermann Minkowski

متولد روسیه و موجد نظریه هندسی اعداد)، ویلهلم آکرمان^۱ (۱۸۹۶-۱۹۶۲)، همکار هیلبرت در منطق ریاضی)، کنستانتین کاراتودوری^۲ (۱۸۷۳-۱۹۵۰)، ریاضیدان یونانی که در نظریه توابع به شهرت رسید)، ارنست تسرملو^۳ (۱۸۷۱-۱۹۵۳)، که شهرتش به خاطر اصل تسرملو (است)، کارل رونگه^۴ (۱۸۵۶-۱۹۲۷)، که دانشجویان درس معادلات دیفرانسیل او را از طریق روش رونگه-کوتا^۵ می شناسند)، امی نوثر^۶ (۱۸۸۲-۱۹۳۵)، بانوی جبردان مشهور)، ریشارد ددکیند (۱۸۳۱-۱۹۱۶)، شهرتش به خاطر برش ددکیند است)، ماکس دن^۷ (۱۸۷۸-۱۹۵۲)، اولین ریاضیدانی که یکی از ۲۳ مسئله [مطروحه در کنفرانس بین المللی (۱۹۰۰)] پاریس توسط هیلبرت را حل کرد)، هرمان وایل^۸ (۱۸۸۵-۱۹۵۵)، که بخصوص به خاطر کارش در مبانی و فلسفه ریاضیات شهرت دارد)، و بسیاری دیگر.

۱۴-۹ حسابدن آنالیز

علاوه بر رهایی هندسه و رهایی جبر، سومین رویداد ریاضی بسیار مهم نیز در قرن نوزدهم به وقوع پیوست. این رویداد سوم که در زمینه آنالیز رخ داد، به کندی تحقق پذیرفت، و به حسابدن آنالیز مشهور شد.

هنگامی که يك عمل ریاضی از لحاظ تئوری خوب فهمیده نشده باشد، این خطر وجود دارد که به روش صوری کورکورانه و شاید غیر منطقی به کار برده شود و این امکان وجود دارد که، بدون توجه به محدودیتهای احتمالی عمل، در مواردی که لزوماً کارآیی ندارد، مورد استفاده قرار گیرد. معلمان ریاضی تقریباً همه روزه به اشتباهاتی از این قبیل که دانشجویان نشان مرتکب می شوند، بر می خورند. مثلاً يك دانشجوی جبر مقدماتی که کاملاً به درستی رابطه $\alpha^\circ = 1$ ، به ازای هر عدد حقیقی متقاعد شده است، ممکن است بنویسد $1 = 0^\circ$ ، درحالی که يك دانشجوی دیگر از این دست ممکن است تصور کند که معادله $ax = b$ همیشه به ازای هر زوج مقادیر حقیقی مفروض a و b دقیقاً دارای جواب است. یا اینکه، دانشجویی که درس مثلثات می خواند ممکن است فکر کند که فرمول

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$$

به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است. دانشجوی درس حسابان، که از وجود انتگرالهای ناسره اطلاعی ندارد، ممکن است با کاربرد قواعد به ظاهر درست انتگرالگیری صوری به نتیجه نادرستی دست یابد. یا ممکن است با به کار بردن قاعدهای که فقط برای سریهای نامتناهی مطلقاً همگرا برقرار است، در مورد برخی سریهای نامتناهی همگرا به يك نتیجه پادادوکس گونه برسد. اینها مواردی بودند که اساساً در طی سده بعد از اختراع حسابان رخ داد. ریاضیدانان که مجذوب کارآیی پر قدرت این موضوع شده بودند و درک درستی

1. Wilhelm Ackermann	2. Constantin Carathéodory	
3. Ernst Zermelo	4. Carl Runge	5. Runge-Kutta
6. Emmy Noether	7. Max Dehn	8. Hermann Weyl

از شالوده‌هایی که این موضوع بر آن استوار بود، نداشتند، فرایندهای آنالیز را تقریباً به روش کور کورانه‌ای به‌کار گرفتند، درحالی‌که راهنمای آنان اغلب شهودی فطری بود از آنچه که حس می‌شد باید درست باشد. انباشته شدن تدریجی این مهم‌لالت حتمی‌الوقوع بود تا آنکه، به‌عنوان واکنش طبیعی در مقابل استعمال آشفته شهودگرایی و صوری‌گرایی^۲، برخی از ریاضیدانان جدی خود را مقید به تلاش در جهت وظیفه دشوار ایجاد مبنایی دقیق برای این موضوع حس کردند.

اولین توصیه برای چاره جدی این وضع نابسامان مبنایی آنالیز، از سوی ژان لورون-دالامبر (۱۷۱۷-۱۷۸۳) به‌عمل آمد، که در سال ۱۷۵۴ کاملاً^۳ به‌درستی به‌لزام يك نظریه حدود پی‌برد، ولی بسط صحیحی از این نظریه تا سال ۱۸۲۱ ارائه نشد. اولین ریاضیدان درجه‌اولی که برای تدقیق حسابان اهتمام جدی‌مبذول داشت، ریاضیدان ایتالیایی-فرانسوی ژوزف لوئی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) بود. کوشش او، مبتنی بر نمایش يك تابع از راه بسط به‌سری تیلر، به‌دور از توفیق بود زیرا در آن به‌موارد لازم همگرایی یا واگرایی توجه نشده بود. این کار در سال ۱۷۹۷ در اثر عظیم لاگرانژ، نظریه توابع تحلیلی^۴ به‌چاپ رسید. لاگرانژ شاید برجسته‌ترین ریاضیدان قرن هجدهم بود، و کار او تأثیر عمیقی در تحقیقات ریاضی پس از وی داشت؛ با کار لاگرانژ وظیفه طولانی و سنگین به‌کارافکندن شهودگرایی و صوری‌گرایی از آنالیز شروع شده بود.

در قرن نوزدهم بنای آنالیز همچنان رفیع‌تر می‌شد، ولی بر مبنایی که پیوسته عمق بیشتری می‌یافت. بدون تردید پیشرفت در این راه را مرهون کارل فریدریش گاوس هستیم، زیرا گاوس، بیش از هر ریاضیدان عصر خود، از ایده‌های شهودی گسست و معیارهای عالی جدیدی برای دقت ریاضی وضع نمود. همچنین، در مطالعه‌ای که گاوس از سری فوق‌هندسی در سال ۱۸۱۲ به‌عمل آورد به‌آنچه که عموماً اولین بررسی حقیقتاً مناسب از همگرایی يك سری بینهایت تلقی می‌شود، برمی‌خوریم.

گام عظیم به جلو در سال ۱۸۲۱ برداشته شد. در این سال ریاضیدان فرانسوی اوگوستن لژنژ کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) پیشنهاد دالامبر را، با بسط نظریه قابل قبولی از حدود و سپس تعریف پیوستگی، مشتق‌پذیری، و انتگرال معین برحسب مفهوم حد با موفقیت به‌موقع اجرا گذاشت. اساساً همین تعریفها هستند که در کتابهای مقدماتی حسابان دقیقتر امروزی دیده می‌شوند. مفهوم حد مطمئناً از بسط آنالیز جدایی‌ناپذیر است، زیرا همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی هم به این مفهوم وابسته‌اند. دقت کوشی الهامبخش دیگر ریاضیدانان در پیوستن به تلاش برای رها کردن آنالیز از صوری‌گرایی و شهودگرایی گردید. ولی نیاز به‌درک حتی عمیق‌تری از مبنایی آنالیز با مطرح شدن مثالی در سال ۱۸۷۴،

* اصلاحات صوری‌گرایی و شهودگرایی در این بخش را نباید با معانی خاصی که در مباحث فلسفه‌های ریاضی امروزی به آنها داده شده است، اشتباه کرد. ما با این اشارات فلسفی در فصل آخر این کتاب روبرو خواهیم شد.

1. Théorie des fonctions analytique

از سوی ریاضیدان آلمانی کارل وایر شتراس به طور چشمگیری آشکار گردید. این مثال در باره تابع پیوسته‌ای است که مشتق ندارد، یا، به عبارت دیگر، منحني پیوسته‌ای که دارای مماس در هیچیک از نقاطش نیست. گئورگ برنهاردریمان تابعی را ارائه داد که به ازای همه مقادیر ناگرای متغیر پیوسته ولی به ازای همه مقادیر گویا ناپیوسته بود. چنین مثالهایی ظاهراً با شهود انسانی در تعارض بودند و به طور روزافزونی این نکته را آشکار می کردند که کوشی به عمق مشکلات موجود در راه پی ریزی صحیح آنالیز، پی نبرده بوده است. نظریه حدود بر اساس تصور شهودی ساده‌ای از دستگاه اعداد حقیقی ساخته شده بود. در واقع دستگاه اعداد حقیقی، به صورتی که هنوز در اغلب کتابهای حسابان معمول است، مسلم فرض می شد. روشن گردید که نظریه حدود، پیوستگی، و مشتق پذیری به خواصی از اعداد حقیقی پیچیده تر از آنچه قبلاً تصور می شد، بستگی دارند. بنابراین، وایر شتراس هوادار این برنامه شد که خود دستگاه اعداد حقیقی باید تدقیق و سپس کلیه مفاهیم بنیادی آنالیز از این دستگاه اعداد حقیقی استخراج شود. این برنامه مهم، معروف به حسابدن آنالیز سخت و بفرنج از کار درآمد، ولی مالا توسط وایر شتراس و پیروان او تحقق یافت، به طوری که امروزه همه آنالیز را می توان به طور منطقی از يك مجموعه اصل موضوع که اعداد حقیقی را مشخص می کند، استخراج کرد.

ریاضیدانان از بنیان نهی دستگاه اعداد حقیقی به عنوان مبنایی برای آنالیز، بسیار فراتر رفته اند. هندسه تحلیلی را نیز، از طریق تعبیر تحلیلی آن، می توان بر اساس دستگاه اعداد حقیقی استوار کرد، و ریاضیدانان نشان داده اند که اغلب شاخه های هندسه در صورتی سازگارند که هندسه اقلیدسی سازگار باشد. همچنین، چون دستگاه اعداد حقیقی، یا جزئی از آن، را می توان در تعبیر شاخه های متعدد جبر به کار گرفت، معلوم می شود که سازگاری قسمت عمده ای از جبر را نیز می توان به سازگاری دستگاه اعداد حقیقی مربوط کرد. در واقع، حالیه می توان گفت که اساساً همه ریاضیات موجود سازگار است به شرطی که دستگاه اعداد حقیقی سازگار باشد. اهمیت بسیار زیاد دستگاه اعداد حقیقی برای مبنایی ریاضیات در همینجا نهفته است.

چون قسمت عمده ریاضیات موجود را می توان بر دستگاه اعداد حقیقی استوار نمود، طبیعتاً این سؤال مطرح می شود که آیا این مبنایی را می توان عمقی حتی بیش از این داد؟ در اواخر قرن نوزدهم، باکار ریشارد ددکیند (۱۸۳۱-۱۹۱۶)، گئورگ کانور (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، و جیوزپه پئانو^۱ (۱۸۵۸-۱۹۳۲)، این مبنایی بر روی دستگاه اساسی تر و ساده تر اعداد طبیعی استوار شدند. یعنی، اینان نشان دادند که چگونه دستگاه اعداد حقیقی و بنا بر این قسمت اعظم ریاضیات را می توان از يك مجموعه اصل موضوعی برای اعداد طبیعی استخراج کرد. بعداً، در اوایل قرن بیستم، نشان داده شد که اعداد طبیعی را می توان بر حسب مفاهیم نظریه مجموعه ها تعریف، و بدین ترتیب قسمت اعظم ریاضیات را بر سکویی در نظریه

اعداد استوار کرد. منطقین، بهر هری برتراند راسل^۱ (۱۸۷۲-۱۹۷۰) و آلفرد نورث- وایتهد^۲ (۱۸۶۱-۱۹۴۷)، تلاش به عمل آورده اند تا میانی را، با استخراج نظریه مجموعه ها از بنیادی در حساب گزاره های منطق، از این هم بیشتر ببرند، گرچه همه ریاضیدانان بر این اعتقاد نیستند که این کار با توفیق به موقع اجرا در آمده است.

۱۴-۱۰ وایرشتراس و ریمان

عموماً چنین تصویری شود که یک ریاضیدان با لقوه درجه اول، برای توفیق در زمینه کارش، باید مطالعات ریاضی جدی را در سنین پائین آغاز کند و نباید که افراط در تعلیمات ابتدایی باعث بطالت وی شود. کارل تئودور ویلهلم وایرشتراس^۳، که در اوستفله^۴ در سال ۱۸۱۵ به دنیا آمد، استثنای عمده ای بر این دو قانون کلی است. وایرشتراس که جوانی اش را در راه خطا به تحصیل حقوق و بازرگانی صرف کرده بود، دیر وارد ریاضیات شد، و تنها در سن چهل سالگی بود که با به دست آوردن یک مقام معلمی در دانشگاه برلین سرانجام خود را از دبیری رها نمود، و هشت سال گذشت تا آنکه، در سال ۱۸۶۴، در این دانشگاه به درجه استادی کامل نایل شد و سرانجام قادر شد که همه وقت خود را صرف ریاضیات پیشرفته نماید. وایرشتراس هرگز از بابت سالهایی که صرف تدریس مقدماتی کرده بود، تأسف نمی خورد، و بعداً تواناییهای قابل توجهش در فنون آموزش را به کار دانشگاهی اش تسری داد و شاید بزرگترین معلم ریاضیات پیشرفته ای شد که تا کنون جهان به خود دیده است.

وایرشتراس تعدادی مقاله درباره انتگرالهای فوق بیضوی، توابع آبلی، و معادلات دیفرانسیل جبری نوشت، ولی وسیعترین سهم معلوم او در ریاضیات ایجاد نظریه توابع مختلط توسط سریهای توانی است. این کار، به معنایی، توسیعی از صفحه مختلط بود که پیشتر لاگرانژ در جهت آن کوشیده بود، ولی وایرشتراس آن را با دقت کامل به پایان رسانید. وایرشتراس علاقه خاصی به توابع تام و توابعی که توسط حاصلضربهای نامتناهی تعریف می شوند، نشان می داد. او همگرایی یکنواخت را کشف و، آن گونه که در بالا دیده ایم، به اصطلاح حسابیدن آنالیز، یا کار تحویل اصول آنالیز به مفاهیم اعداد حقیقی را آغاز کرد. تعداد زیادی از یافته های ریاضی او، نه از طریق چاپ توسط خود او، بلکه از طریق یادداشت هایی که از درس او برداشته می شدند، جزو متعلقات ریاضی دنیای ریاضی در آمدند. وی در دادن اجازه به دانشجویانش و دیگران برای آنکه پیرامون بسیاری از گوه رهای ریاضی اش تحقیق کنند و افتخار آن را از آن خود کنند، بسیار دست و دل باز بود. به عنوان مثال، تا حدی در اشاره به این نکته، در دروسش به سال ۱۸۶۱ بود که برای اولین بار مثال خود از یک تابع پیوسته مشتق ناپذیر را به بحث گذاشت، که سرانجام در سال ۱۸۷۴ توسط پل دو بوا - رمون^۵ (۱۸۳۱-۱۸۸۹) منتشر گردید.

1. Bertrand Russel 2. Alfred North Whitehead
3. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 4. Ostenfelde
5. Paul du Bois-Reymond



کارل وایر شتراس
(مجموعه دیوید اسمیت)

در جبر، وایر شتراس شاید اولین کسی بود که تعریف به اصطلاح اصل موضوعی دترمینان را ارائه داد. وی دترمینان یک ماتریس مربعی مانند A را به عنوان یک چند جمله‌ای بر حسب عناصر A تعریف کرد، که نسبت به عناصر هر سطر A همگن و خطی است، و صرفاً وقتی تغییر علامت می‌دهد که دو سطر A جابجا شوند، و وقتی A ماتریس واحد متناظر باشد مقدار آن به ۱ بدل می‌شود. وی همچنین در صورت‌های دو خطی و مربعی سهم داشت، و، همراه با ج. ج. سیلوستر (۱۸۱۴-۱۸۹۷) و ه. ج. س. اسمیت (۱۸۲۶-۱۸۸۳)، نظریه مقدماتی مقسوم‌علیه‌های ماتریسهای λ را به وجود آورد.

وایر شتراس معلم پر نفوذی بود، و دروسی که او با دقت زیاد آماده می‌کرد، نمونه کاملی برای بسیاری از ریاضیدانان آینده بود؛ «دقت وایر شتراسی» با «استدلال فوق‌العاده دقیق» مترادف گردید. وایر شتراس «وجدان تمام‌عیار ریاضی» بود. وی در سال ۱۸۹۷، درست ۱۰۰ سال پس از نخستین چاپ کوششی برای تدقیق حسابان، توسط لاگرانژ در سال ۱۷۹۷، در برلین از دنیا رفت.

همراه با این دقیق‌سازی ریاضیات، گرایش به تعمیم‌مجرد، فرایندی که در ریاضیات امروزه بسیار بارز است، پدید آمد. ریاضیدان آلمانی گئورگ فریدریش برنهارد ریمان شاید بیش از هر ریاضیدان دیگر قرن نوزدهم در این جنبه ریاضیات جدید تأثیر داشته است. وی مطمئناً تأثیر گزافی بر تعدادی از شعبه‌های ریاضی، بخصوص هندسه و نظریه توابع داشته است، و تعداد ریاضیدانانی که پیش از او افکاری را برای بسط بیشتر برای جانشینانسان به ارث گذاشته‌اند، بسیار اندک است.

ریمان در سال ۱۸۲۶ در دهکده کوچکی در هاننوفر به دنیا آمد. پدرش کشیشی از فرقه لوتری بود. رفتارش همواره عجولانه و از نظر مزاج همیشه ضعیف بود. علیرغم تنگدستی پدر، تحصیلات مناسبی، ابتدا در دانشگاه برلین و سپس در دانشگاه گوتینگن



گتور گتریمان
(مجموعه دیوید اسمیت)

کسب نمود. درجه دکترای خود را از مؤسسه اخیر با نوشتن رساله درخشانی در زمینه نظریه توابع مختلط دریافت کرد. در این رساله به اصطلاح معادلات دیفرانسیل کوشی-ریمان که تحلیلی بودن تابعی از یک متغیر مختلط را تضمین می کند، دیده می شود (گرچه قبل از زمان ریمان این معادلات شناخته شده بودند). مفهوم بسیار ثمر بخش سطح (ریمان نیز، که ملاحظات توپولوژیکی را وارد آنالیز کرد، در همین رساله است. ریمان مفهوم انتگرال پذیری را با تعریف آنچه امروزه آن را به عنوان انتگرال (ریمان) می شناسیم، روشنی بخشید، و این کار، در قرن بیستم، به مفهوم عامتر انتگرال لیگ، و از آنجا به تعمیمهای بیشتر انتگرال منجر شد.

در سال ۱۸۵۴ ریمان پروات دو تسنت^۱ (معلم حق التدریسی) در دانشگاه گوتینگن شد، و برای دریافت این امتیاز خطابه امتحانی مشهور خود را درباره فرضیهایی که مبانی هندسه را تشکیل می دهند، ارائه کرد و این مقاله در قیاس با مقالات هم حجم با آن، غنی ترین مقاله ای به شمار می آید که تا کنون در تاریخ ریاضیات عرضه شده است. در این مقاله تعمیم گسترده ای از فضا و هندسه دیده می شود. نقطه عزیمت ریمان فرمول فاصله بین دو نقطه بینهایت نزدیک به هم بود. در هندسه اقلیدسی این مترویک به صورت زیر داده می شود

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ریمان خاطر نشان کرد که می توان از فرمولهای فاصله عیدیه ای استفاده کرد، که هر یک از این متریکها خاص فضاها و هندسه های ناشی از آنها را معین می کند. فضای با متریکی به شکل

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dx dz +$$

$$+g_{xy}dydx+g_{yz}dy^2+g_{yz}dydz \\ +g_{yz}dzdx+g_{yz}dzdy+g_{yz}dz^2,$$

که در آن g ها ثابتها یا توابعی از x, y, z هستند، امروزه به فضای ریمانی معروف است، و هندسه چنین فضایی هندسه ریمانی نامیده می شود. فضای اقلیدسی حالت بسیار خاصی است که در آن، $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$ ، و همه g های دیگر صفرند. بعداً آلبرت اینشتین و دیگران مفهوم وسیع فضا و هندسه ریمان را محیط ریاضی لازم برای نظریه عمومی نسبیت یافتند. خود ریمان از چند لحاظ در قیزیک نظری سهم داشت، مثلاً وی اولین کسی بود که به مطالعه ریاضی موجهای تلاطمی پرداخت.

در آثار ریاضی، به اصطلاح تابع g فضای ریمان و فرضیه ریمان وابسته به آن شهره اند. این فرضیه حدس ثابت نشده مشهوری است که در آنالیز کلاسیک همان کیفیت «آخرین قضیه» فرما را در نظریه اعداد دارد. اوپلر روابطی را بین نظریه اعداد اول و سری

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 + \dots,$$

که در آن σ عدد صحیحی است، خاطر نشان کرده بود. ریمان همان سریهارا وقتی σ عدد مختلطی مانند $\sigma + i\tau$ بود، مورد مطالعه قرار داد. مجموع این سری معرف تابعی است مانند $\zeta(\sigma)$ که به تابع z فضای ریمان معروف است. ریمان، در حدود سال ۱۸۵۹، حدس زد که همه صفرهای موهومی تابع z دارای قسمت حقیقی $\sigma = 1/2$ اند. در سال ۱۹۱۴ نظریه اعداد دان انگلیسی، سر گادفری هرلد هاردی^۱ (۱۸۷۷-۱۹۴۷) موفق به اثبات این مطلب شد که $\zeta(\sigma)$ بینهایت صفر با $\sigma = 1/2$ دارد ولی حدس اولیه ریمان، گرچه اکنون بیش از قرن سابقه دارد، هنوز حل نشده است. هیلبرت تعیین درستی یا نادرستی فرض ریمان را به عنوان یکی از ۲۳ مسئله مشهور پاریس خود برگزید.

در سال ۱۸۵۷ ریمان به سمت استادیاری در گوتینگن منصوب شد، و سپس، در سال ۱۸۵۹، در سمت استادی جانشین دیریکله در کرسیی شد که زمانی گاوس آن را در اختیار داشت. ریمان در سال ۱۸۶۶، وقتی ۴۰ سال بیشتر نداشت، در شمال ایتالیا، جایی که به دنبال بهبود سلامتی رفته بود، به بیماری سل از دنیا رفت.

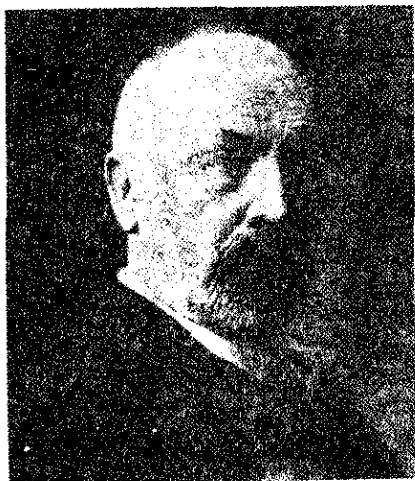
۱۴-۱ کانتور، کرونگر، و پوانکاره

این بخش به بررسی کوتاه زندگی گئورگ کانتور و زندگی هانری پوانکاره، دو ریاضیدانی که ایام عمرشان بخشی در قرن نوزدهم و بخشی در قرن بیستم گذشت و تأثیر فوق العاده‌ای

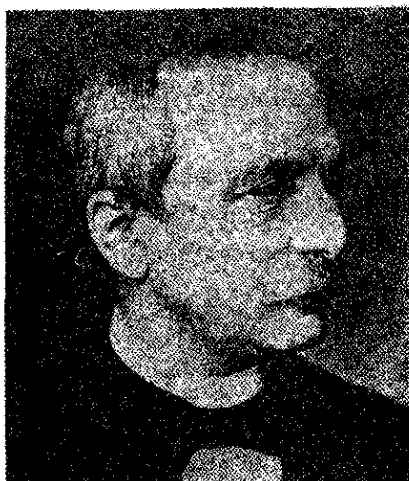
بر قسمت اعظم رياضيات امروزي داشتند، اختصاص خواهد يافت. همچنين طبيعي است كه چند كلمه دربارهٔ لئوپولد كرونكر، منتقد سرسخت و سختگير رياضيات بينهايت كانتور گنجانيده شود.

گئورگ فرديناند لوتويك فيليب كانتور^۱ از والدين دانماركي در سن پترزبورگ، روسيه، در سال ۱۸۴۵ به دنيا آمد، و در سال ۱۸۵۶ با والدين خود به شهر فرانكفورت در آلمان كوچ كرد. پدر كانتور از يهودياني بود كه به آيين پروتستان گرويده بود، و مادر او در ولادت كاتوليک بود. پسر علاقهٔ شديدی به الاهيات قرون وسطی و مباحثات پفرنچ آن در بارهٔ پيوستگي و لايتناهي پيدا كرد. به دنبال آن پيشهاد پدر را در جهت آماده شدن برای پرداختن به شغل مهندسی به كنار گذاشت و فكرش را در فلسفه، فيزيك، و رياضيات متمرکز كرد. در زوريخ، گوتينگن، و برلين (كه در آنجا تحت تأثير وايرشتراس قرار گرفت و دكتورای خود را در سال ۱۸۶۷ از آنجا اخذ كرد) به تحصيل پرداخت. سپس مدتی طولانی را در شغل معلمی در دانشگاه هاله از سال ۱۸۶۹ تا ۱۹۰۵ سپری كرد. در سال ۱۹۱۸ در هاله دريك بيمارستان روانی در گذشت.

موضوعهای مورد علاقهٔ كانتور بدو نظريهٔ اعداد، معادلات نامعين، و سريهای مثلثاتی بود. نظريهٔ ظريف سريهای مثلثاتی ظاهراً الهامبخش وی در نگرش به مبانی آناليز بوده است. وی بحث زیبای خود از اعداد گویا را به وجود آورد - كه از دنباله‌های همگرا از اعداد گویا استفاده می‌كند و كاملاً با بحث ملهم از هندسهٔ دكیند تفاوت دارد - و در سال ۱۸۷۲ كار انقلابی‌اش دربارهٔ نظريهٔ مجموعه‌ها و نظريهٔ اعداد نامتناهی را آغاز كرد.



گئورگ كانتور
(مجموعهٔ ديويده اسميت)



لئوپولد کرونگر
(مجموعه دیوید اسمیت)

با کار اخیرش، کانتور زمینه کاملاً تازه‌ای از تحقیقات ریاضی را به وجود آورد. در مقاله‌های خود، وی نظریه اعداد ترانسفینی را، بر اساس یک بحث ریاضی در باره بینهایت واقعی، ابداع کرد، و حساب اعداد ترانسفینی را مشابه با حساب اعداد متناهی به وجود آورد.

کانتور به شدت مذهبی بود، و کار او، که به تعبیری ادامه مباحثات مربوط به پارادوکسهای زنون بود، گرایش باطنی او را به افکار مدرسی قرون وسطایی در باره ماهیت بینهایت، منعکس می‌کند. دیدگاههای او با مخالفت‌های شدیدی، عمدتاً از سوی لئوپولد کرونگر (۱۸۲۳ - ۱۸۹۱) از دانشگاه برلین روبرو شد، و کرونگر با تمام قوا با تلاشهای کانتور برای به دست آوردن منصب تدریس در دانشگاه برلین مخالفت کرد. امروزه، نظریه مجموعه‌های کانتور تقریباً در هر شاخه ریاضیات ریشه دوانیده، و معلوم شده است که در توپولوژی و مبانی نظریه توابع حقیقی از اهمیتی خاص برخوردار است. در زمینه منطق مشکلاتی وجود دارد و پارادوکسهای پدیدار شده‌اند. جدل بین صورتگرایان، به رهبری هیلبرت، و شهودگرایان، به رهبری براوئر، در قرن بیستم، اساساً دنباله جدل بین کانتور و کرونگر است. در فصل بعد نگاه عمیقتری به این مطالب خواهیم داشت.

کرونگر در لایپزیگ نزدیک برسلو، در سال ۱۸۲۳ متولد شد و کومر معلم او در دبیرستان شهر زادگاه او بود. وی سپس در دانشگاه برلین نزد ژاکوبی، اشتاینر، و دیریکله درس خواند، و سپس در دانشگاه بن، باز هم پیش کومر، به تحصیل پرداخت. بعد از اتمام تحصیلاتش وی به مدت یازده سال از ۱۸۴۴ تا ۱۸۵۵ به تجارت پرداخت و از آنجا که سرمایه‌گذار مستعدی بود ثروت شخصی زیادی اندوخت. در سال ۱۸۵۵ به برلین نقل مکان کرد و در سال ۱۸۶۱، تدریس در دانشگاه آن شهر را آغاز کرد. کومر نیز به برلین کوچ کرده بود، و کومر، وایر شتراس، و کرونگر یک گروه قوی سه‌عضوی را تشکیل دادند. کرونگر

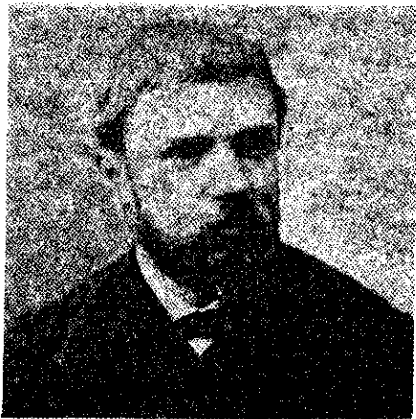
در نظریه معادلات، توابع بیضوی، و نظریه جبری اعداد تخصص داشت. به عنوان يك متناهی گرا، کار کانتور را مردود دانست و آن را الاهیات و نه ریاضیات قلمداد کرد. با این اعتقاد که کل ریاضیات باید مبتنی بر روشهای متناهی روی اعداد صحیح باشد، وی يك فیثاغورس قرن نوزدهم بود. این جمله را او گفته است که «خداوند اعداد صحیح را آفرید، باقی کار آدمی است». وی در سال ۱۸۹۱ در برلین درگذشت.

ژول هانری پوانکاره، که به تأیید عموم برجسته ترین ریاضیدان زمان خود است، در سال ۱۸۵۴ در نانسی^۱، فرانسه، به دنیا آمد. وی پسر عم ریمون^۲ پوانکاره، سیاستمدار برجسته و رئیس جمهور فرانسه در طول جنگ بین الملل اول بود. بعد از فارغ التحصیل شدن از مدرسه پلی تکنیک در سال ۱۸۷۵، هانری به اخذ درجه مهندسی معادن از مدرسه معادن^۳ در سال ۱۸۷۹ نایل شد، و در همان سال از دانشگاه پاریس درجه دکترای علوم دریافت کرد. پس از فراغت از تحصیل از مدرسه معادن، به مقام معلمی در دانشگاه کان^۴ منصوب شد، ولی دو سال بعد به دانشگاه پاریس انتقال یافت، و در آنجا تا زمان مرگش، در سال ۱۹۱۲، چندین کرسی استادی در ریاضیات و علوم را در اختیار داشت.

پوانکاره را به عنوان آخرین جامع العلوم در زمینه ریاضیات وصف کرده اند. این مطلب مطمئناً حقیقت دارد که دامنه موضوعاتی که وی بر آنها تسلط داشت و باعث غنای آنها شد، به طور حیرت آوری گسترده بود. در سوربون هر سال درس تازه ای را در زمینه ریاضیات محض یا کاربرده به نحوی درخشان تدریس می کرد، که بسیاری از این دروس مدت کوتاهی بعد چاپ می شدند. او نویسنده کثیرالتألیفی بود، و بالغ بر ۳۵۰ جلد کتاب و ۵۵۰ مقاله فنی نوشت. وی همچنین یکی از توانا ترین کسانی بود که ریاضیات و علوم را به زبان عامه درمی آورند. کتابهای جلد شمیم توصیفی ارزان قیمت او را هر کس با هر حرفه ای حریر صانه خریداری می کرد و می خواند؛ اینها شاهکارهایسی اند که، به دلیل روشنی بیان و سبک گیر، هیچ کتابی بر آنها پیشی نگرفته است و به زبانهای خارجی بسیاری ترجمه شده اند. در واقع نوشته های عامه پسند پوانکاره از لحاظ ادبی به قدری ممتازند که عالیه ترین درجه ای که يك نویسنده فرانسوی می تواند به آن برسد، نصیب او شده است: انتخاب به عضویت بخش ادبی انستیتوی فرانسه.

پوانکاره هرگز مایل نبود که مدت زیادی در زمینه واحدی کار کند. بلکه ترجیح می داد که به چالاکي از عرصه ای به عرصه دیگر بجهد. یکی از معاصرینش وی را «يك فاتح، نه يك مستعمره دار» توصیف کرده است. رساله دکترای او درباره معادلات دیفرانسیل به قضایای وجودی مربوط است، این اثر او را به بسط نظریه توابع اوتومورفیک، و به ویژه به اصطلاح توابع - زتا- فوکسی^۵ راهبر شد و پوانکاره نشان داد که می توان از این توابع برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب جبری استفاده کرد. پوانکاره همچون لاپلاس سهم ارزنده ای در موضوع احتمالات داشت. وی همچنین توپولوژی را که از موضوعات مورد

1. Nancy	2. Raymond	3. École des Mines
4. Caen	5. Institut	6. Zeta - Fuchsian



هانری پوانکاره
(مجموعه دیوید اسمیت)

علاقه در قرن بیستم است، حرکت سریعی بخشید، و نام او امروزه در گروههای پوانکاره توپولوژی ترکیباتی دیده می شود. قبلاً، در بخش ۱۳-۶ و مطالعه مسئله ای ۱۲.۱۳ علاقه پوانکاره را به هندسه نا اقلیدسی دیده ایم. در ریاضیات کاربرده، این نابغه ذوقن در موضوعات گوناگونی چون اپتیک، الکتریسیته، تلگراف، موئینگی، کشسانی، ترمودینامیک، نظریه پتانسیل، نظریه کوانتوم، نظریه نسبیت، و کیهانشناسی سهم داشت.

پوانکاره در سرتاسر زندگی از لحاظ جسمی آدمی فاقد ظرافت، نزدیک بین، و حواس پرت بود، ولی دارای حافظه ای بی نقص بود و توانایی به یاد آوردن سریع هر چیزی را که قبلاً یک بار خوانده بود، داشت. وی کارهای ریاضی خود را ذهنی، در حالی که با بی آرامی قدم می زد، انجام می داد، و موقعی که کار به طور کامل در مخیله اش پرورش می یافت، فوراً آن را روی کاغذ می آورد بدون اینکه به باز نویسی یا دستکاری آن اقدام کند. در مقایسه با کارهای عجولانه و گسترده وی، کارهای دقیقاً مهیا شده گاوس و شعار گاوس به یاد می آید: «کم، ولی رسیده».

از عدم چالاکی جسمی پوانکاره داستانهای فراوانی گفته اند. مثلاً درباره او گفته اند که ذوالیمینین بوده است، یعنی، کار خود را با هر دو دست به یک اندازه بد صورت می داده است. وی هیچ استعدادی در نقاشی نداشت، و در مدرسه در این درس نمره صفر می گرفت. در پایان سال تحصیلی، همکلاسیهای او به شوخی یک نمایشگاه عمومی از شاهکارهای هنری او ترتیب دادند. آنها هر فقره را به دقت به زبان یونانی برچسب زدند، مثلاً، «این یک خانه است»، «این یک اسب است»، و غیره.

شاید بتوان گفت که پوانکاره آخرین کسی بوده است که درباره وی تائید معقولی می توان ادعا کرد که همه ریاضیات را در اختیار خود داشته است. در اعصار جدید ریاضیات با چنان سرعت خارق العاده ای رشد یافته است که کاملاً غیر ممکن به نظر می رسد کسی دیگر بار به چنان افتخاری نایل شود.

۱۲-۱۴ سونیا کووالفسکی و امی نوئر

این بخش کوتاه به دو تن از برجسته ترین ریاضیدانان زن اختصاص دارد. سوفیا کوروین - کروکوفسکی^۱، که بعداً به سونیا کووالفسکی^۲ مشهور شد، در یک خانوادۀ اشرافی روسیه، در سال ۱۸۵۰ در مسکو به دنیا آمد. وقتی هفده ساله بود به سن پترزبورگ رفت و نزد معلمی از مدرسۀ نیروی دریایی آنجا به مطالعۀ حسابان پرداخت. چون به دلیل زن بودن، از ادامۀ تحصیلات عالیه در دانشگاههای روسیه منع شده بود، با ولادیمیر کووالفسکی (که بعداً دیرین شناس برجسته ای شد) که با او اظهار همدردی می کرد، ترتیب یک ازدواج صوری را داد تا از مخالفت های والدین با تحصیل او در خارج، رهایی یابد. ازدواج در سال ۱۸۶۸ صورت گرفت و در بهار سال بعد، این زوج به هایدلبرگ رفتند.

کووالفسکی در هایدلبرگ در دروس ریاضی کونیگسبرگر^۳ و دو بو آرمون^۴ (۱۸۳۱-۱۸۸۹) و دروس فیزیک کیرشهوف^۵ (۱۸۲۴-۱۸۸۷) و هلمهولتز^۶ (۱۸۲۱-۱۸۹۴) حضور یافت. کونیگسبرگر قبلاً پیش کارل وایرستراس در دانشگاه برلین درس خوانده بود، و داستان هایی که مشتاقانه از استادش نقل می کرد، کم کم شوق مطالعه در نزد آن معلم بزرگ را در وی برانگیخت. وی در سال ۱۸۷۰ وارد برلین شد ولی دانشگاه را در عدم قبول دختران دانشجوی سرسخت دید. بنا بر این مستقیماً به وایرستراس مراجعه کرد و او، با وصول توصیه نامه ای قوی از کونیگسبرگر، وی را به عنوان یک شاگرد خصوصی پذیرفت. کووالفسکی به زودی به شاگرد موردا علاقه وایرستراس بدل شد و وی دروس دانشگاهی خود را برای کووالفسکی تکرار کرد. وی تحسین وایرستراس را برانگیخت و به مدت چهار سال (۱۸۷۴-۱۸۷۰) نزد استاد به تحصیل پرداخت، و طی این مدت نه تنها دروس ریاضی دانشگاه را فرا گرفت، بلکه سه مقاله مهم نیز نوشت، یکی درباره نظریۀ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، یکی درباره تحویل انتگرال های آبلی نوع سوم، و یکی مکمل تحقیق لاپلاس در شکل حلقه های کیوان.

در سال ۱۸۷۴ از سوی دانشگاه گوتینگن، به سونیا کووالفسکی، به طود غیابی، درجۀ دکترای فلسفه اعطا شد، و به دلیل عالی بودن کیفیت مقاله ای که در بارۀ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی عرضه کرده بود، از امتحان شفاهی معاف شد. در سال ۱۸۸۸، درسی و هشت سالگی به بزرگترین موفقیت دوران زندگی اش نایل شد و این زمانی بود که آکادمی فرانسه جایزۀ بسیار معتبر پری بوردن^۷ را به خاطر مقاله «دربارۀ مسئلۀ گردش یک جسم صلب حول یک نقطۀ ثابت» به او اعطا کرد. از این پانزده مقاله ای که برای دریافت جایزه تسلیم شده بود،

1. Sophia Korvin - Krukovsky

2. Sonja Kowalevsky [دربان روسی کووالفسکا یا گفته می شود]

3. Königsberger

4. du Bois - Reymond

5. Kirchhoff

6. Helmholtz

7. Prix Bordin



سونیا کووالفسکی
(مجموعه دیوید اسمیت)

مقاله کووالفسکی بهترین شناخته شد؛ این مقاله را چنان استثنایی تلقی کردند که جایزه را از ۳۰۰۰۰ فرانک به ۵۰۰۰۰ فرانک افزایش دادند.
از سال ۱۸۸۴ تا پایان زندگی در سال ۱۸۹۱، کووالفسکی به سمت استاد ریاضیات عالی در استخدام دانشگاه استکهلم بود. شعار او این بود: «هرچه را می دانی بگو، آنچه را که لازم است انجام ده، هرچه پیش آید خوش آید».
آمالی امی نوثر^۱ که او را عموماً بزرگترین ریاضیدان زن می دانند، در ارلانگن، آلمان غربی، در سال ۱۸۸۲ متولد شد. پدر او ماکس نوثر (۱۸۴۴ - ۱۹۲۱) ریاضیدان برجسته ای در دانشگاه ارلانگن بود. ماکس نوثر^۲، مانند پل گوردون^۳ (۱۸۳۷ - ۱۹۱۲) که او هم وابسته به دانشگاه و از دوستان نزدیک خانواده نوثر بود، یک جبردان بود. تعجب آور نیست که امی نوثر هم، که در این دانشگاه تحصیل کرد، متخصص جبر شد. او رساله دکترای خود را زیر نظر گوردون در سال ۱۹۰۷ با عنوان «در باره دستگاههای کامل پایاها برای فرمهای درجه چهارم سه تایی» نوشت. موقعی که گوردون در سال ۱۹۱۰ بازنشسته شد، جای او را یک سال بعد ارنست فیشر^۴ (۱۸۷۵ - ۱۹۵۹)، جبردان دیگری، گرفت که علاقه ویژه ای به نظریه حذف و نظریه پایاها داشت. تأثیر او بر نوثر بسیار زیاد بود و به راهنمایی فیشر، اشتغال ذهنی او از جنبه الگوریتمی کار گوردون به رهیافت اصل موضوعی مجرد هیلبرت منتقل شد.

بعد از ترک ارلانگن، امی نوثر در گوتینگن به تحصیل پرداخت و در آنجا امتحانات احراز شرایط خود را در سال ۱۹۱۹، بعد از فائق آمدن بر مخالفت های عده ای از اعضای هیأت علمی که با مدرسین زن مخالف بودند، گذراند. در ۱۹۲۲ وی استاد استثنایی دانشگاه گوتینگن

1. Amalie Emmy Noether
4. Ernst Fischer

2. Max Noether

3. Paul Gordon



آمالی امی نوئر
(مجموعه دیوید اسمیت)

شد و این سمت را تا سال ۱۹۳۳ به عهده داشت و در این زمان به دلیل زیاده رویهای انقلاب ملی آلمان، وی وعدهٔ کثیر دیگری از شرکت در فعالیتهای علمی منع شدند. وی بلا درنگ با قبول سمت استادی کالج برین ماوئر^۱ در پنسیلوانیا آلمان را ترک کرد و عضو مؤسسهٔ تحصیلات عالی^۲ در پرینستون شد. سالهای عمر او در آمریکا شاید شادترین و پسر ثمرترین بخش زندگی اش باشد. وی در سال ۱۹۳۵، در پنجاه و سه سالگی و در اوج قدرت خلاقه اش چشم از جهان فرو بست.

گرچه نوئر از لحاظ کیفیت تدریس ضعیف و فاقد مهارتهای آموزشی بود، وی توانست الهامبخش عدهٔ شگفت آوری دانشجو باشد که آنان نیز در زمینهٔ جبر مجرد از خود اثر گذاشتند. مطالعات او دربارهٔ حلقه‌های مجرد و نظریهٔ ایده‌آلها اهمیت خاصی در بسط جبر نوین داشته‌اند.

در مراسم پس از مرگش، امی نوئر سخت مورد ستایش آلبرت اینشتین قرار گرفت. شخصی یک بار او را دختر ما کس نوئر توصیف کرده بود. ادموند لاندائو در جواب او گفت: «ما کس نوئر پدر امی نوئر بود، امی مبدأ مختصات در خانوادهٔ نوئر است». صدمین سال تولد امی نوئر در سال ۱۹۸۲ در کالج برین ماوئر جشن گرفته شد.

۱۴-۱۳ اعداد اول

اعداد اول تاریخی طولانی، از روزگار یونانیان باستان گرفته تا زمان حاضر داشته‌اند. چون

1. Bryn Mawr College
2. Institute for Advanced Study

برخی از مهمترین اکتشافات راجع به اعداد اول در قرن نوزدهم انجام شده است، اینجا محل مناسبی برای بحث درباره این اعداد جالب، به نظر می رسد.

قضیه بنیادی حساب می گوید که اعداد اول خشت بناهایی هستند که همه اعداد صحیح دیگر از آنها به طور ضربی ساخته می شوند. از اینرو اعداد اول بسیار مورد مطالعه قرار گرفته اند، و تلاشهای زیادی صرف کوشش در تعیین کیفیت توزیع آنها در دنباله اعداد صحیح مثبت شده است. نتایج عمده به دست آمده در عهد باستان، برهان نامتناهی بودن اعداد اول از اقلیدس و غربال اراتستن برای یافتن همه اعداد اول کوچکتر از عدد مفروضی مانند n هستند.

از غربال اراتستن می توان فرمول پر زحمتی به دست آورد که عدد اعداد اول پایین تر از n را وقتی اعداد اول پایین تر از $\sqrt{n}$ معلوم باشند، تعیین می کند. این فرمول به طور قابل ملاحظه ای در سال ۱۸۷۵ توسط ارنست میسل^۱ اصلاح شد. وی موفق به نشان دادن این مطلب شد که عدد اعداد اول پایتتر از 10^8 عبارت از ۴۵۵،۷۶۱،۵ است. ریاضیدان دانمارکی برتلسن^۲ به این محاسبات ادامه داد و، در سال ۱۸۹۳، اعلام کرد که عدد اعداد اول زیر 10^9 عبارت از ۴۷۸،۴۷۸،۸۴۷،۵۰ است. در سال ۱۹۵۹، ریاضیدان امریکایی د. ه. لیمر^۳ نشان داد که نتیجه اخیر نادرست است و باید این عدد ۵۳۴،۸۴۷،۵۰ باشد، وی همچنین نشان داد که عدد اعداد اول زیر 10^{10} عبارت از ۵۱۱،۵۱۲،۴۵۵ است.

تا کنون هیچ شیوه عملی برای آزمون اول بودن اعداد بزرگ به دست نیامده است، و تلاشهایی که مصروف آزمون برخی اعداد معین شده، فوق العاده زیاد بوده است. بالغ بر ۷۵ سال بزرگترین عددی که اول بودن آن محقق گردیده بود، عدد ۳۹ رقمی ۱۰۵،۷۲۷،۸۸۴،۷۱۵،۳۰۳،۶۸۷،۷۳۱،۲۳۱،۴۶۹،۴۶۰،۱۸۳،۴۱۱،۷۰۱ = $10^{127} - 1$ بود که توسط ریاضیدان فرانسوی آناتول لوکاس^۴ در سال ۱۸۷۶ داده شده بود. در سال ۱۹۵۲، ماشین EDSAC در کمبریج انگلستان اول بودن عدد بسیار بزرگتر (۷۹ رقمی)

$$1 + (10^{127} - 1)^2 = 10^{255}$$

را به ثبوت رساند و از آن پس سایر کامپیوترهای رقمی اول بودن اعداد بسیار بزرگتر $10^{255} - 1$ را به ازای $n = 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937$ و ۲۹۷۰۱ نشان داده اند.

رؤیای نظریه اعداد دانان یافتن تابعی مانند $f(n)$ است که به ازای اعداد صحیح مثبت n ، تنها اعداد اول از آن به دست آیند و دنباله اعداد اولی که به این ترتیب حاصل می شود شامل عدد اعداد اول متفاوت و نامتناهی باشد. مثلاً $f(n) = n^2 - n + 41$ اعداد اول را به ازای هر $n < 41$ به طوری که n به دست می دهد، ولی $f(41) = 41^2$ ، که عدد

مرکبی است. چند جمله‌ای درجه دوم $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ اعداد اول را به ازای $n < 80$ می‌دهد. می‌توان توابع چند جمله‌ای پیدا کرد که متوالیاً هر چند تا عدد اول را که بخواهیم به ما بدهد، ولی هیچ تابعی نمی‌توان یافت که همواره اعداد اول از آن حاصل شوند.

در حدود سال ۱۶۴۰ بود که پیردو فرما حدس زد که $f(n) = 2^n + 1$ به ازای کلیه اعداد صحیح نامنفی، اول است ولی، همچنانکه در بخش ۱۰ - ۳ متذکر شدیم، این مطلب درست نیست. نتیجه جالب و مؤخری در این زمینه، اثبات وجود عددی حقیقی مانند A ، توسط و. ه. میلز^۱ در سال ۱۹۴۷، است به قسمی که بزرگترین عدد صحیح نایبتر از A^{2^n} به ازای هر عدد صحیح مثبت n یک عدد اول است. درباره مقدار واقعی، و حتی مقدار تقریبی، عدد حقیقی A چیزی گفته نشده بود.

تعمیم قابل توجهی از قضیه اقلیدس درباره نامتناهی بودن اعداد اول توسط لوژون - دیریکله (۱۸۵۵ - ۱۸۵۹) داده شد. وی موفق شد نشان دهد که هر تصاعد حسابی مانند

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots,$$

که در آن اعداد a و d متباین باشند، شامل تعداد بینهایتی از اعداد اول است. اثبات این قضیه چندان ساده نیست.

شاید شگفت‌انگیزترین قضیه‌ای که تا کنون راجع به توزیع اعداد اول به دست آمده به اصطلاح **قضیه اعداد اول** باشد. فرض کنید A_n معرف اعداد اول کمتر از n باشد. در این صورت بنا بر قضیه اعداد اول وقتی n بزرگتر و بزرگتر می‌شود $(A_n \log n)/n$ به سمت یک میل می‌کند. به عبارت دیگر A_n/n ، که **چگالی** اعداد اول در بین اولین n عدد صحیح نامیده می‌شود، با $1/\log n$ تقریب زده می‌شود، و کیفیت تقریب با افزایش n بهتر می‌شود. این قضیه را گائوس با امتحان جدول بزرگی از اعداد اول حدس زد، و در سال ۱۸۹۶ ریاضیدانان فرانسوی و بلژیکی یعنی ژ. آدامار^۲ و ش. ژ. دو لا واله پوسن^۳ آن را مستقل از یکدیگر ثابت کردند.

جدول عاملی گسترده، در تحقیقات مربوط به اعداد اول ارزش فراوان دارند. چنین جدولی برای همه اعداد تا ۲۴۰۰۰۰ در سال ۱۶۵۹ توسط ی. ه. ران^۴، به عنوان ضمیمه‌ای بزرگ کتاب جبر منتشر شد. در سال ۱۶۶۸، جان هل^۵ انگلیسی این جدول را تا ۱۰۰,۰۰۰ بسط داد. در نتیجه درخواستهای ریاضیدان آلمانی ی. ه. لامبرت، جدول مبسوط و بدسرانجامی توسط مدیر مدرسه‌ای از وین به نام فلکل^۶ محاسبه شد. اولین جلد محاسبات فلکل، که عوامل اعداد تا ۴۰۸۰۰۰ را می‌داد، در سال ۱۷۷۶ به خرج خزانه‌داری سلطنتی اتریش به چاپ رسید. اما این جلد مشترکین زیادی پیدا نکرد و لذا خزانه‌داری تقریباً کلیه مجلدات را جمع‌آوری و کاغذ آن را به فشنگ تبدیل کرد تا در جنگ برای کشتن ترکها

1. W.H. Mills

2. J. Hadamard

3. C. J. de la Vallée Poussin

4. J. H. Rahn

5. John Pell

6. Felkel

از آن استفاده نمایند در قرن نوزدهم، تلاشهای مشترک چرناک^۱، بورکهارت^۲، کرله، گلیشر، و محاسب برق آسای عجوبه، دازه، منجر به پدید آمدن جدولی شد که همه اعداد تا ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ را شامل می‌شد و در ده جلد به چاپ رسید. ولی، ازمیان دستاوردهای از این نوع، بزرگترین نشان جدولی است که توسط ی. پ. کولیک^۳ (۱۷۷۳-۱۸۶۳)، از دانشگاه پراگ، محاسبه شد. دستویس او که هنوز چاپ نشده، حاصل تفنن ۲۰ ساله اوست، و کلیه اعداد تا ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ را شامل می‌شود. بهترین جدول عوامل موجود، جدول ریاضیدان آمریکایی د. ه. لیمر^۴ (۱۸۶۷-۱۹۳۸) است. این جدولی است که استادانه در یک جلد تهیه شده و شامل اعداد تا ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ می‌شود. با پیشرفت کامپیوترهای الکترونیکی مدرن، آزمون اول بودن و ساختن جدول برای اعداد اول خاص شدت زیادی یافته است. مثلاً در شماره نواسمبر معماهای دیاضی^۵ جدولی از ۹۳ عدد اول پنج رقمی مقلوبی (یک عدد مقلوبی عددی است که آن را از هر طرف بخوانیم، نتیجه یکی است، مانند عدد اول مقلوبی ۳۴۱۷۱۴۳) و تمام اعداد مقلوبی هفت رقمی که تعدادشان ۶۶۸ است، دیده می‌شود. محاسبات بر یک کامپیوتر PDP-۱۱/۴۵ در دانشگاه واترلو^۶ انجام شده، و زمان کامپیوتر کمی بیش از یک دقیقه بوده است. یک عدد مقلوبی ندرقمی بسیار جالب عدد ۳۴۵۶۷۶۵۴۳ است که توسط لئوسائووه^۷، سردبیر این مجله ارائه شده و وی اظهار داشته که ۵۱۷۲ عدد اول مقلوبی ندرقمی موجود است.

حدهای ثابت نشده زیادی در باره اعداد اول موجود است. یکی از آنها بر این مضمون است که بینهایت زوج از اعداد اول توأمان، یا اعداد اولی به شکل p و $p+۲$ ، نظیر ۳ و ۵، ۱۱ و ۱۳، ۲۹ و ۳۱ موجود است. دیگری حدس لگولد باخ^۸ است که در سال ۱۷۴۲ در نامه‌ای به اوایلر آمده است. گولد باخ مشاهده کرده بود که هر عدد زوج، به جز ۲، ظاهراً قسابل نمایش به صورت مجموع دو عدد اول است. مثلاً $۲+۲=۴$ ، $۳+۳=۶$ ، $۵+۳=۸$ ، $۳+۱۳=۱۶$ ، $۷+۱۱=۱۸$ ، $۱۹+۲۹=۴۸$ ، ...، $۹۷+۱۰۰=۱۹۷$ ، والی آخر. تا سال ۱۹۳۱ که ریاضیدان روسی شنیرلمان^۹ نشان داد که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به صورت مجموعی از نایبتر از ۳۰۰,۰۰۰ عدد اول نمایش داد، پیشرفتی در این مسئله حاصل نشد. چندی بعد ریاضیدان روسی وینوگرادوف^{۱۰} نشان داد که عدد صحیح مثبتی مانند N موجود است به قسمی که هر عدد صحیح مانند $n > N$ را می‌توان به صورت حداکثر چهار عدد اول نشان داد، و لسی برهان آن بهیچوجه امکان ارزیابی اندازده N را نمی‌دهد.

سؤالات زیر (که در آن n نمایش عدد صحیح مثبتی است) درباره اعداد اول هرگز

1. Chernac
2. Burckhardt
3. J. P. Kulik

* پدر د. ه. لیمر، د. ن. لیمر خاطر نشان کرده است که جدول کولیک خطاهایی دارد.

4. Crux Mathematicorum
5. University of Waterloo
6. Léo Sauvé
7. C. Goldbach
8. Schnirelmann
9. Vinogradoff

پاسخی نیافته‌اند: آیا بینهایت عدد اول به شکل $n^2 + 1$ موجود است؟ آیا همواره بین n^2 و $(n+1)^2$ عدد اولی وجود دارد؟ آیا هر عددی مانند n از نقطه‌ای به بعد مربع یا مجموع يك عدد اول با يك مربع است؟ آیا تعداد اعداد اول فرما (اعداد اول به شکل $2^{2^n} + 1$) نامتناهی است؟

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱۴ هیئت فوئر باخ

در هندسهٔ مقدماتی نوین مثلثها، دایرهٔ نه نقطه مقام ممتازی دارد. در مثلث مفروض $A_1 A_2 A_3$ که مرکز دایرهٔ محیطی آن O و محل برخورد ارتفاعهای آن H است، فرض کنید که O_1, O_2, O_3 اوساط اضلاع، و H_1, H_2, H_3 پاهاى سه ارتفاع، C_1, C_2, C_3 اوساط پاره‌خطهای HA_1, HA_2, HA_3 باشند. در این صورت نه نقطهٔ $O_1, O_2, O_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$ بر يك دایره واقع‌اند. که به دایرهٔ نه نقطه مثلث مفروض موسوم است. این دایره، بعداً به دلیل نادیده گرفته شدن کار کاشف اولیه، گاهی دایرهٔ اوپلر نامیده می‌شود. در آلمان آن را دایرهٔ فوئر باخ می‌نامند، زیرا کارل ویلهلم فوئر باخ^۱ (۱۸۵۵-۱۸۳۴) جزوه‌ای چاپ کرد که در آن نه تنها به دایرهٔ نه نقطه دست یافت بلکه همچنین ثابت کرد که این دایره بر دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث مفروض مماس است. نتیجهٔ اخیر به قضیهٔ فوئر باخ معروف است و بحق به عنوان یکی از زیباترین قضایای هندسهٔ جدید مثلثها تلقی می‌شود. چهار نقطهٔ تماس دایرهٔ نه نقطه با دواير محاطی داخلی و خارجی به نقاط فوئر باخ مثلث موسوم‌اند و به‌طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. مرکز دایرهٔ نه نقطه، F ، در وسط OH قرار دارد. مرکز هندسی (محل تلاقی میانه‌های مثلث)، G ، نیز بر OH واقع است به قسمی که $GO = 2HG$. خطی که نقاط O, F, G, H بر آن واقع‌اند، به خط اوپلر مثلث مفروض مشهور است. فرض کنید $H_1 H_2, H_2 H_3, H_3 H_1, H_1 H_2, H_2 H_3, H_3 H_1$ اضلاع مقابل یعنی $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$ را در P_1, P_2, P_3 قطع کنند. در این صورت P_1, P_2, P_3 بر خطی موسوم به محور قطبی مثلث $A_1 A_2 A_3$ قرار دارند، و این محور قطبی بر خط اوپلر عمود است. اگر دایرهٔ نه نقطه و دایرهٔ محیطی یکدیگر را قطع کنند، آنگاه محور قطبی وتر مشترك این دو دایره است، و دایرهٔ به قطر HG ، موسوم به دایرهٔ مرکز ارتفاعی مثلث مفروض، نیز از همین نقاط تلاقی می‌گذرد.

شکلی بزرگ و دقیق از يك مثلث منفرج الزاویه را همراه با مرکز هندسی، مرکز ارتفاعی، مرکز دایرهٔ محیطی، مراکز دواير محاطی داخلی و خارجی، خط اوپلر، محور قطبی، دایرهٔ نه نقطه، نقاط فوئر باخ، دایرهٔ محیطی، و دایرهٔ مرکز ارتفاعی آن رسم کنید.

۲۰۱۴ قضیه کوماندینو

فدریگو کوماندینو^۱ (۱۵۰۹-۱۵۷۵) در سال ۱۵۶۵ یکی از اولین قضایا، بعد از دوره یونانیان، را درباره هندسه چهار وجهی هامتشر کرد. این قضیه راجع به میانهای چهاروجهی است، که در آن يك میانه به عنوان پاره خطی تعریف می شود که رأسی از چهاروجهی را به مرکز هندسی وجه مقابل وصل می کند. قضیه کوماندینو بیان می کند که: چهار میانه يك چهار وجهی در نقطه ای که هر میانه را به چهار بخش می کند، به هم می رسند.

(الف) قضیه کوماندینو را به طور تحلیلی ثابت کنید.

(ب) قضیه کوماندینو را به طریق ترکیبی ثابت کنید.

(ج) نشان دهید که صفحه مار به سه مرکز هندسی يك چهاروجهی با وجه چهارم آن چهاروجهی موازی است.

چهاروجهی حاصل از صفحات مار بر رأسهای يك چهاروجهی مفروض و به موازات وجههای مقابل مربوطه، مقابل متمم چهاروجهی مفروض نامیده می شود.

(د) ثابت کنید که رأسهای يك چهاروجهی، مراکز هندسی وجوه چهاروجهی مقابل متمم اند.

(ه) ثابت کنید که هر یال چهاروجهی مقابل متمم، توسط دو وجه چهاروجهی مفروض که یکدیگر را در این یال قطع می کنند، به سه قسمت تقسیم می شود.

۳۰۱۴ ارتفاعهای چهاروجهی

سه ارتفاع يك مثلث همسر اند. آیا چهار ارتفاع يك چهاروجهی هم همسر اند؟

۴۰۱۴ مشابه های فضایی

قضایایی را در فضای سه بعدی که مشابه های قضایای زیر در صفحه هستند، ذکر کنید.

(الف) نیمسازهای زوایای مثلث در مرکز دایره محاطی مثلث همسر اند.

(ب) مساحت دایره برابر با مساحت مثلثی است که طول قاعده آن با محیط دایره مساوی و ارتفاع آن با شعاع دایره برابر باشد.

(ج) پای ارتفاع يك مثلث متساوی الساقین وسط قاعده آن است.

۵۰۱۴ عناصر همز اوپه ای

دو خط مار بر رأس يك زاویه و متقارن نسبت به نیمساز آن زاویه خطوط مزدوج همز اوپه ای زاویه نامیده می شوند. قضیه جذابی درباره مثلثها وجود دارد که بیان می کند هر گاه سه خط

مار بر رأسهای يك مثلث همرس باشند، آنگاه سه خط مزدوج همزاویه‌ای آنها نیز همرس‌اند. دو نقطه همرسی را زوج نقاط مزدوج همزاویه‌ای مثلث می‌نامند. شش پای عمود وارد از يك زوج نقاط مزدوج همزاویه‌ای بر اضلاع يك مثلث بر دایره‌ای واقع‌اند که مرکز آن نقطه وسط پاره خط واصل بین زوج نقاط مزدوج همزاویه‌ای است.

(الف) شکلی رسم کنید که نشان دهنده حقایق بالا باشد.

(ب) نشان دهید که مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محیطی يك مثلث، زوجی از نقاط مزدوج همزاویه‌ای تشکیل می‌دهند.

(ج) مشابه‌های فضای سه بعدی تعریفها و قضایای بیان شده در ابتدای این مطالعه مسئله‌ای را پیدا کنید.

نقطه مزدوج همزاویه‌ای مرکزهندسی يك مثلث نقطه هم‌میان یا نقطه لم‌وآن مثلث نامیده می‌شود. این نقطه را اولین بار امیل لم‌وآن (۱۸۴۵ - ۱۹۱۲) در سال ۱۸۷۳، در مقاله‌ای که در انجمن فرانسوی برای پیشرفت علوم^۱ قرائت شد، معرفی کرد و می‌توان مدعی شد که به‌طور جدی به‌مبحث نوین هندسه مثلثات حرکت بخشیده‌است.

۶.۱۴ ساختمانهای ناممکن

(الف) اتحاد زیر را ثابت کنید: $\cos \theta = 4 \cos^3(\theta/3) - 3 \cos(\theta/3)$.

(ب) نشان دهید که ساختن نه ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(ج) نشان دهید که ساختن زاویه 1° با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(د) نشان دهید که ساختن هفت ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(ه) نشان دهید که تثلیث زاویه‌ای که کسینوس آن $2/3$ باشد، با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(و) قطعه خط s مفروض است، نشان دهید که ساختن پاره خطهایی مانند m و n به طوری که $2s : s = m : n = n : s$ ، با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(ز) نشان دهید که ساختن شعاع کره‌ای که حجم آن مجموع حجمهای دو کره دلخواه به شعاعهای معلومی باشد، با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

(ح) نشان دهید که ساختن پاره خطی که طول آن برابر با محیط دایره مفروض باشد، غیرممکن است.

(ط) زاویه‌ای مانند AOB و نقطه‌ای مانند P در داخل آن مفروض‌اند. خط مار بر P که خطوط OA و OB را به ترتیب در C و D به قسمی قطع می‌کند که $CE = PD$ ، E و پای عمود وارد از O بر CD است، به خط فیلون زاویه AOB و نقطه P موسوم است. می‌توان نشان داد که خط فیلون کوتاهترین و تری مانند CD است که می‌توان از P رسم کرد. نشان دهید که در حالت کلی ساختن خط فیلون برای يك زاویه و يك نقطه مفروض

با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است.

۷.۱۴ برخی ساختمانهای تقریبی

(الف) برای ساختمان تقریبی يك هفت ضلعی منتظم محاط در دایره مفروضی، سهم شش ضلعی منتظم محاط در دایره را به عنوان ضلع هفت ضلعی اختیار کنید. این تقریب تاجه حد خوب است.

(ب) يك ساختمان تقریبی از يك نه ضلعی منتظم در دایره مفروضی به شعاع r ، كهه توسط آلبرشت دورر داده شده، به قرار زیر است. محیط دایره ای هم مركز با دایره مفروض و به شعاعی برابر با $\frac{3}{4}r$ رسم کنید. این محیط دایره را به وسیله نقاط A, B, C, D, E, F به شش قسمت مساوی تقسیم کنید. به مراكز B و F ، قوسهایی بر A و مركز مشترك دواير رسم کنید، این قوسها دایره مفروض را به ترتیب در M و N قطع می کنند. در این صورت MN به عنوان يك ضلع نه ضلعی منتظم اختیار می شود. این تقریب تاجه حد خوب است؟

(ج) برای تثلیث زاویه مرکزی مفروضی از يك دایره، کسی پیشنهاد می کند كه وتر قوس مقابل به زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند و سپس این نقاط تثلیث را به مركز دایره وصل نمایند. نشان دهید كه این كار برای زوایای حاده بزرگ به تقریب ضعیفی منجر می شود.

(د) دقت روش زیر برای تثلیث تقریبی يك زاویه را بررسی کنید؛ این روش توسط كوپف^۱ در سال ۱۹۱۹ داده شد و سپس توسط ا. پرون^۲ و م. دوكانی^۳ اصلاح شد. فرض کنید كه زاویه مفروض AOB به عنوان يك زاویه مرکزی در دایره ای به قطر BOC اختیار شود. D ، وسط OC را پیدا کنید، سپس P را بر امتداد OC پیدا کنید به قسمی كه $CP = OC$. در نقطه D ، عمودی اخراج کنید تا دایره را در E قطع کند، سپس نقطه F را بین C و D به قسمی جدا کنید كه $DF = (DE)/3$. به مركز F و به شعاع FB ، قوسی رسم کنید تا امتداد CA را در A' قطع کند. در این صورت زاویه $A'PB$ تقریباً برابر با يك سوم زاویه AOB است.

(ه) دقت روش زیر برای تثلیث تقریبی يك زاویه را بررسی کنید؛ این روش توسط م. دوكانی در سال ۱۹۳۴ داده شد و به حد اعجاب آوری برای زوایای كوچك، دقیق است. فرض کنید كه زاویه مفروض AOB به عنوان يك زاویه مرکزی دایره ای به قطر BOC اختیار شود. فرض کنید D وسط OC و M وسط قوس AB باشد. در این صورت زاویه MDB تقریباً برابر با يك سوم زاویه AOB است.

۸.۱۴ قضیه ساختمان ماسکرونی

فرض کنید دایره به مركز نقطه ای مانند C و مار بر نقطه A با علامت $C(A)$ ، و دایره به مركز C و

شعاعی برابر با پاره خط AB با علامت $C(AB)$ نشان داده شود. رشته ساختمانهای زیر را ثابت کنید و نشان دهید که آنها اثبات قضیه ساختمان ماسکرونی هستند: هر ساختمان اقلیدسی را، مادام که عناصر مفروض و مطلوب نقطه باشند، می‌توان تنها با پرگار اقلیدسی انجام داد. این ساختمانها در جدولی ثبت شده‌اند که در آن سطر بالایی آنچه را که باید رسم شود، نشان می‌دهد، در حالی که سطر زیرین نقاط جدیدی را که باید بدین ترتیب پیدا شوند، نشان می‌دهد.

(الف) ساختن دایره $C(AB)$ با پرگار اقلیدسی

$C(A), A(C)$	$M(B), N(B)$	$C(X)$
M, N	X	

(تذکر: این ساختمان نشان می‌دهد که پرگارهای اقلیدسی و پرگارهای جدید ابزارهای معادلی هستند.)

(ب) پیدا کردن محل تلاقی $C(D)$ با خط واصل بین نقاط A و B با پرگارهای جدید.

حالت ۱، C بر AB واقع نیست.

$A(C), B(C)$	$C(D), C_1(CD)$
C_1	x, y

حالت ۲، C بر AB واقع است.

$A(D), C(D)$	$C(DD_1), D(C)$	$C(DD_1), D_1(C)$	$F(D_1), F_1(D)$	$F(CM), C(D)$
D_1	F , چهارمین رأس متوازی الاضلاع CD, DF	F_1 , چهارمین رأس متوازی الاضلاع CDD_1, F_1	M	X, Y

(ج) پیدا کردن نقطه تلاقی خطوط واصل بین نقاط A, B و نقاط C, D و به کمک پرگارهای جدید.

$A(C),$ $B(C)$	$A(D),$ $B(D)$	$C(DD_1),$ $D_1(CD)$	$C_1(G),$ $G(D_1)$	$C_1(C),$ $G(CE)$	$CF,$ $C_1(CF)$
C_1	D_1	G ، همخط با C و C_1	E ، هريك از نقاط تلاقی	F ، همخط با E و C_1	X

(د) در صفحه ۲۶۸ كتاب قاديخ دياضيات^۱، اثر كاژوري^۲ می خوانيم: «نابلئون مسئله تقسيم محيط دايره به چهار قسمت مساوی را فقط با پرگار، برای رياضيدانان فرانسوی مطرح کرد. ماسکروني این کار را با جدا کردن سه وتر متوالی مساوی باشعاع دايره انجام می دهد؛ وی قوسهای AB ، BC ، CD را به دست می آورد، در این صورت AD يك قطراست؛ بقیه بدیهی است.» قسمت «بدیهی» این ساختمان را تکمیل کنید.

۹.۱۴ ساختمانهای باخط کش و پرگارهای بافرجه ثابت

باخط کش و پرگار با فرجه ثابت، اولین چهارده مسئله ساختمانی زیر را که در خلاصه ای از شگفتیهای اقلیدس اثر موهر یافته می شود، حل کنید:

۱. تقسیم پاره خط مفروضی به دو جزء مساوی.
۲. اخراج عمودی بريك خط مستقیم از نقطه مفروضی واقع بر آن.
۳. ساختن مثلث متساوی الاضلاعی با يك ضلع معلوم.
۴. اخراج عمودی بريك خط از نقطه ای واقع در خارج آن.
۵. رسم خطی از يك نقطه مفروض به موازات يك خط مفروض.
۶. جمع دو پاره خط مفروض.
۷. تفریق يك پاره خط از پاره خط مفروضی بزرگتر از آن.
۸. قراردادن پاره خط مفروضی به طور عمودی بر انتهای يك پاره خط مفروض.
۹. تقسیم پاره خطی به تعداد دلخواهی قسمت مساوی.
۱۰. پیدا کردن سومین جزء تناسب، با معلوم بودن دو پاره خط.
۱۱. پیدا کردن چهارمین جزء تناسب، با معلوم بودن سه پاره خط.
۱۲. پیدا کردن واسطه هندسی بین دو پاره خط مفروض.
۱۳. تبدیل مستطیل مفروضی به يك مربع.
۱۴. رسم مثلثی، با داشتن سه ضلع آن.

۱۰.۱۴ هندسه تئوری لموآن

نماد، سهولت، و دقت ساختارهای آشنای زیر برای رسم خطی از نقطه مفروضی مانند A و به موازات خط مفروض MN را پیدا کنید.

(الف) بر خطی بگذرانید تا MN را در B قطع کند. به شعاع دلخواهی مانند r دایره $B(r)$ را رسم کنید تا MB را در C و AB را در D قطع کند. دایره $A(r)$ را رسم کنید تا AB را در E قطع کند. دایره $E(CD)$ را رسم کنید تا دایره $A(r)$ را در X قطع کند. AX را رسم کنید تا خط موازی مطلوب به دست آید.

(ب) با هر نقطه مناسب مانند D به عنوان مرکز، دایره $D(A)$ را رسم کنید تا MN را در B و C قطع کند. دایره $C(AB)$ را رسم کنید تا دایره $D(A)$ را در X قطع کند. AX را رسم کنید.

(ج) با هر شعاع مناسبی مانند r دایره $A(r)$ را رسم کنید تا MN را در B قطع کند. دایره $B(r)$ را رسم کنید تا MN را در C قطع کند. دایره $C(r)$ را رسم کنید تا دایره $A(r)$ را در X قطع کند. AX را رسم کنید.

نماد، سهولت، و دقت ساختارهای زیر برای رسم خطی عمود بر خط مفروض m از نقطه مفروض P بر آن را پیدا کنید.

(د) به مرکز P و با هر شعاع مناسب، دایره‌ای رسم کنید تا m را در A و B قطع کند. به مراکز A و B و با هر شعاع مناسب قوسهایی رسم کنید تا در Q تلاقی کنند. PQ را، که عمود مطلوب است، رسم کنید.

(ه) با هر نقطه مناسبی غیر واقع بر m به عنوان مرکز، دایره‌ای از P بگذرانید تا m را در Q قطع کند، و قطر QR از این دایره را رسم کنید. PR را، که عمود مطلوب است، رسم کنید.

۱۱.۱۴ اصل دوگانگی

(الف) دو گان ۱۲.۰۹ (الف) را پیدا کنید. (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۲.۰۹).
(ب) با مفروض بودن ۵ خط، بر هر یک از آنها نقطه تماس يك مقطع مخروطی مماس بر ۵ خط را پیدا کنید.

(ج) با مفروض بودن چهار مماس بر يك مقطع مخروطی و نقطه تماس هر يك از آنها، مماسهای بیشتری بر مقطع مخروطی رسم کنید.

(د) دو گان ۱۲.۰۹ (د) را پیدا کنید.

(ه) دو گان ۱۲.۰۹ (ه) را پیدا کنید.

(و) با مفروض بودن سه مماس بر يك مقطع مخروطی و نقاط تماس دوتا از آنها، سومین نقطه تماس را پیدا کنید.

(ز) دو گان قضیه دو مثلث دزادگ را پیدا کنید.

۱۲.۱۴ يك مجموعه اصول موضوعه خود - دوگان برای هندسه تصویری

(الف) نشان دهید که مجموعه اصول موضوعه زیر برای هندسه تصویری، که توسط کارل منگر^۱ در سال ۱۹۴۵ داده شده، خود - دوگان است.

پ ۱: يك خط و تنها يك خط بر هر دو نقطه متمایز واقع است، و يك نقطه و فقط يك نقطه بر هر دو خط متمایز واقع است.

پ ۲: دو نقطه و دو خط وجود دارند به طوری که هر يك از نقاط فقط بر یکی از خطوط و هر يك از خطوط فقط بر یکی از نقاط واقع است.

پ ۳: دو نقطه و دو خط وجود دارند، نقاط واقع بر خطوط نیستند، به طوری که نقطه واقع روی دو خط بر خط دوی دو نقطه قرار دارد.

(ب) صحت سه اصل موضوع (الف) را برای هفت «نقطه» که با حروف A, B, C, D, E, F, G مشخص می شوند، و هفت «خط» که توسط سه تایبهای (AFB) ، (BDC) ، (CEA) ، (AGD) ، (BGE) ، (CGF) ، (DEF) نشان داده می شوند تحقیق کنید. این مثال وجود هندسه های تصویری متنهای (یعنی، هندسه های تصویری مشتمل بر تنها تعدادی متناهی نقطه و خط) را ثابت می کند.

۱۳.۱۴ اصل دوگانی مثلثات

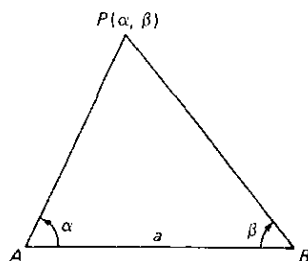
اگر در يك معادله مثلثاتی، به جای هر تابع مثلثاتی که در معادله ظاهر می شود تابع متمم آن را قرار دهیم، معادله جدیدی را که به دست می آید، دوگان معادله اصلی می نامیم. اصل دوگانی زیر را برای مثلثات ثابت کنید: اگر يك معادله مثلثاتی شامل يك زاویه، يك اتحاد باشد، آنگاه دوگان آن نیز يك اتحاد است.

۱۴.۱۴ دستگاه های مختصات

دستگاه مختصاتی را که چارچوب مرجع آن يك پاره خط افقی مانند AB به طول a است و يك نقطه P در صفحه آن به وسیله زاویه $\angle BAP = \alpha$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت و زاویه $\angle ABP = \beta$ در جهت حرکت عقربه های ساعت به عنوان مختصات تعیین می شود، يك دستگاه مختصات دوقطبی نام دارد (نگاه کنید به شکل ۱۱۸).

(الف) معادله دوقطبی: (۱) عمود منصف AB ، (۲) قوسی از يك دایره که وتر آن AB باشد، را پیدا کنید.

(ب) معادلات تبدیلی را پیدا کنید که يك دستگاه مختصات دوقطبی را به دستگاه مختصات



شکل ۱۱۸

دکارتی قائمی که محور x -های آن در امتداد AB و مبدأ مختصات آن وسط AB است، مربوط می‌سازد.

(ج) منحنیهای زیر را مشخص کنید: $\cot\alpha/\cot\beta = k(2)$; $\cot\alpha\cot\beta = k(1)$ (۳) $\cot\alpha + \cot\beta = k$ که در آنها k مقدار ثابتی است.

(د) معادلات دکارتی قائم منحنیهای زیر را که با معادلات قطبی داده شده‌اند، پیدا کنید: (۱) لمنیسکات برنولی، $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ، (۲) کاردیوئید، $r = a(1 - \cos\theta)$ ، (۳) مارپیچ ارشمیدس، $r = a\theta$ ، (۴) مارپیچ متساوی‌الزاویه، $r = e^{a\theta}$ ، (۵) مارپیچ هذلولوی، $r\theta = a$ ، (۶) گل چهاربرگی، $r = a \sin 2\theta$.

(ه) دستگاه مختصات عرضی و طولی بزرگ سطح کروی را شرح دهید.

(و) یک تعمیم طبیعی دستگاه مختصات قطبی از صفحه به فضا چنین به دست می‌آید که مبدأ ثابتی مانند O می‌گیریم و برای نقطه‌ای مانند P طول بردار OP ، r ، عرض جغرافیایی این نقطه، ϕ ، و طول جغرافیایی آن، θ ، را نسبت به کره‌ای به مرکز O و شعاع OP به عنوان مختصات اختیار می‌کنیم. این مختصات را مختصات کروی می‌نامند. معادلاتی را پیدا کنید که مختصات کروی (r, ϕ, θ) را به مختصات دکارتی قائم (x, y, z) آن مربوط می‌کنند. چنین روابطی اساساً در آثار لاگرانژ (۱۷۳۶ - ۱۸۱۳) دیده می‌شود.

(ز) دستگاه مختصاتی طرح کنید که محل نقاط را بر (۱) سطح استوانه دوار، (۲) یک چنبره، معین کند.

۱۵.۱۴ مختصات خطی

(الف) نشان دهید که بزرگ چارچوب مرجع دکارتی قائم می‌توان از شیب و عرض از مبدأ هر خط، یا از طول عمود وارد از مبدأ بر خط و زاویه‌ای که این عمود با محور x -ها می‌سازد، به عنوان مختصات خط استفاده کرد.

(ب) عکس عرض از مبدأ و عکس طول از مبدأ یک خط با علامت منفی، u و v ، به مختصات

پلوگر خط معروف است. مختصات پلوگر خطوطی را که معادلات دکارتی آنها $5x + 3y - 6 = 0$ و $ax + by + 1 = 0$ هستند، پیدا کنید. معادله دکارتی خطی را که مختصات پلوگر آن $(1, 3)$ است، بنویسید.

(ج) نشان دهید که مختصات پلوگر، u و v ، کلیه خطوطی که بر نقطه‌ای با مختصات دکارتی $(2, 3)$ می‌گذرند، در معادله خطی $2u + 3v + 1 = 0$ صادق‌اند. این معادله به عنوان معادله پلوگر نقطه $(2, 3)$ اختیار می‌شود. مختصات دکارتی نقاطی که معادلات پلوگر آنها $5u + 3v - 6 = 0$ و $au + bv + 1 = 0$ اند، چه هستند؟ معادله پلوگر نقطه‌ای با مختصات دکارتی $(1, 4)$ را بنویسید.

۱۶.۱۴ بعد چندی

- (الف) نشان دهید که صفحه بر حسب پاره خطهای جهت دار چهار بعدی است.
- (ب) بعد چندی صفحه بر حسب پاره خطهایی جهت دار با طول معلوم چیست؟
- (ج) نشان دهید که فضا بر حسب خطوط چهار بعدی است.
- (د) نشان دهید که فضا بر حسب صفحه سه بعدی است.
- (ه) نشان دهید که فضا بر حسب کرات چهار بعدی است.
- بعد چندی چند گونا‌های زیر چیست؟
- (و) خطوطی که دو خط متناظر را قطع می‌کنند.
- (ز) خطوط مار بر نقطه‌ای از فضا.
- (ح) صفحات مار بر نقطه‌ای از فضا.
- (ط) دایره‌هایی در فضا که از يك نقطه ثابت می‌گذرند.
- (ی) کراتی در فضا که از يك نقطه می‌گذرند.
- (ك) همه دایره‌های واقع بر يك کره.
- (ل) همه دایره‌ها در فضا.
- (م) همه دایره‌هایی که صفحات آنها بر خط ثابتی از فضا می‌گذرند.
- (ن) همه خطوط مماس بر يك کره مفروض.
- (س) همه صفحات مماس بر يك کره مفروض.

۱۷.۱۴ نماد اختصاری

فضای زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ معادلات نرمال (قائم) دو خط متمایز باشند که بر مبدأ نمی‌گذرند، و اگر $m\alpha + n\beta = 0$ که در آن m و n مقادیر ثابت‌اند، خطی مار بر نقطه تلاقی آنها باشد، در این صورت m/n نسبت فاصله علامت دار نقطه‌ای بر خط $m\alpha + n\beta = 0$ از خط $\beta = 0$ است بر فاصله علامت دار آن از خط $\alpha = 0$ با علامت منفی.

(ب) اگر $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ معادلات نرمال دوخط راست غیرموازی مفروض باشند که بر مبدأ نمی‌گذرند، در این صورت $\alpha - \beta = 0$ و $\alpha + \beta = 0$ نیمسازهای زوایای بین این دوخط‌اند، که اولی نیمساز زاویه‌ای است که شامل مبدأ است.

(ج) اگر $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ معادلات نرمال دوخط غیر موازی باشند کسه بر مبدأ نمی‌گذرند، در این صورت $m\alpha + n\beta = 0$ و $n\alpha + m\beta = 0$ ، که در آن m و n مقادیر ثابت‌اند، خطوط همزاویه‌ای زوایای بین دوخط اولیه‌اند.

(د) فرض کنید که $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ ، $\gamma = 0$ معادلات اضلاع يك مثلث باشند، در این صورت سه‌خط سوایی $m\beta - n\gamma = 0$ ، $ra - sa = 0$ ، $u\alpha - v\beta = 0$ هم‌رس‌اند اگر فقط اگر $mru = nsu$.

(ه) اگر $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ ، $\gamma = 0$ معادلات اضلاع يك مثلث باشند، هر سه‌خط سوایی هم‌رس‌رانی‌تان به صورت $r\beta - s\gamma = 0$ ، $s\gamma - t\alpha = 0$ ، $t\alpha - r\beta = 0$ نوشت.

(و) نیمسازهای زوایای مثلث هم‌رس‌اند.

(ز) ارتفاعهای مثلث هم‌رس‌اند.

(ح) میانه‌های مثلث هم‌رس‌اند.

(ط) اگر خطوط سوایی يك مثلث هم‌رس باشند، در این صورت سه‌خط همزاویه‌ای سوایی نیز چنین‌اند.

(ی) مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فواصل آن از زوجی از اضلاع متقابل يك چهاروجهی متناسب با حاصلضرب فواصل آن از زوج اضلاع متقابل دیگر چهارضلعی باشد، يك مقطع مخروطی است که بر رئوس چهارضلعی می‌گذرد.

(ک) مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فواصل آن از دوخط، متناسب با مربع فاصله آن از يك خط سوم است، يك مقطع مخروطی است که در نقاط تلاقی دوخط اول با خط سوم برخوردخط اول مماس است.

۱۸.۱۴ مختصات همگن

(الف) مختصات دکارتی همگن متناظر نقاط $(۲, ۳)$ ، $(-۱, ۰)$ ، $(۰, ۷)$ را بنویسید.
(ب) مختصات دکارتی همگن نقاط در بینهایت واقع بر خطوط $x = y$ ، $3x + 2y - 7 = 0$ ، $ax + by + c = 0$ را بنویسید.

(ج) مختصات دکارتی غیرهمگن متناظر نقاط $(۷, ۳, -۴)$ ، $(۱, ۱, ۱)$ ، $(۰, -۲, ۲)$ را بنویسید.

(د) معادله دکارتی غیرهمگن خطی مار بر نقطه آرمانی $(۱, -۲, ۰)$ را بنویسید.

(ه) يك معادله دکارتی همگن متناظر برای دایره زیر بنویسید

$$x^2 + y^2 + 2fy + 2gx + c = 0.$$

(و) نشان دهید که هر دایره بر دو نقطه آرمانی $(۱, -i, ۰)$ و $(۱, i, ۰)$ می‌گذرد.

این نقاط را نقاط مستدیر در بینهایت نامند.

(ز) نشان دهید که هر مقطع مخروطی حقیقی مار بر دو نقطه مستدیر در بینهایت، يك دایره است.

۱۹۰۱۴ اعداد پلوکر

با استفاده از معادلات پلوکر که نقاط تکین يك معادله جبری را به هم مربوط می کنند، نشان دهید که:

(الف) هر مقطع مخروطی از رده دوم است.

(ب) منحنی درجه سوم $y = x^3$ از رده سوم است و يك نقطه بازگشت در بینهایت دارد.

(ج) معنی درجه سوم $y^2 = x^3$ از رده ششم است و يك نقطه عطف در بینهایت دارد.

(د) $l - k = 3(m - n)$

۲۰۰۱۴ هندسه n -بعدی

(الف) چگونه باید خط مستقیم را، بدو تحلیل، در ابر فضایی که به وسیله دو نقطه $(x_1, \dots, x_n)$ و $(y_1, \dots, y_n)$ معین می شود، تعریف کرد؟

(ب) چگونه باید کسینوسهای هادی خط مستقیم قسمت (الف) را تعریف کرد؟

(ج) چگونه باید بینیت بین دو نقطه قسمت (الف) را تعریف کرد؟

(د) چگونه باید وسط پاره خطی که به وسیله دو نقطه قسمت (الف) معین می شود، تعریف کرد؟

(ه) تعریف داده شده در بخش ۱۴-۶ برای کسینوس زاویه بین دو پاره خط در ابر-فضا را توجیه کنید. یعنی نشان دهید که $0 \leq \cos \theta \leq 1$.

(و) اگر x, y, z سه نقطه دلخواه در ابر فضا باشند، و اگر $d(x, y)$ معرف فاصله بین x و y باشد، نشان دهید که

$$d(x, y) \geq 0.1$$

$$d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

۲۱۰۱۴ انحناى گاوسی

مقاطعى از سطحى مانند S را که از صفحات مار بر نرمال S در نقطه ای مانند P پدید آمده اند، در نظر گیرید. در میان این مقاطع یکی هست که دارای انحناى ماکزیموم k در

نقطه P است، و یکی که دارای انحناى مینیموم k' در این نقطه است. این دو مقطع با انحناهای ماکزیموم و مینیموم در حالت کلی برهم عمودند، و انحناهای آنها در نقطه P انحناهای اصلی S در نقطه P نامیده می‌شوند. حاصلضرب $K = k k'$ انحناى (گاوسی، یا کلی) سطح S در P نامیده می‌شود. اگر دو انحناى اصلی دارای يك جهت باشند، K مثبت است؛ اگر دو انحناى اصلی جهتهای مخالف داشته باشند، K منفی است؛ اگر یکی از انحناهای اصلی صفر باشد، K صفر است. گاوس این قضیه قابل توجه را کشف کرد که اگر سطحی را (بدون کشیدگی، تاخوردگی، یا پارگی) خم کنیم، انحناى آن در هر نقطه بدون تغییر باقی می‌ماند.

(الف) آیا سطح درجه دویی وجود دارد که انحناى آن در همه جا مثبت باشد؟ همه جا منفی باشد؟ در همه جا صفر باشد؟ در بعضی جاها مثبت و در جاهای دیگر منفی باشد؟

(ب) اگر سطحی را بتوان چنان خم کرد که بر سطح دیگری منطبق شود، این دو سطح درخور هم نامیده می‌شوند. نشان دهید که هر گاه دو سطح درخور هم باشند، بین نقاط آنها يك تناظر يك به يك موجود است به طوری که انحناهای دو سطح در دو نقطه متناظر با هم برابرند.

(ج) نشان دهید که وقتی يك سطح بر سطح دیگر خم‌انیده شود، ژئودزیکهای سطح اول بر ژئودزیکهای سطح دوم نهاده می‌شوند.

(د) نشان دهید که انحناى کره‌ای به شعاع r ، مقدار ثابت مثبت $1/r^2$ است.

(ه) نشان دهید که انحناى يك صفحه برابر صفر است.

(و) نشان دهید که يك سطح استوانه‌ای دارای انحناى ثابت صفر است. آیا يك سطح استوانه‌ای درخور يك صفحه هست؟

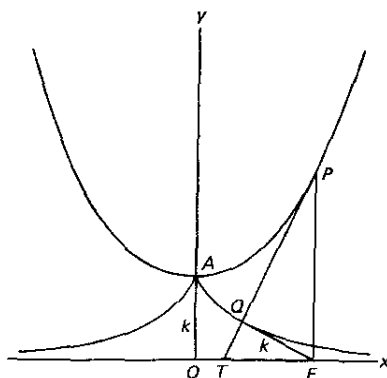
(ز) نشان دهید که اگر سطحی در هر وضعی درخور خود باشد، انحناى آن باید ثابت باشد.

(ح) نشان دهید تنها سطوحی که تحرك آزادانه اشکال بر روی آنها امکانپذیر است، سطوح با انحناى صفرند.

(ط) نشان دهید که کره درخور صفحه نیست. (بدین جهت است که در ساختن نقشه زمین، نوعی تحریف در نقشه ضروری است.)

۲۲-۱۴ تراکتوئید

نمودار $y = k \cosh(x/k)$ منحنی زنجیری، یعنی شکلی است که يك زنجیر انعطاف پذیر غیر قابل انبساط با چگالی یکنواخت که از دو تکیه‌گاه غیر واقع بر يك خط قائم آویخته شده، به خود می‌گیرد. فرض کنید که منحنی زنجیری (نگاه کنید به شکل ۱۱۹) محور x ها را در A قطع کند، و P نقطه دلخواهی بر منحنی F پای عمود وارد از P بر محور x باشد. همچنین فرض کنید که مماس بر منحنی در نقطه P محور x ها را در نقطه T قطع کند و Q پای عمود وارد از F بر PT باشد.



شکل ۱۱۹

- (الف) به کمک حسابان مقدماتی، نشان دهید که طول QF ثابت و برابر با k است
- (ب) به کمک حساب انتگرال، نشان دهید که QP با طول قوس AP برابر است.
- (ج) نشان دهید که هرگاه یک رشته AP از این زنجیر بریده شود، انتهای A از این رشته یک منحنی مانند AQ رسم خواهد کرد با این خاصیت که طول مماس QF بر آن ثابت و برابر k است. به عبارت دیگر، مکان هندسی Q که گستراننده منحنی زنجیری است، یک تراکتریس است.
- (د) می توان نشان داد که برای یک سطح دوار، انحناهای اصلی (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۲۱.۱۴) در نقطه ای مانند Q از سطح، انحنا نصف النهار مار Q و انحنا مقطع مار Q است که بر نصف النهار مار Q عمود می باشد. اگر نرمال بر سطح در نقطه Q محور دوران سطح را در T قطع کند، در این صورت می دانیم که انحنا آخر برابر با $1/QT$ است. نشان دهید که انحناهای اصلی در نقطه Q برای تراکتوئیدی که از دوران تراکتریکس قسمت (ج) حول محور Q به دست می آید، برابر با $1/QP$ و $1/QT$ هستند.
- (ه) نشان دهید که انحنا (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۲۱.۱۴) تراکتوئید قسمت (د) ثابت و در همه جا برابر با $1/k^2$ است.

۲۳.۱۴ برنامه ارلانگر

- (الف) نشان دهید که مجموعه کلیه تبدیلهای تصویری از صفحه تصویری بر روی خود که خط ثابتی از صفحه (آن را خط در بینهایت می نامیم) را بر روی خود می برد، یک گروه تبدیل تشکیل می دهد. (هندسه وابسته به این گروه به هندسه مسطحه آفین موسوم است.)
- (ب) نشان دهید که مجموعه کلیه تبدیلهای تصویری از صفحه تصویری بر روی خود که خط ثابتی از صفحه را بر روی خود یک نقطه ثابت از صفحه غیر واقع بر این خط ثابت

را برخورد این نقطه می‌برند، یک گروه تبدیل تشکیل می‌دهند. (هندسه وابسته به این گروه به هندسه مسطحه آفین مرکزدار موسوم است.)
(ج) نشان دهید که هندسه‌های تودرتوی

{متریک اقلیدسی، همشکل، آفین مرکزدار، آفین، تصویری}

را داریم که در آنها گروه تبدیل هر یک از هندسه‌ها زیرگروهی از گروه تبدیل هر یک از هندسه‌های بعدی در دنباله فوق است.

(د) نشان دهید که مجموعه کلیه تبدیلهای تصویری صفحه تصویری بر روی خود که دایره مفروض K از صفحه را بر روی خود و داخل K را برداخل K می‌برند، یک گروه تبدیل تشکیل می‌دهند. (باتعریفهای مناسب از فاصله و اندازه‌های زاویه‌ای، می‌توان نشان داد که هندسه وابسته به این گروه تبدیل با هندسه متریک لباچفسکیایی در صفحه، معادل است.)

۲۴.۱۴ رازگرایی و محالات در حسابان اولیه

(الف) یکی از مؤثرترین انتقادهای برمیانی ناقص حسابان اولیه از سوی فیلسوف برجسته ما بعدالطبیعی اسقف جورج بارکلی^۱ (۱۶۸۵-۱۷۵۳) وارد شد. وی براین عقیده پافشاری می‌کرد که بسط حسابان توسط نیوتن متضمن مغالطه منطقی تصرف در فرض^۲ است. تصرف در فرض موجود در کار نیوتن در تعیین مشتق (یا فلوکسیون، نامی که او به کار می‌برد) x^3 در زیر را خاطر نشان کنید. در اینجا کار نیوتن را در قریب حد منحنیهای وی به سال ۱۷۰۴ با عبارات دیگر می‌آوریم:

در همان حال که x ، بر اثر نمو، به $x+o$ تبدیل می‌شود، قوه x^3 به $(x+o)^3$ ، یا

$$x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3,$$

تبدیل می‌شود و نسبت میزان رشد، یا نموها یعنی

$$o \text{ و } 3x^2o + 3xo^2 + o^3$$

به یکدیگر مثل

$$1 \text{ و } 3x^2 + 3xo + o^2$$

است. حال نموها را به سمت صفر میل دهید، در این صورت آخرین نسبتها ۱ و $3x^2$ خواهند بود، و از آنجا نرخ تغییر x^3 نسبت به x برابر $3x^2$ است.

(ب) بیان کنایه آمیز بارکلی از مشتق: «اشباح کمیتهای محوشده» را توضیح دهید.

(ج) درباره اصل زیر که توسط یوهان برنولی برای تضمین اعمالی نظیر اعمال توضیح

داده شده در قسمت (الف)، پذیرفته شده، بحث کنید: «کمیتی که به میزان بی نهایت کوچکی زیاد یا کم می شود نه افزایش می یابد و نه کاهش.»

۲۵.۱۴ مشکلات اولیه در سریهای نامتناهی

ریاضیدانان قرنهای هفدهم و هجدهم درک کمی از سریهای نامتناهی داشتند. آنها اغلب، در مورد این گونه سریها، اعمالی را به کار می بردند که در مورد سریهای متناهی صادق اند، ولی در مورد سریهای نامتناهی تنها تحت برخی محدودیتها قابل اعمال اند. بدون آگاهی از این محدودیتها، نتیجه آن شد که در کار با سریهای نامتناهی پارادوکسهایی به وجود آیند. (الف) یک سری پردر در در روزهای اولیه حسابان سری متناوب زیر بود

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

و درباره مجموع S که باید به این سری اختصاص یابد، بحث زیادی پیش آمد. نشان دهید که گروه بندی

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

منجر به $S = 0$ می شود، و گروه بندی

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

منجر به $S = 1$ می شود. برخی چنین استدلال می کردند که چون مجموعهای 0 و 1 به یک اندازه محتمل هستند، مجموع صحیح دوسری مقدار متوسط $1/2$ است. نشان دهید که این مقدار رانیز می توان به یک روال کاملاً صوری از گروه بندی زیر به دست آورد.

$$1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

(ب) بسط دوجمله ای به صورت

$$(a+b)^n = a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + C(n,3)a^{n-3}b^3 + \dots,$$

که در آن

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{(1)(2)(3)\dots(r)},$$

تنها تحت برخی شرایط درست است؛ یعنی، سری طرف راست، تنها تحت برخی محدودیتها بر a ، b ، و n به عبارت سمت چپ همگراست. بدون آگاهی از این محدودیتها، و به کار بردن این عبارت به نحوی که گویی همیشه درست است، می تواند منجر به پارادوکسهایی شود. پارادوکسهایی از این نوع (مانند پارادوکس اولر) را با به کار بردن صوری بسط دوجمله ای برای $(1-2)^{-1}$ به دست آورید.

(ج) با تقسیم $1-x$ بر x و $1-x$ بر x ، و سپس جمع کردن نتایج، نتیجه مضحکی را که اوایل پیدا کرد، به دست آورید:

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \dots = 0, 1 \text{ و } 0 \text{ غیر از } 0 \text{ و } 1$$

(د) پارادوکس زیر را توضیح دهید. فرض کنید S مجموع سری همگرای زیر باشد

$$\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots$$

در این صورت

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = 1, \end{aligned}$$

زیرا همه جمله‌ها بعد از جمله اول حذف می‌شوند. همچنین

$$\begin{aligned} S &= \frac{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)}{2} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

چون همه جمله‌ها بعد از جمله اول حذف می‌شوند. نتیجه می‌شود که $1 = 1/2$.

۲۶.۱۴ برخی پارادوکسها در جبر مقدماتی

وقتی که نظریه يك عمل ریاضی فقط به‌طور ضعیفی فهمیده شود، این خطر وجود دارد که عمل مزبور کورکورانه به‌طور صوری و احیاناً به‌روش غیر منطقی به‌کار گرفته شود. به‌کارگیری این عمل، که از محدودیت‌های احتمالی عمل آگاه نیست، امکان دارد که عمل را در مواردی به‌کار گیرد که لزوماً قابل به‌کار بردن نیست. این اساساً کاری بود که طی قرن بعد از ابداع حسابان در آنالیز پیش آمد، و نتیجه آن شد که انبوهی از محالات فاشی شوند. مطالعه مسئله‌ای حاضر نشان می‌دهد که چگونه ممکن است این محالات در جبر مقدماتی در صورت به‌کار بردن برخی اعمال جبری بدون تشخیص محدودیت‌های اعمال شده بر آنها، پیش آیند.

(الف) پارادوکس زیر را توضیح دهید:
تردیدی نیست که

$$3 > 2.$$

از ضرب طرفین در $\log(1/2)$ ، داریم

$$3 \log\left(\frac{1}{2}\right) > 2 \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

یا

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

و از آنجا

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

(ب) پارادوکس زیر را توضیح دهید:
روشن است که $(-1)^2 = (+1)^2$. با گرفتن لگاریتم از طرفین، داریم
 $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$. بنا بر این $2 \log(-1) = 2 \log(+1)$ یا $-1 = 1$.
(ج) اغلب دانشجویان در جبر مقدماتی قضیه زیر را می‌پذیرند: «اگر دو کسر برابر
صورت‌های برابر داشته باشند، مخرج‌های آنها باهم برابرند.» حال مسئله زیر را در نظر
گیرید. می‌خواهیم معادله

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

را حل کنیم. از ترکیب جملات طرف چپ، داریم

$$\frac{(x+5) - 5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

یا

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}.$$

بنابر قضیه بالا، نتیجه می‌شود که $x-13 = 7-x$ ، یا با اضافه کردن x به طرفین، $7 = 13$.

کجای کار غلط است؟

(د) مغالطه‌ای را که در برهان زیر بنا بر استقرای ریاضی، وجود دارد، پیدا کنید:

$P(n)$: تمام اعداد در مجموعه‌ای متشکل از n عدد، با هم برابرند.

۱. $P(1)$ آشکارا درست است.

۲. فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد که برای آن $P(k)$ درست است. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ مجموعه دلخواهی از $k+1$ عدد باشد. در این صورت، بنا بر فرض $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$ و $a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$ بنا بر این $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$ و $P(k+1)$ درست است.

نتیجه می‌شود که $P(n)$ به ازای کلیه اعداد طبیعی n درست است.

(ه) مغالطه‌ای را که در برهان زیر بنا بر استقرای ریاضی وجود دارد، پیدا کنید.

$P(n)$: اگر a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $\max(a, b) = n$ ، آنگاه $a = b$. (تذکر: منظور از $\max(a, b)$ ، وقتی $a \neq b$ ، بزرگترین عدد در بین a و b است. منظور از $\max(a, a)$ ، عدد a است. مثلاً $\max(5, 7) = 7$ ، $\max(8, 2) = 8$ ، $\max(4, 4) = 4$.)

۱. $P(1)$ آشکارا درست است.

۲. فرض کنید k عددی طبیعی باشد که برای آن $P(k)$ درست است. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $\max(a, b) = k+1$ ، و فرض کنید $\alpha = a-1$ و $\beta = b-1$. در این صورت $\max(\alpha, \beta) = k$ ، که از آن، بنا بر فرض، $\alpha = \beta$ بنا بر این $a = b$ و $P(k+1)$ درست است.

نتیجه می‌شود که $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

(و) سه پارادوکس زیر را که متضمن ریشه‌های دوم هستند، توضیح دهید:

۱. چون $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ داریم

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

اما، بنا بر تعریف، $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$. بنا بر این $-1 = 1$.

۲. متوالیاً داریم

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1},$$

$$1 = -1.$$

۳. اتحاد زیرین را، که به ازای کلیه مقادیر x و y درست است، در نظر بگیرید:

$$\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}.$$

با قرار دادن $x=a$ و $y=b$ ، که در آن $a \neq b$ ، داریم

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}.$$

حال با قرار دادن $x=b$ و $y=a$ ، داریم

$$\sqrt{b-a} = i\sqrt{a-b}.$$

از ضرب دو معادله آخر، عضو به عضو، داریم

$$\sqrt{a-b}\sqrt{b-a} = i^2 \sqrt{b-a}\sqrt{a-b}$$

از تقسیم طرفین بر $\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}$ ، سرانجام به دست می آوریم

$$1 = -1, \text{ یا } 1 = i^2$$

۲۷.۱۴ برخی پارادوکسها در حسابان

(الف) باروشهای استاندارد داریم

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

اما تابع $y = 1/x^2$ هیچوقت منفی نیست، بنابراین «محاسبه» بالا نمی تواند درست باشد.

(ب) فرض کنید که e معرف خروج از مرکز بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ باشد.

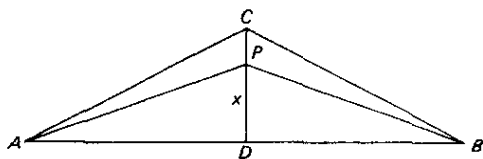
می دانیم که طول r از شعاع حامل مرسوم از کانون سمت چپ بیضی به یک نقطه $P(x, y)$

واقع بر منحنی توسط $r = a + ex$ داده می شود. اما $dr/dx = e$. چون هیچ مقداری

از x وجود ندارد که برای آن dr/dx صفر شود، نتیجه می شود که r دارای ماکزیموم

یا مینیمومی نیست. اما تنها منحنی بسته ای که شعاع حامل آن ماکزیموم یا مینیمومی ندارد،

دایره است. پس نتیجه می شود که هر بیضی یک دایره است.



شکل ۱۲۰

(ج) مثلث متساوی الساقین ABC در شکل ۱۲۰ به قاعده $AB = ۱۲$ و ارتفاع $CD = ۳$ را در نظر بگیرید. مطمئناً نقطه‌ای مانند P بر CD وجود دارد به طوری که

$$S = PC + PA + PB$$

مینیموم است. می‌خواهیم محل این نقطه را پیدا کنیم. DP را با x نشان می‌دهیم. در این صورت $PC = ۳ - x$ ، و $PA = PB = (x^2 + ۳۶)^{1/2}$. بنابراین

$$S = ۳ - x + ۲(x^2 + ۳۶)^{1/2}$$

و

$$\frac{dS}{dx} = -1 + 2x(x^2 + ۳۶)^{-1/2}.$$

با قرار دادن $dS/dx = ۰$ ، پیدایمی کنیم، $x = ۲\sqrt{۳} > ۳$ ، و P خارج مثلث بر امتداد DC قرار دارد. بنابراین هیچ نقطه‌ای بر پاره خط CD که به ازای آن S مینیموم باشد، وجود ندارد.

(د) انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int \sin x \cos x dx.$$

در این صورت داریم

$$I = \int \sin x (\cos x dx) = \int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{۲}.$$

همچنین

$$I = \int \cos x (\sin x dx) = - \int \cos x d(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{۲}$$

بنابرین

$$\sin^2 x = -\cos^2 x,$$

یا

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

اما، به ازای هر x ،

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(۸) چون

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-dx}{-x},$$

داریم $\log(x) = \log(-x)$ یا $x = -x$ ، و از آن $1 = -1$.

۲۸.۱۴ منحنی پیوسته‌ای که هیچ مماسی ندارد

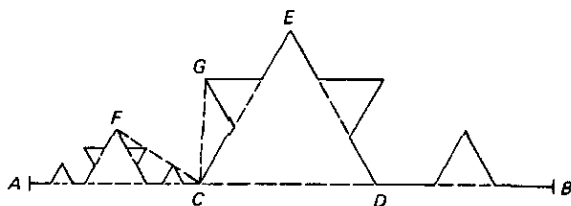
می‌دانیم که یک منحنی پیوسته را می‌توان به‌طور هندسی به‌عنوان حد دنباله‌ای از منحنیهای کثیرالاضلاع تعریف کرد، و این فرایند توسط عده‌ای از ریاضیدانان برای پدید آوردن منحنی پیوسته‌ای که دارای هیچ مماس یا نیم مماسی در هیچ نقطه‌ای نیست، مورد استفاده قرار گرفته است. در اینجا یکی از این گونه منحنیها را که توسط ریاضیدان سوئدی هلگه فون کوخ^۱ (۱۸۷۵-۱۹۲۴) ابداع شده در نظر می‌گیریم.

پاره خط افقی AB (نگاه کنید به شکل ۱۲۱) را توسط نقاط C و D به سه قسمت مساوی تقسیم کنید؛ بر قطعه وسطی، CD ، مثلث متساوی‌الاضلاع CED را در قسمت بالایی پاره خط جهت دار AB بسازید، و سپس پاره خط باز CD را پاک کنید. حال همین ساختمان را بر روی هر یک از پاره خطهای جهت دار AC ، CE ، ED ، DB انجام دهید. این عمل ساختمان را به‌طور نامحدود ادامه دهید. حدی که این شکل به آن میل می‌کند، منحنی کوخ نامیده می‌شود.

(الف) با در نظر گرفتن خط مماس بزرگ منحنی در نقطه‌ای مانند P از منحنی به‌عنوان وضعیت حدی، در صورت وجود چنین وضعیتی، از قاطبی مار بر P و نقطه‌ای مجاور مانند Q از منحنی وقتی Q بر منحنی در جهت انطباق با P پیش می‌رود، نشان دهید که منحنی کوخ شکل ۱۲۱ دارای هیچ مماسی در نقطه C نیست.

(ب) نشان دهید که طول منحنی کوخ بینهایت است.

(ج) بر هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع، و در خارج آن، یک منحنی کوخ بسازید.



شکل ۱۲۱

منحنی بسته حاصل گاهی منحنی دانه برفی^۱ نامیده می‌شود. نشان دهید که منحنی دانه برفی منحنی پیوسته بسته ساده‌ای است به طول بینهایت که یک سطح منتهای را محصور می‌کند.

(د) فرض کنید T_n یک ناحیه مستوی افقی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. T_n را با وصل کردن اواسط اضلاع آن به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید. بر قطعه مرکزی آن یک چهار وجهی منتظم بسازید که در بالای صفحه T_n قرار داشته باشد، قطعه مرکزی T_n را پاک کنید؛ سطح باقیمانده را با T_{n+1} نمایش دهید. ادامه این روند چگونه باید صورت گیرد تا سطح حاصل، سطح پیوسته بی‌مماسی در فضای سه بعدی باشد؟

۲۹.۱۴ اعداد جبری و متعالی

یک عدد مختلط جبری نامیده می‌شود هرگاه این عدد ریشه یک چند جمله‌ای با ضرایب گویا باشد؛ در غیر این صورت آن را متعالی نامند. ف. لیندمان (۱۸۵۲-۱۹۳۹) برای اولین بار، در سال ۱۸۸۲، ثابت کرد که π متعالی است. (الف) نشان دهید که هر عدد گویا عددی جبری است و بنابراین هر عدد متعالی حقیقی، ناگویاست.

(ب) آیا هر عدد ناگویا یک عدد متعالی است؟

(ج) واحد انگاری $\mathbb{Z}$ جبری است یا متعالی؟

(د) با استفاده از قضیه لیندمان، نشان دهید که $\pi/2$ متعالی است.

(ه) با استفاده از قضیه لیندمان، نشان دهید که $\pi + 1$ متعالی است.

(و) با استفاده از قضیه لیندمان، نشان دهید که $\sqrt{\pi}$ متعالی است.

(ز) (د)، (ه)، و (و) را تعمیم دهید.

(ح) نشان دهید که هر عدد جبری، ریشه یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح

است.

۳۰.۱۴ اعداد اول

(الف) به کمک غربان اراتستن، همه اعداد اول زیر ۵۰۰ را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که هر عدد صحیح مثبت مانند p اول است هرگاه دارای هیچ عامل اولی نابیشتر از بزرگترین عدد صحیحی که مربع آن از p بیشتر نیست، نباشد. این قضیه بیان می‌کند که، در فرایند حذف غربال اراتستن، می‌توانیم به محض اینکه به عدد اولی مانند $p > \sqrt{n}$ برسیم، کار را متوقف کنیم، چون حذف p به p اعداد بعد از p صرفاً تکرار حذفی است که قبلاً انجام شده است. مثلاً، در پیدا کردن اعداد اول کوچکتر از ۵۰۰، می‌توانیم بعد از خط زدن نوزده به نوزده اعداد بعد از عدد ۱۹، کار را متوقف کنیم، چون عدد اول بعدی، یعنی ۲۳، بزرگتر از $\sqrt{500}$ است.

(ج) $(A_n \log n)/n$ را به ازای $n = 500, 10^8, 10^9$ محاسبه کنید.

(د) ثابت کنید که، n هر اندازه بزرگ باشد، همواره می‌توان n عدد صحیح مرکب متوالی پیدا کرد.

(ه) چند زوج اعداد اول توأمان کوچکتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

(و) هر عدد صحیح زوج کوچکتر از ۱۰۰، جز ۲، را به صورت مجموع دو عدد اول، بیان کنید.

(ز) نشان دهید که از فرمولهای $2 + \sin^2(n\pi/2)$ ، $3(\cos 2n\pi)$ ، و $3(n^0)$ به ازای هر مقدار صحیح مثبت n ، اعداد اولی حاصل می‌شود.

(ح) نشان دهید که $n^2 + n + 17$ به ازای کلیه اعداد صحیح از ۱ تا ۱۶ اول است و اینکه $2n^2 + 29$ به ازای کلیه اعداد صحیح n از ۱ تا ۲۸ اول است.

(ط) نشان دهید که ۱۱ تنها عدد اول مقلوبی دورقمی است.

(ی) هر ۱۵ عدد اول مقلوبی سه رقمی را پیدا کنید.

(نامتناهی بودن عدد اعداد مقلوبی هنوز ثابت نشده است.)

عنوان مقاله

۱/۱۴ حجره بوسلیه و متوازی الاضلاع پروانه‌ای هارت.

۲/۱۴ مفصلها.

۳/۱۴ اوگوستوس فردیناند موبیوس (۱۷۹۰-۱۸۶۸).

۴/۱۴ کارل فوئر باخ (۱۸۰۰-۱۸۳۴).

۵/۱۴ ویلیام کینگدم کلیفورد (۱۸۴۵-۱۸۷۹).

۶/۱۴ چارلز لوتویج داجسن (۱۸۳۲-۱۸۹۸).

۷/۱۴ سونیا کووالفسکی (۱۸۵۰-۱۸۹۱).

۸/۱۴ نظریه قطب و قطبی و اصل دوگان.

- ۹/۱۴ يك مجموعه اصول موضوعه خود - دوگان برای هندسه تصویری مسطحه.
 ۱۰/۱۴ يك اصل دوگان در مطالعه مثلثهای کروی.
 ۱۱/۱۴ مسئله مالقاتی.
 ۱۲/۱۴ ابرمکعب.
 ۱۳/۱۴ هندسه ذاتی رویه‌ها در مقابل هندسه عارضی آنها.
 ۱۴/۱۴ سالیهای زندگی کلاین در رأس بخش ریاضی دانشگاه گوتینگن.
 ۱۵/۱۴ هندسه به عنوان نظریه پایاها و جبر به عنوان نظریه ساختارها.
 ۱۶/۱۴ خطابه امتحانی ریمان در سال ۱۸۵۴.
 ۱۷/۱۵ پوانکاره به عنوان نویسنده‌ای عامه‌پسند.
 ۱۸/۱۴ يك هندسه تحلیلی بدون دستگاه مختصات یا چارچوب مرجع.
 ۱۹/۱۴ اهمیت قضایای وجودی.
 ۲۰/۱۴ پیشرفتهای آنالیز در قرن نوزدهم بر اثر عوامل درونی در ریاضیات.
 ۲۱/۱۴ برخی از ریاضیدانان قرن نوزدهم که هم در تدریس و هم در تحقیق نخبه بودند.
 ۲۲/۱۴ چرا تعداد زنان ریاضیدان برجسته، معدود است.

کتابنامه

- ALTSCHILLER-COURT, NATHAN, *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. 2nd ed., revised and enlarged, containing historical and bibliographical notes. New York: Barnes & Noble, 1952.
 ———, *Modern Pure Solid Geometry*. 2nd ed., containing historical and bibliographical notes. New York: Chelsea, 1964.
 BARON, MARGARET E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford: Pergamon Press, 1969.
 BELL, E. T., *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.
 BOYER, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949.
 ———, *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956.
 BURRILL, C. W., *Foundations of Real Numbers*. New York: McGraw-Hill, 1967.
 COHEN, L. W., and GERTRUDE EHRLICH, *The Structure of the Real Number System*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1963.
 COOLIDGE, J. L., *A Treatise on the Circle and the Sphere*. Oxford: The Clarendon Press, 1916.
 ———, *A History of Geometrical Methods*. Oxford: The Clarendon Press, 1940.
 DEDEKIND, RICHARD, *Essays on the Theory of Numbers*. Translated by W. W. Beman. Chicago: Open Court, 1901; New York: Dover, 1963.
 DICKSON, L. E., *History of the Theory of Numbers*. 3 vols. New York: Chelsea, 1962.
 ———, "Construction with Ruler and Compasses," in *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, edited by J. W. A. Young. New York: Longmans, Green and Company, 1924.
 DODGE, C. W., *Numbers and Mathematics*. 2d ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1975.
 EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. 2 vols. Boston: Allyn and Bacon, 1972 and 1965.
 ———, and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
 GRATAN-GUINNESS, IVOR, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1970.
 HANCOCK, HARRIS, *Foundations of the Theory of Algebraic Numbers*. 2 vols. New York: Dover Publications, 1931 and 1932.

- , *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*. 2 vols. New York: Dover, 1939.
- HUDSON, H. P., *Ruler and Compasses*. Reprinted in *Squaring the Circle, and Other Monographs*. New York: Chelsea, 1953.
- KAZARINOFF, N. C., *Ruler and the Round*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1970.
- KEMPE, A. B., *How to Draw a Straight Line; A Lecture on Linkages*. Reprinted in *Squaring the Circle, and Other Monographs*. New York: Chelsea, 1953.
- KLEIN, FELIX, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. 2 vols. Translated by E. R. Hedrick and C. A. Noble. New York: Dover, 1939 and 1945.
- , *Famous Problems of Elementary Geometry*. Translated by W. W. Beman and D. E. Smith. Reprinted in *Famous Problems, and Other Monographs*. New York: Chelsea, 1955.
- KOSTOVKII, A. N., *Geometrical Constructions Using Compasses Only*. Translated by Halina Moss. New York: Blaisdell, 1961.
- LANDAU, EDMUND, *Foundations of Analysis*. Translated by F. Steinhardt. New York: Chelsea, 1951.
- LANG, SERGE, *Algebraic Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
- MESCHOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- , *Evolution of Mathematical Thought*. San Francisco: Holden-Day, 1965.
- MUIR, JANE, *Of Men and Numbers, The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dodd, Mead, 1961.
- NIVEN, IVAN, *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monograph No. 11. New York: John Wiley, 1956.
- POINCARÉ, HENRI, *The Foundations of Science*. Translated by G. B. Halsted. Lancaster, Pa.: The Science Press, 1946.
- POLLARD, HARRY, *The Theory of Algebraic Numbers*, Carus Mathematical Monograph No. 9. New York: John Wiley, 1950.
- PRASAD, GANESH, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century*. 2 vols. Benares: Benares Mathematical Society, 1933 and 1934.
- SIEGEL, C. L., *Transcendental Numbers*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
- SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
- SMOGORZHEVSKII, A. S., *The Ruler in Geometrical Construction*. Translated by Halina Moss. New York: Blaisdell, 1961.
- STEINER, JACOB, *Geometrical Constructions with a Ruler*. Translated by M. E. Stark, ed. by R. C. Archibald. New York: Scripta Mathematica, 1950.
- THURSTON, H. A., *The Number-System*. New York: Interscience, 1956.
- TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
- WAISMANN, FRIEDRICH, *Introduction to Mathematical Thinking, The Formation of Concepts in Modern Mathematics*. Translated by T. J. Benac. New York: Frederick Ungar, 1951.
- YATES, R. C., *Geometrical Tools*. St. Louis: Educational Publishers, 1949.
- , *The Trisection Problem*. Ann Arbor, Mich.: Edward Bros., 1947.
- YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. New York: Dover, 1955.

تجربید و گذر به قرن بیستم

۱-۱۵ نقایص منطقی «اصول» اقلیدس

قسمت اعظم تلاشهای ریاضی قرن بیستم، صرف بررسی مبانی منطقی و ساختار ریاضیات شده است. این کار به نوبه خود به پدیدار شدن مبحث اصل موضوعیها، یا مطالعه مجموعه های اصول موضوعه و ویژگیهای آنها منجر شده است. بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضیات دستخوش تکامل و تعمیم قابل ملاحظه ای شده اند، موضوعاتی کاملاً بنیادی مانند نظریه مجموعه ها، جبر مجرد، و توپولوژی به نحو گسترده ای بسط یافته اند. نظریه عمومی مجموعه ها به پارادوکسهای ریشه ای و مضطرب کننده منجر گردید که می بایستی برای آنها فوراً چاره اندیشی شود. خود منطق، که به مثابه ابزاری برای به دست آوردن نتایجی از فرضهای پذیرفته شده در ریاضیات به کار گرفته می شد، مورد علاقه قرار گرفت، و منطق ریاضی با به عرصه وجود نهاد. بستگیهای بین منطق و فلسفه به مکاتب مهم و گوناگون فلسفه ریاضی کنونی منجر شد. و در همین حال، انقلاب در کامپیوترها در قرن بیستم نیز تأثیر عمیقی در برخی از شاخه های ریاضیات برجای نهاد. در مجموع، دیدگاه قدیمی «درخت ریاضیات» منسوخ شد. عجیب اینکه اغلب این ملاحظات نوین، نظیر قسمتهایی از ریاضیات، ریشه در آثار یونانیان باستان، و به ویژه، در کتاب عظیم اصول اقلیدس دارند.

راستی چقدر خوب می شد اگر اصول اقلیدس، این تلاش دیرین و عظیم در روش ارائه اصل موضوعی، عاری از ایرادهای منطقی می بود. در پرتو نقادهای ادوار بعدی نقایص بسیاری در ساختار منطقی این اثر آشکار شده است. شاید بزرگترین این نقایص، فرضهای تلویحی متعددی هستند که اقلیدس می پذیرد بی آنکه اصول موضوعه وی آنها را

مجاز شمرده باشد. مثلاً، گرچه اصل موضوع P_2 حاکی از آن است که يك خط مستقیم می توان به طور نامحدود امتداد داد، این اصل لزوماً ایجاب نمی کند که خط مستقیم نامتناهی باشد و بلکه صرفاً بی انتها یا بی مرز است. قوسی از يك دایره عظیمه را که دو نقطه از کره را به هم وصل می کند، می توان در طول دایره عظیمه به طور نامحدود امتداد داد و با این کار قوس امتداد داده شده را بدون انتها کرد، بی آنکه این قوس نامتناهی باشد. ریمان، ریاضیدان بزرگ آلمانی، در خطابه امتحانی مشهورش به سال ۱۸۵۴، تحت عنوان فرضیهایی که اساس هندسه بر آنها مبتنی است، بین نامحدود بودن و نامتناهی بودن خطوط مستقیم تمیز قائل شد. موارد متعددی، مثلاً در اثبات قضیه ۱۶ I، وجود دارند که اقلیدس در آنها نامتناهی بودن خطوط مستقیم را پذیرفته است. باز، مثلاً در اثبات قضیه ۲۱ I، تلویحاً فرض کرده است که وقتی خط مستقیمی از رأس مثلثی داخل آن می شود، در صورتی که به حد کافی امتداد داده شود، ضلع مقابل را قطع می کند. موریتس پاش^۲ (۱۸۴۳ - ۱۹۳۵) لزوم اصل موضوعی را که ناظر بر چنین وضعیتی باشد گوشزد کرده است. از غفلتهای دیگر هندسه اقلیدس، فرض وجود نقاط تلاقی بعضی خطوط و دوائر است. مثلاً، در قضیه ۱ I فرض می شود دوایری که مراکزشان دوسریک پاره خط و شعاع مشترک آنها همین پاره خط باشد یکدیگر را قطع می کنند، و مثلاً به نحوی داخل یکدیگر نمی شوند که نقطه مشترکی نداشته باشند. برای تضمین وجود چنین نقطه تلاقی، نوعی اصل موضوع پیوستگی، نظیر اصلی که بعدها توسط ر. ددکیند مطرح شد، لازم است. همچنین، اصل موضوع P_1 وجود حداقل يك خط مستقیم را که نقاط A و B را به هم وصل می کند، تضمین می کند ولی این اطمینان را به ما نمی دهد که تعداد این خطوط واصل بیش از یکی نیست. اقلیدس بارها فرض کرده است که خط منحصر به فردی وجود دارد که دو نقطه را به هم وصل می کند. می توان بر اصل برهمنهی نیز که توسط اقلیدس، با بی میلی آشکار، برای اثبات برخی قضایای اولیه همهنشتی به کار گرفته شده است، ایرادهایی وارد کرد، گرچه اصل متعارفی A_4 تا حدودی پاسخگوی این ایرادات است.

وجود خدشه در اثر اقلیدس تنها به خاطر فرضهای تلویحی متعدد نیست، بلکه برخی از تعاریف مقدماتی نیز در معرض انتقاد قرار دارند. اقلیدس سعی کرده است کلیه اصطلاحات فنی هندسه خود را تعریف نماید. ولی در واقع تعریف صحیح همه اصطلاحات فنی يك بحث همانقدر غیرممکن است که اثبات کلیه احکام آن؛ زیرا يك اصطلاح فنی را باید به کمک سایر اصطلاحات فنی تعریف کرد، و این اصطلاحات را توسط اصطلاحات دیگر، و قس علی هذا، به منظور رفع این مشکل و برای احتراز از دوری بودن در تعریف اصطلاح x به کمک اصطلاح y ، سپس تعریف اصطلاح y به کمک اصطلاح x ، مجبوریم که در مقدمه بحث مجموعه ای از اصطلاحات اولیه، یا اساسی، را در نظر بگیریم و معانی آنها را مورد

* بیان اصول متعارفی و اصول موضوعه اقلیدس را در بخش ۵-۷ ببینید.

1. Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen
2. Moritz Pasch

پرسش قرار ندهیم. تمام اصطلاحات فنی دیگر مبحث را مآلاً باید به کمک این اصطلاحات اولیه تعریف کرد. در این صورت، در تحلیل نهایی، اصول موضوعه مبحث، گزاره‌های پذیرفته شده‌ای درباره اصطلاحات اولیه‌اند. از این دیدگاه، می‌توان اصطلاحات اولیه را به‌طور ضمنی تعریف شده تلقی کرد، بدین معنی که این اصطلاحات چیزها یا مفاهیمی هستند که در اصول موضوعه صدق می‌کنند، و این تعریف ضمنی تنها تعریفی است که به اصطلاحات فنی می‌توان داد.

اقلیدس در بسط هندسه، مثلاً اصطلاحات نقطه و خط را می‌توانست به‌خوبی در داخل مجموعه‌ای از اصطلاحات اولیه این مبحث قرار دهد. به هر صورت می‌توان به‌سادگی ملاحظه کرد که، تعریف اقلیدس از يك نقطه به صورت «چیزی که جزء ندارد» و تعریف خط به عنوان «طول بدون پهناء» دوری‌اند و بدین لحاظ از نقطه نظر منطقی نامناسب. یکی از وجوه تمایز بین برداشت مکتب یونانی و برداشت نوین از روش اصل موضوعی در همین مورد اصطلاحات اولیه است؛ در برداشت مکتب یونانی فهرستی از اصطلاحات اولیه داده نشده است. یونانیان را می‌توان از این جهت معذور دانست که برای آنها هندسه تنها يك مطالعه مجرد نبود و بلکه تلاش در جهت تحلیل منطقی فضای مادی آرمانی بود. نقاط و خطوط، از نظر یونانیان، ذره‌های بسیار کوچک و تارهای بسیار باریک آرمانی بودند. تلاش اقلیدس بیان این آرمانی‌سازی در برخی از تعاریف اولیه‌اش بود. اختلاف‌های دیگری هم بین دیدگاه‌های یونانی و دیدگاه‌های نوین نسبت به روش اصل موضوعی وجود دارد.

تنها در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، بعد از آنکه مبانی هندسه موضوع مطالعه همه‌جانبه‌ای قرار گرفت، بود که مجموعه‌های اصول موضوعه رضایتبخشی برای هندسه اقلیدسی مسطحه و فضایی تهیه شد. در میان این گونه مجموعه‌ها برجسته‌ترین‌شان به افراد زیر تعلق دارند: م. پاش، ج. پثانو، م. پیری^۱، د. هیلبرت، او. وبلن^۲، و. هانتینگتون^۳، گ. د. بیرکهوف^۴، و ل. م. بلومنتال^۴. مجموعه هیلبرت شامل ۲۱ اصل موضوع است، و اصطلاحات اولیه آن نقطه، خط مستقیم، صفحه، بر، هم‌نشستی، و بین هستند؛ مجموعه پیری شامل ۲۰ اصل موضوع است و اصطلاحات اولیه آن نقطه و حرکت هستند؛ مجموعه وبلن شامل ۱۶ اصل موضوع است و اصطلاحات اولیه آن نقطه و ترتیب هستند؛ مجموعه هانتینگتون شامل ۲۳ اصل موضوع است و اصطلاحات اولیه آن کره و شمول هستند.

از حدود اواسط قرن بیستم به بعد، عده‌ای از مؤلفین و گروه‌های نویسندگان به کار به وجود آوردن مطالب متون درسی کلاسه‌های هندسه دبیرستانی دست زده‌اند که در آنها هندسه بر مبنای اصل موضوعی به‌طور دقیق بسط یافته است. در این تلاش‌ها، یا مجموعه اصول موضوعه هیلبرت یا مجموعه اصول موضوعه بیرکهوف (اغلب با برخی تغییرات همراه یا بدون اضافاتی بر آنها) پذیرفته شده‌اند.

۱۵-۲ مببحث اصل موضوعیها*

عمدتاً پیجوبیههای اخیر برای یافتن مجموعه اصول موضوعه قابل قبول از لحاظ منطق برای هندسه اقلیدسی، و دربر تو کشف هندسههای نا اقلیدسی که همانقدر سازگاری داشتند، بود که به پدید آمدن مببحث اصل موضوعیها، یا مطالعه مجموعههای اصول موضوعه و ویژگیهای آنها منجر گردید.

هنگام کار بایک دستگاه قیاسی، یکی از گرفتاریهای موجود، انس بیش از حد با موضوعات این دستگاه است. دلیل اغلب معایب اصول اقلیدس همین گرفتاری است. برای گریز از این گرفتاری، توصیه می شود که به جای اصطلاحات اولیه یا تعریف نشده مببحث، علامتهایی نظیر α, β, γ و غیره گذاشته شود. در این صورت اصول موضوعه مببحث به صورت گزارههایی درباره این علامتها درمی آیند و بنابراین عاری از معانی ملموس می شوند، لذا نتایج حاصله بایک مبنای کاملاً منطقی، بدون دخالت عوامل شهودی استوار می شوند. مببحث اصل موضوعیها خواص چنین مجموعههایی از اصول موضوعه را بررسی می کند. آشکار است که نمی توان هر مجموعه ای از گزارهها درباره اصطلاحات اولیه را به عنوان مجموعه اصول موضوعه اختیار کرد. مجموعه اصول موضوعه باید مشروط به بعضی از ویژگیها و مقید به برخی دیگر باشند. مثلاً ضروری است که اصول موضوعه سازگار باشند - یعنی هیچ تناقضی را نتوان از آنها نتیجه گرفت.

موفقترین روش که تا کنون برای اثبات سازگاری يك مجموعه اصول موضوعه ابداع شده است، روش مدلهاست. يك مدل برای يك مجموعه از اصول موضوعه هنگامی به دست می آید که بتوانیم به اصطلاحات اولیه این مجموعه معانی نسبت دهیم که اصول موضوعه را به گزارههای درستی درباره مفاهیم نسبت داده شده تبدیل کنند. دو نوع مدل وجود دارد - مدلهای ملموس و مدلهای آرمانی. يك مدل را زمانی ملموس می نامند که معانی منسوب به اصطلاحات اولیه اشیاء و روابطی مأخوذ از دنیای واقعی باشند، درحالی که مدل را آرمانی نامند هرگاه معانی منسوب به اصطلاحات اولیه، چیزها و روابطی مأخوذ از يك مببحث اصل موضوعی دیگری باشند.

وقتی يك مدل ملموس ارائه می شود، حس می کنیم که سازگاری مطلق برای دستگاه اصل موضوعی خود به وجود آورده ایم، زیرا اگر قضایای متناقضی از اصول موضوعه ما نتیجه شوند، آنگاه گزارههای متناقض متناظری، در مدل ملموس، وجود خواهد داشت. اما همه براین باوریم که تناقض در دنیای واقعی غیر ممکن است.

پی ریزی يك مدل ملموس برای يك مجموعه اصول موضوعه مفروض همواره مقدور نیست. مثلاً اگر مجموعه اصول موضوعه شامل عدده بینهایتی از عناصر اولیه باشد، مطمئناً يك مدل ملموس غیر ممکن خواهد بود. زیرا دنیای واقعی شامل عدده بینهایتی از اشیاء نیست.

* برای بررسی کاملتر مببحث اصل موضوعیها نگاه کنید، مثلاً به فصل ۶ کتاب ایوز و نیوسام، *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, rev. ed., Holt, Rinehart and Winston, 1965.

در چنین مواردی سعی می‌کنیم يك مدل آرمانی بدین ترتیب پی‌ریزی کنیم که به اصطلاحات اولیه دستگاه اصل موضوعی مانند A ، مفاهیم دستگاه اصل موضوعی دیگری مانند B را نسبت دهیم به‌طوری که تعابیر دستگاه اصل موضوعی A ، پیامدهای منطقی دستگاه اصل موضوعی B باشند. ولی اکنون نمی‌توان مدعی شد که آزمون سازگاری مجموعه اصل موضوعی A يك آزمون مطلق است و بلکه این آزمون تنها يك آزمون نسبی است. تنها می‌توان گفت که مجموعه اصل موضوعی A در صورت سازگار بودن مجموعه اصل موضوعی B سازگار است، و ما سازگار بودن دستگاه A را به سازگار بودن دستگاه دیگری مانند B تحویل کرده‌ایم.

سازگار بودن احتمالی يك مجموعه اصل موضوعی در جایی که قادر به اثبات این حقیقت باشیم، یکی از سؤالات گشوده جالب در مبحث اصل موضوعیهاست. مطالعات راجع به سازگاری، منجر به نتایج ناراحت‌کننده و بحث‌انگیز برای کسانی شده است که به مبانی دانش ریاضی می‌پردازند. اثبات سازگاری به کمک روش مدل‌ها يك پویش غیر مستقیم است. قابل تصور است که سازگاری مطلق می‌تواند به روش مستقیمی اثبات شود که می‌کوشد نشان دهد بایستی از قواعد استنتاج نمی‌توان از يك مجموعه اصل موضوعی به دو قضیه رسید که ناقض یکدیگر باشند. در سالهای اخیر، هیلبرت چنین روش مستقیمی را، با موفقیت محدودی مورد بررسی قرار داده است.

يك مجموعه اصول موضوعه را مستقل می‌خوانیم هر گاه هیچ يك از اصول موضوعه آن مستلزم اصل موضوع دیگری از این مجموعه نباشد. برای اینکه نشان دهیم اصل موضوع خاصی از يك مجموعه، مستقل است باید تعبیری از اصطلاحات اولیه به عمل آوریم که اصل موضوع مورد نظر را بساطل و لسی صحت اصول موضوعه دیگر را تأیید نماید. در صورتی که قادر به یافتن چنین تعبیری باشیم، آنگاه اصل موضوع مورد بحث نمی‌تواند نتیجه منطقی دیگر اصول موضوعه باشد، زیرا اگر این اصل موضوع پیامد منطقی سایر اصول موضوعه باشد، در این صورت تعبیری که کلیه اصول موضوعه دیگر را به گزاره‌های درستی تبدیل می‌کند، این اصل موضوع را هم به يك گزاره صحیح تبدیل خواهد کرد. آزمون استقلال مجموعه کاملی از اصول موضوعه، بر این متوال، آشکارا کاری طولانی خواهد بود، زیرا اگر مجموعه ما، M اصل موضوع داشته باشد، M آزمون مجزا (یکی برای هر اصل موضوع) را باید فرمولبندی کرد. موضوع استقلال در ارتباط با هندسه ناقلیدسی اهمیت زیادی داشته است.

امکان دارد که مجموعه مطالب مفروض از بیش از يك مجموعه اصول موضوعه قابل استنتاج باشد. کلاً آنچه از دو مجموعه اصول موضوعه $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ ، برای اینکه به مبحث واحدی منجر شوند، انتظار داریم، آن است که اصطلاحات اولیه در هر يك قابل تعریف به کمک اصطلاحات اولیه دیگر، و اصول موضوعه هر يك قابل استنتاج از اصول موضوعه دیگری باشد. دو مجموعه از چنین مجموعه‌های اصل موضوعی را هم‌ارز نامند. مفهوم مجموعه‌های اصول موضوعه هم‌ارز در تلاش برای یافتن جانشینهایی برای اصل موضوع توافقی پدیدار شده است. علاوه بر سازگاری، استقلال، و هم‌ارزی، ویژگیهای دیگری از مجموعه‌های اصل

موضوعی نیز درمبحث اصل موضوعیها مورد مطالعه قرار می گیرند. این ویژگیها ارتباط نزدیکی بامطلق علامتی و فلسفه ریاضیات دارند. دراین زمینه افراد بسیاری کار کرده و هنوز هم درحال کارند. برجسته ترین آنها هیلبرت، پثانو، پیری، وبلن، هانتینگتون، راسل، وایتهد، گودل، و بسیاری دیگر هستند.

۱۵-۳ تکامل برخی مفاهیم اساسی

در پی ایجاد نظریه مجموعه ها توسط گئورگ کانتور در اواخر قرن نوزدهم، علاقه به این نظریه به سرعت گسترش یافت تا آنکه امروزه عملاً هر زمینه ای در ریاضیات تأثیر آن را لمس کرده است. به عنوان مثال، مفهوم فضا و هندسه يك فضا به كمك نظریه مجموعه ها دچار تغییرات کاملاً بنیادی شده است. همچنین، مفاهیم اساسی در آنالیز، نظیر مفهوم حد، تابع، پیوستگی، مشتق، و انتگرال، اکنون به مناسبترین صورت در قالب مفاهیم نظریه مجموعه ها توصیف می شوند. ولی، مهمتر از همه ایجاد فرصت برای مباحثی از ریاضیات جدید بوده است که پنجاه سال پیش قابل تصور نبودند. مثلاً، به موازات درك جدید از روشهای اصل موضوعی در ریاضیات، فضاهای مجرد پدید آمده اند، نظریه های عمومی بعد و اندازه خلق شده اند، و شاخه ای از ریاضیات که توپولوژی نام دارد، دستخوش رشد قابل ملاحظه ای شده است. مختصر آنکه، تحت تأثیر نظریه مجموعه ها، وحدت قابل ذکری در ریاضیات سنتی پدید آمده است، و ریاضیات جدید با سرعت انفجار آمیزی خلق گردیده است.

برای آنکه تکامل تاریخی مفاهیم اساسی ریاضی را نشان دهیم، ابتدا مفاهیم فضا و هندسه يك فضا را بررسی می کنیم. این مفاهیم نسبت به دوره یونان باستان، دچار تغییرات شدیدی شده است. از نظر یونانیان تنها يك فضا و يك هندسه وجود داشت؛ اینها مفاهیم مجرد بودند. تلقی آنها از فضا نه به صورت مجموعه ای از نقاط، بلکه به عنوان يك حوزه یا مکان هندسی بود که در آن اشیاء می توانستند آزادانه پیرامون خود حرکت کنند و با یکدیگر مقایسه شوند. از این دیدگاه رابطه اساسی هندسه، رابطه همنهشتی یا برهمنهی بود.

با بسط هندسه تحلیلی در قرن هفدهم، فضا به عنوان مجموعه ای از نقاط تلقی شد، و با وجود آمدن هندسه های ناقلیدسی کلاسیک در قرن هفدهم، ریاضیدانان این وضع را که بیش از يك هندسه وجود دارد، پذیرفتند. اما فضا هنوز هم به عنوان يك مکان هندسی تلقی می شد که در آن اشکال می توانستند با یکدیگر مقایسه شوند. موضوع اساسی، موضوع يك گروه از تبدیلهای همنهشت فضا به خودش شد و يك هندسه به صورت مطالعه آن خواص از پیکربندیهای نقاط تلقی شد که وقتی فضای پیرامون تحت تأثیر این تبدیلات قرار می گیرند، بدون تغییر باقی می مانند. قبلاً، در بخش ۱۴-۸ دیده ایم که چگونه این نقطه نظر توسط فلیکس کلاین در برنامه ارلانگر او به سال ۱۸۷۲، بسط یافته است. در برنامه ارلانگر، يك هندسه به عنوان نظریه پایاهای يك گروه تبدیل تعریف می شود. این مفهوم کلیه مفاهیم پیشین هندسه را ترکیب کرده و آنها را تمهیم داد، و رده بندی بی نظیری از تعداد زیادی از هندسه های مهم فراهم کرد.

در پایان قرن نوزدهم، با به وجود آمدن این نظر که هر شاخه از ریاضیات مجموعه‌ای از قضایای مجردی است که از یک مجموعه اصول موضوعه استنتاج شده باشند، هر هندسه، از این دیدگاه، به صورت شاخه خاصی از ریاضیات درآمد. مجموعه‌های اصول موضوعه برای انواع متعددی از هندسه‌ها مورد مطالعه قرار گرفتند، ولی برنامهٔ اولانگر به هیچ عنوان دچار آشفتگی نشد، زیرا یک هندسه را می‌شد به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات که نظریهٔ پایاهای یک گروه تبدیلات هستند، تلقی کرد.

مع هذا، در سال ۱۹۰۶، موریس فرشه (۱۸۷۸ - ۱۹۷۳) مطالعهٔ فضاهای مجرد را آغاز کرد، (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۱۵) و هندسه‌های بسیار کلی به وجود آمدند که دیگر با رده‌بندی شسته و رفتهٔ کلاسی جور در نمی‌آمدند. یک فضا صرفاً به صورت مجموعه‌ای از اشیاء، که معمولاً نقطه نامیده می‌شوند، همراه با مجموعه‌ای از روابط درآمد که متضمن این نقاط بودند، و یک هندسه صرفاً به صورت نظریهٔ چنان فضایی درآمد. مجموعهٔ روابط حاکم بر این نقاط، ساختار فضا نامیده می‌شوند، و این ساختار ممکن است در قالب نظریهٔ پایاهای یک گروه تبدیل قابل توضیح باشد یا نباشد. بدین ترتیب هندسه، از طریق نظریهٔ مجموعه‌ها، تعمیم بیشتری پیدا کرد. گرچه فضاهای مجرد به طور صوری اولین بار در سال ۱۹۰۶ مطرح شدند، ایدهٔ یک هندسه به عنوان مطالعهٔ مجموعه‌ای از نقاط با ساختاری بر نهاده بر آن، در واقع قبلاً در اظهارات ریمن در خطابهٔ پرارزش به سال ۱۸۵۴ مندرج بود. جالب است که برخی از این هندسه‌های جدید کاربردهای مفیدی در نظریهٔ نسبیت اینشتین، و در دیگر مباحث فیزیک نوین یافته‌اند.

مفهوم تابع، نظیر مفاهیم فضا و هندسه، دستخوش تکامل آشکاری شده است، و هر دانشجوی ریاضیات در خلال ادامهٔ مطالعه‌اش از دروس مقدماتی دبیرستان به دروس پیشرفته تروپیچیده‌تر بالاتر از لیسانس با ترمیمهای گوناگون این تکامل مواجه می‌شود.

تاریخ اصطلاح تابع مثال جالب دیگری از گرایش ریاضیدانان به تعمیم و گسترش مفاهیم مورد نظرشان است. واژهٔ تابع، به صورت معادل لاتین آن، ظاهراً در سال ۱۶۹۴ توسط لایبنیتز مطرح شده است و بدو به عنوان اصطلاحی برای نشان دادن هر کمیت مرتبط با یک منحنی، نظیر مختصات یک نقطه بر منحنی، شیب منحنی، شعاع انحنا منحنی و غیره به کار رفته است. یوهان برنولی، پیش از سال ۱۷۱۸، یک تابع را به عنوان هر عبارتی متشکل از یک متغیر و برخی ثابتها در نظر می‌گرفت، و اوایل، کمی بعد از آن، تابع را هر معادله یا فرمولی تلقی می‌کرد که متضمن متغیرها و ثابتها باشد. فکر اخیر تصویری از یک تابع است که در ذهن دانشجویان دروس مقدماتی ریاضیات به وجود می‌آید. مفهوم اوایل بدون تغییر باقی ماند تا آنکه ژوزف فوریه (۱۷۶۸ - ۱۸۳۰)، در تحقیقات خود دربارهٔ انتقال حرارت، به بررسی به اصطلاح سریهای مثلثاتی کشانده شد. نوع رابطهٔ بین متغیرها که در این سریها مطرح است، کلیتر از روابطی است که قبلاً مطالعه شده بودند، و در تلاش برای تهیهٔ تعریفی از یک تابع که گنجایش کافی برای دربرگرفتن چنان روابطی داشته باشد، لژون دیریکله (۱۸۵۵ - ۱۸۵۹) به فرمولبندی زیر رسید: یک متغیر نمادی است که هر یک از اعضای مجموعه‌ای از اعداد را نشان می‌دهد؛ اگر دو متغیر x و y طوری به هم مربوط باشند

که وقتی مقداری به x اختصاص یابد، خود به خود مقداری هم، بنا بر قاعده یا تناظری، به x اختصاص یابد، آنگاه گوییم که y یک تابع (یک مقداری) از x است. متغیر x ، که به آن مقداری به دلخواه نسبت داده می شود. متغیر مستقل نامیده می شود، و متغیر y ، که مقادیر آن به مقادیر x بستگی دارند، متغیر وابسته نامیده می شود. مقادیر قابل قبولی که x می پذیرد، حوزه تعریف تابع، و مقادیری که توسط آن اختیار می شود، دامنه مقادیر تابع را تشکیل می دهند. دانشجوی ریاضی معمولاً با تعریف دیریکله ای تابع در درس مقدماتی حسابان برمی خورد. این تعریف بسیار بسیط است و از آن چیزی را جمع به امکان بیان رابطه بین x و y توسط نوعی عبارت تحلیلی بر نمی آید؛ این تعریف برایده اساسی رابطه ای بین دو مجموعه از اعداد تأکید می کند.

نظریه مجموعه ها به مفهوم تابع وسعتی بخشیده است تا شامل روابطی بین هر دو مجموعه از عناصر، خواه این عناصر عدد باشند یا چیز دیگر، بشود. بدین ترتیب، در نظریه مجموعه ها، یک تابع مانند f به عنوان مجموعه ای از زوج های مرتب عناصر تعریف می شود به طوری که اگر $(a_1, b_1) \in f$ ، $(a_2, b_2) \in f$ ، $a_1 = a_2$ ، آنگاه $b_1 = b_2$. مجموعه A از همه عناصر اول زوج مرتب حوزه (تعریف) تابع نامیده می شود، و مجموعه B از همه عناصر دوم زوج مرتب دامنه (مقادیر) تابع نام دارد. بدین ترتیب یک رابطه تابعی چیزی جز نوعی زیر-مجموعه حاصل ضرب دکارتی مجموعه $A \times B$ نیست. یک تناظر یک به یک، به نوبه خود، نوع خاصی از یک تابع، یعنی تابعی است مانند f به طوری که اگر $(a_1, b_1) \in f$ ، $(a_2, b_2) \in f$ و $b_1 = b_2$ ، آنگاه $a_1 = a_2$. اگر، برای یک رابطه تابعی مانند f ، $(a, b) \in f$ ، می نویسیم $b = f(a)$.

مفهوم تابع در بخش عمده ریاضیات دخالت دارد، و از اوایل قرن حاضر ریاضیدانان متنفذ زیادی از استفاده از این مفهوم به عنوان اصل اساسی و متحد کننده در سازماندهی دروس ریاضی مقدماتی طرفداری کرده اند. ظاهراً این مفهوم راهنمای طبیعی و مؤثری برای انتخاب و بسط مطالب متون درسی است. در ارزشمندی هر چه زودتر آشناساختن دانشجویان ریاضی با مفهوم تابع تردیدی وجود ندارد.

۱۵-۴ اعداد ترانسفینی

نظریه ریاضی جدید مجموعه ها یکی از مهمترین ابداعات ذهن بشری است. به دلیل قاطعیت نامعمول برخی از ایده هایی که در آن یافت می شود، و به دلیل برخی روشهای ممتاز اثبات ناشی از آن، نظریه مجموعه ها جذابیت و صف ناپذیری یافته است. ولی بالاتر از همه، این نظریه اهمیت بسیار زیادی تقریباً در تمام ریاضیات دارد. این نظریه درخت، وضوح، توسعه، و تعمیم بسیاری از زمینه های ریاضیات بی اندازه مؤثر بوده است، و نقش آن در مطالعه مبانی ریاضیات کاملاً اساسی است. نظریه مجموعه ها همچنین حلقه های ارتباط بین ریاضیات از یک سو و فلسفه و منطق از سوی دیگر را تشکیل می دهد.

دو مجموعه را هم ارز گویند اگر فقط اگر بتوان آنها را در تناظر یک به یک قرار داد.

وقتی دو مجموعه هم ارز باشند، می گویند دارای يك عدد اصلی هستند. اعداد اصلی مجموعه های متناهی را می توان با اعداد طبیعی مشخص کرد. اعداد اصلی مجموعه های نامتناهی به اعداد ترانسفینی معروف اند، و نظریه این اعداد اولین بار توسط گئورگ کانتور در يك سری مقاله قابل توجه که از سال ۱۸۷۴ آغاز شد، بسط یافت. اغلب این مقالات در مجله های آلمانی ماتماتیشه آنال و مجله ریاضیات^۱ به چاپ رسیدند. قبل از مطالعه کانتور، ریاضیدانسان فقط يك بینهایت را پذیرفته بودند، که با علامتی شبیه به ∞ نشان داده می شد، و این علامت بدون تمایز برای نشان دادن «عدد» اعضا در مجموعه هایی نظیر مجموعه کلیه اعداد طبیعی و مجموعه کلیه اعداد حقیقی به کار گرفته می شد. با کار کانتور، دیدگاه کاملاً جدیدی مطرح گردید، و مقیاس و حسابی برای بینهایتها به دست آمد.

این اصل اساسی که مجموعه های هم ارز، عدد اصلی واحدی دارند، در موردی که مجموعه های تحت بررسی مجموعه های نامتناهی باشند، وضعیتهای جالب و شگفت آوری پیش می آورد. گالیله پیشتر، در نیمه دوم قرن شانزدهم متوجه شده بود که، به کمک تناظر $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ ، مجموعه کلیه اعداد صحیح مثبت را می توان در يك تناظر يك به يك با مجموعه کلیه اعداد صحیح مثبت و زوج قرار داد. از اینرو باید به هر يك از این دو مجموعه عدد اصلی واحدی اختصاص داد، و، از این نقطه نظر، باید گفت که تعداد اعداد صحیح مثبت برابر تعداد اعداد صحیح مثبت زوج است. بی درنگ می توان مشاهده کرد که اصل موضوع اقلیدسی مبنی بر اینکه کل بزرگتر از جزء است، در موقعی که اعداد اصلی مجموعه های نامتناهی مورد بحث اند، نمی تواند جایز باشد. در واقع ددکیند، در حدود سال ۱۸۸۸، يك مجموعه نامتناهی را مجموعه ای تعریف کرد که با يك زیر مجموعه حقیقی خودش هم ارز باشد.

ما عدد اصلی مجموعه کلیه اعداد طبیعی را با d نشان خواهیم داد^۲، و هر مجموعه ای با این عدد اصلی را شمارا خواهیم نامید. نتیجه می شود که مجموعه ای مانند $\mathbb{N}$ شماراست اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به صورت دنباله بی پایان $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ نوشت. چون به آسانی می توان نشان داد که هر مجموعه نامتناهی زیر مجموعه شمارایی دارد، نتیجه می شود که d «کوچکترین» عدد ترانسفینی است.

کانتور در یکی از اولین مقاله های خود درباره نظریه مجموعه ها، شمارا بودن دو مجموعه مهم را که در نگاه اول به زحمت واجد این خاصیت به نظر می رسند، اثبات کرد. اولین مجموعه، مجموعه اعداد گویا است. این مجموعه خاصیت مهم چگال بودن را دارد. منظور این است که بین هر دو عدد گویای متمایز عدد گویای دیگری — در حقیقت بینهایت عدد گویای دیگر — وجود دارد. مثلاً بین ۰ و ۱ اعداد گویای

$$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \dots, n/(n+1), \dots$$

قراردارند، بین $۱/۲۰۰$ اعداد گویای

$$۱/۳, ۲/۵, ۳/۷, ۴/۹, ۵/۱۱, \dots, n/(2n+1), \dots$$

قرار دارند، بین $۱/۴۰۰$ اعداد گویای

$$۱/۵, ۲/۹, ۳/۱۳, ۴/۱۷, ۵/۲۱, \dots, n/(4n+1), \dots$$

و غیره قراردادند. به موجب این خاصیت ممکن است این تصور به وجود آید که عدد ترانسفینی مجموعه اعداد گویا بزرگتر از d است*. کانتور نشان داد که چنین نیست، و برعکس، مجموعه اعداد گویا شماراست. اثبات آن جالب و به صورت زیر است.

قضیه ۱ مجموعه اعداد گویا شماراست.

آرایه زیر را که در آن اولین سطر، به ترتیب قدر، شامل کلیه اعداد طبیعی (یعنی، همه کسره های مثبت به مخرج ۱)، سطر دوم، به ترتیب قدر، شامل کسره های مثبت به مخرج ۲، سطر سوم، به ترتیب قدر، شامل همه کسره های مثبت به مخرج ۳، و غیره

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 \dots \\
 \downarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
 1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 \dots \\
 & & \swarrow & & & & \\
 1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 \dots \\
 \downarrow & & & & & & \\
 . & & . & & . & & . \dots
 \end{array}$$

هستند در نظر می گیریم. آشکار است که همه اعداد گویای مثبت در این آرایه ظاهر می شوند، و اگر این اعداد را به ترتیب توالی نشان داده به کمک پیکانها فهرست و اعدادی را که قبلاً ظاهر شده اند حذف کنیم، به دنباله بی پایان زیر می رسمیم

$$۱, ۲, ۱/۲, ۱/۳, ۳, ۲, ۳/۲, ۲/۳, ۱/۴, \dots$$

که در آن هر عدد گویا یک بار و فقط یک بار ظاهر می شود. این دنباله را با $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$

* عدد اصلی مجموعه ای مانند A را بزرگتر از عدد اصلی مجموعه ای مانند B گویند اگر و فقط اگر B بایک زیرمجموعه حقیقی A هم ارز باشد، ولی A با هیچ زیرمجموعه حقیقی B هم ارز نباشد.

نشان می‌دهیم. در این صورت دنباله $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \dots\}$ شامل همه اعداد گویاست، شمارا بودن این مجموعه ثابت می‌شود.

دومین مجموعه‌ای که توسط کانتور مطالعه شد، مجموعه اعدادی است که ظاهراً بسیار وسیعتر از مجموعه اعداد گویاست. ابتدا تعریف زیر را می‌کنیم.

تعریف ۱ يك عدد مختلط را جبری نامند اگر ریشه يك چند جمله‌ای مانند

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

باشد که در آن $a_0 \neq 0$ و همه a_i ها اعداد صحیح هستند. عدد مختلطی را که جبری نباشد متعالی نامند.

کاملاً روشن است که اعداد جبری، از جمله، شامل کلیه اعداد گویا و کلیه ریشه‌های چنین اعدادی هستند. از اینرو قضیه زیر تاحدی حیرت‌انگیز به نظر می‌آید:

قضیه ۲ مجموعه کلیه اعداد جبری شماراست.

فرض کنید $f(x)$ يك چندجمله‌ای از نوع توصیف شده در تعریف ۱ باشد، که در آن، بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد که $a_0 > 0$. به اصطلاح ارتفاع چندجمله‌ای را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید

$$h = n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

بدیهی است که h عددی است صحیح و ناکوچکتر از ۱، و نیز آشکار است که تنها يك عده متناهی از چندجمله‌ایها با ارتفاع مفروض h وجود دارند، و بنا بر این تنها يك عده متناهی عدد جبری که از چندجمله‌ایهای به ارتفاع مفروض h ناشی می‌شوند، موجود هستند. اکنون می‌توانیم (به طور نظری) همه اعداد جبری را فهرست کنیم، درحالی که از تکرار هر عددی که قبلاً فهرست شده است خودداری می‌کنیم. این کار را بدین صورت انجام می‌دهیم که ابتدا همه اعداد جبری ناشی از چندجمله‌ایهایی به ارتفاع ۱، سپس اعداد جبری ناشی از چندجمله‌ایهای به ارتفاع ۲، سپس همه اعداد جبری ناشی از چندجمله‌ایهای به ارتفاع ۳ را اختیار می‌کنیم و همینطور الی آخر. بنا بر این ملاحظه می‌کنیم که همه اعداد جبری را در دنباله بی‌پایانی فهرست کرده‌ایم و از اینرو این مجموعه شماراست.

با توجه به دوقضیه قبل، این امکان باقی می‌ماند که همه مجموعه‌های نامتناهی شمارا هستند. خلاف آن توسط کانتور با برهان اعجاب‌آوری در قضیه مهم زیر نشان داده شد.

قضیه ۳ مجموعه کلیه اعداد حقیقی در بازه $0 < x < 1$ ناشماراست.

اثبات به برهان خلف است و روش نامعمولی موسوم به فرایند قطری کردن کانتور را مورد استفاده قرار می‌دهد. در این صورت فرض می‌کنیم که مجموعه شماراست. با این فرض

می‌توان اعداد مجموعه را در دنباله‌ای مانند $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ فهرست کرد. هر يك از این اعداد را می‌توان به طور منحصر بفردی به صورت يك كسر اعشاری نامختوم نوشت؛ در این رابطه یادآوری این مطلب مفید است که هر عدد گویا را می‌توان به صورت «اعشاری مکرر» نوشت؛ مثلاً عددی مانند ۳۰۰ را می‌توان به صورت ۰۰۰۲۹۹۹۹۰۰ نوشت. در این صورت می‌توانیم دنباله را با آرایه زیر نمایش دهیم،

$$p_1 = 0.0 a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$p_2 = 0.0 a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$p_3 = 0.0 a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

که در آن a_{ij} معرف یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ است. حال علیرغم دقتی که در فهرست کردن کلیه اعداد بین ۰ و ۱ به کار رفته است، عددی وجود دارد که نمی‌توانسته در فهرست وارد شود. چنین عددی $b_1 b_2 b_3 \dots$ است که در آن، مثلاً، $b_k = 7$ ، در صورتی که $a_{kk} \neq 7$ و $b_k = 3$ ، اگر $a_{kk} = 7$ ، به‌ازای $k = 1, 2, \dots, n, \dots$. این عدد آشکارا بین ۰ و ۱ قرار دارد، و باید با هر يك از اعداد p_i متفاوت باشد، زیرا با p_1 حداقل در رقم اعشاری اول تفاوت دارد، با p_2 حداقل در رقم اعشاری دوم تفاوت دارد، با p_3 حداقل در رقم اعشاری سوم تفاوت دارد، و الی آخر. بدین ترتیب فرض آغازین که همه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را می‌توان در دنباله‌ای فهرست کرد، قابل قبول نیست، و لذا این مجموعه باید ناشمارا باشد.

کانتور قضیه مهم زیر را از قضایای ۲ و ۳ نتیجه گرفت:

قضیه ۴ اعداد متعالی موجودند.

چون، بنا بر قضیه ۳، مجموعه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ ناشمارا است، به آسانی می‌توان نشان داد که مجموعه اعداد مختلط نیز ناشمارا است. اما، بنا بر قضیه ۲، مجموعه اعداد جبری شمارا است. نتیجه می‌شود که باید اعداد مختلط که جبری نیستند، وجود داشته باشند، و قضیه ثابت می‌شود.

برهان فوق برای قضیه ۴ برای همه ریاضیدانان قابل قبول نیست. قابل قبول بودن یا غیر قابل قبول بودن این برهان مربوط به تصور ما از چگونگی وجود ریاضی است، و ریاضیدانانی وجود دارند که به‌زعم آنها وجود ریاضی فقط موقعی ثابت می‌شود که یکی از چیزهایی که وجودشان مورد بحث است عملاً ساخته و نشان داده شود. ولی برهان بالا وجود اعداد متعالی را با ایجاد نمونه مشخصی از چنین اعداد ثابت نمی‌کند. در ریاضیات برهانهای وجودی از این نوع غیر ساختنی فراوان‌اند که در آنها وجود، فرضاً تنها با نشان دادن اینکه فرض عدم وجود منجر به تناقض می‌شود، ثابت می‌گردد. مثلاً بسیاری از

براهین قضیه اساسی جبر برچنین اساسی فرمولبندی شده‌اند.

به دلیل ناخشنودی برخی ریاضیدانان از برهانهای وجودی غیرساختنی، تلاش زیادی صرف جانشین کردن این برهانها با برهانهایی شده‌است که عملاً یکی از چیزهای مورد بحث را می‌دهند.

اثبات وجود اعداد متعالی و این اثبات که عدد خاصی متعالی است دو مطلب کاملاً متفاوت‌اند. دومی اغلب مسئله بسیار دشواری است. ارمیت، در سال ۱۸۷۳، ثابت کرد که عدد e پایه لگاریتم طبیعی، متعالی است. لیندمان، در سال ۱۸۸۲، برای اولین بار متعالی بودن π را ثابت کرد. متأسفانه برای اثبات این حقایق جالب در این کتاب محدودی وجود دارد. دشواری مشخص کردن جبری بودن یا متعالی بودن عدد مفروض خاصی را می‌توان با این حقیقت روشن کرد که هنوز معلوم نیست که π جبری یا متعالی است. دستاورد جدیدی در این زمینه اثبات ماهیت متعالی بودن اعدادی به شکل a^b است، که در آن a عددی جبری جزو 0 و 1 است، و b یک عددنا گویای جبری می‌باشد. این نتیجه، که در سال ۱۹۳۴ توسط الکساندر اوسپوویچ گلفوند (متولد ۱۹۰۶) به دست آمده و امروزه قضیه گلفوند نامیده می‌شود، حاصل کوشش تقریباً ۳۰ ساله‌ای برای اثبات متعالی بودن به اصطلاح عدد هیلبرت، $2^{\sqrt{2}}$ ، بوده‌است.

چون مجموعه همه اعداد حقیقی در بازه $0 < x < 1$ ، نامشمار است، عدد ترانسفینی این مجموعه بزرگتر از d است. ما آن را با c نشان می‌دهیم و آن را عدد اصلی متصله اطلاق می‌کنیم. عقیده کلی بر این است که c عدد ترانسفینی بعد از d است، یعنی، اینکه هیچ مجموعه‌ای نیست که دارای عدد اصلی بزرگتر از d و کوچکتر از c باشد. این اعتقاد به فرض متصله موسوم است، ولی، علی‌رغم کوششهای شدید، هنوز برهانی برای آن پیدا نشده است. نتایج زیادی از این فرض استنتاج شده‌اند، و، به حدود سال ۱۹۴۰، منطقی‌اثریشی کورت گودل^۱ (۱۹۰۶ - ۱۹۷۸) به اثبات این نکته موفق شد که فرض متصله با مجموعه اصول موضوعه مشهوری مربوط به نظریه مجموعه‌ها سازگار است، به شرطی که خود این اصول موضوعه سازگار باشند. گودل حدس زد که انکار فرض متصله نیز با اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها سازگار است. این حدس را در سال ۱۹۶۳ دکتر پل. ج. کوهن از دانشگاه استانفورد ثابت کرد و بدین ترتیب نشان داد که فرض متصله از اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها مستقل است، و بنابراین قابل استنتاج از این اصول موضوعه نیست. این وضعیت شبیه به وضعیت اصل توافقی در هندسه اقلیدسی است.

نشان داده شده‌است که مجموعه کلیه توابع $f(x)$ که بر بازه $0 < x < 1$ تعریف شده‌اند، دارای عدد اصلی بزرگتر از c هستند، ولی اینکه آیا عدد اصلی مزبور عدد بعد از c هست یا نیست، معلوم نشده است. نظریه کانتور دنباله نامتناهی از اعداد ترانسفینی را پیش‌بینی می‌کند، و براهینی وجود دارند که مقصودشان نشان دادن آن است که تعداد نامحدودی از اعداد اصلی بزرگتر از متصله عملاً موجودند.

۵-۱۵ توپولوژی

توپولوژی در آغاز شاخه‌ای از هندسه بود، ولی طی ربع دوم قرن بیستم به قدری تعمیم یافت و چنان با شاخه‌های متعدد دیگری از ریاضیات درگیر شد که اکنون شاید بیشتر شایسته باشد که آن را، همراه با هندسه، جبر، و آنالیز، یکی از شعب بنیادی ریاضیات تلقی کرد. امروزه شاید بتوان توپولوژی را به‌طور کلی مطالعه ریاضی پیوستگی تعریف کرد. در این بخش خود را محدود به برخی از جنبه‌های این مبحث خواهیم نمود که منشأ هندسی آن را منعکس می‌کنند. از این نقطه نظر، توپولوژی را می‌توان مطالعه آن خواص اشکال هندسی تلقی کرد که تحت به اصطلاح تبدیلهای توپولوژیایی، یعنی تحت نگاشتهای تک‌مقداری پیوسته‌ای که معکوسهای تک‌مقداری پیوسته دارند، پایا می‌مانند. منظور ما از یک شکل هندسی يك مجموعه نقطه‌ای در فضای سه بعدی (یا ابعاد بالاتر) است؛ يك نگاشت تک‌مقداری پیوسته، نگاشتی است که بتوان آن را، نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی در فضا، به كمك توابع پیوسته تک‌مقداری از مختصات نمایش داد.

چون مجموعه تبدیلهای توپولوژیایی يك شکل هندسی تشکیل يك گروه تبدیل می‌دهد، توپولوژی را می‌توان، از دیدگاه ما، يك هندسه کلاینی دانست، و بنا بر این آن را در قالب برنامۀ «لانگر تدوین کرد. آن خواص يك شکل هندسی که تحت تبدیلات توپولوژیایی شکل، پایا می‌مانند خواص توپولوژیایی شکل نامیده می‌شوند، و دو شکلی را که بتوان به‌طور توپولوژیایی به یکدیگر تبدیل کرد هم‌ساز می‌نامند، یا از لحاظ توپولوژیایی هم‌ارز می‌نامند.

نیازی به این نیست که تابعهای نگاشت يك تبدیل توپولوژیایی در تمام فضایی که شكل هندسی در آن نشانیده شده، تعریف شده باشند؛ بلکه می‌توان آنها را تنها روی آن مجموعه نقطه‌ای که شكل هندسی را تشکیل می‌دهد، تعریف نمود. در این صورت می‌توان آن خواص توپولوژیایی از شكل را ذاتی دانست که تحت کلیه تبدیلهای توپولوژیایی شكل مورد نظر پایا می‌مانند، و آن خواص توپولوژیایی از شكل را عارضی دانست که تنها تحت تبدیلهای توپولوژیایی كل فضایی که شكل را احاطه می‌کند، پایا می‌مانند. خواص توپولوژیایی ذاتی شكل آنها می‌باشند که از فضای محاط‌کننده مستقل‌اند، در حالی که خواص توپولوژیایی عارضی آنها می‌باشند که به فضای محاط‌کننده بستگی دارند، و این مطلب یادآور وضعیت مشابهی است که در بخش ۱۴-۷ در ارتباط با هندسه دیفرانسیل سطوح در فضای سه بعدی مورد بررسی قرار گرفت.

توپولوژی، به عنوان مبحثی خود مرتبط، بسز حمت به پیشتر از اواسط قرن نوزدهم می‌رسد، ولی می‌توان برخی تحقیقات توپولوژیایی پراکنده جلوتر از آن را هم دید. در اواخر قرن هفدهم لایبنیتز اصطلاح هندسه وضع را برای توصیف نوعی ریاضیات کیفی که امروزه می‌توان آن را يك توپولوژی تلقی کرد، به کار برد و انجسام مطالعات مهمی در این زمینه را پیش‌بینی کرد، ولی تحقق پیشگویی او به کندی صورت گرفت. از خواص توپولوژیایی يك سطح چندوجهی بسته ساده که پیشترها کشف شده، رابطه $v - e + f = 2$

است که در آن v ، e ، f به ترتیب معرف عدد رأسها، یالها، و وجوه چندوجهی هستند. این رابطه بر دکارت در سال ۱۶۴۰ معلوم بوده است، ولی اولین برهان این فرمول توسط اوایلر در سال ۱۷۵۲ داده شد. اوایلر جلوتر از آن، در سال ۱۷۳۶، قدری توپولوژی گرافهای خطی را در بررسی اش در مسئله پل کونیگسبرگ (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۲. ۸) مطالعه کرده بود. گاوس سهم زیادی در توپولوژی داشته است. از چندین برهان که وی برای قضیه اساسی جبر داده، دوتای آنها آشکارا توپولوژیایی هستند. در اولین برهانش برای این قضیه، تکنیکهای توپولوژیایی را به کار می گیرد و این برهان در رساله دکترای او به سال ۱۷۹۹، وقتی که ۲۲ ساله بود، آورده شده است. گاوس بعدها مختصراً نظریه گره ها را که امروزه موضوع مهمی در توپولوژی است، مطالعه کرد. در حدود ۱۸۵۰ فرانسیس گاتری^۱ مسئله چهار رنگ را حدس زد، که بعدها توسط او گاستس دمورگن، آرثر کیلی، و دیگران دنبال شد. در این زمان موضوع توپولوژی با عنوان هندسه وضع شناخته می شد. اصطلاح توپولوژی توسط ی. ب. لیستینگ (۱۸۵۸ - ۱۸۸۲)، یکی از شاگردان گاوس، در سال ۱۸۴۷، در عنوان مطالعات اولیه در توپولوژی^۲، اولین کتابی که به این موضوع اختصاص داشت، مطرح گردید. کلمه آلمانی *topologie* بعداً توسط پروسور سالومون لفتشتس^۳ از دانشگاه برنستون به صورت *topology* به انگلیسی درآمد. گر. کیرشهوف (۱۸۲۴ - ۱۸۸۷)، دانشجوی دیگر گاوس، در سال ۱۸۴۷ توپولوژی گرافهای خطی را در مطالعه شبکه های الکتریکی به کار برد. اما در بین همه دانشجویان گاوس، کسی که سهمش در توپولوژی به مراتب بیش از دیگران است، برنهارد ریمان است، که در رساله دکترای خود به سال ۱۸۵۱، مفاهیم توپولوژیکی را در مطالعه نظریه توابع مختلط داخل نمود. از عوامل عمده تحرك توپولوژی که ریمان موجب آن بود، مفهوم سطح و ریمان وی است که ابزاری است توپولوژیایی برای تبدیل توابع مختلط چندمقداری به توابع یکمقداری. خطابه امتحانی ریمان به سال ۱۸۵۴، درباره فرضیهایی که اساس هندسه بر آنها مبتنی است، نیز در توپولوژی اهمیت اساسی دارد. ورود به ابعاد بالاتر توسط این خطابه میسر شد، و اصطلاح و مفهوم خمچینه در اینجا مطرح شدند. در حدود سال ۱۸۶۵، ا. ف. مویوس (۱۷۹۵ - ۱۸۶۸) مقاله ای نوشت که در آن به چندوجهی صرفاً به عنوان مجموعه ای از چند ضلعیهایی متصل بهم نظر شد. این کار مفهوم ۲-کومپلکسها را داخل توپولوژی کرد. مویوس در مطالعه منظم خود در باره ۲-کومپلکسها، به سطحی که یک طرف و یک لبه دارد و اکنون به نوا موپویوس موسوم است، رسید. در سال ۱۸۷۳، ج. ک. ماکسول (۱۸۳۱ - ۱۸۷۹) نظریه توپولوژیایی همبندی را در مطالعه خود در باره میدانهای الکترومغناطیسی به کار برد. عدد دیگری نظیر ه. هلمهولتز^۴ (۱۸۲۱ - ۱۸۹۴) و لرد کلونین (ویلیام تامسن^۵، ۱۸۲۴ - ۱۹۰۷)، راهم می توان به فهرست فیزیکدانانی

1. Francis Guthrie

* که هر نقشه بر صفحه یا کره را می توان حداکثر با چهار رنگ رنگ آمیزی کرد.

2. Vorstudien zur Topologie 3. Solomon Lefschetz

4. H. Helmholtz 5. William Thomson

که مفاهیم توپولوژیایی را با موفقیت به کار برده‌اند، افزود. هانری پوانکاره (۱۸۵۴ - ۱۹۱۲) در میان اولین کسانی که سهمی در توپولوژی دارند، مقام شامخی دارد. مقاله‌ای از او، که در سال ۱۸۹۵ نوشته شده و عنوان آن هندسهٔ وضع^۱ است، اولین مقالهٔ مهمی است که کلاً به توپولوژی اختصاص دارد. در این مقاله است که نظریهٔ مهم همولوژی n بعدی مطرح می‌شود. همچنین پوانکاره بود که گروه‌های بتی^۲ را وارد توپولوژی کرد. با کار پوانکاره، موضوع توپولوژی به جریان افتاد، و عدهٔ روزافزونی از ریاضیدانان وارد میدان شدند. نام‌هایی که در توپولوژی بعد از زمان پوانکاره اهمیت خاص دارند، عبارت‌اند از: ا. وبلن (۱۸۸۰ - ۱۹۶۰)، ج. و. الکساندر^۳ (۱۸۸۸ - ۱۹۷۱)، س. لفتس (۱۸۸۴ - ۱۹۷۲)، ل. ا. ی. براوتر (۱۸۸۲ - ۱۹۶۶)، و م. فرشه (۱۸۷۸ - ۱۹۷۳).

مفهوم يك شکل هندسی به عنوان مجموعه‌ای متناهی از قطعات بنیادی متصل به هم، که مورد تأکید موبیوس، ریمان، و پوانکاره بود، تدریجاً جای خود را به مفهوم کانتوری مجموعه دلخواهی از نقاط داد، و سپس این نکته تشخیص داده شد که هر مجموعه‌ای از چیزها - خواه مجموعه‌ای از اعداد، موجودات جبری، توابع باشند، خواه اشیاء غیر ریاضی - می‌توانند بدین یا بدان مفهوم يك فضای توپولوژیایی تشکیل دهند. این دیدگاه اخیر، و بسیار کلی، نسبت به توپولوژی به توپولوژی مجموعه‌ای شهرت یافته است، در حالی که مطالعاتی که ارتباط نزدیکی با دیدگاه سابق دارند، به توپولوژی ترکیبیاتی یا جبری شهرت دارند، گرچه باید متعرف بود که این تقسیم‌بندی شاید بیشتر جنبهٔ تسهیل داشته باشد تا جنبهٔ منطقی.

۱۵-۶ منطق ریاضی

هر نظریهٔ ریاضی از تأثیر متقابل دو عامل، مجموعه‌ای از اصول موضوعه و يك منطق، ناشی می‌شود. این مجموعه اصول موضوعه، پایه‌ای را تشکیل می‌دهد که نظریه از آن آغاز می‌شود، و يك منطق قواعدی را تشکیل می‌دهد که به کمک آن چنین پایه‌ای را می‌توان به مجموعه‌ای از قضایا بسط داد. آشکار است که هر دو عامل مهم‌اند، و بدین جهت هر دو عامل دقیقاً مورد بازبینی و مطالعه قرار گرفته‌اند. مطالعهٔ اولین عامل موضوع مبحث اصل موضوعیها را تشکیل می‌دهد، که قبلاً در بخش ۱۵-۲ بررسی شد؛ در این بخش به دومین عامل نظری می‌افکنیم.

گرچه یونانیان قدیم منطق صوری را به‌طور قابل توجهی بسط دادند، و ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ ق.م.) مطالب آن را منظم نمود، این کار آغازین همه به کمک زبان عادی صورت گرفت. ریاضیدانان کنونی بحث در نظرات نوین در باب منطق به‌چنان روش را، کار تقریباً بیحاصلی می‌دانند. برای دست یافتن به بررسی دقیق علمی مطلوب از این موضوع يك زبان نمادی ضرورت دارد. به دلیل وجود این چنین نمادگرایی، محصول چنین مطالعه‌ای به منطق علامتی یا ریاضی شهرت یافته است. در منطق علامتی روابط مختلف بین گزاره‌ها، طبقه‌ها، و غیره با فرمول‌هایی ارائه می‌شوند که معانی آنها عاری از ابهام‌هایی هستند که در

زبان معمولی رواج زیادی دارند. بدین ترتیب بسط این موضوع از مجموعه‌ای از قاعده‌های آغازین بر طبق برخی قواعد در باره تبدیلهای صوری که به روشنی تقریر شده‌اند، عیناً نظیر بسط قسمتی از جبر معمولی، میسر می‌گردد. همچنین، و باز نظیر بسط قسمتی از جبر معمولی، مزایای زبان نمادی بر زبان معمولی تا آنجا که به ایجاز و سهولت دریافت مربوط می‌شود، بسیار زیاد است.

لایبنتز را اولین کسی می‌دانند که پسندیده بودن يك منطق علامتی را مورد توجه قرار داده است. یکی از اولین نوشته‌های او، مقاله‌ای است تحت عنوان درفن ترکیب، که در سال ۱۶۶۶ منتشر کرده و در آن اعتقاد خود را به ممکن بودن يك زبان علمی جهان‌شمول، که با نمادگرایی مقتصدانه و عملی برای هدایت ما در فرایند استدلال بیان شود، خاطرنشان کرده است. با بازگشت به این اندیشه‌ها بین سالهای ۱۶۷۹ و ۱۶۹۰، در ایجاد منطق علامتی پیشرفت قابل ملاحظه‌ای کرد، و مفاهیم چندی وضع کرد که اهمیت زیادی در مطالعات جدید دارند.

توجه مجددی به منطق علامتی که بسیار اهمیت داشت، در سال ۱۸۴۷ صورت گرفت که طی آن جورج بول (۱۸۱۵ - ۱۸۶۴) جزوه کوچک خود تحت عنوان تحلیل ریاضی منطق، مقاله‌ای در جهت حساب استدلال قیاسی^۲، را منتشر کرد. بول مقاله دیگری را در سال ۱۸۴۸ منتشر کرد، و بالاخره، در سال ۱۸۵۴، شرح قابل توجهی از اندیشه‌های خود را در اثری به نام، پژوهشی در قوانین تفکر، که نظریه‌های ریاضی منطق و احتمالات بر آنها بنا شده‌اند^۳، ارائه داد.

اوگاستس دمورگن (۱۸۵۶ - ۱۸۷۱) از معاصرین بول بود، و رساله او درباره منطق جدوی؛ یا، حساب استنتاج، لازم و محتمل^۴، که در سال ۱۸۴۷ منتشر شد، در موردی به طور قابل ملاحظه‌ای از بول فراتر رفت. بعداً دمورگن مطالعات وسیعی نیز در منطق رابطه‌ها، که تا آن موقع در بوثه فراموشی افتاده بود، به عمل آورد.

در آمریکا، کار برجسته در این زمینه توسط چارلز ساندرز پیرس^۵ (۱۸۳۹ - ۱۹۱۴)، فرزند ریاضیدان نامدار دانشگاه هاروارد، بنجامین پیرس^۶ صورت گرفت. پیرس برخی اصول اعلام شده از طرف پیشینیان خود را مجدداً کشف کرد. جای تأسف است که کار او تا حدی خارج از جریان متعارف بسط این موضوع به نظر آمد؛ تنها در دوره‌های اخیر است که مزیت قسمت اعظم افکار پیرس به طور شایسته درک شده است.

مفاهیمی که بول ابداع کرده بود، در رساله طولانی ارنست شرودر^۷ (۱۸۴۱ - ۱۹۰۲)

1. De arte combinatoria
2. The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards Calculus of Deductive Reasoning
3. An Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability
4. Formal Logic ;or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable
5. Charles Sanders Peirce
6. Benjamin Peirce
7. Ernst Schröder

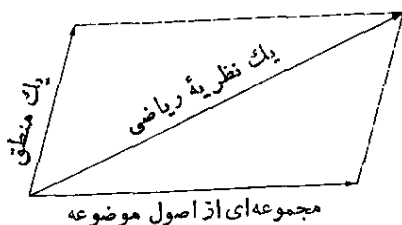
تحت عنوان درس‌هایی درجبر منطق^۱، که در طی دوره ۱۸۹۰ - ۱۸۹۵ منتشر شد، کمال قابل ملاحظه‌ای یافت. در واقع، تمایل منطقیون جدید آن است که منطق علامتی به رسم بولی را با اصطلاح جبر بول - شرودر مشخص نمایند. درجبر بولی هنوز کارهای قابل ملاحظه‌ای در حال انجام است، و مقاله‌های زیادی در این موضوع را می‌توان در مجلات تحقیقی کنونی پیدا کرد.

دریافت جدیدتری به منطق علامتی ریشه در کار منطقی آلمانی گوتلوب فرگه^۲ (۱۸۴۸ - ۱۹۲۵) طی سالهای ۱۸۷۹ - ۱۹۰۳، و مطالعات جوزپه پئانو (۱۸۵۸ - ۱۹۳۲) دارد. انگیزه کار پئانو میل به بیان تمام ریاضیات در قالب یک حساب منطقی بود، و کار فرگه از نیاز به مبنای سالمتری برای ریاضیات ریشه می‌گرفت. اثر فرگه به نام مفهوم نگاشت^۳ در سال ۱۸۷۹، و اثر از لحاظ تاریخی مهم او به نام قوانین اساسی حساب^۴ در ۱۸۹۳ - ۱۹۰۳ ظاهر شد؛ فرمول دیاضی^۵ اثر پئانو و همکاری‌اش در سال ۱۸۹۴ به تدریج منتشر شد. کاری که توسط فرگه و پئانو آغاز شد مستقیماً به اثر بسیار پرنفوذ و ماندگار پرنسپیا ماتماتیکا^۶ (۱۹۱۰ - ۱۹۱۳) اثر آلفرد نورث وایتهد (۱۸۶۱ - ۱۹۴۷) و پیر تراندراسل (۱۸۷۲ - ۱۹۷۰) منجر شد. ایده اساسی این اثر یکی کردن قسمت اعظم ریاضیات با منطق به کمک استنتاج از دستگاه اعداد طبیعی، و بنابراین قسمت عمده ریاضیات موجود، از مجموعه‌ای از مقدمات یا اصول موضوعه برای خود منطق بود. در سالهای ۱۹۳۴ - ۱۹۳۹ اثر جامع جهانی دیاضی^۷ داوید هیلبرت (۱۸۶۲ - ۱۹۴۳) و پل برنایس^۸ (۱۸۸۸ -) منتشر شد. این اثر، که مبتنی بر یک رشته مقالات و دروس دانشگاهی ارائه شده توسط هیلبرت است، در تلاش آن است که ریاضیات را به کمک منطق علامتی به روش جدیدی که ایجاد سازگاری در ریاضیات را مقدور می‌سازد، بنامد.

در زمان حاضر، مطالعات دقیقی در زمینه منطق علامتی از سوی ریاضیدانان زیادی دنبال می‌شود، که عمدتاً ناشی از انگیزه‌ای است که بر اثر انتشار پرنسپیا ماتماتیکا در این زمینه به وجود آمده است. یک نشریه ادواری، موسوم به مجله منطق علامتی^۹، در سال ۱۹۳۵ برای انتشار نوشته‌های این گروه تأسیس شد.

شباهت جالبی (در صورتی که در آن خیلی زیاده روی نشود) بین قانون متوازی الاضلاع برای نیروها و روش اصل موضوعی وجود دارد. بنا بر قانون متوازی الاضلاع دو نیروی مؤلفه‌ای در قالب یک نیروی نتیجه واحدی ترکیب می‌شوند. با تغییر یک یا هر دو نیروی مؤلفه‌ای، نیروهای نتیجه مختلفی به دست می‌آیند، گرچه می‌توان با اختیار یک زوج نیروی مؤلفه‌ای آغازین مختلف، یک نیروی نتیجه واحدی را به دست آورد. حال، همچنان که نیروی نتیجه به

1. Vorlesungen über die Algebra der Logik
2. Gottlob Frege
3. Begriffsschrift
4. Grundgesetze der Arithmetik
5. Formulaire de mathématiques
6. Principia mathematica
7. Grundlagen der Mathematik
8. Paul Bernays
9. Journal of Symbolic Logic



شکل ۱۲۲

كمك نیروهای مؤلفه‌ای آغازین معین می‌شود، همینطور هم (نگاه کنید به شکل ۱۲۲) يك نظریه ریاضی به كمك مجموعه‌ای از اصول موضوعه و يك منطق معین می‌شود. یعنی مجموعه گزاره‌هایی که يك نظریه ریاضی را تشکیل می‌دهند از اثر متقابل مجموعه‌ای از گزاره‌های آغازین، موسوم به اصول موضوعه، و مجموعه آغازین دیگری از گزاره‌ها، موسوم به منطق یا قواعد عمل ناشی می‌شود. از دیر باز ریاضیدانان به تغییر پذیری مجموعه اول از گزاره‌های آغازین، یعنی اصول موضوعه، پی برده بودند، ولی تا همین اواخر مجموعه دوم از گزاره‌های آغازین؛ یعنی، منطق، را عموماً ثابت، مطلق، تغییر ناپذیر تلقی می‌کردند. در واقع، هنوز هم عقیده غالب در میان اغلب مردم همین است، زیرا، جز برای معدودی از دانشجویان این علم، کاملاً غیر متقاعدکننده به نظر می‌رسد که برای قوانین منطق که توسط ارسطو در قرن چهارم ق.م. بیان شده، شق دیگری وجود داشته باشد. احساس کلی این است که این قوانین به نحوی برای ساختار جهان، عرضی و برای خود ماهیت استدلال بشری ذاتی هستند. همچنان که در مورد مطلقهای گذشته پیش آمده، این يك نیز برافنده است، ولی این امر تا سال ۱۹۲۱ به تأخیر افتاده است. دیدگاه نوین را نمی‌توان پاکیزه‌تر از آنچه در جملات زیر از منطقی برجسته آمریکایی، آلونسو چرچ^۱ آمده، بیان نمود.

ما هرگز صفت وحدت یا حقیقت مطلق را به هیچ دستگاه خاص منطقی نسبت نمی‌دهیم. ذوات منطق صوری تجربدهایی هستند که به دلیل مورد استفاده بودن آنها در توصیف و تنظیم حقایق تجربه‌ها یا مشاهدات ابداع شده‌اند، و خواص آنها، که در طرح خام بر اثر چنین نبیتی مشخص می‌شوند، از لحاظ ماهیت دقیق خود به نحوه انتخابشان بستگی دارند که مطابق میل ابداع کننده صورت می‌گیرد. می‌توانیم فضای سه بعدی هندسی را که در توصیف فضای مادی به کار می‌رود، به عنوان شاهد مثال بیاوریم که به نظر ما مشهود بودن چنین وضعیتی برای عامه قابل تشخیص است. آشکار است که ذوات هندسه ماهیت مجسردی دارند، صفحات بدون ضخامت و نقاطی که هیچ سطحی را در صفحه اشغال نمی‌کنند، مجموعه‌هایی از نقاط که شامل عده‌ای نامتناهی از نقاط اند، خطوطی با درازاهای نامتناهی، و چیزهای دیگری که

نمی‌توان آنها را در هیچ تجربه مادی به وجود آورد، در شمار این ذوات هستند. با این حال هندسه را می‌توان در فضای مادی چنان مورد استفاده قرار داد که تناظر بغایت مفیدی بین فضای هندسه و حقایق قابل مشاهده درباره اجسام مادی در فضا ایجاد شود. در بنا کردن هندسه، موارد کاربردی که برای آن در فضای مادی پیشنهاد می‌شود، نقش راهنمای کلی را در تعیین خواصی دارند که ذوات مجرد باید دارا باشند، ولی این کاربردها، این خواص را به طور کامل مشخص نمی‌کنند. در نتیجه ممکن است، همانطور که واقعیت امر نشان می‌دهد، بیش از يك هندسه موجود باشد، که استفاده از آن در توصیف فضای مادی شدنی باشد. به طور مشابه، بدون تردید، بیش از يك دستگاه صوری می‌تواند موجود باشد که استفاده از آن به عنوان منطق میسر باشد، و از این دستگاهها ممکن است یکی رضایتبخش تر و سهل الوصول تر از دیگری باشد، اما نمی‌توان گفت که یکی درست و دیگری نادرست است.

خاطر نشان می‌سازیم که هندسه‌های جدید برای اولین بار از طریق نفی اصل توازی اقلیدس، و جبرهای جدید از طریق نفی قانون جایجایی ضرب پدید آمدند. به همین روال، به اصطلاح «منطقهای چند ارزشی» اولین بار با نفی قانون طرد شق وسط ارسطو پیدا شدند. بنا بر این قانون، گزاره فصلی « p یا نه p » يك راستگواست، و هر گزاره مانند p در منطق ارسطویی همیشه یا درست است یا نادرست. چون يك گزاره می‌تواند هر يك از دو ارزش راستی، یعنی درستی یا نادرستی داشته باشد، این منطق به منطق دوازده ارزشی موسوم است. در سال ۱۹۲۱، در يك مقاله کوتاه دو صفحه‌ای یان لوكاسیویچ^۱ به مطالعه يك منطق سه ارزشی، یا منطقی که در آن گزاره‌ای مانند p می‌تواند هر يك از سه ارزش راستی ممکن را داشته باشد، پرداخت. به فاصله کوتاهی بعد از آن؛ و مستقل از کار لوكاسیویچ، ا. ل. پست^۲ به مطالعه منطقهای m ارزشی پرداخت، که در آن گزاره‌ای مانند p می‌تواند هر يك از m ارزش راستی ممکن را داشته باشد و در آن m ، عدد صحیح مثبتی بزرگتر از ۱ است. اگر m از ۲ بیشتر باشد، منطق را چند ارزشی می‌نامند. مطالعه دیگری از منطقهای m ارزشی در سال ۱۹۳۵ از طرف لوكاسیویچ و ا. تارسکی^۳ ارائه شد. بعداً، در سال ۱۹۳۲، دستگاههای راستی m - ارزشی توسط ه. رایشباخ^۴ تا يك منطق بینهایت ارزشی توسیع داده شد که در آن گزاره‌ای، مانند p می‌تواند هر يك از بینهایت ارزش ممکن را داشته باشد.*

1. J. Lukasiewicz 2. E.L. Post 3. A. Tarski 4. H. Reichenbach
* مطلبی که از نظر تاریخی اهمیت دارد، اینکه در سال ۱۹۳۶، ک. میخالسکی (K. Michalski) کشف نمود که منطقهای سه ارزشی پیشتر در قرن چهاردهم توسط مدرس قرون وسطی، ویلیام اهل اوکام (William of Occam) پیش‌بینی شده بود. ممکن بودن يك منطق سه ارزشی همچنین توسط هگل فیلسوف، در سال ۱۸۹۶، و توسط هیو مک کال (Hugh Maccoll) مورد توجه قرار گرفته بود. مع هذا این تحقیقات نظری تأثیر کمی در افکار نسلهای بعد گذاشت و بنا بر این نمی‌توان آنرا سهم قاطعی در ایجاد این منطق تلقی کرد.

همه منطقهای جدید از نوعی که در بالا بحث شد، نیستند. مثلاً، ا. هیتینگ^۱ يك منطق علامتی دو ارزشی به وجود آورده است تا در خدمت مکتب ریاضی شهود گرای قرار گیرد. این منطق از این نظر با منطق ارسطویی متفاوت است که به طور کامل قانون طرد شق وسط یا قانون نفی مضاعف را نمی پذیرد. در این صورت، مانند منطقهای چند ارزشی، این منطق با مقاصد خاص هم تفاوتی را با قوانین ارسطویی آشکار می سازد. این گونه منطقها به منطقهای غیر ارسطویی موسوم اند. حقیقت اینکه، منطق علامتی دوازدهی پوینسیپا ماتماتیکا غیر ارسطویی است؛ این منطق به جهت معنی استلزام در آن، از منطق ارسطویی متفاوت است. منطقهای غیر ارسطویی ثابت کرده اند که، نظیر هندسه های غیر اقلیدسی، آنها هم از نظر کاربرد بی ثمر نیستند. در واقع رایشناخ منطق بینهایت ارزشی خود را بدین منظور ابداع کرده به عنوان مبنایی برای نظریه ریاضی احتمالات مورد استفاده قرار گیرد. در سال ۱۹۳۳، ف. سویکی^۲ مشاهده نمود که منطقهای چند ارزشی را می توان در نظریه کوانتوم فیزیک نوین به کار گرفت. جزئیات بسیاری از چنین کاربردها توسط گارت بیرکهوف^۳، ج. فون نویمان^۴، و ه. رایشناخ در اختیار ما قرار داده شده اند. نقشی که منطقهای غیر ارسطویی در بسط آتی ریاضیات می تواند داشته باشد نامشخص، ولی اندیشه در باره آن دل انگیز است؛ به کار گرفتن منطق علامتی هیتینگ در ریاضیات شهود گرایانه نشانه آن است که منطقهای جدید می توانند از نظر ریاضی پر ارزش باشند. در بخش آتی به يك فایده احتمالی این منطقها در رفع بحران تازه ای در مبنای ریاضیات اشاره خواهیم کرد.

از مطالب بالا اصل مهمی در اکتشاف و پیشرفت پدید می آید، که همان تشکیک سازنده در يك اعتقاد سنتی است. وقتی از اینشتین پرسیدند چگونه به کشف نظریه نسبیت نایل شده است، پاسخ داد، «با تردید نسبت به يك اصل موضوع». لباچفسکی و بویوئی با اصل موضوع توازیهای اقلیدس به مبارزه برخاستند؛ هیلن و کیلی اصل جابجایی بودن ضرب را به مبارزه طلبیدند؛ لوکاسیویچ و پست با اصل ارسطویی طرد شق وسط در افتادند. مشابه این احوال، در زمینه علوم، کپرنیک این اصل را که زمین مرکز منظومه شمسی است، مورد سؤال قرار داد، گالیله این اصل را که سقوط اجسام سنگینتر سریعتر است، به مبارزه خواست؛ اینشتین به هموار دجویی با این اصل پرداخت که از دولحظه مجزا یکی باید مقدم برد دیگری باشد. این تردیدهای سازنده در اصول، یکی از رایجترین روشها در پیشرفت در ریاضیات است، و این نکته بدون تردید در روح این کوتاه سخن مشهور از گئورگ کانتور است که: «جوهر ریاضیات در آزادی آن است».

۱۵-۷ تعارض در نظریه مجموعه‌ها

از مطالعه تاریخ ریاضیات از عهد یونان باستان تا زمان حاضر آشکار می شود که مبنای

1. A. Heyting
2. F. Zwicky
3. Garrett Birkhoff
4. J. Von Neumann

ریاضیات، سه بحران تکان دهنده را پشت سر گذاشته است، که در آنها، در هر مورد، بخشی وسیع از ریاضیات که تا آن زمان استوار به نظر می رسید در معرض تردید قرار گرفته و بد تجدید نظر فوری نیاز پیدا کرده است.

نخستین بحران در مبانی ریاضیات در قرن پنجم ق. م. پیش آمد، و در واقع، چنین بحرانی نمی توانست پیشتر از آن رخ دهد، زیرا، همچنانکه دیدیم، ریاضیات به عنوان یک علم قیاسی زودتر از قرن ششم ق. م.، شاید به توسط تالس، فیثاغورس و شاگردان آنها شروع نشده بود. این بحران با کشف نامنتظر این مطلب که همه کمیتهای هندسی همجنس بایکدیگر متوافق نیستند، بدجلو انداخته شد؛ مثلاً نشان داده شد که قطر و ضلع یک مربع هیچ مقیاس مشترکی ندارند. چون بسط فیثاغورسی کمیتهای برای اعتقاد راسخ شهودی که همه کمیتهای همجنس متوافق اند، بناشده بود؛ این کشف که کمیتهای همجنس، نامتوافق هم می توانند باشند، بسیار مخرب از کار در آمد. به عنوان مثال، کل نظریه فیثاغورسی تناسب با همه تبعات آن می بایست بدلیل سست بنیادی به کناری گذاشته می شد. رفع این نخستین بحران در مبانی ریاضیات نه بدسادگی و نه به سرعت میسر بود. این مقصود سرانجام در حدود سال ۳۷۰ ق. م. توسط افودوکسوس زیرک حاصل شد، که نظریه تجدید نظریافته او در باره کمیتهای متناسب، یکی از بزرگترین شاهکارهای همه اعصار است. بررسی قابل توجه افودوکسوس از نامتوافقهها را می توان در مقاله پنجم اصول اقلیدس یافت؛ مطالعه وی اساساً با شرح جدیدی که توسط ریشارد دکیند در سال ۱۸۷۲ از اعداد گویا داده شد، انطباق دارد. ما این نخستین بحران در مبانی ریاضیات را در بخش ۳-۵، و چگونگی رفع آن را توسط افودوکسوس، در بخش ۵-۵ دیده ایم. این امکان کاملاً موجود است که بحران مزبور عمده‌تاً بر اثر فرمولبندی و پذیرش روش اصل موضوعی در ریاضیات پیدا شده باشد.

دومین بحران در مبانی ریاضیات پس از کشف حسابان توسط نیوتن و لایب‌نیتز در اواخر قرن هفدهم پیش آمد*. دیدیم که چگونه جانشینان این دو تن، سر مست از قدرت و کارپذیری این ابزار جدید، از استحکام بد قدر کفایت پایه‌ای که این موضوع بر آن بنا شده بود غافل ماندند، به طوری که بد جای داشتن براهینی که نتایج را موجه نماید، نتایج را برای توجیه براهین بدکار گرفتند. با گذشت زمان تناقضها و پارادوکسهای روزافزون پیش آمد، و بحرانی جدی در مبانی ریاضیات آشکار گردید. این نکته بیشتر و بیشتر تشخیص داده شد که بنای آنالیز خنده‌ای بد روی شن است و سرانجام در اوایل قرن نوزدهم، کوشی اولین گامها را در جهت حل این بحران، با گذاشتن روش دقیق حدود بد جای روش مبهم بینهایت کسوجکها، برداشت. با بد اصطلاح حسابیدن آنالیز که توسط وایرشتراس و پیروانش در قدم بعد انجام شد، این احساس بد وجود آمده که بد دومین بحران در مبانی آنالیز غلبه حاصل شده است، و کل ساختار ریاضیات از مشکل رها و برپایه‌ای عاری از اشکال قرار داده شده است. ریشه ونحوه رفع این دومین بحران در مبانی ریاضیات موضوع بخش ۱۴-۹ بود.

* پیش اخطارهای این بحران را می توان در پارادوکسهای مشهور زنون به حدود ۴۵۰ ق. م. مشاهده کرد.

سومین بحران در مبانی ریاضیات به‌طور غیر مترقبه‌ای در سال ۱۸۹۷ متجسم شد، و گرچند اکنون قدمتی بیش از نصف قرن دارد، هنوز بدنحوی که رضایت همه افراد ذی‌علاقه را فراهم آورد، حل نشده است. این بحران با کشف پارادوکسها یا تعارضاتی در حاشیه نظریه عام مجموعه‌ها منسوب به کانتور، پدیدار شد. چون مفاهیم مجموعه تداخل زیادی در قسمت اعظم ریاضیات دارد، و به همین دلیل، می‌توان در واقع آن را پایه‌ای برای ریاضیات قرار داد، کشف پارادوکسهای در نظریه مجموعه‌ها طبیعتاً در اعتبار تمامیت ساختار بنیادی ریاضیات سایه تردید می‌افکند.

در سال ۱۸۹۷ ریاضیدان ایتالیائی، بورالی - فورتی^۱، اولین پارادوکس در نظریه مجموعه‌ها را به‌معرض توجه عموم درآورد. این پارادوکس به‌صورتی که در ذهن بورالی - فورتی بسوده و توسط او بیان شده، متضمن اصطلاحات فنی و ایده‌هایی است که، در این بررسی محدود، جای بسط آن وجود ندارد. مع‌هذا، جوهر این پارادوکس را می‌توان با يك توصیف غیر فنی از پارادوکس کاملاً مشابهی که دو سال بعد توسط کانتور پیدا شد، ارائه کرد. کانتور در نظریه مجموعه‌های خود موفق به اثبات این مطلب شد که به ازای هر عدد ترانسفینی مفروض همواره يك عدد ترانسفینی بزرگتر از آن وجود دارد. یعنی همان‌طور که بزرگترین عدد طبیعی موجود نیست، بزرگترین عدد ترانسفینی هم وجود ندارد. حال مجموعه‌ای را در نظر بگیرید که اعضای آن کلیه مجموعه‌های ممکن باشند. مطمئناً هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند اعضایی بیش از این مجموعه کلیه مجموعه‌ها داشته باشد. ولی اگر چنین باشد چگونه يك عدد متعالی بزرگتر از عدد ترانسفینی این مجموعه می‌تواند وجود داشته باشد؟

در حالی که پارادوکسهای بورالی - فورتی و کانتور متضمن نتایجی از نظریه مجموعه‌هاست، برتراند راسل در سال ۱۹۰۲ پارادوکسی کشف کرد که به‌جیزی جز مفهوم صرف خود مجموعه بستگی ندارد. قبل از بیان پارادوکس راسل، متذکر می‌شویم که مجموعه‌ها یا اعضای خود هستند یا اعضای خود نیستند. مثلاً مجموعه همه ایده‌های مجرد خود ایده مجردی است، و لسی مجموعه همه انسانها يك انسان نیست. همچنین، مجموعه همه مجموعه‌ها خود يك مجموعه است، ولی مجموعه کلیه ستارگان يك ستاره نیست. مجموعه کلیه مجموعه‌هایی را که اعضای خودشان هستند با M ، و مجموعه کلیه مجموعه‌هایی را که اعضای خودشان نیستند با N نشان می‌دهیم. حال از خود می‌پرسیم که آیا مجموعه N عضو خودش است یا نیست. اگر N یکی از اعضای خودش باشد، در این صورت N عضو M است و نه عضو N ، و اگر N یکی از اعضای خود نباشد، آنگاه N یکی از اعضای N و نه M است، و N یکی از اعضای خود می‌باشد. پارادوکس از این حقیقت ناشی می‌شود که در هر حالت به يك تناقض می‌رسیم.

صورت فشرده‌تر و دور از اطنابی از پارادوکس راسل را می‌توان به شکل زیر ارائه کرد. فرض کنید X مجموعه دلخواهی باشد. در این صورت بنا بر تعریف N ،

$$(X \in N) \leftrightarrow (X \notin X)$$

حال X را N بگیرد، و به تناقض زیر برسد

$$(N \in N) \leftrightarrow (N \notin N).$$

راسل این پارادوکس را طی نامه‌ای برای فرگه فرستاد. این نامه درست بعد از آنکه فرگه آخرین جلد اثر عظیم دوجلدی خود دربارهٔ مبانی حساب را تکمیل کرده بود، به او رسید. فرگه در پایان کتاب خود با جملات متأثر کننده و کاملاً توأم با خویشنداری زیر به این نامه اشاره کرد: «برای يك دانشمند هیچ چیزی نامطبوعتر از آن نیست که به محض اتمام کاری مبانی آن را در حال فروپاشی ببیند. نامه‌ای از آقای برتراند راسل در زمانی که کتاب تقریباً آماده سپردن به چاپخانه بود، مرا در چنین وضعی قرار داده است.» حاصل زحمات ده سال یا بیشتر، همین بود.

به پارادوکس راسل به شکلهای مختلف جتبه عامیانه داده شده است. یکی از مشهورترین شکل‌های آن توسط خود راسل در سال ۱۹۱۹ داده شد و به گرفتاری آرایشگری در يك دهکده معین مربوط می‌شود که مبانی کار خود را بر این گذارده که فقط و فقط صورت آن عده از اهالی دهکده را بتراشد که خود صورت خود را نمی‌تراشند. ماهیت پارادوکسی وضعیت این شخص وقتی تشخیص داده می‌شود که بخواهیم به سؤال زیر پاسخ دهیم، «آیا این آرایشگر صورت خود را خود می‌تراشد یا نه؟» اگر وی صورت خود را بتراشد، در این صورت مطابق اصل اعلام شده از طرف خود، نباید این کار را انجام دهد، اگر وی صورتش را خود نتراشد، در این صورت مطابق اصل خود باید این کار را انجام دهد.

از زمان کشف تناقض‌های بالا در بطن نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها، پارادوکسهای فراوان دیگری به وجود آمده‌اند. این پارادوکسهای جدید نظریهٔ مجموعه‌ها به چندین پارادوکس قدیمی در منطق مربوط می‌شوند. مثلاً نکتهٔ زیر به اثو بولیدس^۱ مربوط به قرن چهارم ق.م. نسبت داده می‌شود، «چیزی که الان می‌گویم نادرست است.» اگر گفتهٔ اثو بولیدس درست باشد، آنگاه بنابر گفتهٔ خود او، این گفته باید نادرست باشد. از طرف دیگر، اگر گفتهٔ اثو بولیدس نادرست باشد، در این صورت نتیجه می‌شود که گفتهٔ او باید درست باشد. بدین ترتیب گفتهٔ اثو بولیدس نمی‌تواند بی آنکه موجب تناقضی شود نه درست و نه نادرست باشد. پارادوکسی منسوب به اپیمینیدس^۲، که در صحت انتساب آن به اپیمینیدس جای تردید است، شاید قدیمتر از پارادوکس اثو بولیدس باشد. اپیمینیدس که خود فیلسوفی از اهالی کرت^۳ در قرن ششم ق.م. بود، گویا چنین گفته است که «اهالی کرت همیشه دروغ می‌گویند» از تحلیل سادهٔ این گفته آشکار می‌شود که این نیز ناقض خود است.

وجود پارادوکسهای در نظریهٔ مجموعه‌ها، نظیر پارادوکسهای بالا، به وضوح آشکار می‌کنند که کار از جای عیب دارد. از زمان کشف آنها، نوشته‌های زیادی دربارهٔ این موضوع منتشر، و کوششهای متعددی در جهت رفع آنها پیشنهاد شده است.

تا آنجا که به ریاضیات مربوط می‌شود، راه مفری برای این وضع موجود است. تنها لازم است که نظریه مجموعه‌ها را بزرگ پایه اصل موضوعی با محدودیتی کافی بنا کرد تا چنین تعارضهایی در احکام آن طرد شوند. چنین کوششی برای اولین بار توسط تسرملو در سال ۱۹۵۸ انجام شد، و نتایجهای بعدی آن توسط فرانکل^۱ (۱۹۲۲-۱۹۲۵)، اسکولم^۲ (۱۹۲۲، ۱۹۲۹)، فون نویمان (۱۹۲۴-۱۹۲۸)، سرنیس (۱۹۳۷-۱۹۴۸)، و دیگران به عمل آمده است. اما چنین روشهایی با عنوان اینکه هدف آنها صرفاً اجتناب از این پارادوکسهاست، مورد انتقاد قرار گرفته‌است؛ این روش مطمئناً توضیحی راجع به این پارادوکسها نمی‌دهد. وانگهی در این روش تضمینی نیست که انواع دیگری از پارادوکسها در آینده رخ ندهند.

روش دیگری وجود دارد که ظاهراً هم این پارادوکسها را توضیح می‌دهد و هم از آنها برکنار می‌ماند. در صورت امتحان دقیق، مشاهده می‌شود که هر یک از پارادوکسهای مورد بحث در بالا متضمن مجموعه‌ای مانند S و عضوی مانند m از S است که تعریف آن به S بستگی دارد. چنین تعریفهایی غیراسنادی نامیده می‌شوند، و تعریفهای غیراسنادی به یک معنی دوری‌اند. برای مثال، پارادوکس آرایشگر راسل را در نظر بگیرید. فرض کنید که m معرف آرایشگر و S معرف مجموعه کلیه اعضای دهکده آرایشگر باشد. در این صورت m به طور غیراسنادی چنین تعریف می‌شود «آن عضو S که فقط و فقط صورت آن اعضای S را می‌تراشد که صورت خود را نمی‌تراشد». ماهیت دوری بسودن این تعریف آشکار است - تعریف آرایشگر اعضای دهکده را شامل می‌شود و خود آرایشگر یکی از اعضای این دهکده است.

پوانکاره علت این تناقضها در احکام را در تعریفهای غیراسنادی می‌داند، و راسل همین نظر را در اصل دورقاسد خود بیان کرد: هیچ مجموعه‌ای مانند S مجاز به داشتن اعضای مانند m که تنها در قالب S قابل تعریف باشند، یا اعضای مانند m که متضمن S اند یا پیشفرض آنها S است، نیست. این اصل معادل با تحدیدی در مفهوم مجموعه است. کانتور با بیان زیرسعی کرده بود که به مفهوم مجموعه معنی عامتری بدهد: منظور ما از یک مجموعه S هر گردایه‌ای است منتخب از کل اشیاء مجزا و معین مانند m که درشود و اندیشه‌ها وجود دارد؛ این اشیاء m عناصر S نامیده می‌شوند. نظریه مجموعه‌هایی که بر مبنای مفهوم عام کانتور از مجموعه ساخته شود، همان طور که دیده‌ایم، به تناقضهایی منجر می‌شود، ولی اگر مفهوم مجموعه بنا بر اصل دورقاسد محدود شود، نظریه حاصل، دور از تعارضاتی است که بر ما معلوم‌اند. بدین ترتیب به نظر می‌رسد که منع تعریفهای غیراسنادی راه حلی برای پارادوکسهای معلوم نظریه مجموعه‌ها باشد. مع هذا، یک ایراد جدی بر این راه حل وارد است و آن این است که بخشهایی در ریاضیات وجود دارند، که ریاضیدانان اگرچه زیاد از کنار گذاشتن آنها دارند و این بخشها حاوی تعریفهای غیراسنادی‌اند.

یک مثال از تعریف غیراسنادی در ریاضیات، تعریف کوچکترین کران بالای یک مجموعه

نا تهی مفروض از اعداد حقیقی است - کوچکترین کران بالای يك مجموعه مفروض ، کوچکترین عضو مجموعه کلیه کرانهای بالای مجموعه مفروض است. موارد مشابه زیادی از تعریفهای غیر اسنادی در ریاضیات موجود است، گرچه می توان با تدبیر بر بسیاری از آنها چیره شد. در سال ۱۹۱۸، هرمان وایل^۱ در پی کشف این مطلب برآمد که چدمقداری از آنالیز را می توان از ریشه دستگاه اعداد حقیقی بدون استفاده از تعریفهای غیراسنادی بنا کرد. گرچه وی در به دست آوردن قسمت قابل ملاحظه ای از آنالیز موفق شد، در استخراج این قضیه مهم که هر مجموعه نا تهی از اعداد حقیقی با کران بالا، يك کوچکترین کران بالا دارد، موفقیتی حاصل نکرد.

کوششهای دیگری که برای رفع پارادوکسهای نظریه مجموعه ها بدعمل آمده اند، ناظر بدیافتن مشکلات منطقی هستند، و باید پذیرفت که کشف این پارادوکسها در نظریه عام مجموعه ها زمینه را برای تفحص کامل در مبانی منطق فراهم کرده است. يك پیشنهاد وسوسه انگیز برای دفع این پارادوکسها، شاید در استفاده از يك منطق سه ارزشی باشد. مثلاً، در پارادوکس راسل که در بالا داده شد، دیدیم که « N عضوی از خودش است»، می تواند نه درست باشد و نه نادرست. در اینجا وجود يك امکان سوم، می تواند مفید باشد. با نشان دادن ارزش درستی يك گزاره با T ، ارزش نادرستی آن با F ، و يك ارزش سوم، که نه T و نه F است با ؟ (شاید به معنی، غیرقابل تصمیم)، می توان مشکل را بارده بندی گزاره اخیر بدعنوان؟ برطرف کرد.

سه فلسفه اصلی، یا مکتب تفکر، در رابطه بامبانی ریاضیات پیدا شده است - به اصطلاح مکتب منطق گرا، مکتب شهود گرا، و مکتب صوری گرا. طبیعی است که هر فلسفه نوین مبانی ریاضیات باید، بدنبال خود، با بحرانی کنونی در مبانی ریاضیات مقابله کند. در بخش آتی بدطور مختصر این سه مکتب فکری را مورد بررسی قرار داده و متذکر خواهیم شد که چگونه هر يك از اینها راهی برای مواجهه باتعارضهای نظریه عام مجموعه ها در پیش پا می گذارد.

۱۵-۸ فلسفه های ریاضیات

يك فلسفه را می توان توضیحی دانست که درصدد افاده معنی برای بی نظمی طبیعی مجموعه ای از تجارب برمی آید. از این دیدگاه، امکان آن هست که تقریباً برای هر چیزی فلسفه ای داشته باشیم. فلسفه هنر، فلسفه زندگی، فلسفه مذهب، فلسفه آموزش، فلسفه جامعه، فلسفه تاریخ، فلسفه علوم، فلسفه ریاضیات، و حتی فلسفه خود فلسفه. يك فلسفه همانا يك فرایند تهذیب و نظم دهی تجارب و ارزشهاست. فلسفه در جستجوی روابط بین اشیائی است که در حالت عادی شباهتی بین آنها متصور نیست، و در پی تفاوت های مهم بین چیزهایی است که در حالت عادی یکسان تلقی می شوند؛ فلسفه بیان نظریه ای است در باب ماهیت چیزی. بدویزه، يك فلسفه ریاضیات اساساً عبارت است از بازسازی مجدانه ای که در آن بدتوده بی نظم معرفت

ریاضی که طی سالیان متمادی برهم انباشته شده معنی یا نظم خاصی داده می‌شود. روشن است که فلسفه تابعی از زمان است، و فلسفه خاصی ممکن است با گذشت زمان منسوخ یا در پرتو تجارب اضافی تغییر یابد. ما در اینجا فقط به فلسفه‌های معاصر ریاضی می‌پردازیم - فلسفه‌هایی که ناظر بر پیشرفتهای اخیر در ریاضیات و بحران کنونی در این موضوع هستند. امروزه سه فلسفه اصلی ریاضی وجود دارد که هر یک از آنها گروه معتنا بهی هواخواه دارد و هر یک، مجموعه بزرگی از نوشته‌های مربوطه را پدید آورده‌اند. این فلسفه‌ها عنوانهای زیر را دارند، مکتب منطق‌گرا، که مفسرین عمده آن راسل و وایتهد هستند، مکتب شهودگرا، به رهبری براوتر و مکتب صوری‌گرا، که عمدتاً توسط هیلبرت به وجود آمد. البته، جز این سه فلسفه، فلسفه‌های دیگری در عصر حاضر وجود دارند، چند فلسفه مستقل وجود دارند و فلسفه‌های دیگری هم هستند که آمیزه و اختلاطی از این سه فلسفه اصلی هستند، ولی این دیدگاههای دیگر هنوز چندان بارور نشده، یا متضمن بازسازی ریاضیات به حد قابل مقایسه با این فلسفه‌ها نیستند.

۱. منطق‌گرایی. تر منطق‌گرا آن است که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است. به جای آنکه منطق ابزاری برای ریاضیات باشد، منطق پیشرو ریاضیات می‌شود. همه مفاهیم ریاضی باید در قالب مفاهیم منطقی تدوین شوند، و همه قضایای ریاضیات باید به عنوان قضایای منطق بسط یا بند؛ تمایز بین ریاضیات و منطق صرفاً به عملی برای تسهیل کار در می‌آید. مفهوم منطق به عنوان علمی در بر دارنده اصول و ایده‌های زمینه‌ساز همه علوم دیگر حداقل به زمان لایبنیتز (۱۶۶۶) باز می‌گردد. تحویل عملی مفاهیم ریاضی به مفاهیم منطقی توسط دکیند (۱۸۸۸) و فرگه (۱۸۸۴-۱۹۰۳) انجام شد، و پتانو (۱۸۸۹-۱۹۰۸) مبادرت به بیان قضایای ریاضی به کمک نمادگرایی منطقی نمود. از اینرو این دانشمندان پیشگامان مکتب منطق‌گرا هستند که بیان قاطع آن در اثر تاریخی پرنسیپیا ماتماتیکی وایتهد و راسل (۱۹۱۰-۱۹۱۳) متبلور شده است. این اثر عظیم و پیچیده در صد آن است که به تفصیل همه ریاضیات را به منطق تحویل نماید. اصلاحات و پیرایشهای بعدی این برنامه توسط ویتگنشتین^۱ (۱۹۲۲)، خفیستک^۲ (۱۹۲۴-۱۹۲۵)، رمزی^۳ (۱۹۲۶)، لنگفورد^۴ (۱۹۲۷)، کارنپ^۵ (۱۹۳۱)، کواین^۶ (۱۹۴۰)، و سایرین انجام شد.

تر منطق‌گرا طبیعتاً از تلاش برای تعمیق هر چه بیشتر مبانی ریاضیات ناشی گردید. قبلاً دیده‌ایم که چگونه این مبانی در دستگاه اعداد حقیقی تأسیس شده، و سپس از دستگاه اعداد حقیقی به دستگاه اعداد طبیعی، و از آن، به نظریه مجموعه‌ها فراتر برده شده‌اند. چون نظریه طبقات قسمت مهمی از منطق است، طبیعی است اندیشه تحویل ریاضیات به منطق وارد ذهن شود. بدین ترتیب تر منطق‌گرایی ترکیب‌سازی مجددانهای است که بر اثر گرایش بر اهمیتی در تاریخ کاربرد روش اصل موضوعی، به ذهن متبادر می‌شود.



برتراند راسل
(مجموعه کتابخانه عمومی نیویورک)

پرنسیپهای ماتماتیکا با «مفاهیم اولیه» و «گزاره‌های اولیه»، متناظر با «اصطلاحات تعریف نشده» و «اصول موضوعه» يك مبث مجرد صوری آغاز می‌شود. این مفاهیم و گزاره‌های اولیه نباید در معرض تعبیر و تفسیر قرار گیرند، بلکه باید به مفاهیم شهودی منطق محدود گردند؛ آنها را باید به عنوان توصیف‌های موجه و فرضیهایی دربارهٔ دنیای واقعی تلقی کرد یا حداقل آنها را چنین پذیرفت. کوناہ سخن آنکه، در اینجا يك دیدگاه ملموس حاکم است و نه يك دیدگاه مجرد، و در نتیجه هیچ تلاشی برای اثبات سازگاری این گزاره‌های اولیه به عمل نمی‌آید. هدف پرنسیپهای ماتماتیکا بسط مفاهیم و قضایای ریاضی از این مفاهیم و گزاره‌های اولیه است که با يك حساب گزاره‌ها آغاز می‌شود و از طریق نظریهٔ طبقات و رابطه‌ها به طرف تأسیس دستگاه اعداد طبیعی و از آنجا به سمت همهٔ ریاضیاتی که از دستگاه اعداد طبیعی قسابل استخراج است، پیش می‌رود. در این بسط اعداد طبیعی با همان معنایی که به طور معمول به آنها منتسب می‌شود، ظاهر می‌شوند و به طور نایکنا به مثابهٔ هر چیزی که در مجموعهٔ معینی از اصول موضوعهٔ مجرد صدق می‌کنند، تعریف نمی‌شوند.

برای اجتناب از تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها، در پرنسیپهای ماتماتیکا «نظریهٔ نوعها» به کار گرفته می‌شود. با توصیف تا حدی خیلی ساده، يك چنین نظریه‌ای سلسله مراتبی در سطح عناصر برقرار می‌کند. عناصر اولیه، عناصر نوع ۰ را تشکیل می‌دهند، طبقات عناصر نوع ۰، عناصر نوع ۱ را تشکیل می‌دهند، طبقات عناصر نوع ۱، عناصر نوع ۲ را تشکیل می‌دهند؛ و همینطور الی آخر. در به کارگیری نظریهٔ نوعها، از این قانون تبعیت می‌شود که کلیهٔ عناصر هر طبقه باید از يك نوع باشند. پیروی از این قاعده تعاریف غیراسنادی را مستثنی می‌سازد و بدین ترتیب از پارادوکسهای نظریهٔ مجموعه‌ها احتراز می‌شود. به گونه‌ای که در طرح اصلی پرنسیپهای ماتماتیکا

عمل شده است، سلسله مراتبی در داخل سلسله مراتب دیده می‌شود که به اصطلاح نظریه «شاخه‌ای» انواع منجر شده است. برای به دست آوردن تعریف‌های غیر اسنادی مورد نیاز در تأسیس آنالیز، يك «اصل قابلیت تحویل» باید وارد بحث می‌شد. ماهیت غیر بدوی و اختیاری این اصل انتقاداتی جدی را متوجه آن کرد، و قسمت عمده پیرایشهای برنامه منطقی‌گرایی تلاشهایی برای ابداع روشی جهت احتراز از این اصل نامطبوع قابلیت تحویل معطوف بوده است.

در پاگرفتن یا نگرفتن از منطق‌گرا ظاهرأ هر کس نظری دارد. با آنکه برخی برنامه را رضایتبخش می‌دانند، عده‌ای دیگر ایرادهایی در آن یافته‌اند. حداقل در يك مورد، تز منطق‌گرا را می‌توان از این لحاظ مورد پرسش قرار داد که بسط منظم منطق (به عنوان يك مبحث سازمان یافته) مفاهیم ریاضی از قبیل مفهوم بنیادی تکرار را که بایستی در شرح نظریه انواع یا مفهوم استنتاج از مقدمات معلوم به کار برده شود، از پیش انگاشته می‌گیرد.

آلفرد نورث وایتهد^۱ در رمزگیت^۲ انگلیس، در سال ۱۸۶۱، به دنیا آمد، و از ۱۸۸۵ تا ۱۹۱۱ در دانشکده شربورن^۳ و کالج تروینیتی کیمبریج درس خواند. از ۱۸۸۵ تا ۱۹۱۱ در کالج تروینیتی به تدریس ریاضیات و سپس در کالج یونیورسیتی در دانشگاه لندن به تدریس ریاضیات کار بسته و مکانیک پرداخت. وی از ۱۹۱۴ تا ۱۹۲۴ در کالج سلطنتی علم و صنعت^۴ دانشگاه لندن استاد ریاضیات بود و پس از آن به عنوان استاد فلسفه در دانشگاه هاروارد به ایالات متحده رفت و این سمت را تا زمان بازنشستگی در سال ۱۹۳۶ بر عهده داشت. در سال ۱۹۴۷ در کیمبریج ماساچوست^۵ درگذشت. مانند ممتازترین دانشجوی خود، برتراند راسل، وایتهد به فلسفه از دیدگاه ریاضیات می‌نگریست و این دوشخصیت همراه با هم، اثر دوران ساز خود چرینسپیماها تماتیکا را در سالهای ۱۹۱۰-۱۹۱۳ به نگارش درآوردند. وایتهد چندین اثر بسیار روان در ریاضیات و فلسفه منتشر کرد.

برتراند آرثر ویلیام راسل^۶، از اخلاف يك خانواده اشرافی، در نزدیکی تریلک^۷، ویلز^۸، در سال ۱۸۷۲، متولد شد. وی که برنده يك بورس آزاد در کالج تروینیتی، کیمبریج، بود در ریاضیات و فلسفه مقام بسیار ممتازی یافت، و پیش وایتهد درس خواند. علاوه بر تدریس، عمدتاً در دانشگاه‌های ایالات متحده، وی بالغ بر چهل کتاب در ریاضیات، منطق، فلسفه، جامعه‌شناسی، و آموزش نوشت. وی جوایز بسیاری مانند نشان سیلوستر و نشان دومورگن انجمن سلطنتی (۱۹۳۴)، نشان لیاقت^۹ (۱۹۴۰)، و جایزه نوبل در ادبیات (۱۹۵۰) دریافت کرد. اظهار نظرهای بی‌پرده او اغلب او را به ستیزه و جدل می‌کشیدند.

-
1. Alfred North Whitehead	2. Ramsgate	3. Sherborne
4. Imperial College of Science and Technology	5. Massachusetts	
6. Bertrand Arthur William Russell	7. Trelleck	8. Wales
9. Order of Merit		

در طول جنگ جهانی اول او را از دانشگاه کیمبرج اخراج و به مدت چهار ماه به دلیل عقاید صلح طلبانه و مخالفت با سربازگیری زندانی کردند. در اوایل سالهای ۱۹۶۵ به رهبری جنبشهای صلح طلبانه به منظور منع تسلیحات هسته‌ای پرداخت، و باز به مدت کوتاهی به زندان افتاد. وی که مردی با ذهن و استعداد درخشان بود، در سال ۱۹۷۵، در حالی که تا آخرین لحظه هوشیاری ذهنی خود را حفظ کرده بود، در سن نود و هشت سالگی دنیا را وداع گفت.

۲. **شهودگرایی** . تز شهودگرا آن است که ریاضیات باید منحصرأ به توسط يك عده متناهی از روشهای سازنده در بارهٔ دنبالهٔ اعداد طبیعی که به طور شهودی در نظر گرفته شده‌اند، بنا شود. لذا مطابق این نظر، در زیربنای ریاضیات شهود اولیه‌ای قرار دارد که بدون تردید، با حس گذرایی قبل و بعد در وجود ما همراه است و به ما اجازه می‌دهد يك چیز واحد، سپس یکی دیگر، سپس یکی دیگر، و همینطور تا به طور بی‌پایان را تصور کنیم. بدین ترتیب دنباله‌های بی‌انتها را به دست می‌آوریم، که معروفترین آنها دستگاه اعداد طبیعی است. از این بنای شهودی دنبالهٔ اعداد طبیعی، هر شیء ریاضی دیگر را باید به يك روال سازنده بنا کرد و در آن تعدادی متناهی از مراحل یا اعمال را به کار برد. در تز شهودگرا بسط ریاضیات از لحاظ تکوینی تا سر حد امکان دنبال می‌شود.

مکتب شهودگرا (به عنوان يك مکتب) در حدود سال ۱۹۵۸ به توسط ریاضیدان هلندی ل. ا. ی. براونر آغاز شد، ولی برخی مفاهیم شهودگرایانه قبلاً توسط کسانی چون کرونگر (در سالهای ۱۸۸۵) و پوانکاره (۱۹۰۲-۱۹۵۶) ابراز شده بود. این مکتب با گذشت زمان تدریجاً تقویت شده، برخی از ریاضیدانان برجستهٔ کنونی را به خود جلب کرده، و تأثیر فوق‌العاده‌ای در تمام افکار مربوط به مبانی ریاضیات گذاشته است.

برخی از پیامدهای تز شهودگرا جنبهٔ انقلابی دارند. مثلاً پافشاری بر روشهای سازنده به تصویری از وجود در ریاضیات منجر می‌شود که آن چیزی نیست که همهٔ ریاضیدانان به آن اعتقاد داشته باشند. برای شهودگرایان، هستی که اثبات وجود آن لازم است، باید در تعدادی مراحل متناهی ساختنی باشد، کافی نیست که فرض عدم وجود آن هستی منجر به تناقض شود. این بدان معنی است که بسیاری از براهین وجودی زیادی که در ریاضیات کنونی دیده می‌شوند، برای شهودگرایان قابل قبول نیستند.

مورد مهمی از پافشاری شهودگرایان بر روشهای سازنده، نظریهٔ مجموعه‌هاست. از نظر شهودگرایان، يك مجموعه را نمی‌توان به عنوان گردایهٔ ساخته و پرداخته‌ای تصور کرد، بلکه باید آن را به عنوان قانونی تلقی کرد که به کمک آن عناصر مجموعه را بتوان به يك روال قدم به قدم بنا کرد. این مفهوم مجموعه امکان وجود مجموعه‌های تناقض آمیزی مانند «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» را رد می‌کند.

يك پیامد قابل توجه دیگر از پافشاری شهودگرایان بر ساختنی بودن متناهی، نفی پذیرهٔ عام قانون طرد شق وسط است. مثلاً، عدد x را در نظر بگیرید که برابر $k(1 -)$ تعریف می‌شود، که در آن k شمارهٔ اولین رقم در بسط اعشاری π است که دنبالهٔ ارقام متوالی ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ با آن شروع می‌شود، و، در صورت نبودن چنین k بی، $x = 0$.

حال گرچه x خوشترریف است، نمی‌توانیم بلادرننگ، تحت محدودیت‌های شهودگرا، بگوییم که گزاره « $x = 0$ » درست یا نادرست است. تنها به‌شرطی می‌توان گفت این گزاره درست است که برهانی از آن را بتوان با تعدادی مراحل متناهی ساخت، و تنها به‌شرطی می‌توان گفت نادرست است که برهانی از چنین وضع با تعدادی مراحل متناهی ساخته شود. مادامی که یکی از این دو برهان ساخته نشده‌اند، گزاره نه درست است و نه نادرست، و قانون طرد شق وسط غیر قابل‌کاربرد است. اما اگر k را به عددی کوچکتر از مثلاً یک بیلیون محدود کنیم، آنگاه کاملاً درست است بگوییم که اینک گزاره درست یا نادرست است، زیرا، برای k کوچکتر از یک بیلیون، درستی یا نادرستی گزاره را مطمئناً می‌توان در یک عده متناهی مرحله، برقرار کرد.

بنابراین، برای شهودگرایان، قانون طرد شق وسط برای مجموعه‌های متناهی برقرار است ولی نباید آن را در مورد مجموعه‌های غیر متناهی به‌کاربرد. براثر تقصیر چنین اوضاعی را به‌گردن بسط منطق از لحاظ جامعه‌شناسی می‌اندازد. قوانین منطق در زمانی از تکامل انسان ظاهر شده است که وی زبان مناسبی برای پرداختن به مجموعه‌های متناهی از پدیده‌ها در اختیار داشته است؛ او سپس خطای به‌کار بردن این قوانین را در مجموعه‌های نامتناهی در ریاضیات مرتکب و نتیجه آن شده است که تعارضها در احکام ظاهر شوند.

در پرینسیپها ماتماتیکا، قانون طرد شق وسط و قانون تناقض معادل هستند. برای شهودگرایان، چنین وضعی حاکم نیست، و این مسئله جالبی است که سعی کنیم با الهام از اندیشه‌های شهودگرایان، به ساختن ابزارهای منطقی لازم مبادرت ورزیم. این‌کار در سال ۱۹۳۰ توسط ا. هیتینگ^۱ انجام شد و وی موفق به بسط یک منطق علامتی شهودگرا شد. بدین ترتیب ریاضیات شهودگرا منطق خاص خود را به‌وجود می‌آورد، و در نتیجه منطق ریاضی، شاخه‌ای از ریاضیات به حساب می‌آید.

سؤال نهایی مهم این است: چه مقداری از ریاضیات موجود را می‌توان با محدودیت‌های شهودگرایانه ساخت؟ اگر همه آن را بتوان بدین طریق، بدون آنکه تلاشهای لازم بسیار افزونتر شوند، بنا کرد در این صورت مشکل کنونی مبانی ریاضیات ظاهراً برطرف خواهد شد. در حال حاضر شهودگرایان در بازسازی قسمتهای مهمی از ریاضیات کنونی، منجمله یک نظریه پیوستار و یک نظریه مجموعه‌ها توفیق یافته‌اند ولی هنوز راه زیادی در پیش است. تاکنون، ریاضیات شهودگرا به‌طور قابل ملاحظه‌ای کم‌توان‌تر از ریاضیات کلاسیک از‌کار در آمده است، و در بسیاری از جهات بسط آن خیلی پیچیده‌تر است. نقضی که در رویه شهودگرایی دیده می‌شود، این است - چیزهای بسیار زیادی که نزد اغلب ریاضیدانان گرامی‌اند باید فدا شوند. این وضع شاید همیشه پایدار نباشد، زیرا این امکان بازسازی شهودگرایانه ریاضیات کلاسیک به صورتی دیگر و توأم با موفقیت

بیشتر باقی است. و در این ضمن، علیرغم، اعتراضات کنونی علیه تز شهودگرا، عموماً به این نکته اعتراف می‌شود که روشهای آن به تناقضاتی منجر نمی‌شود.

بر اوثر علاوه بر اینکه پیشرو و هوادخواه نخستگی ناپذیر نظریه شهودگرایی در ریاضیات بود، رد خود را در سایر زمینه‌های این موضوع به جا گذاشت. وی را یکی از بنیانگذاران توپولوژی نوین می‌دانند، و به ویژه به خاطر قضیه پایائی و قضیه نقطه ثابت منسوب به او شهرت دارد. قضیه اول بیان می‌کند که بعد چندی يك خمینه عددی دکارتی n -بعدی يك پایای توپولوژیکی است، و قضیه دوم بیان می‌کند که هر نگاشت پیوسته يك کره n -بعدی به روی خودش حداقل يك نقطه ثابت دارد.

بر اوثر در سال ۱۸۸۲ به دنیا آمد، قسمت عمده زندگی حرفه‌ای اش را در دانشگاه آمستردام گذراند، و در سال ۱۹۶۶ درگذشت. وی مدافع سرسخت نظریاتش بود. به عنوان سردبیر ماتماتیکه آنالین که مسئولیت قبول یا رد مقالات وارده را داشت، حملات خود را بر استفاده آزادانه برهان خلف، با رد کلیه مقالاتی که قانون طردش وسط را در مورد گزاره‌هایی به کار می‌بردند که درستی یا نادرستی آنها در تعدادی متناهی از مراحل قابل تصمیم‌گیری نبود، آغاز کرد. هیأت تحریریه مجله این بحران را با مستعفی کردن و انتخاب مجدد همه، به جز بر اوثر، برطرف کرد. دولت هلند چنان از این تحقیر برجسته‌ترین ریاضیدان خود، رنجیده خاطر شد که مجله ریاضی رقیبی، به مسئولیت بر اوثر، دایر کرد.

صفوف شهودگرایان با پیوستن هرمان وایل به گسروه آنها قویتر شد. وایل در سال ۱۸۸۵ نزدیک هامبورگ به دنیا آمد. وقتی هجده ساله بود، وارد دانشگاه گوتینگن شد، بدل به یکی از مستعدترین شاگردان هیلبرت شد و (به جز يك سال اقامت در مونیخ) تا موقعی که در سال ۱۹۱۳ به زوریخ فراخوانده شد و در آنجا اینشتین را ملاقات کرد، در همانجا ماند. در سال ۱۹۳۵ وی را به عنوان جانشین هیلبرت به گوتینگن دعوت کردند. او تنها سه سال در گوتینگن ماند، و به دلیل آنکه رژیم نازی عده بسیاری از همکاران او را اخراج کرد، از آن دانشگاه کناره گرفت. در سال ۱۹۳۳ وی پیشنهاد عضویت دایم در مؤسسه مطالعه پیشرفته در پرینستون را، که تازه تأسیس شده بود، پذیرفت. در واپسین سالهای عمر خود، وی نیمی از سال را در پرینستون و نیمی دیگر را در زوریخ می‌گذراند. او به طور ناگهانی در سال ۱۹۵۵ درگذشت.

۳. **صوری‌گرایی.** تز صوری‌گرا این است که ریاضیات با دستگاههای نمادی صوری سروکار دارد. در واقع، ریاضیات مجموعه‌ای از آن مباحث مجرد تلقی می‌شود که در آن اصطلاحات صرفاً نمادهایی هستند و احکام قواعدی متضمن این نمادها، پایه غایی ریاضیات در منطق قرار ندارد و بلکه تنها در مجموعه‌ای از نشانه‌ها یا نمادهای پیش‌منطقی و در مجموعه‌ای از اعمال با این نشانه‌ها واقع است. چگونگی، از این دیدگاه، ریاضیات عاری از محتوای ملموس و تنها شامل عناصر نمادی آرمانی است، برقراری سازگاری شاخه‌های مختلف ریاضیات قسمت مهم و لازمی از برنامه صوری‌گرایی می‌شود. بدون همراهی چنین برهان سازگاری، تمام مبحث اساساً بی‌معنی خواهد شد. در تز صوری‌گرا بسط

اصل موضوعی ریاضیات در بیشترین حد دنبال می‌شود.

مکتب صوری گرا توسط داوید هیلبرت، بعد از اتمام کارش در بررسی اصل موضوعی هندسه تأسیس شد. در جهانی هندسه‌اش (۱۸۹۹)، هیلبرت روش ریاضی را از قالب مبحث اصل موضوعیهای مادی اقلیدس به قالب دقیقتر مبحث اصل موضوعیهای صوری کنونی در آورده بود. دیدگاه صوری گرا بعداً برای مقابله با بحران ناشی از پارادوکسهای نظریه مجموعه‌ها و به مبارزه طلبیده شدن ریاضیات کلاسیک به دلیل انتقادهای شهودگرایانه، به وسیله هیلبرت ایجاد شد. گرچه هیلبرت پیش از سال ۱۹۰۴ اصطلاحات صوری گرایانه را به کار برده بود، تا بعد از سال ۱۹۲۰ وی و همکارانش، برنیس، آکرمان، فون نویمان، و دیگران کار جدی را در باره آنچه که امروزه برنامه صوری گرا نامیده می‌شود، آغاز نکردند.

توفیق یا شکست برنامه هیلبرت برای نجات ریاضیات کلاسیک در گرو حل مسئله سازگاری است. بری بودن از تناقض تنها به کمک برهانهای ناسازگاری تضمین می‌شود، و برهانهای ناسازگاری قدیمتر مبتنی بر تعابیر و مدل‌هایی هستند که مسئله سازگاری را از یک حوزه ریاضیات به حوزه دیگر منتقل می‌کنند. به عبارت دیگر، یک برهان سازگاری به روش مدل‌ها صرفاً برهانی نسبی است. بدین جهت هیلبرت روش مستقیم جدیدی برای مسئله سازگاری تدبیر کرد. بسیار شبیه به اثبات آنچه وضعیت‌هایی خاص در یک بازی، بنا بر قواعد آن، نمی‌توانند در بازی پیش آیند هیلبرت امید آن را داشت تا، به کمک مجموعه مناسبی از قواعد عمل برای به دست آوردن فرمول‌های قابل قبول از نمادهای اساسی، ثابت کند که فرمول متناقضی هرگز پیش نمی‌آید. با نمادهای منطقی، یک فرمول متناقض، فرمولی از نوع « F و نه F » است، که در آن F فرمول پذیرفته شده‌ای از دستگاه است. اگر بتوان نشان داد که چنین فرمول متناقضی ممکن نیست، آنگاه سازگاری دستگاه ثابت شده است.



داوید هیلبرت
(مجموعه دیوید اسمیت)

بسط افکار فوق برای آزمون مستقیم سازگاری در ریاضیات، توسط هیلبرت، نظریه برهان نامیده شد. هیلبرت و برنایس در نظر داشتند شرح تفصیلی نظریه برهان (و کاربرد آن در همه جای ریاضیات کلاسیک) را در اثر عظیم هبانی ریاضی خود، که آن را می توان به عنوان «پرنسیپها مائتا تیکا»^۱ مکتب صوری گرا دانست، ارائه دهند. هبانی ریاضی سرانجام در دو جلد چاپ شد، جلد اول در سال ۱۹۳۴ و جلد دوم در سال ۱۹۳۹، ولی در زمان نوشتن این اثر، مشکلات نامنتظره ای پیش آمدند و امکان تکمیل نظریه برهان مقدور نشد. برای دستگاههای مقدماتی معینی، براهین سازگاری فراهم شدند، که آنچه را هیلبرت میل به انجام آن برای همه ریاضیات کلاسیک داشت، نشان می دهند ولی، در کل، مسئله ناسازگاری برای دستگاه بدون چاره ماند.

در حقیقت، برنامه هیلبرت، حداقل به شکلی که در اصل در ذهن هیلبرت بود، ظاهراً محکوم به شکست بود؛ این حقیقت توسط کورت گودل در سال ۱۹۳۱، عملاً قبل از آنکه انتشار هبانی انجام شود، آشکار گردید. گودل، به کمک روشهای بی ایراد و قابل قبول برای پیروان هر یک از سه مکتب اصلی فلسفه ریاضیات، نشان داد که برای یک دستگاه قیاسی که به حد کافی صوری شده باشد، نظیر دستگاه هیلبرت برای همه ریاضیات کلاسیک، اثبات سازگاری دستگاه به کمک روشهای متعلق به خود آن دستگاه میسر نیست. این قضیه قابل توجه پیامد قضیه اساسی تری است؛ گودل ناکامل بودن دستگاه هیلبرت را ثابت کرده یعنی وی وجود مسائل «تصمیم ناپذیر» را در داخل دستگاه، که سازگاری دستگاه از آن جمله است، نشان داد. این قضایای گودل دشوارتر از آن هستند که با جزئیات فنی در اینجا مطرح شوند. این قضایا مطمئناً در زمره مهمترین قضایای تمامی ریاضیات قرار دارند، و محدودیت پیش بینی نشده ای را در روشهای ریاضیات صوری آشکار می سازند. آنها نشان می دهند «که دستگاههای ریاضی که برای استخراج ریاضیات مناسب شناخته شده اند، قابل اطمینان نیستند، بدین معنی که سازگاری آنها را نمی توان با روشهایی متناهی که در داخل دستگاه صوری شده اند، ثابت کرد، و حال آنکه هر دستگاهی که از این لحاظ مطمئن تشخیص داده شده، نامناسب است.»

* ف. دسوا در

F. De sua, «Consistency and Completeness - a Résumé», *American Mathematical Monthly*, 63 (1956): pp. 295 - 305.

در همینجا همچنین به نکته جالب زیر برمی خوریم: «فرض کنید که به سامعه، هر نظامی را که بر پایه عنصر ایمان استوار است، صرف نظر از عنصر دلیل آن، یک دین بنامیم. پس این تعریف، مثلاً مکانیک کوانتوم یک دین خواهد شد. ولی ریاضیات از این موقعیت منحصر به فرد برخوردار است که تنها شاخه ای از الاهیات است که برای این گونه طبقه بندی اش بسر هائی دقیق دارد، همچنین رجوع کنید به

Howard Eves and C. V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and fundamental Concepts of Mathematics*, rev. ed. Appendix, Section A. 7 (Holt, Rinehart and Winston, 1965)

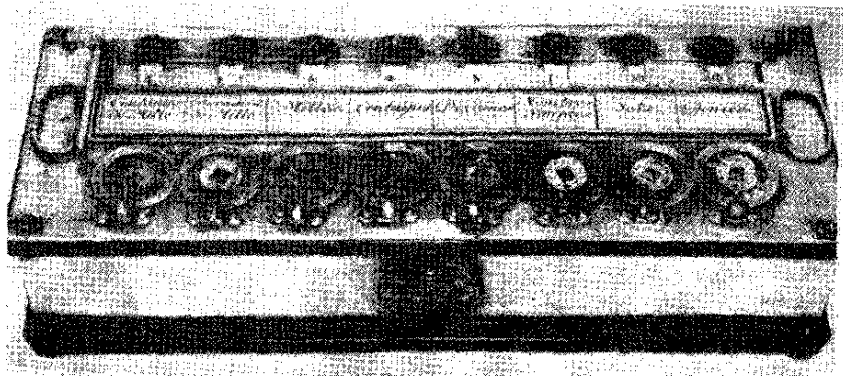
داوید هیلبرت در سال ۱۸۶۲ در کونیگسبرگ متولد شد و درجهٔ دکترای خود را در سال ۱۸۸۵ از دانشگاه آن شهر دریافت کرد. وی در دانشگاه کونیگسبرگ، ابتدا به عنوان معلم حق التدریسی (۱۸۸۶-۱۸۹۲) و سپس به عنوان استاد (۱۸۹۳-۱۸۹۴) به تدریس پرداخت. در ۱۸۹۵ استاد دانشگاه گوتینگن شد و تا زمان بازنشستگی اش در ۱۹۳۵ این مقام را حفظ کرد. وی در سال ۱۹۴۳ در گوتینگن درگذشت.

هیلبرت ریاضیدانی تمام عیار بود و در زمینه‌های متعددی سهم بسزایی داشت. وی معمولاً کار در هر زمینه را قبل از آنکه سراغ زمینه دیگری رود، با پاکیزگی به اتمام می‌رساند. موارد زیرین در زمرهٔ این زمینه‌های کار هیلبرت هستند: نظریهٔ پایاهای جبری (۱۸۸۵-۱۸۹۲)؛ نظریهٔ اعداد جبری (۱۸۹۳-۱۸۹۹)؛ مبانی هندسه، که شروع کار او در مبحث اصل موضوعیها بود (۱۸۹۸-۱۸۹۹)؛ مسئلهٔ دیریکله و حساب تغییرات (۱۹۰۵-۱۹۰۵)؛ معادله‌های انتگرالی، شامل نظریهٔ طیفی و مفهوم فضای هیلبرت (تا سال ۱۹۱۲)؛ پس از آن کار در فیزیک ریاضی در زمینهٔ نظریهٔ جنبشی گازها و نظریهٔ نسبیت؛ و سرانجام بررسیهای نقادانهٔ مبانی ریاضیات و منطق ریاضی. کلاسهای درس انگیزه بخش او دانشجویانی را از همهٔ نقاط دنیا به آنجا جلب کرد. وی به‌مثابه نیروگاهی در دانشگاه گوتینگن بود، و، همراه با فوجی از همکاران طراز اول، گوتینگن را تا زمان حوادث مخرب سیاسی سالهای ۱۹۳۵ به صورت کعبهٔ ریاضیدانان درآورد. هیلبرت به دریافت نشانهای افتخار متعددی نایل شد و در سال ۱۹۵۲ سردبیر *ماتماتیشه آنالین* گردید. در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی منعقدۀ در پاریس در سال ۱۹۵۵، وی بیست و سه مسئلهٔ مهم و حل نشدهٔ ریاضی را مطرح کرد و کار روی این مسائل موجب غنای زیاد ریاضیات شده است.

۱۵-۹ کامپیوترها

یکی از دستاوردهای بسیار مهم قرن بیستم در زمینهٔ ریاضیات، تکامل وسایل کمک محاسباتی مکانیکی سادهٔ ایام پیشتر و تبدیل آن به ابزارهای قابل توجه و حیرت‌آور محاسبهٔ الکترونیکی مقیاس - وسیع امروزی بود. چیزی که بخصوص جنبهٔ انقلابی داشت، فکر داخل کردن یک برنامهٔ دستورالعمل و نیز مجموعه‌ای از داده‌های عامل در ماشین بود. ما این بخش را به تار یخچه کوتاهی از دستگاههای کمک محاسباتی که منجر به پیدایش این شگفتی آفرینان اخیر شدند، اختصاص می‌دهیم.

علاوه بر وسیلهٔ کمک محاسباتی که طبیعت به انسان به شکل ده انگشت اعطا کرده (و هنوز هم امروزه در کلاسهای مدارس مورد استفاده است) و چرتکهٔ بسیار کارا و ارزان - قیمت قدیمی (که هنوز در بسیاری از نقاط جهان مورد استفاده است)، اختراع اولین ماشین محاسبه به بلز پاسکال منسوب است که، در سال ۱۶۴۲، به تعبیهٔ یک ماشین جمع برای کمک به پدرش در ممیزی حسابهای دولتی در روئن^۱ دست زد. این دستگاه از عهدهٔ

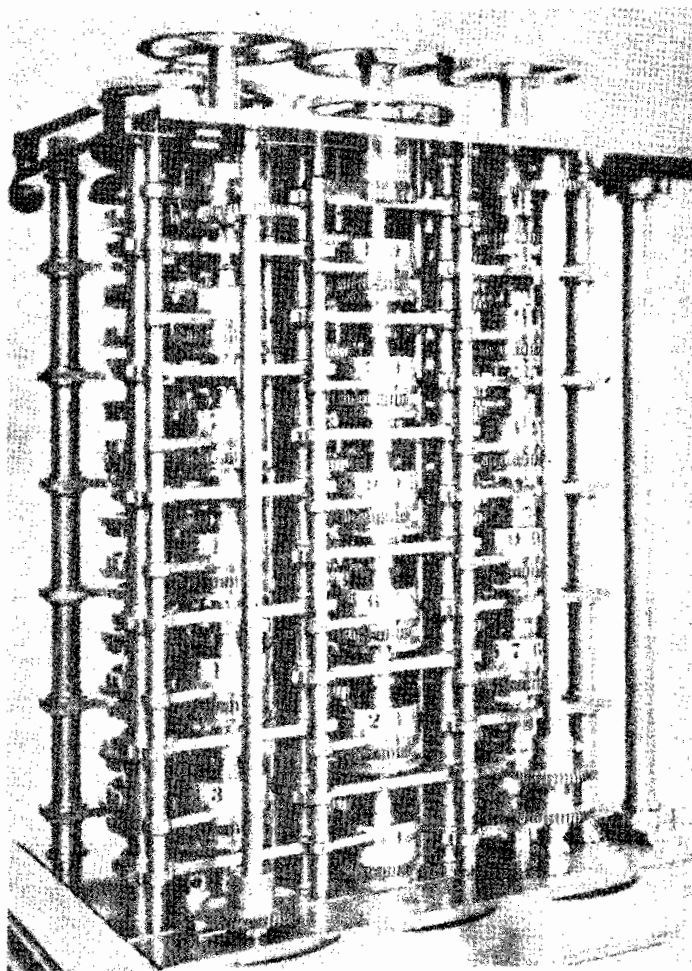


یکی از ماشینهای حساب پاسکال، که توسط او در سال ۱۶۴۲ تهیه شده

محاسبه با اعدادی که بیش از شش رقم نداشتند برمی آمد. دستگاه شامل تعدادی شماره گیر بود که باهم درگیر بودند و بر هر يك از آنها ارقام ۰ تا ۹ مشخص و طوری طرح شده بود که وقتی يك شماره گیر از رشته شماره گیرهای از ۰ تا ۹ چرخانده می شد، شماره گیر پیشین این رشته خود به خود يك واحد می چرخید. بدین ترتیب عمل «نقل کردن» در جمع به طور مکانیکی صورت می گرفت. پاسکال بیش از ۵۰ ماشین ساخت، که برخی از آنها هنوز در مدرسه و موزه هنرها و صنایع دستی^۱ در پاریس نگهداری می شوند. جالب آنکه اختراع چرخ دستی يك چرخ هم به صورت امروزی آن، به پاسکال نسبت داده می شود. بعداً در همین قرن، لایبنتز (۱۶۷۱) در آلمان و سرساموئل مورلند^۲ (۱۶۷۳) در انگلستان ماشینهایی اختراع کردند که قادر به عمل ضرب بودند. کوششهای مشابهی توسط عده ای دیگر به عمل آمد، ولی بسیاری از این ماشینها کند و غیر عملی از کار درآمدند. در سال ۱۸۲۵، توماس دوکولمار^۳، بی آنکه با کار لایبنتز آشنا باشد، یکی از ماشینهای نوع لایبنتزی را به ماشینی مبدل کرد که قادر به انجام تفریق و تقسیم بود. این ماشین به صورت نمونه ای از تقریباً تمام ماشینهای تجاری تولید شده قبل از سال ۱۸۷۵، و آنهایی که بعد از این سال تکمیل شدند، درآمد. در سال ۱۸۷۵، امتیاز اولین ماشین محاسبه عملی که قادر به انجام چهار عمل اصلی حساب بدون تنظیم مجدد بود، به نام فرانک استیفن بالدوین^۴ آمریکایی ثبت شد. در سال ۱۸۷۸، ویلگات توفیل اودنر^۵ سوئدی، امتیاز ماشینی را که طرح آن بسیار شبیه به ماشین بالدوین بود، در آمریکا به دست آورد. امروزه چندین ساخت از ماشینهای حساب رومیزی برقی، نظیر فریدن^۶، مارشان^۷، و

-
1. Conservatoire des Arts et Métiers	2. Sir Samuel Morland
3. Thomas de Colmar	4. Frank Stephen Baldwin
5. Willgodt Theophile Odhner	6. Friden
	7. Marchant

مونرو، وجود دارد که اساساً همان ساختمان اصلی ماشین بالدوین را دارند. در حدود سال ۱۸۱۲، ریاضیدان انگلیسی چارلز بابیج (۱۷۹۲-۱۸۷۱) به فکر ساختن ماشینی برای کمک به محاسبه جداول ریاضی افتاد. وی از استادی لوکاسی در کیمبریج استعفا کرد تا ماسعی خود را به ساختن این ماشین مصروف دارد. در سال ۱۸۲۳، بعد از سرمایه‌گذاری و از دست دادن ثروت شخصی‌اش در این کار، موفق شد که از حکومت بریتانیا کمک مالی دریافت کند و برای ساختن يك ماشین تفاضل^۲ که قادر به عمل با ۲۶



قسمتی از ماشین تفاضل بابیج



چارلز بابیج
(مجموعه دیوید اسمیت)

رقم بامعنی و محاسبه و چاپ تفاضلهای متوالی تا مرتبه ششم را داشته باشد، به کار پرداخت. ولی کار بابیج به طور رضایت آمیزی پیشرفت نکرد، و ده سال بعد کمک دولت قطع شد. در نتیجه بابیج ماشین تفاضل خود را رها کرد و برای ساختن ماشینی با اهداف بلندپروازانه که آن را ماشین تحلیلی^۱ نامید، آغاز به کار کرد. هدف وی این بود که دستگاه مزبور کاملاً^۲ به طور خودکار رشته کاملی از اعمال حسابی را که به کار برنده دستگاه در بدو امر به آن می داده انجام دهد. این ماشین نیز هرگز کامل نشد و دلیل عمده آن نبودن ابزارهای دقیق لازم در آن زمان بود.

از اولین اعقاب مستقیم موتور تحلیلی بابیج، ماشین عظیم *IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ASCC)* است که در دانشگاه هاروارد در سال ۱۹۴۴ به عنوان طرح مشترکی بین دانشگاه و شرکت بین المللی ماشینهای تجاری^۳ به مقاطعه برای نیروی دریایی امریکا تکمیل شد. این ماشین ۵۱ پا درازا، ۸ پا بلندی دارد، دوپا نل به طول ۶ پا دارد، و وزن آن حدود ۵ تن است. ساختن مدل اصلاح شده دوم *ASCC* جهت استفاده، از سال ۱۹۴۸، در پایگاه تحقیقاتی نیروی دریایی^۴ در دال گرن^۵، ایالت ویرجینیا^۶، شروع شد. از اعقاب دیگر تلاشهای بابیج ماشین *Electronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC)* است که يك کامپیوتر الکترونیکی چند منظوره می باشد که در سال ۱۹۴۵ در دانشگاه پنسیلوانیا تحت مقاطعه ای با آزمایشگاه تحقیقاتی پرتابشناسی^۷ وابسته پایگاه تحقیقاتی ارتش در آبردین^۸ تکمیل شد. این ماشین به يك اطاق ۳۰ در ۵۰ پا نیاز دارد، شامل ۱۹,۰۰۰ لامپ است، و در حدود ۳۰ تن وزن دارد، اکنون آن را می توان در مؤسسه اسمیتسونی^۹ در شهر واشینگتن یافت. این

-
1. analytic engine 2. International Business Machines Corporation
 3. Naval Proving Ground 4. Dahlgren 5. Virginia
 6. Ballistic Research Laboratory 7. Army's Aberdeen Proving Ground
 8. Smithsonian Institution

ماشینهای محاسب شگفت انگیز پرسرعت، همراه با طرحهای مشابه، نظیر (SSEC) *Selective Sequence Electronic Calculator* از شرکت بین المللی ماشینهای تجاری، ماشین *(EDVAC) Electronic Discrete Variable Calculator* از دانشگاه پنسیلوانیا، ماشین MANIAC از مؤسسه مطالعات پیشرفته^۱ در پرنستون، *(UNIVAC) Universal Automatic Computer* از مؤسسه استاندارد^۲، و تحلیل کننده های تفاضلی^۳ متعدد، که نشانه هایی از ماشینهایی با تواناییهای افسانه ای ترند. در هر چند سال، نسل جدیدی از این ماشینها ساخته می شوند که ظاهراً سرعت، قابلیت اعتماد، و حافظه ماشینهای نسل قبل را تحت الشعاع قرار می دهند. جدول مقایسه ای زیر برای محاسبه π که در کامپیوترهای الکترونیکی انجام شده افزایش سریع در سرعت محاسبه ای حاصل شده را نشان می دهد.

مشغول طرح	ماشین	تاریخ	تعداد ارقام اعشاری	زمان
رایت ویزنر ^۴	ENIAC	۱۹۴۹	۲۰۳۷	۷۵ ساعت
نیکولسون ^۵ و جینل ^۶	NORC	۱۹۵۴	۳۰۸۹	۱۳ دقیقه
فلتون ^۷	Pegasus	۱۹۵۸	۱۰۰۰۰۰	۳۳ ساعت
ژنوی ^۸	IBM 704	۱۹۵۸	۱۰۰۰۰۰	۱۰۰ دقیقه
ژنوی	IBM 704	۱۹۵۹	۱۶۱۶۷	۴۳ ساعت
شنکس و رنج	IBM 7090	۱۹۶۱	۱۰۰۲۶۵	۸۷ ساعت

اغلب کامپیوترهای اولیه برای حل مسائل نظامی طراحی شده بودند، ولی امروزه آنها برای مقاصد تجارت، حکومت، و غیره طراحی می شوند. در توسعه کنونی آنها از صورت ابزارهای تجملی به ابزارهای حیاتی و ضروری تبدیل شده اند. بدین دلیل، آنالیز عددی در این اواخر فوق العاده تحرك یافته و به موضوعی با اهمیت روزافزون تبدیل شده است. امروزه عرضه درسی مقدماتی در علوم کامپیوتر در مدارس متوسطه و ایجاد اتصال با کامپیوتری که در یک کالج یا دانشگاه مجاور قرار دارد، به صورت یک کارعادی درآمده است؛ رؤیای بابیج تحقق یافته است!

متأسفانه احساس رو به تزایدی، نه تنها در بین عموم و بلکه بین دانشجویان جوان

1. Institute for Advanced Study at Princeton	2. Bureau of Standards
3. differential analyzers	4. Reitwiesner
5. Nicholson	6. Jeanel
7. Felton	8. Genuys

ریاضی هم پیدا شده است، که از این به بعد هر مسئله ریاضی به کمک ماشین الکترونیکی به حد کافی پیچیده ای حل خواهد شد، و اینکه تمام ریاضیات کنونی گرایش کامپیوتری دارد. معلم ریاضی باید با این بیماری کامپیوترزدگی^۱ مبارزه و خاطر نشان کنند که این ماشینها صرفاً ماشینهای حساب فوق العاده سریع و کارا هستند، و تنها در آن مسائل ریاضی که بتوان محاسبات یا شمارشهای گسترده را به کار برد، ارزشمندند.

با این حال کامپیوترها، در زمینه محدود کار برد خود، به برخی پیروزیهای مهم ریاضی قابل شده اند. مثلاً، دستاوردهای اخیر درباره اعداد متحابه و تام که شرح آنها در بخش ۳-۳ آمد و دستاوردهای مربوط به اعداد اول که شرح آنها در بخش ۱۴-۱۳ آورده شد، بدون کمک کامپیوتر ممکن نمی بود. این ماشینها نه تنها در برخی قسمتهای نظریه اعداد، بلکه در سایر مباحث ریاضی، مانند نظریه گروها، هندسه های متناهی، و ریاضیات تفریحی مفید از کار در آمده اند. مثلاً، در زمینه اخیر، در سال ۱۹۵۸ دانا س. اسکات^۲ کامپیوتر رقمی MANIAC را به جستجوی کلیه جوابهای مسئله گذاشتن دوازده پنتومینو* باهم به طوری که یک مربع 8×8 با سوراخ 2×2 در وسط تشکیل دهند، به کار و-

داشت. بعد از حدود $3\frac{1}{4}$ ساعت کار، ماشین فهرست کاملی از ۶۵ جواب مجزا به دست داد که در آن هیچ جوابی را نمی شد با دوران یا انعکاس از دیگری به دست آورد. به طور مشابه، شمارش و ساختن کلیه ۸۸۵ مربع جادویی نرمال متمایز از مرتبه ۴ به کمک یک کامپیوتر انجام شد، و برنامه سازی مسئله متناظر برای مربهای جادویی نرمال از مرتبه ۵ کار مشکلی نیست.

یک پیروزی بسیار چشمگیر برای کامپیوتر، یافتن جواب حدس مشهور چهار رنگ توپولوژی، به سال ۱۹۷۶ بود؛ این حدس مشعر بر آن است که هر نقشه بر صفحه یا کره را می توان حداکثر با چهار رنگ رنگامیزی کرد به طوری که هیچ دو کشور هم سرز با یک رنگ رنگامیزی نشوند. این حدس در سال ۱۸۵۰ پدیدار شد، و از آن به بعد کوشش زیادی برای اثبات یا نفی آن به عمل آمده و نتایج جزئی یا مرتبط به حدس از آن حاصل شده ولی همواره خود خود اصلی بدون سرانجام مانده بود. اوضاع بر این منوال بود تا اینکه، در تابستان ۱۹۷۶، کنت اپل^۳ و وولفگانگ هیکن^۴ وابسته به دانشگاه ایلینوی^۵، حدس را با تحلیل بسیار پیچیده ای مبتنی بر کامپیوتر اثبات کردند. برهان شامل چند صد صفحه جزئیات پیچیده است و بیشتر از هزار ساعت وقت کامپیوتر را می گیرد. روش برهان متضمن ۱۹۳۶ شکل قابل تحویل است و در هر یک از آنها باید تا نیم میلیون انتخاب منطقی مورد بررسی قرار گیرند تا صحت و سقم تحویل پذیری تحقیق

1. Computeritis 2. Dana S. Scott

* پنتومینو (Pentomino) یک آرایه مسطح از پنج مربع واحد است که در امتداد اضلاعشان به هم پیوسته اند.

3. Kenneth Appel 4. Wolfgang Haken 5. Illinois

شود. مرحلهٔ اخیر کار شش ماه طول کشید و سرانجام در ژوئن ۱۹۷۶ کامل شد. بازبینی نهایی سرتاسر ماه ژوئیه را گرفت، و نتایج به جولتن انجمن آمریکایی ریاضی ارسال شد. راه حل اهل-هیکن، بی تردید دستاوردی مبهوت کننده است، ولی راه حلی مبنی بر تحلیل‌های کامپیوتری که نزدیک به دوهزار حالت و چیزی در حدود یک بیلیون انتخاب منطقی دارد، برای ریاضیدانان بسیاری، با ریاضیات زیبا فاصله زیادی دارد. مطمئناً زیبایی راه حل یک مسئله ارزشی لااقل به اندازهٔ خود راه حل آن دارد. گرچه یک برهان کامپیوتری دیگر، که نسبتاً پیچیدگی کمتری دارد، در سال بعد، یعنی ۱۹۷۷، توسط فن. الر^۱ برای حدس چهار رنگ داده شد، وجود و احتمالاً لزوم چنین طرز مقابله‌ای با مسائل ریاضی این سؤال فلسفی را مطرح کرده است که برهان یک گزارهٔ ریاضی مجاز به در برداشتن چه چیزهایی باید باشد.

آنچه برای دانشجویان، بازرگانان، و مهندسان بسیار مورد استفاده است، ماشینهای حساب جیبی اند که اکنون با قیمتهایی زیر ۵۰ دلار در دسترس‌اند و هر ساله بهای آنها کمتر و پیچیدگی آنها بیشتر می‌شود. این ماشینهای کوچک، که از عهده کار با اعداد ۸ رقمی برمی‌آیند، دارای حافظه‌اند، و قادر به انجام فوری هر عمل حسابی و، در برخی موارد، محاسبات مثلثاتی‌اند، فردگی قابل ملاحظه خود را به ترانزیستورهای کوچکی مدیون‌اند که جای لامپهای الکترونیکی ماشینهای قبلی و بزرگتر را گرفته‌اند. هیچ بحثی از کامپیوترهای نوین بدون لااقل اشاره کوتاهی به ریاضیدان بزرگ مجارستانی، جان فون نویمان^۲، کامل نخواهد بود، زیرا او بود که مسئولیت به کار انداختن اولین ماشین حساب الکترونیکی کامل و اندیشه کامپیوتر رقمی حافظه‌دار را به عهده گرفت، مطالعات او از مغز انسانی و منطق در تحقیقاتش در زمینه ایجاد کامپیوترها مفید افتاد.

فون نویمان در بوداپست، در سال ۱۹۰۳، به دنیا آمد و اعجوبه علمی بودن او به زودی آشکار شد. وی دکترایش را در سال ۱۹۲۶ در بوداپست گرفت، در سال ۱۹۳۰ به آمریکا مهاجرت کرد، و در ۱۹۳۳ عضو دائمی مؤسسه مطالعات پیشرفته در پرینستون شد. وی قبلاً به خاطر سهمش در نظریه عملگرها، نظریه کوانتوم، و نظریه بازی شهرتی جهانی داشت. او نقش زیادی در جهت دهی به مقدار زیادی از ریاضیات قرن بیستم داشت. کار او بسیار برجسته و اصیل بسود. طی جنگ جهانی دوم به کارهای علمی و اداری ساختن بمبهای اتمی و هیدروژنی و پیش‌بینی بلندمدت هوا اشتغال داشت. وی در سال ۱۹۵۷ بر اثر سرطان درگذشت.

۱۵-۱۰ ریاضیات جدید و بورباکی

دو مشخصه ریاضیات قرن بیستم را می‌توان تأکید بر تجرید و علاقه روز افزون به تحلیل

ساختارها و الگوهای کلی زمینه‌ساز آن برشمرد. در اواسط قرن، این وجوه مشخصه مورد توجه علاقمندان آموزش ریاضیات مدرسه‌ای قرار گرفت، و برخی حس کردند که این وجوه مشخصه باید در تدریس ریاضیات در مدارس گنجانده شود. از این رو، گروه‌های نویسندگان با صلاحیت و جدی برای تجدید نظر و «نوسازی» مطالب ریاضی عرضه شده در مدارس تشکیل شدند، و ریاضیات جدید^۱ پا به هستی نهاد.

از آنجا که اندیشه‌های ریاضی مجرد را اغلب می‌توان پاکیزه و موجز در قالب مفاهیم و نماد مجموعه‌ها بیان کرد، و چون نظریه مجموعه‌ها به عنوان اساس ریاضیات شناخته می‌شود، ریاضیات جدید با معرفی مقدماتی نظریه مجموعه‌ها آغاز می‌شود، و سپس با استفاده پیگیر از مفاهیم و نمادهای مجموعه‌ای ادامه می‌یابد. ریاضیات جدید، مانند ریاضیات قرن بیستم، بر ساختارهای زمینه‌ای این موضوع نیز تأکید می‌ورزد. مثلاً، در جبر مقدماتی، توجهی بسیار بیشتر از سابق، به ساختارها و قوانین جبر، نظیر قوانین جابجایی، شرکتپذیری، توزیعپذیری، و قوانین دیگر می‌شود. همچنان که اغلب در مورد اندیشه‌های جدید پیش می‌آید، گرایشی به افراط از سوی برخی شیفتگان موجود بود که می‌خواستند اصول ریافت جدید را حتی در وضعیتهایی به کار برند که به وضوح وسادگی نمی‌انجامید، و برخی از متخصصین آموزش اظهار نگرانی کردند که در تلاش برای تأکید چرایی در ریاضیات، به چگونگی کم بها داده می‌شود. با این حال، تردیدی نیست که کار برد معقول‌تر مفاهیم اساسی ریاضیات جدید احتمالاً ماندگار خواهد شد.

از سال ۱۹۳۹ به بعد مجموعه مجلات جامعی در ریاضیات که انعکاس آگاهانه گرایشهای ریاضیات قرن بیستم، در سطحی پیشرفته‌تر، بود با تقریر مؤلفی به نام نیکولاس بورباکی^۲ در فرانسه شروع به انتشار کرده بود. نام بورباکی ابتدا در ارتباط با بعضی یادداشتها، نقدها، و مقالات دیگری که در گزارشهای^۳ آکادمی علوم فرانسه و در جاهای دیگر منتشر شد، پدیدار شد. پس از آن رساله اصلی بورباکی تدریجاً شکل یافت. هدف این رساله اصلی در مقاله‌ای که به انگلیسی ترجمه و در سال ۱۹۵۰ در ماهنامه آمریکایی ریاضی تحت عنوان «معمار ریاضیات» منتشر شد، تشریح شده است. در پانوشتی بر این مقاله می‌خوانیم که: «پروفسور ن. بورباکی، سابقاً وابسته به آکادمی سلطنتی بولدوای^۴، هم‌اکنون ساکن شهر نانتی در فرانسه، مؤلف رساله جامعی در ریاضیات جدید است که تحت عنوان ارکان ریاضیات^۵ (ناشر هرمان و شرکا^۶، پاریس، ۱۹۳۹-) در حال انتشار است و تاکنون ده جلد آن منتشر شده است.» بالغ بر سی جلد تا سال ۱۹۷۰ منتشر شد.

نام نیکولاس بورباکی، یونانی، ملیت افرانسوی است، و باید در ردیف بانفوذترین ریاضیدانان قرن حاضر قرار داده شود. آثار او را زیاد می‌خوانند و از آنها نقل قول می‌کنند. او طرفدارانی جدی و منتقدینی بی‌پروا دارد. عجیب‌تر از همه اینکه، او وجود

-
1. new math 2. Nicolas Bourbaki 3. Comptes Rendus
 4. Royal Poldavian Academy 5. Eléments de Mathématique
 6. Herman et Cie

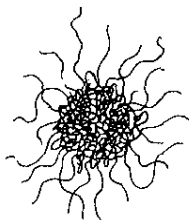
خارجی ندارد.

نیکولاس بورباکی يك نام مستعار جمعی است كه يك گروه غیررسمی ریاضیدانان از آن استفاده می‌کنند. گرچه اعضای این سازمان سوگند رازداری یاد نکرده‌اند، بسیاری از آنها مقداری پنهانکاری درباره خود را تفریح خاطری برای خود یافته‌اند. با این حال، نام آنها رازی برملا برای اغلب ریاضیدانان است. عقیده بر این است كه ل. شوالی^۱، ژ. دلسارت^۲، ژ. دیودونه^۳، و ا. وایل^۴ در زمره اعضای اولیه‌اند. فهرست اعضا در طول سالهای مختلف متغیر بوده، و گاهی حتی مشتمل بر بیست ریاضیدان بوده است. تنها قرار و قاعده گروه آن است كه هیچ قرار و قاعده‌ای به‌جز بازنشستگی اجباری اعضا در پنجاه سالگی، نداشته باشند. كار گروه مبتنی بر این عقیده غیرقابل اثبات متافیزیکی است كه برای هر مسئله ریاضی، در بین چندین راه ممكن پرداختن به آن، راهی بهتر از همه، یا بهینه، وجود دارد. گرچه بنیانگذاران گروه بورباکی عمداً منشاء نام نیکولاس بورباکی را در هاله‌ای از اسرار فرو برده‌اند، دو داستان در كوشش برای توضیح علت این انتخاب در دست است.

افسر پرشوری به نام ژنرال شارل دنی سوته بورباکی^۵ بوده كه در جنگ فرانسه و پروس به شهرت می‌رسد. در سال ۱۸۶۲، در چهل و شش سالگی، تاج و تخت یونان به او پیشنهاد می‌شود كه وی از قبول آن سرباز می‌زند. در يك لشكر كشی نافرجام مجبور می‌شود كه به سویس عقب‌نشینی كند و در آنجا بازداشت شده با تفنگ قصد جان خود را می‌كند. ظاهراً كوشش او برای خودكشی با شكست مصادف می‌شود زیرا تا سن هشتاد و سه زنده می‌ماند. می‌گویند كه مجسمه‌ای از او در نانسی، فرانسه، قرار دارد و این می‌تواند منشاء ارتباط او با گروه ریاضیدانان مورد بحث باشد، زیرا عده زیادی از اعضای گروه گاه و بیگاه با دانشگاه نانسی ارتباط داشته‌اند. این توضیح، اشتقاق قسمت «نیکولاس» در نام گروه را بی‌پاسخ می‌گذارد.

افسانه دیگر راجع به منشاء نام بورباکی مبتنی بر این حكایت است كه، در حدود ۱۹۳۵، دانشجویان تازه وارد دانشسرای عالی پاریس^۶، كه عده بسیاری از ریاضیدانان فرانسوی آموزش خود را در آنجا دیده‌اند، با سخنرانی مهمان برجسته‌ای به نام نیکولاس بورباکی مواجه می‌شوند كه در واقع هنرپیشه دوستگاری در لباس مدل یا شاید دانشجویی در سالهای آخر بوده كه در دو پهلوكویی ریاضی مهارتی موجه‌نما داشته‌است.

برداشت بورباکی، یا حداقل برداشت ژان دیودونه از ریاضیات كنونی، آن است كه ریاضیات امروزه مانند گلوله نخی است كه رشته نخهای بسیاری بر آن پیچیده (نگاه كنید به شكل ۱۲۳) كه در آن رشته‌های مركزی گلوله اثر متقابل شدیدی، با کیفیتی تقریباً غیر قابل پیش‌بینی، روی يكدیگر دارند. در این گلوله نخ، رشته‌هایی، و سر رشته‌هایی وجود دارند كه در جهات مختلف رو به بیرون می‌روند و هیچ رابطه تنگاتنگی با چیزی در



شکل ۱۲۳

درون ندارند. روش بورباکی آن است که این رشته‌های آزاد را بچینند و حواس خود را بر مغز فشرده گلوله که بقیه رشته‌ها از آن جدا می‌شوند، متمرکز کنند. این مغز فشرده، ساختارهای اساسی و فرایندهای بنیادی یا ابزارهای ریاضی را در بر می‌گیرند و اینها بخشهایی از ریاضیات اند که با تغییر تدریجی از قالب استراتژیها درآمده به روشها تبدیل و به قدر قابل ملاحظه‌ای تثبیت یافته‌اند. تنها این بخش ریاضیات است که بورباکی درصدد دادن نظم منطقی و شکل يك نظریه منسجم و آسان به کاربردن به آن است. نتیجه آنکه، بخش اعظم ریاضیات عمداً خارج از حیطه گرویه بورباکی گذاشته شده است.

۱۱-۱۵ درخت ریاضیات

چند سال پیش متداول شده بود که ریاضیات را به شکل يك درخت، معمولاً يك بلوط بزرگ، نشان بدهند. ریشه‌های این درخت عناوینی از قبیل جبر، هندسه مسطحه، مثلثات، هندسه تحلیلی، و اعداد گویا داشتند. از این ریشه‌ها تنه تنومند درخت برمی‌خاست که بر آن حسابان نقش بسته بود. سپس، از بالای تنه شاخه‌های متعددی منشعب و به شاخه‌های کوچکتری تقسیم می‌شدند. به این شاخه‌ها عناوین «شاخه‌های» مختلف ریاضیات عالی نظیر متغیرهای مختلط، متغیرهای حقیقی، حساب تغییرات، احتمالات، و غیره داده شده بود.

منظور از این درخت ریاضیات آن بود که گذشته از ارائه چگونگی رشد تاریخی ریاضیات به دانشجو، مسیری را هم که دانشجو باید برای ادامه این موضوع طی کند، خاطر نشان سازد. بدین ترتیب، در دبیرستان و شاید در سال اول دانشکده، دانشجو باید وقت خود را صرف مطالعه موضوعهای بنیادی بنماید که ریشه این درخت را تشکیل می‌دهند. سپس، در دوره دانشکده، وی باید، از طریق يك برنامه سنگین، کاملاً به حسابان تسلط یابد. بعد از انجام این کار، دانشجو می‌تواند آن شاخه‌هایی از ریاضیات را که مایل به ادامه آنهاست، دنبال نماید.

آن اصل آموزشیمی که درخت ریاضیات پشتوانه آن است احتمالاً اصل صحیحی است، زیرا مبتنی بر قانون مشهوری است که چکیده آن توسط زیست‌شناسان چنین بیان

شده است: «اونتوژنی^۱ تکرار فیلوژنی^۲ است»، که به زبان ساده بدین معنی است که، در حالت کلی «تکامل فرد بازگویی تکامل گروه است». یعنی، حداقل در چارچوب کلی، یک دانشجو هر موضوع را تقریباً به همان ترتیبی فرا می گیرد که آن موضوع طی سالیان دراز بدان صورت رشد یافته است. به عنوان مثالی خاص، هندسه را در نظر بگیرید. قدیمیترین هندسه را شاید بتوان هندسه ناخودآگاه نامید که منشأ آن مشاهدات ساده ای است که از توانایی انسان در تشخیص شکل ظاهری و مقایسه اشکال و اندازه ها ناشی می شود. پس از آن هندسه به هندسه علمی، یا تجربی بدل شد، و هندسه زمانی به این مرحله رسید که عقل انسانی می توانست از مجموعه ای از روابط ملموس یک قانون مجرد کلی (یک قانون هندسی) استخراج کند که مورد اول را به عنوان حالات خاصی دربرداشت. در فصول اولیه این کتاب متذکر شده ایم که چگونه قسمت اعظم هندسه مقدم بر دوره یونانی از این نوع تجربی بود. بعداً، در واقع و در دوره یونانی، هندسه به درجه بالاتری ارتقا یافت و به هندسه برهانی بدل شد. اصل آموزش اساسی که در اینجا مطرح است، در واقع داعیه آن را دارد که هندسه باید بدو در شکل ناخودآگاه آن، احتمالاً از طریق کارهای هنری و مشاهدات ساده طبیعت، به کودکان عرضه شود. سپس، کمی بعد از آن، این مبنای ناخودآگاه به هندسه علمی متکامل گردد، که در آن دانش آموزان به مقدار قابل توجهی از حقایق هندسی از طریق انجام تجربه با پرگار و ستاره، با خط کش و نقاله، و با قیچی و خمیر پی می برند. و تازه بعد از آن، وقتی دانش آموز به قدر کافی ورزیدگی یافته باشد، هندسه را می توان در شکل برهانی، یا قیاسی آن عرضه کرد، و محاسن و معایب فرایندهای استقرایی پیشین را خاطر نشان کرد.

پس، در اینجا به آن اصل آموزشی که درخت ریاضیات پشتوانه آن است اعتراضی نداریم. اما درباره خود درخت چه؟ آیا این درخت هنوز هم تصویر کاملاً معقولی از ریاضیات امروزی را عرضه می کند؟ به نظر ما چنین نیست. روشن است که یک درخت ریاضیات تابعی از زمان است. درخت بلوطی که قبلاً توصیف شد مطمئناً نمی تواند، مثلاً، درخت ریاضیات دوره اسکندر کبیر باشد. این درخت بلوط نمودار مناسبی از وضع ریاضیات در قرن هجدهم و بخش زیادی از قرن نوزدهم است، زیرا در آن سالها تلاشهای عمده ریاضی بسط، توسیع، و کاربرد حسابان بود. ولی با رشد فوق العاده ریاضیات در قرن بیستم، تصویر کلی ریاضیات که به کمک درخت بلوط داده می شود، دیگر مصداق پیدا نمی کند. شاید اظهار این مطلب کاملاً درست باشد که امروزه بخش عمده ریاضیات با حسابان و توسعه های آن ارتباط نداشته یا ارتباط کمی دارد. مثلاً زمینه های گسترده مورد پوشش جبر مجرد، ریاضیات متناهی، نظریه مجموعه ها، ترکیبیات، منطق ریاضی، مبحث اصل موضوعیها، نظریه غیر تحلیلی اعداد، مباحث اصل موضوعی هندسه، هندسه های متناهی و غیره را می توان ذکر کرد.

درخت ریاضیات را، برای آنکه ریاضیات امروزی را عرضه نماید، باید، از نو رسم کنیم. خوشبختانه درخت ایده‌الی برای این نمایش جدید موجود است - درخت انجیر هندی. درخت انجیر هندی درخت چندته‌ای است که پیوسته‌ته‌های جدیدی بر آن می‌روید. بدین ترتیب که از شاخه‌ای از آن، الیاف نخ مانندی به طرف پایین گسترده می‌شود تا به زمین برسد. در آنجا این قسمت ریشه می‌گیرد و طی چند سال بعد این رشته ضخیمتر و ضخیمتر می‌شود، و با گذشت زمان خود به تنه‌ای با شاخه‌های زیاد مبدل می‌شود، که هر يك الیاف نخ مانند خود را به زمین می‌اندازند.

برخی از درختهای انجیر هندی هستند که دهها تنه دارند، و از لحاظ جا به اندازه يك بلوك شهری را اشغال می‌کنند. این درختها، مانند درخت بلوط ثومند، زیبا هستند و عمر طولانی دارند؛ چنین ادعا می‌شود که آن درخت انجیر هندی، که بودا در مواقع تفکر به آن تکیه می‌داده، هنوز هم زنده و در حال رویش است. بنابراین درخت انجیر هندی برای درخت ریاضیات امروزی شکل با ارزش و دقیقتری دارد. طی سالهای آینده، تنه‌های جدیدی پدید خواهند آمد، و برخی از تنه‌های پیرتر شاید پژمرده و خشک شوند. دانشجویان مختلف می‌توانند تنه‌های مختلفی از این درخت را برای صعود انتخاب کنند و هر دانشجو ابتدا مبنایی را که ریشه‌های تنه انتخابی او در برمی‌گیرند، مطالعه می‌کند. البته همه این تنه‌ها در بالا توسط يك سلسله شاخه‌های در هم رفته درخت با هم ارتباط پیدا می‌کنند. تنه حسابان هنوز زنده و فعال است، امثالاً تنه‌ای هم برای جبر خطی، تنه‌ای برای منطقی ریاضی، و تنه‌های دیگری هم وجود دارند.

ریاضیات آن‌چنان گسترش یافته که امروزه ممکن است شخص ریاضیدانی بسیار بارور و خلاق باشد ولی از حسابان و توسیعه‌های آن چندان اطلاعی نداشته باشد. ماها که امروزه در دانشگاه‌ها تدریس می‌کنیم با اصرار بر اینکه همه دانشجویان باید ابتدا از تنه حسابان درخت ریاضیات بالا روند، به برخی از آنان زیان می‌رسانیم. علی‌رغم همه جذابیت و زیبایی حسابان، این طور نیست که این درس به مذاق همه دانشجویان خوش بیاید. بسا مجبور کردن همه دانشجویان به بالا رفتن از تنه حسابان، شاید ریاضیدانان مستعد بالقوه‌ای را از دست می‌دهیم. کوتاه سخن آنکه، اکنون شاید زمان آن رسیده باشد که فن آموزش ریاضی خود را برای آنکه مناسب درخت ریاضیاتی باشد که توسعه تاریخی کنونی این موضوع را بهتر منعکس نماید، اصلاح کنیم.

مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱۵ فرضهای تلویحی اقلیدس

به بیان واثبات قضایای ۱۱، ۱۶ و ۲۱ مراجعه کنید (مثلاً درس‌زده مقاله اصول اقلیدس ت. ل. هیت) و نشان دهید که:

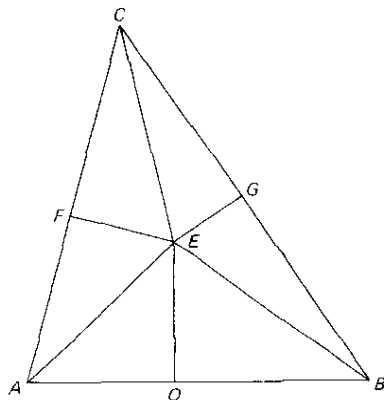
(الف) در قضیه ۱۱ اقلیدس تلویحاً چنین فرض می‌کند که دو دایره‌ای که مراکزشان

دوانتهای يك پاره خط است و این پاره خط شعاع مشترك آنهاست، يكديگر را قطع می‌کنند.
 (ب) در قضیه ۱۱۶ اقلیدس تلویحاً نامتناهی بودن خطوط راست را می‌پذیرد.
 (ج) در قضیه ۱۲۱ اقلیدس تلویحاً فرض می‌کند که اگر خط مستقیمی از رأس مثلثی وارد آن شود، در صورتی که به حد کافی امتداد داده شود، ضلع مقابل را قطع می‌کند.

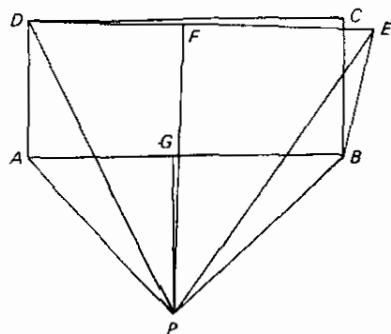
۲۰۱۵ سه پارادوکس هندسی

اگر فرض تلویحاً پذیرفته شده‌ای در يك مبحث قیاسی متضمن دریافت غلطی باشد، مطرح کردن آن نه تنها ممکن است به قضیه‌ای منجر شود که از اصول موضوعه دستگاه قیاسی تبعیت نمی‌کند بلکه به قضیه‌ای منجر می‌شود که ممکن است عملاً ناقض برخی از قضایای قبلاً ثابت شده این دستگاه باشد. از این نقطه نظر، سه پارادوکس هندسی زیر را نقد کنید:
 (الف) اثبات اینکه هر مثلثی متساوی الساقین است.

فرض کنید ABC مثلث دلخواهی باشد (نگاه کنید به شکل ۱۲۴). نیمساز زاویه C و عمود منصف ضلع AB را رسم کنید. از نقاط تلاقی آنها یعنی E ، عمودهای EG و EF را به ترتیب بر AC و BC وارد کنید، و EA و EB را رسم کنید. حال مثلثهای قائم الزاویه CFE و CGE را برابرند، زیرا هر يك از آنها CE است و $\angle FCE = \angle GCE$. بنابراین $CG = CF$. همچنین، مثلثهای قائم الزاویه EFA و EGB مساوی‌اند، زیرا ساق EF از یکی برابر با ساق EG از دیگری است (هر نقطه‌ای مانند E بر نیمساز زاویه C از دو ضلع این زاویه به يك فاصله‌اند) و چون وتر EA از یکی برابر با وتر EB از دیگری است (هر نقطه‌ای مانند E بر عمود منصف پاره خطی مانند AB از دو انتهای این پاره خط به يك فاصله است). بنابراین نتیجه می‌شود که $CF + FA = CG + GB$ یا $CA = CB$ ، و مثلث مزبور متساوی الساقین است.



شکل ۱۲۴



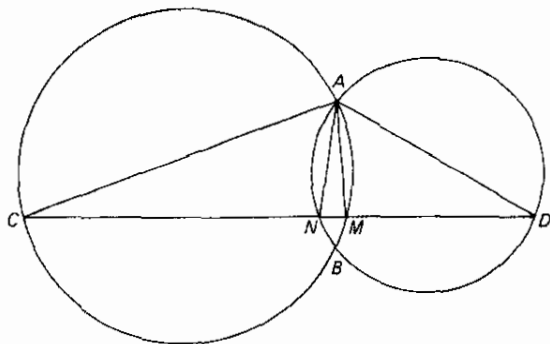
شکل ۱۲۵

(ب) اثبات اینکه يك زاویه قائمه برابر با يك زاویه منفرجه است.

فرض کنید $ABCD$ مستطیل دلخواهی باشد (نگاه کنید به شکل ۱۲۵). BE را خارج از مستطیل و از نظر طول برابر با BC ، و بنابراین برابر با AD رسم کنید. عمود منصفهای AB و DE را رسم کنید؛ چون آنها بر خطوط غیر موازی عمود هستند، باید در نقطه‌ای مانند P یکدیگر را قطع کنند. AP ، BP ، DP و EP را رسم کنید. در این صورت $PA = PB$ و $PD = PE$ (هر نقطه‌ای بر عمود منصف يك پاره‌خط از دوسر این پاره‌خط به يك فاصله است). همچنین، بنا به نحوه ساختمان، $AD = BE$. بنابراین مثلثهای APD و BPE متساوی‌اند، چون سه ضلع یکی برابر با سه ضلع از دیگری هستند. بنابراین $\angle DAP = \angle EBP$. اما $\angle BAP = \angle ABP$ ، چون این زوایا، زوایای مجاور به قاعده مثلث متساوی الساقین APB ‌اند. با تفریق، اکنون نتیجه می‌شود که زاویه قائمه $DAG =$ زاویه منفرجه EBA .

(ج) اثبات اینکه از نقطه‌ای می‌توان دو عمود بر خطی واد کرد.

فرض کنید دو دایره دلخواه یکدیگر را در A و B قطع کنند (نگاه کنید به شکل ۱۲۶).



شکل ۱۲۶

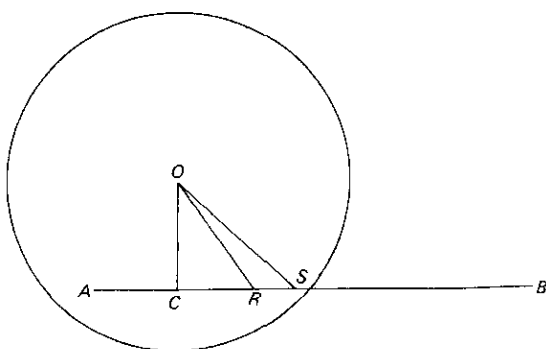
اقطار AD و AC را رسم کنید، فرض کنید که خط واصل بین C و D دایره‌های مربوطه را در N و M قطع کند. در این صورت زوایای AMC و AND قائمه‌اند، چون هر یک در نیم‌دایره‌ای محاط هستند. بنابراین AM و AN دو عمود وارد بر CD اند.

۳۰۱۵ اصل پیوستگی دد کنید

برای تضمین وجود برخی نقاط تلاقی (خط بادایره و دایره بادایره) ریشارد دد (۱۸۳۱-۱۹۱۶) اصل موضوع پیوستگی زیر را وارد هندسه کرد: اگر همه نقاط یک خط مستقیم در دو دایره قرار گیرند، به طوری که هر نقطه دایره اول در طرف چپ هر نقطه دایره دوم قرار گیرد، آنگاه یک و فقط یک نقطه وجود دارد که این تقسیم همه نقاط به دو دایره، یعنی برش خط مستقیم به دو پاره را به وجود می‌آورد.

(الف) جزئیات برهان زیر از قضیه بعد را کامل کنید: قطعه خط مستقیمی که نقطه‌ای مانند A در داخل یک دایره را به نقطه‌ای مانند B در خارج دایره وصل می‌کند نقطه مشترکی با دایره دارد.

فرض کنید O مرکز و r شعاع دایره مفروض باشد (نگاه کنید به شکل ۱۲۷)، و فرض کنید C پای عمود وارد از O بر خطی باشد که توسط A و B معین می‌شود. نقاط پاره خط AB را می‌توان به دو دایره تقسیم کرد: نقاطی مانند P که برای آنها $OP < r$ ، و نقاطی مانند Q که برای آنها $OQ \geq r$. می‌توان نشان داد که، در هر حالت، $CP < CQ$. بنابراین، بنابراین اصل دد کنید، نقطه‌ای مانند R بر AB وجود دارد و به قسمی که همه نقاط قبل از آن به یک دایره تعلق دارند و همه نقاط بعد از آن به دایره دیگر. اما $OR < r$ ، زیرا در غیر این صورت می‌توانستیم S را بر AB ، بین R و B ، طوری انتخاب کنیم که $RS < r - OR$. اما، چون $OS < OR + RS$ ، این نامساوی موجب این رابطه بی‌معنی خواهد شد که $OS < r$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $OR > r$. بنابراین باید داشته باشیم $OR = r$ ، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۲۷

- (ب) چگونه می شود اصل ددکیند را تعمیم داد تا زوایا را هم شامل بشود؟
 (ج) چگونه می شود اصل ددکیند را تعمیم داد تا کمانهای دایره را هم شامل بشود؟

۴۰۱۵ تعبیر مختصاتی اصول موضوعه اقلیدس

- برای سهولت، سه اصل موضوع اول اقلیدس را به صورتهای معادل زیر بیان می کنیم:
۱. هر دو نقطه متمایز خط راستی را معین می کنند.
 ۲. يك خط مستقیم نامحدود است.
 ۳. دایره ای وجود دارد که مرکز آن نقطه مفروض دلخواهی است و بر نقطه مفروض دلخواه دیگری می گذرد.

نشان دهید که اصول موضوعه اقلیدس، که بخشی از آنها در بالا بیان شده اند، در صورتی که نقاط صفحه محدود به نقاطی شوند که مختصات دکارتی متعامد آنها نسبت به چارچوب مرجع ثابتی اعداد گویا هستند، برقرارند. با این حال، نشان دهید که تحت این محدودیت، يك دایره و يك خط مار بر مرکز آن لزومی ندارد که یکدیگر را قطع کنند.

۵۰۱۵ تعبیر کروی اصول موضوعه اقلیدس

نشان دهید که اصول موضوعه اقلیدس (به آن صورت ناقصی که در مطالعه مسئله ای ۴۰۱۵ بیان شده اند)، در صورتی که صفحه را سطح يك کره، خطوط مستقیم را دایره عظیمه واقع بر آن، نقاط را نقاطی واقع بر کره تعبیر کنیم، برقرارند. مع هذا نشان دهید که با این تعبیر گزاره های زیر هم درست اند:

- (الف) خطوط موازی موجود نیستند.
- (ب) همه خطوط عمود بر يك خط مفروض که در يك طرف خط بر آن رسم شده باشند، یکدیگر را در نقطه ای قطع می کنند.
- (ج) این امکان وجود دارد که دو خط متمایز دو نقطه را به هم وصل کنند
- (د) مجموع زوایای يك مثلث بیش از دو قائمه است.
- (ه) مثلثهایی موجودند که هر سه زاویه آنها قائمه اند.
- (و) هر زاویه خارجی يك مثلث همیشه بزرگتر از هر يك از دو زاویه داخلی غیر مجاورش نیست.
- (ز) مجموع دو ضلع يك مثلث می تواند کمتر از ضلع سوم آن باشد.
- (ح) برای مثلثی که يك زوج زاویه برابر دارد ممکن است اضلاع مقابل به آنها نابرابر باشند.
- (ط) بزرگترین ضلع يك مثلث لزوماً مقابل به بزرگترین زاویه آن نیست.

۶۰۱۵ اصل موضوع پاش

در سال ۱۸۸۲ موریس پاش اصل موضوع زیر را فرمول بندی کرد: فرض کنید که A, B, C

نه نقطه غیر واقع بزرگ خط مستقیم باشند، و فرض کنید که m خطی مستقیم واقع بر صفحه ABC باشد که از هیچیک از نقاط A, B, C نمی‌گذرد. در این صورت، اگر خط m بر نقطه‌ای از پاره‌خط AB بگذرد، آنگاه بر نقطه‌ای از پاره‌خط BC یا نقطه‌ای از پاره‌خط AC نیز خواهد گذشت. این اصل موضوع یکی از فرضیهایی است که توسط هندسه دانان جدید به عنوان اصل موضوع ترتیب دسته‌بندی شده و به روشن ساختن مفهوم «نسبیت» کمک می‌کند.

(الف) به عنوان نتیجه‌ای بر اصل موضوع پاش، ثابت کنید که اگر خط راستی از رأس یک مثلث دارد آن شود، باید ضلع مقابل را قطع کند.

(ب) نشان دهید که اصل موضوع پاش برای یک مثلث کروی که توسط دایره عظیمه‌ای قطع می‌شود، همواره برقرار نیست.

۷.۱۵ یک دستگاه مجرد ریاضی

مجموعه‌ای مانند K از عناصر تعریف نشده را، که ما با حروف کوچک نشان خواهیم داد، در نظر بگیرید، و فرض کنید R معرف یک نسبت دوتایی تعریف نشده باشد که ممکن است بین زوجی از عناصر K برقرار باشد یا نباشد. اگر عنصر a از K با عنصر b از K با نسبت R ، ارتباط داشته باشند، می‌نویسیم $R(a, b)$. حال چهار اصل موضوع زیر دربارهٔ عناصر K و نسبت دوتایی R را می‌پذیریم.

P1 اگر a و b هر دو عنصر مجزای K باشند، در این صورت یا داریم $R(a, b)$ و یا $R(b, a)$.

P2 اگر a و b هر دو عنصر K باشند به قسمی که داشته باشیم $R(a, b)$ ، آنگاه a و b عناصر مجزایی هستند.

P3 اگر a, b, c هر سه عنصر K باشند به قسمی که داشته باشیم $R(a, b)$ و $R(b, c)$ ، آنگاه داریم $R(a, c)$. (به عبارت دیگر نسبت R ، متعدی است.)

P4 K متشکل از دقیقاً چهار عنصر متمایز است.
هفت قضیهٔ زیر را از چهار اصل موضوع بالا نتیجه بگیرید:

T1 اگر داشته باشیم $R(a, b)$ ، آنگاه نسبت $R(b, a)$ برقرار نیست. (به عبارت دیگر نسبت R متقارن نیست.)

T2 اگر داشته باشیم $R(a, b)$ ، و اگر c عنصر K باشد، آنگاه یا داریم $R(a, c)$ و یا $R(c, b)$.

T3 حداقل یک عنصر K با هیچ عنصر K نسبت R را ندارد. (این يك قضیهٔ وجودی است.)

T4 حداکثر یک عنصر K وجود دارد که با هیچ عنصر K نسبت R را ندارد. (این يك قضیهٔ یکتایی است.)

تعریف ۱ اگر داشته باشیم $R(a, b)$ ، آنگاه گوییم که داریم $D(a, b)$.

T5 اگر داشته باشیم $D(a, b)$ و $D(b, c)$ ، آنگاه داریم $D(a, c)$.

تعریف ۲ اگر داشته باشیم $R(a, b)$ و هیچ عنصری مانند c موجود نباشد به قسمی که داشته باشیم $R(a, c)$ یا $R(c, b)$ ، آنگاه گوییم که داریم $F(a, b)$.
 T۶ اگر داشته باشیم $F(a, c)$ و $F(b, c)$ ، آنگاه a با b یکی است.
 T۷ اگر داشته باشیم $F(a, b)$ و $F(b, c)$ ، آنگاه رابطه $F(a, c)$ را نداریم.

تعریف ۳ اگر داشته باشیم $F(a, b)$ و $F(b, c)$ ، آنگاه گوییم که داریم $G(a, c)$.

۸-۱۵ مبحث اصل موضوعیها

(الف) سازگاری مجموعه اصل موضوعی مطالعه مسئله ای ۷-۱۵ را به کمک هر يك از تعبیرهای زیر ثابت کنید:

۱. فرض کنید K متشکل از يك مرد، پدر او، پدر پدر او، پدر پدر پدر او، و $R(a, b)$ به معنی « a جد b است» باشد.
۲. فرض کنید که K متشکل از چهار نقطه متمایز بر يك خط افقی باشد، و فرض کنید $R(a, b)$ به معنی « a سمت چپ b است» باشد.
۳. فرض کنید که K متشکل از چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و $R(a, b)$ به معنی « $a < b$ » باشد.

اصول موضوعه این مجموعه، اصول موضوعه نسبت دنباله ای موجود بین چهار عنصر هستند. هر نسبتی مانند R که این اصول موضوعه را تعبیر کند يك نسبت دنباله ای نامیده می شود، و گویند که عناصر K تشکیل يك دنباله می دهند. تعابیر پیشنهادی بالا سه کاربرد شاخه مجرد از ریاضیاتی را که در مطالعه مسئله ای ۷-۱۵ بسط یافت، در اختیار مامی گذارند.
 (ب) صورت قضایا و تعاریف مطالعه مسئله ای ۷-۱۵ را برای هر يك از تعابیر (الف) بنویسید.

(ج) استقلال مجموعه اصل موضوعی مطالعه مسئله ای ۷-۱۵ را به کمک هر يك از چهار تعبیر جزئی زیر ثابت کنید.

۱. فرض کنید که K متشکل از دو برادر، پدر آنها، و پدر پدر آنها و $R(a, b)$ به معنی « a جد b است» باشد. این، استقلال P_1 را ثابت می کند.
 ۲. فرض کنید K متشکل از چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و $R(a, b)$ به معنی « $a \leq b$ » باشد. این، استقلال P_2 را ثابت می کند.
 ۳. فرض کنید K متشکل از چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و $R(a, b)$ به معنی « $a \neq b$ » باشد. این استقلال P_3 را ثابت می کند.
 ۴. فرض کنید K متشکل از پنج عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و $R(a, b)$ به معنی « $a < b$ » باشد. این، استقلال P_4 را ثابت می کند.
- (د) نشان دهید P_1 ، T_1 ، P_3 ، P_4 يك مجموعه اصل موضوعی معادل با P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 تشکیل می دهد.

۹۰۱۵ گزاره‌های فرضی مربوط به هم

- (الف) گزاره زیر را ثابت کنید: اگر يك مثلث متساوی الساقین باشد، نیمسازهای زوایای مجاور به قاعده آن برابرند.
- (ب) عکس گزاره (الف) را بیان کنید. (این عکس، که اثبات آن تا حدی پر زحمت است، به مسئله اشتاینر-لهموس شهرت یافته است.
- (ج) متقابل (یا عکس) گزاره (الف) را بیان کنید.
- (د) اگر گزاره‌ای به شکل اگر A آنگاه B درست باشد، آیا لزوماً نتیجه می‌شود که عکس آن درست است؟ متقابل آن چگونه؟
- (ه) نشان دهید که اگر گزاره‌ای به شکل اگر A آنگاه B و متقابل آن هر دو درست باشند، آنگاه عکس آن نیز درست است.
- (و) گزاره‌هایی را بیان کنید که درست باشند اگر: A شرط لازم برای B باشد؛ A يك شرط کافی برای B باشد؛ A يك شرط لازم و کافی برای B باشد. (اگر A هم شرط لازم و هم شرط کافی برای B باشد، آنگاه A را ملاك B می‌نامند.)

۱۰۰۱۵ شهود در مقابل برهان

سؤالات زیر را به‌طور شهودی پاسخ دهید، سپس جوابهای خود را با محاسبه امتحان کنید.

- (الف) اتومبیلی با سرعت ۴۰ مایل در ساعت از P به Q حرکت و سپس با سرعت ۶۰ مایل در ساعت از Q به P مراجعت می‌کند. سرعت متوسط رفت و برگشت چقدر است؟
- (ب) A کاری را می‌تواند ۴ روزه انجام دهد و B آن را می‌تواند در ۶ روز انجام دهد و اگر A و B این کار را توأماً انجام دهند، کار چقدر طول خواهد کشید؟
- (ج) مردی نصف سیبهای خود را هر ۳ عدد به ۱۷ سنت می‌فروشد و سپس نصف دیگر را هر ۵ عدد به ۱۷ سنت می‌فروشد. وی همه سیبهایش را به چه قیمتی بفروشد تا همان درآمد بالا را داشته باشد؟
- (د) اگر يك گلوله نخ به قطر ۴ اینچ ۲۰ سنت ارزش داشته باشد، برای يك گلوله نخ به قطر ۶ اینچ چقدر باید بپردازید؟
- (ه) دوشغل مزد سالانه یکسان ۶۰۰۰ دلار در شروع و مزد سالانه ماکزیم یکسان ۱۲۰۰۰ دلار دارند. در یکی از این دوشغل افزایش مزد سالانه ۸۰۰ دلار و در دیگری افزایش مزد شش ماهه ۲۰۰ پیشنهاد می‌شود. کدام شغل پردرآمدتر است؟
- (و) هر باکتری در کشت معینی در هر دقیقه به دو باکتری تقسیم می‌شود. اگر در پایان يك ساعت ۲۰ میلیون باکتری موجود باشند، در چه زمانی ۱۰ میلیون باکتری وجود داشته‌اند؟
- (ز) آیا يك مزد ۱ سنت برای نیم ماه اول، ۲ سنت برای نیم ماه دوم، ۴ سنت برای نیم ماه سوم، ۸ سنت برای نیم ماه چهارم، و به همین ترتیب تا پایان یافتن سال، مجموعاً مزد سالانه خوب یا بدی است؟

- (ح) ساعتی در ۵ ثانیه شش ضربه می زند. چقدر طول می کشد تا دوازده ضربه بزند؟
- (ط) يك بطری و يك چوب پنبه مجموعاً ۱۱۰ دلار قیمت دارند. اگر قیمت بطری يك دلار بیش از قیمت چوب پنبه باشد، قیمت چوب پنبه چقدر است؟
- (ی) فرض کنید که در يك لیوان مقدار معینی از يك مایع مانند A وجود داشته باشد، و در لیوان دوم همان مقدار از مایع دیگری مانند B وجود داشته باشد. يك قاشق از مایع A را از لیوان اول برداشته و آن را در لیوان دوم می ریزیم، سپس يك قاشق از محلول را از لیوان دوم به لیوان اول برمی گردانیم. اينك مقدار مایع A در لیوان دوم از مقدار مایع B در لیوان اول بیشتر است یا کمتر؟
- (ك) فرض کنید که ورق بزرگی از كاغذ به ضخامت يك هزارم اینچ را به دو قسمت بریده و دو قطعه را روی هم بگذاریم. حال اینها را نصف می کنیم، و چهار قطعه را روی هم به صورت کپه می گذاریم. اگر این عمل نصف کردن و کپه کردن را ۵۰ بار انجام دهیم، بلندی کپه نهایی كاغذ از يك مایل بیشتر خواهد شد یا کمتر؟
- (ل) آیا يك تخفیف ۱۵ درصد در قیمت فروش يك قلم کالا با يك تخفیف ۱۰ درصد در قیمت فروش يك تخفیف ۵ درصد در قیمت تخفیف داده شده آن یکی است؟
- (م) ۴ يك چهارم به چه نسبتی از سه چهارم بیشتر است؟
- (ن) کودکی می خواهد میانگین حسابی هشت نمره خود را حساب کند. وی ابتدا میانگین چهار نمره اول، سپس میانگین چهار نمره آخر را پیدا می کند، و سپس میانگین میانگینها را به دست می آورد. آیا این کار وی درست است؟

۱۱.۱۵ يك دستگاه ریاضی كوچك

مجموعه اصل موضوعی زیر را در نظر بگیرید:

P_1 هر $abba$ مجموعه ای از $dabba$ هاست.

P_2 حداقل دو $dabba$ موجود است.

P_3 اگر p و q دو $dabba$ باشند، آنگاه pk و فقط $abba$ وجود دارد که هم شامل p است و هم شامل q .

P_4 اگر L يك $abba$ باشد، آنگاه $dabba$ ای وجود دارد که در L نیست.

P_5 اگر L يك $abba$ ، و p يك $dabba$ باشد که در L نیست، آنگاه pk و فقط $abba$ شامل p وجود دارد که شامل هیچ يك از $dabba$ های واقع در L نیست.

(الف) اصطلاحات اولیه این مجموعه اصل موضوعی چیست؟

(ب) نشان دهید که این مجموعه اصل موضوعی مطلقاً سازگار است.

(ج) استقلال اصول موضوعه P_3 و P_5 را ثابت کنید.

(د) قضایای زیر را از مجموعه اصل موضوعی بالا نتیجه بگیرید: (۱) هر $dabba$

حداقل مشمول در دو $abba$ است. (۲) هر $abba$ شامل حداقل دو $dabba$ است.

(۳) حداقل چهار $dabba$ متمایز موجود است. (۴) حداقل شش $abba$ متمایز وجود دارد.

۱۲.۱۵ مجموعه‌ای از گزاره‌های ناسازگار

اگر p, q, r معرف گزاره‌هایی باشند، نشان دهید که مجموعه چهار گزاره زیر ناسازگار است: (۱) اگر q درست باشد، آنگاه r نادرست است. (۲) اگر q نادرست باشد، آنگاه p درست است. (۳) r درست است. (۴) p نادرست است.

۱۳.۱۵ يك مجموعه اصل موضوعی مربوط به نظریه نسبیت

فرض کنید S مجموعه‌ای از عناصر و F يك نسبت دوتایی باشد که در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند:

P_۱ اگر a و b عناصر S باشند و اگر bFa ، آنگاه aFb . (در اینجا bFa به معنی آن است که عنصر b با عنصر a نسبت F دارد.)

P_۲ اگر a يك عنصر S باشد، آنگاه حداقل يك عنصر مانند b از S وجود دارد به قسمی که bFa .

P_۳ اگر a يك عنصر S باشد، آنگاه حداقل يك عنصر مانند b از S وجود دارد به قسمی که aFb .

P_۴ اگر a, b, c عناصر S باشند به قسمی که bFa و cFb ، آنگاه cFa .

P_۵ اگر a و b عناصر S باشند به قسمی که bFa ، آنگاه حداقل يك عنصر مانند c از S وجود دارد به قسمی که cFa و bFc .

(الف) نشان دهید که گزاره «اگر a يك عنصر S باشد، آنگاه حداقل يك عنصر مانند b از S ، متمایز از a ، وجود دارد به قسمی که bFa و aFb »، با اصول موضوعه بالا سازگار است. (این مجموعه اصول موضوعه، که به آن گزاره بالا اضافه شود، در نظریه نسبیت مورد استفاده قرار گرفته است که در آنجا عناصر S به عنوان لحظه‌های زمان و F به معنی «بعد از» تعبیر می‌شود.)

(ب) اصول موضوعه بالا و گزاره (الف) را در قالب تعبیر مذکور در (الف) بنویسید.

۱۴.۱۵ زنبورها و کندوها

مجموعه اصل موضوعی زیر را در نظر بگیرید، که در آن زنبود و کندو اصطلاحات اولیه هستند:

P_۱ هر کندو مجموعه‌ای از زنبورهاست.

P_۲ هر دو کندوی متمایز يك فقط يك زنبور مشترك دارند.

P_۳ هر زنبور متعلق به دو و فقط دو کندو است.

P_۴ دقیقاً چهار کندو وجود دارد.

(الف) نشان دهید که این مجموعه اصول موضوعه مطلقاً سازگار است.

(ب) نشان دهید که اصول موضوعه P_2 ، P_3 ، و P_4 مستقل اند.

(ج) قضایای زیر را از مجموعه اصول موضوعه مفروض استنتاج کنید:

T_1 دقیقاً شش زنبور وجود دارد.

T_2 در هر کندو دقیقاً سه زنبور وجود دارد.

T_3 به ازای هر زنبور دقیقاً یک زنبور دیگر موجود است که با آن در یک کندو نیست.

۱۵.۱۵ فضاهای متری

در سال ۱۹۰۶، موریس فرشه مفهوم فضای متریک را مطرح کرد. یک فضای متریک مجموعه‌ای مانند M از عناصر، به نام نقاط، است همراه با عددی حقیقی مانند $d(x, y)$ ، به نام تابع فاصله یا متریک فضا، که به هر زوج مرتب نقاط x و y در M مربوط می‌شود، و در چهار اصل موضوع زیر صدق می‌کند.

$$d(x, y) \geq 0 \quad M_1$$

$$d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y. \quad M_2$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad M_3$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad M_4$$

که در آن x, y, z سه نقطه از M اند که لزوماً متمایز نیستند. (این نامساوی را نامساوی مثلث می‌نامند.)

(الف) نشان دهید که مجموعه M از همه نقاط حقیقی مانند x ، همراه با $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ ، یک فضای متریک است.

(ب) نشان دهید که مجموعه M از همه زوجهای مرتب $p = (x, y)$ از اعداد حقیقی، همراه با

$$d(p_1, p_2) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2},$$

که در آن $p_1 = (x_1, y_1)$ و $p_2 = (x_2, y_2)$ ، یک فضای متریک است.

(ج) نشان دهید که مجموعه M از همه زوجهای مرتب $p = (x, y)$ از اعداد حقیقی، همراه با

$$d(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

که در آن $p_1 = (x_1, y_1)$ و $p_2 = (x_2, y_2)$ ، یک فضای متریک است. (به کمک مشخص کردن نقاط بر یک صفحه دکارتی، بی‌درنگ مشاهده می‌شود که چرا به این فضای متریک، فضای تاکسی اطلاق می‌شود.)

(د) نشان دهید که مجموعه M از همه زوجهای مرتب $p = (x, y)$ از اعداد حقیقی، همراه با

$$d(p_1, p_2) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|),$$

که در آن $p_1 = (x_1, y_1)$ و $p_2 = (x_2, y_2)$ ، يك فضای متریک است.

(ه) نشان دهید که به جای اصول موضوعه M_1 ، M_2 و M_3 می توان اصل موضوع تنهای زیر را قرار داد: M_1' : $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$ ؛ که در آن x, y, z ، هر سه نقطه از M ، و نه لزوماً متمایز، هستند.

(و) نشان دهید که هر مجموعه‌ای مانند M از عناصر را می توان با قراردادن $d(x, y) = 1$ اگر $x \neq y$ ، و $d(x, y) = 0$ اگر $x = y$ ، به يك فضای متریک تبدیل کرد.

(ز) نشان دهید که اگر $d(x, y)$ يك متریک برای مجموعه‌ای مانند M باشد، آنگاه می توانیم هر يك از متریک‌های زیر را به عنوان يك متریک M مورد استفاده قرار دهیم:

$$۱. kd(x, y), \text{ که در آن } k \text{ يك عدد مثبت حقیقی است.}$$

$$۲. [d(x, y)]^{1/2}.$$

۳. $d(x, y) / [1 + d(x, y)]$. نشان دهید که در اینجا همه فاصله‌ها کوچکتر از يك هستند.

(ح) فرض کنید که c نقطه‌ای از يك فضای متریک باشد و فرض کنید r عدد حقیقی مثبتی باشد. مجموعه همه نقاط M مانند x را به طوری که $d(c, x) = r$ ، يك دایره به مرکز c و شعاع r در این فضای متریک تعریف کنید. شکل يك دایره را در نمایشهای دکارتی فضاهای متریک (الف)، (ب)، (ج)، و (د) توصیف کنید.

۱۶-۱۵ پاره خطهای معادل

(الف) يك پاره خط AB بسته به اینکه سر A (یا B) از آن متعلق یا غیر متعلق به این پاره خط فرض شود، با استفاده از به ترتیب يك کره یا يك پارانتر، در کنار A (یا B) نشان داده خواهد شد. بسا استفاده از این نمادگذاری، نشان دهید که $[AB]$ ، (AB) ، $[AB)$ ، $(AB]$ ، به عنوان مجموعه‌ای از نقاط، با یکدیگر معادل اند.

(ب) نشان دهید که مجموعه نقاطی که يك پاره خط متاهی را تشکیل می‌دهند و مجموعه نقاطی که يك پاره خط نامتناهی را تشکیل می‌دهند، معادل هستند.

۱۷-۱۵ برخی مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

(الف) نشان دهید که اجتماع عدّه متناهی از مجموعه‌های شمارا يك مجموعه شماراست.

(ب) نشان دهید که اجتماع عدّه شمارایی از مجموعه‌های شمارا يك مجموعه شماراست.

(ج) نشان دهید که مجموعه همه اعداد ناگویا ناشماراست.

(د) نشان دهید که مجموعه کلیه اعداد متعالی ناشماراست.

۱۸.۱۵ چند جمله‌ایهایی به ارتفاعهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵

- (الف) نشان دهید که ۱ تنها چند جمله‌ای به ارتفاع ۱ است.
- (ب) نشان دهید که x و x^2 تنها چند جمله‌ای به ارتفاع ۲ هستند.
- (ج) نشان دهید x^3 ، $x^2 + 1$ ، $x - 1$ ، و x^3 تنها چند جمله‌ای به ارتفاع ۳ هستند، و اعداد جبری متمایز ۵، ۱، ۱ - را می‌دهند.
- (د) همه چند جمله‌ایهای ممکن به ارتفاع ۴ را تشکیل و نشان دهید که تنها اعداد جبری حقیقی جدید حاصل از آنها $2 - 1/2$ ، $1/2$ ، 2 هستند.
- (ه) نشان دهید که چند جمله‌ایهای به ارتفاع ۵، دوازده عدد جبری حقیقی دیگر به دست می‌دهند.

۱۹.۱۵ اندازه يك مجموعه شمارا از نقاط

- (الف) جزئیات برهان زیر درباره نامشمارا بودن همه نقاط واقع بر يك پاره خط AB را کامل کنید:

طول AB را ۱ واحد اختیار و فرض کنید که نقاط واقع بر AB يك مجموعه شمارا تشکیل دهند. در این صورت نقاط واقع بر AB را می‌توان به صورت دنباله‌ای مانند $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ مرتب کرد. نقطه P_1 را در بازه‌ای به طول $1/10$ ، نقطه P_2 را در بازه‌ای به طول $1/10^2$ ، نقطه P_3 را در بازه‌ای به طول $1/10^3$ ، محصور کنید و به همین نحو ادامه دهید. نتیجه می‌شود که طول واحد AB توسط دنباله‌ای متناهی از زیر بازه‌های احتمالاً در هم رفته به طولهای $1/10$ ، $1/10^2$ ، $1/10^3$ ، ... کاملاً پوشیده می‌شود. اما مجموع طولهای این زیر بازه‌ها عبارت است از

$$1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \dots = 1/9 < 1.$$

- (ب) با انتخاب زیر بازه‌های قسمت (الف) به طوری که طولهای $1/10$ ، $1/10^2$ ، $1/10^3$ ، ... داشته باشند که در آن ϵ عدد مثبتی با کوچکی دلخواه است، نشان دهید يك مجموعه شمارا از نقاط را می‌توان توسط مجموعه‌ای از بازه‌ها پوشانید به طوری که مجموع طول بازه‌ها تا هر اندازه که بخواهیم كوچك باشد. (با استفاده از اصطلاحات نظریه اندازه، گوییم که يك مجموعه شمارا از نقاط دارای اندازه صفر است.)

۲۰.۱۵ اعداد ترانسفینی و نظریه ابعاد

- فرض کنید که E_1 معرف مجموعه نقاط واقع بر يك پاره خط واحد $[0, 1]$ و E_2 معرف مجموعه همه نقاط واقع بر يك مربع واحد $0 < x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ باشد. نقطه‌ای مانند z از E_1 را می‌توان توسط ارقام اعشاری بی‌پایانی مانند $z = 0.z_1z_2z_3\dots$ که بین ۰ و ۱ قرار دارند، نشان داد، و نقطه‌ای مانند P از E_2 را می‌توان توسط زوج مرتبی از ارقام اعشاری بی‌پایان مانند

$$(x = 0.x_1x_2x_3 \dots, y = 0.y_1y_2y_3 \dots)$$

نشان داد که هر کسر اعشاری بین ۰ و ۱ قرار دارد. فرض کنید که هر x_i, y_i, z_i را در این نمایشها معرف يك رقم غیر صفر یا يك رقم غیر صفری که قبل از آن احتمالاً بلوکی از صفرها می‌آید، بگیریم. مثلاً، اگر $z = 0.73028007 \dots$ ، آنگاه $z_1 = 7, z_2 = 3, z_3 = 0, z_4 = 2, z_5 = 8, z_6 = 0, z_7 = 7, \dots$. نشان دهید که می‌توان يك تناظر يك به يك بین نقاط E_1 و نقاط E_2 بدین ترتیب برقرار کرد که به هر نقطه $0.01z_1z_2z_3 \dots$ از E_1 يك نقطه

$$(0.01z_1z_2z_3 \dots, 0.01z_2z_3z_4 \dots)$$

از E_2 نسبت داده شود، و به نقطه

$$(0.01x_1x_2x_3 \dots, 0.01y_1y_2y_3 \dots)$$

از E_2 ، نقطه $0.01x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \dots$ از E_1 منسوب شود. بدین ترتیب نشان دهید که مجموعه کلیه نقاط واقع در يك مربع واحد دارای عدد ترانسفینی c است. (این کار نشان می‌دهد که بعد يك چندگونا را نمی‌توان با عدد ترانسفینی چندگونا مشخص کرد.)

۲۱-۱۵ دواير و خطوط

- (الف) نشان دهید که اگر حداقل یکی از مختصات مرکز دایره‌ای ناگویا باشد، آنگاه حداکثر دو نقطه بر دایره با مختصات گویا وجود دارند.
- (ب) نشان دهید که اگر حداقل یکی از مختصات مرکز دایره‌ای يك عدد متعالی باشد، آنگاه حداکثر دو نقطه بر دایره با مختصات جبری وجود دارند.
- (ج) آیا ممکن است که يك خط مستقیم یا يك دایره در صفحه دکارتی تنها شامل نقاطی با مختصات گویا باشند؟ با مختصات جبری باشند؟
- (د) نشان دهید که هر مجموعه نامتناهی از بازه‌های بسته دوبره دو خارج هم واقع بر يك خط مستقیم، شماراست.
- (ه) نشان دهید که هر مجموعه نامتناهی از دواير دوبره دو خارج هم، در يك صفحه، شماراست.

۲۲-۱۵ سطوح همسانریخت

دو سطح را همسانریخت، یا از نظر توپولوژی هم‌ارز نامیم، هرگاه بتوانیم یکی را از دیگری بر اثر کشیدن، فشردن، خم کردن (بدون پاره کردن یا به هم چسباندن)، و در صورت نیاز، بریدن— البته به شرطی که سرانجام دو لبه هر بریدگی را به همان گونه که قبل از بریدن بودند، به هم متصل کنیم— بدست آوریم.

(الف) سطوح تشکیل شده از ۲۶ حرف الفبара در دسته‌هایی که از لحاظ توپولوژیکی هم‌ارز باشند، مرتب کنید.

(ب) نشان دهید که يك چهاروجهی منتظم که به جای یالهای آن سیم گذاشته شده، سطحی را به دست می‌دهد که با سطح کره‌ای که سه دسته فئجان چایی به آن متصل شده، همسانریخت است.

(ج) لطیفه زیر را توضیح دهید: «در نظریک توپولوژی دان بین يك دونات [نان شیرینی حلقه‌ای شکل] و فئجان قهوه‌اش تفاوتی وجود ندارد.»

۲۳.۱۵ طرفها و یالها

(الف) سطحی که از تاب دادن يك نوار کاغذی به اندازه 180° و چسبانیدن دوسر آن به هم تشکیل می‌شود، نوار موبیوس نام دارد. نشان دهید که نوار موبیوس فقط يك طرف و يك یال بدون گره دارد.

(ب) سطحی بسازید که يك طرف و يك یال گره‌دار داشته باشد.

(ج) سطحی بسازید که دو طرف و يك یال گره‌دار داشته باشد.

(د) سطحی بسازید که دو طرف و يك یال بدون گره داشته باشد.

۲۴.۱۵ حلقه‌های همرو

روش جادوگری را که به مصلحت بودن ازدواج زوجهای خواهان ازدواج را به شرح زیر تعیین می‌کرد، مورد بحث قرار دهید. اگر می‌خواست که يك جدایی درآینده رادر ازدواج مطرح شده پیش‌بینی نماید، يك نوار تاب نخورده را از وسط می‌برید؛ اگر می‌خواست پیش‌بینی کند که زوج باهم مشاجره خواهند کرد ولی باهم خواهند ماند، نواری را که تاب کاملی داشت، دونیم می‌کرد؛ اگر می‌خواست ازدواج پایداری را پیش‌بینی کند، يك نوار موبیوس را دونیم می‌کرد.

۲۵.۱۵ سطوح چندوجهی

(الف) مقدار $f + e - v$ را برای هریک از سطوح چندوجهی منتظم حساب کنید. (می‌توان نشان داد که برای همه سطوح چندوجهی همسانریخت با کره، $f + e - v = 2$.)
(ب) مثالهایی از سطوح بسته ساده چندوجهی باشش و هشت یال ارائه و نشان دهید که هیچ سطحی با هفت یال وجود ندارد.

(ج) از روی رابطه $f + e - v = 2$ نشان دهید که بیش از پنج چندوجهی منتظم نمی‌تواند موجود باشد.

۲۶.۱۵ وجوه و رئوس سطوح چندوجهی

يك سطح چندوجهی بسته ساده مانند P با v رأس، e یال، و f وجه را در نظر گیرید. فرض کنید f معرف عدده وجوه بسا n یال، و v معرف عدده رئوسی که از آنها n یال منشعب می‌شوند، باشند.

(الف) نشان دهید که

$$۱. f = f_3 + f_4 + \dots$$

$$۲. v = v_3 + v_4 + \dots$$

$$۳. 2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$$

$$۴. 2e = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots$$

حال، از روی رابطه $f + v - e = 2$ نشان دهید که

$$۵. 2(v_3 + v_4 + \dots) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \dots$$

به‌طور مشابه نشان دهید که

$$۶. 2(f_3 + f_4 + \dots) = 4 + v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 + \dots$$

با دوبرابر کردن (۶) و اضافه کردن (۵) به آن رابطه زیر را به‌دست آورید.

$$۷. 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + 2v_4 + 4v_5 + \dots + f_7 + 2f_8 + \dots$$

(ب) از مسئله (۷) قسمت (الف) نتایج زیر را استخراج کنید.

۱. هیچ P ای نیست که وجوه آن بیش از ۵ یال داشته باشد.

۲. اگر P هیچ‌وجه سه‌ضلعی یا چهارضلعی نداشته باشد، آنگاه حداقل ۱۲ وجه

P ، پنج‌ضلعی‌اند.

۳. اگر P دارای هیچ وجه سه‌ضلعی یا پنج‌ضلعی نباشد، آنگاه حداقل شش‌وجه

P چهارضلعی‌اند.

۴. اگر P دارای هیچ‌وجه چهارضلعی یا پنج‌ضلعی نباشد، آنگاه حداقل چهاروجه

P سه‌ضلعی‌اند.

(ج) P را سه‌وجهی می‌نامند اگر از هر رأس دقیقاً سه یال خارج شوند. نشان دهید که:

۱. اگر P سه‌وجهی باشد و وجوه آن تنها پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی باشند، آنگاه تعداد

وجوه پنج‌ضلعی در آن ۱۲ است.

۲. اگر P سه‌وجهی باشد و وجوه آن تنها چهارضلعی و هشت‌ضلعی باشند، آنگاه

تعداد وجوه چهارضلعی در آن ۶ است.

۳. اگر P سه‌وجهی باشد و وجوه آن تنها سه‌ضلعی و هشت‌ضلعی باشند، آنگاه تعداد

وجوه سه‌ضلعی در آن ۴ است.

۲۷.۱۵ فضای هاوسدورف

در سال ۱۹۱۴، فلیکس هاوسدورف يك فضای توپولوژی مجرد پدید آورد که به فضای هاوسدورفی مشهور شده است. چنین فضایی عبارت‌است از مجموعه‌ای مانند H از اعضا،

که نقاط نامیده می‌شوند، همراه با زیرمجموعه‌های H ، که همسایگی‌ها نامیده می‌شوند، و در چهار اصل موضوع زیر صدق می‌کنند:

- H₁** به ازای هر نقطه x در H ، حداقل یک همسایگی مانند N_x شامل x موجود است.
H₂ به ازای هر دو همسایگی مانند N_x و N'_x از x ، همسایگی سومی مانند N''_x موجود است که هم مشمول در N_x و هم مشمول در N'_x است.
H₃ اگر y نقطه‌ای در N_x باشد، یک همسایگی N_y مانند N_y موجود است به طوری که N_y مشمول در N_x است.
H₄ اگر x و y نقاط متمایزی در H باشند، همسایگی‌هایی مانند N_x و N_y موجودند که نقطه مشترکی ندارند.

(الف) نشان دهید که مجموعه کلیه نقاط یک خط راست را می‌توان یک فضای هاوسدورف گرفت که در آن همسایگی‌های نقطه x پاره‌خطهای بازی اختیار می‌شوند که x وسط آنهاست. (همتای حسابی این فضای هاوسدورف در مبحث آنالیز مهم است.)

(ب) نشان دهید که مجموعه نقاط صفحه را می‌توان یک فضای هاوسدورف گرفت که در آن همسایگی‌های نقطه‌ای مانند P ، درونهای دایره به مرکز P اختیار می‌شوند.

(ج) نشان دهید که مجموعه کلیه نقاط صفحه را می‌توان یک فضای هاوسدورف گرفت که در آن همسایگی‌های نقطه‌ای مانند P درونهای مربعی به مرکز P و با اضلاعی که موازی دو خط مفروض عمود بر هم در صفحه‌اند، اختیار می‌شوند.

(د) نشان دهید که از هر مجموعه نقاط می‌توان یک فضای هاوسدورف ساخت در صورتی که همسایگی‌های نقاط را خود نقاط بگیریم.

(ه) نشان دهید که از هر فضای متریک می‌توان یک فضای هاوسدورف ساخت در صورتی که همسایگی‌ها را درونهای «دایره» بگیریم (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۵۰۱۵).

تعریف نقطه‌ای مانند x در فضای هاوسدورف H ، یک نقطه حدی زیرمجموعه S در H نامیده می‌شود، مشروط بر اینکه هر همسایگی x حداقل شامل یک نقطه S مجزا از x باشد.

(و) ثابت کنید که هر همسایگی مانند N_x از یک نقطه حدی x از یک زیرمجموعه S از فضای هاوسدورف H ، شامل تعدادی نامتناهی از نقاط S است.

۲۸۰۱۵ گزاره‌های متفق

سه گزاره زیر به گزاره «اگر p ، آنگاه q » مربوط می‌شوند: (۱) عکس آن، «اگر q ، آنگاه p »، (۲) متقابل آن، «اگر نه p ، آنگاه نه q »، (۳) عکس نقیض آن، «اگر نه q ، آنگاه نه p ». نشان دهید:

(الف) عکس یک استلزام درست، لزوماً یک استلزام درست نیست.

(ب) متقابل یک استلزام درست لزوماً یک استلزام درست نیست.

- (ج) عکس نقیض يك استلزام درست، يك استلزام درست است.
 (د) عکس نقیض يك استلزام با عکس متقابل آن یکی است.
 (ه) آیا متقابل عکس يك استلزام با عکس متقابل آن یکی است؟

۲۹۰۱۵ منطق‌های سه‌ارزشی

- (الف) نشان دهید که ۲۵۶ طریق گوناگون در تشکیل يك جدول ارزش برای ترکیب عطفی در يك منطق سه‌ارزشی وجود دارد که در آن فرض می‌کنیم که « p و q » درست است وقتی و فقط وقتی که هم p درست باشد و هم q .
 (ب) نشان دهید که ۱۲ طریق مختلف در تشکیل يك جدول ارزش برای نقیض در يك منطق سه‌ارزشی وجود دارد که در آن فرض می‌کنیم وقتی p درست است، نه p باید درست نباشد، و وقتی p نادرست باشد، نه p نباید نادرست باشد.
 (ج) با فرض اینکه، مانند مورد منطق رایج دوازده‌ارزشی، تمام رابط‌های منطقی دیگر را بتوان با تعریف این رابط‌های دیگر در قالب ترکیب عطفی و نقیض تشکیل داد، نشان دهید که مجموعاً ۳۰۷۲ منطق سه‌ارزشی می‌تواند موجود باشد.
 (د) چند منطق m -ارزشی ممکن مشابه با ۳۰۷۲ منطق سه‌ارزشی ممکن موجود است؟

۳۰۰۱۵ پارادوکس راسل

- صورت‌های قابل فهم زیر برای عامه از پارادوکس راسل را در نظر بگیرید:
 (الف) در کشوری هر شهرداری باید يك شهردار داشته باشد، و هیچ دو ناحیه شهرداری نمی‌توانند يك شهردار داشته باشند. بعضی از شهردارها در حوزه شهرداری محل خدمت خود سکونت ندارند. قانونی تصویب می‌شود که شهرداران غیر ساکن را به سکونت در يك ناحیه معین A ملزم می‌کند. تعداد شهرداران غیر ساکن به قدری است که A خود بخشی دارای شهردار اعلام می‌شود. شهردار A کجا باید اقامت نماید؟
 (ب) در زبان انگلیسی صفتی را که خود را توصیف کند حمل‌پذیر نامند؛ در غیر این صورت صفت را حمل‌ناپذیر نامند. مثلاً صفات «کوتاه»، «English»، و «چند سیلابی» توصیف‌کننده خود هستند و بنابراین حمل‌پذیرند، در حالی که صفات «دراز»، «انگلیسی»، و «تک سیلابی» توصیف‌کننده خود نیستند و بنابراین حمل‌ناپذیرند. حال می‌خواهیم بدانیم که صفت «حمل‌ناپذیر» حمل‌پذیر است یا حمل‌ناپذیر؟
 (ج) فرض کنید که کتابداری، برای گذاشتن در کتابخانه‌اش، يك کتابنامه از همه کتابنامه‌هایی که نام آنها در خود آنها فهرست نشده، گردآوری می‌کند.

۳۱۰۱۵ يك پارادوکس

پارادوکس زیر را بررسی کنید. هر عدد طبیعی را می توان به زبان عرفی و بدون استفاده از نمادهای عددی بیان کرد. مثلاً ۵ را می توان با «پنج» یا «نصف ده»، یا «دومین عدد اول فرد»، یا «جذر مثبت عدد بیست و پنج» و عباراتی از این قبیل بیان کرد. حال عبارت «کوچکترین عدد طبیعی که با کمتر از دوازده کلمه قابل بیان نباشد» را در نظر بگیرید. این عبارت يك عدد طبیعی را با یازده کلمه بیان می کند که با کمتر از دوازده کلمه قابل بیان نیست.

۳۲۰۱۵ برخی باتکلیفها و چند سؤال

- (الف) يك کروکدیل که بچه ای را دزدیده است: به پدر بچه قول می دهد که بچه را برگرداند به شرطی که پدر بچه حدس بزند که بچه برگردانده خواهد شد یا نه. اگر پدر بچه حدس بزند که بچه باز گردانده نخواهد شد، کروکدیل چه باید بکند؟
- (ب) کاشفی به دست آدمخوارانی گرفتار آمده است که به او این فرصت را می دهند تا جمله ای ابراز کند که به شرط درست بودن آن وی را آب بزنند و اگر نادرست باشد وی را کباب کنند. اگر کاشف بگوید که «من کباب خواهم شد» آدمخواران چه باید بکنند؟
- (ج) آیا حکم «هر قاعده را استثنائی است» ناقض خود است؟
- (د) اگر يك نیروی مقاومت ناپذیر با جسم حرکت ناپذیری برخورد کند، چه خواهد شد؟
- (ه) اگر ژئوس^۱ قادر به هر کاری باشد، آیا می تواند سنگی بسازد که نتواند آن را بلند کند؟

۳۳۰۱۵ ریاضیات تفریحی

- (الف) هر ۱۲ پنتومینو را بسازید و به طور تجربی حداقل یکی از ۶۵ راه گذاشتن آنها در کنار هم را برای تشکیل يك مربع 8×8 با يك سوراخ 2×2 در وسط پیدا کنید.
- (ب) هشت وزیر را بريك صفحه شطرنج طوری قرار دهید که هیچ وزیری نتواند دیگری را بزند. (این مسئله در اصل توسط فرانتس ناؤک^۲ در سال ۱۸۵۰ مطرح شد. ۱۲ جواب بنیادی، یعنی جوابهایی که هیچ دوتا از آنها را نمی توان از یکدیگر با دوران یا انعکاس به دست آورد، وجود دارد.)

عنوان مقاله

۱/۱۵ نیلس آبل (۱۸۵۲-۱۸۲۹).

۲/۱۵ داستانها و حکایاتی درباره داوید هیلبرت.

هرمان مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹).	۳/۱۵
هاردی ویلنلود.	۴/۱۵
آلبورت اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵).	۵/۱۵
آمالی امی نوثر (۱۸۸۲-۱۹۳۵).	۶/۱۵
سرینوس رمونجن (۱۸۸۷-۱۹۲۰).	۷/۱۵
نوربرت وینر (۱۸۹۴-۱۹۶۴).	۸/۱۵
خواص دستگاههای اصول موضوعه.	۹/۱۵
یک مجموعه اصول موضوعه برای جبر بولی.	۱۰/۱۵
اصل دوگانی جبر بولی.	۱۱/۱۵
جنبه‌های تفریحی نوار موبیوس.	۱۲/۱۵
سطوح همسانریخت.	۱۳/۱۵
تعاریف غیراستادی.	۱۴/۱۵
قضایای گودل.	۱۵/۱۵
هنر کامپیوتری.	۱۶/۱۵
تمبرهای کامپیوتری هلند.	۱۷/۱۵
بعد چهارم در طراحی چشم اندازها.	۱۸/۱۵
مکتب ریاضی لهستان.	۱۹/۱۵
روانشناسی ابداع ریاضی.	۲۰/۱۵
آیا ریاضیات اختراع می‌شود یا اکتشاف؟	۲۱/۱۵
زیبایی‌شناسی ریاضیات و ریاضیات زیبایی‌شناسی.	۲۲/۱۵
تعهدات اخلاقی ریاضیدانان.	۲۳/۱۵
تکامل دیدگاهها در باب ماهیت هندسه.	۲۴/۱۵
داستانها و حکایاتی دربارهٔ بورباکی.	۲۵/۱۵
فردای ریاضیات جدید.	۲۶/۱۵
درسهایی که از درخت ریاضیات می‌گیریم.	۲۷/۱۵
علت مطالعه تاریخ ریاضیات.	۲۸/۱۵
تاریخ ریاضیات به عنوان یک وسیلهٔ تدریس.	۲۹/۱۵
مواردی از تاریخ ریاضیات در کلاسهای درس متوسطه.	۳۰/۱۵

- ALEXANDROFF, PAUL, *Elementary Concepts of Topology*. Translated by A. N. Obolensky. New York: Frederick Ungar, 1965.
- AMBROSE, ALICE, and MORRIS LAZEROWITZ, *Fundamentals of Symbolic Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1948.
- APOSTLE, H. G., *Aristotle's Philosophy of Mathematics*. Chicago: University of Chicago Press, 1952.
- BARKER, S. F., *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
- BEGLE, E. G., ed., *The Role of Axiomatics in Problem Solving in Mathematics*. Boston: Ginn, 1966.
- BENACERRAF, PAUL, and HILARY PUTNAM, eds., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
- BERKELEY, E. C., *Giant Brains; Or, Machines that Think*. New York: John Wiley, 1949.
- BERNAYS, PAUL, *Axiomatic Set Theory*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1958.
- BERNSTEIN, JEREMY, *The Analytical Engine: Computers—Past, Present and Future*. New York: Random House, 1963.
- BETH, E. W., *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1959.
- , *Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. New York: Gordon & Breach Science Publishers, 1965.
- BIRKHOFF, G. D., and RALPH BEATLEY, *Basic Geometry*. Chicago: Scott, Foresman, 1940; New York: Chelsea, 1959.
- BLACK, MAX, *The Nature of Mathematics: A Critical Survey*. 2d ed. New York: Humanities Press, 1950.
- , *Critical Thinking: An Introduction to Logic and Scientific Method*. 2d ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1952.
- BLANCHÉ, ROBERT, *Axiomatics*. Translated by G. B. Kleene. London: Routledge & Kegan Paul, 1962.
- BLUMENTHAL, L. M., *A Modern View of Geometry*. San Francisco: W. H. Freeman, 1961.
- BOCHENSKI, J. M., *A Precise of Mathematical Logic*. Translated by Otto Bird. Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1959.
- , *A History of Formal Logic*. Translated by Ivo Thomas. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1961.
- BOOLE, GEORGE, *An Investigation of the Laws of Thought*. New York: Dover, 1951.
- BRADIS, V. M., V. L. MINKOVSKII, and A. K. KHARCHEVA, *Lapses in Mathematical Reasoning*. New York: Macmillan, 1959.
- BREUER, JOSEPH, *Introduction to the Theory of Sets*. Translated by H. F. Fehr, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1958.
- CANTOR, GEORG, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Translated by P. E. B. Jourdain. New York: Dover, 1915.
- CARMICHAEL, R. D., *The Logic of Discovery*. Chicago: Open Court, 1930.
- CARNAP, RUDOLF, *The Logical Syntax of Language*. New York: Harcourt, Brace & World, 1937.
- CARTWRIGHT, M. L., *The Mathematical Mind*. New York: Oxford University Press, 1955.
- CHAPMAN, F. M., and PAUL HENLE, *The Fundamentals of Logic*. New York: Charles Scribner's, 1933.
- CHURCH, ALONZO, *Introduction to Mathematical Logic (Part 1)*. *Annals of Mathematics Studies*, No. 13, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1944.
- COHEN, M. R., and ERNEST NAGEL, *Introduction to Logic and Scientific Method*. New York: Harcourt, Brace & World, 1934.
- COOLEY, J. C., *A Primer of Formal Logic*. New York: Macmillan, 1942.
- COURANT, RICHARD, and HERBERT ROBBINS, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York: Oxford University Press, 1941.
- CURRY, H. B., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1951.
- DAVIS, MARTIN, *Computability & Unsolvability*. New York: McGraw-Hill, 1958.
- DELACHET, ANDRÉ, *Contemporary Geometry*. Translated by H. G. Bergmann. New York: Dover, 1962.

- DUBBEY, J. M., *Development of Modern Mathematics*. London: Butterworth, 1970.
- ENRIQUES, FEDERIGO, *The Historic Development of Logic*. Translated by J. Rosenthal. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1929.
- EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*, vol. 2. Boston: Allyn and Bacon, 1965.
- , and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- EXNER, R. M., and M. F. ROSSKOPF, *Logic in Elementary Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1959.
- FEARNSIDE, W. W., and W. B. HOLTHER, *Fallacy, the Counterfeit of Argument*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1959.
- FÉLIX, LUCIENNE, *The Modern Aspect of Mathematics*. Translated by J. H. and F. H. Hlavaty. New York: Basic Books, 1960.
- FORDER, H. G., *The Foundations of Euclidean Geometry*. New York: Cambridge University Press, 1927.
- FRAENKEL, A. A., *Abstract Set Theory*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1953.
- , and Y. BAR-HILLEL, *Foundations of Set Theory*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1958.
- FRÉCHET, MAURICE, and KY FAN, *Initiation to Combinatorial Topology*. Translated and augmented with notes by Howard Eves. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1967.
- FREGE, GOTTLIEB, *The Foundations of Arithmetic: A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*. Translated by J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell, 1959.
- GALILEO GALILEI, *Dialogue Concerning Two New Sciences*. Translated by H. Crew and A. deSalvio. New York: Dover, 1951.
- GARDNER, MARTIN, *Logic Machines and Diagrams*. New York: McGraw-Hill, 1958.
- GÖDEL, KURT, *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1934.
- , *Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Rev. ed. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951.
- GOLDSTINE, H. H., *The Computer from Pascal to Von Neumann*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1972.
- GOODSTEIN, R. L., *Essays in the Philosophy of Mathematics*. Leicester, England: Leicester University Press, 1965.
- GRADSHTEIN, I. S., *Direct and Converse Theorems*. Translation by T. Boddington. New York: Macmillan, 1963.
- HADAMARD, JACQUES, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945.
- HALSTED, G. B., *Rational Geometry*. New York: John Wiley, 1904.
- HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology*. New York: Cambridge University Press, 1941.
- HAUSDORFF, FELIX, *Mengenlehre*. New York: Dover, 1944.
- , *Grundzüge der Mengenlehre*. New York: Chelsea, 1949.
- HEATH, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2d ed., 3 vols. New York: Dover, 1956.
- HEYTING, A., *Intuitionism: An Introduction*. Amsterdam, Holland: North-Holland Publishing Company, 1956.
- HILBERT, DAVID, *The Foundations of Geometry*. 10th ed., revised and enlarged by Paul Bernays. Translated by Leo Unger. Chicago: Open Court, 1971.
- , and WILHELM ACKERMANN, *Principles of Mathematical Logic*. Translated by L. M. Hammond, et al. New York: Chelsea, 1950.
- INFELD, LEOPOLD, *Albert Einstein: His Work and Its Influence on Our World*. New York: Charles Scribner's, 1950.
- JAMES, GLENN, ed., *The Tree of Mathematics*. Pacoima, Calif.: The Digest Press, 1957.
- JOHNSON, P. E., *A History of Set Theory*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
- KAMKE, E., *Theory of Sets*, Translated by F. Bagemihl. New York: Dover, 1950.
- KELLY, J. L., *General Topology*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1955.
- KENNELLY, J. W., *Informal Logic*. Boston: Allyn and Bacon, 1967.
- KEYSER, C. J., *Mathematical Philosophy: A Study of Fate and Freedom*. New York: E. P. Dutton 1922

- , *Mathematics and the Question of Cosmic Mind, with Other Essays*. New York: Scripta Mathematica, 1935.
- , *Thinking about Thinking*. New York: Scripta Mathematica, 1942.
- KING, AMY, and C. B. READ, *Pathways to Probability*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1963.
- KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1952.
- KNEALE, WILLIAM and MARTHA, *The Development of Logic*. New York: Oxford University Press, 1962.
- KNEEBONE, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1963.
- KÖRNER, STEPHAN, *The Philosophy of Mathematics: An Introduction*. New York: Harper & Row, 1962.
- LANGER, S. K., *An Introduction to Symbolic Logic*. 2d rev. ed. New York: Dover, 1953.
- LASALLE, J. P., and SOLOMON LEFSCHETZ, eds., *Recent Soviet Contributions to Mathematics*. New York: Macmillan, 1962.
- LEIBNIZ, G. W., *Logical Papers*, ed. and translated by G. A. R. Parkinson. New York: Oxford University Press, 1966.
- LE LIONNAIS, F., ed., *Great Currents of Mathematical Thought*. 2 vols. Translated by R. A. Hall and H. G. Bergmann. New York: Dover, 1971.
- LUCHINS, A. S. and E. H., *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- LUKASIEWICZ, JAN, *Elements of Mathematical Logic*. Translated by O. Wojtasiewicz. New York: Macmillan, 1963.
- MACH, ERNST, *Space and Geometry*. Translated by T. J. McCormack. Chicago: Open Court, 1943.
- MANHEIM, J. H., *The Genesis of Point Set Topology*. New York: Macmillan, 1964.
- MAZIARZ, E. A., *The Philosophy of Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1950.
- MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Translated by John Dyer-Bennet. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- , *Evolution of Mathematical Thought*. Translated by J. H. Gayl. San Francisco: Holden-Day, 1965.
- MORRISON, PHILIP and EMILY, *Charles Babbage and His Calculating Engines (selected writings of Charles Babbage and others)*. New York: Dover, 1961.
- MOSTOWSKI, ANDRZEJ, *Thirty Years of Foundational Studies*. New York: Barnes & Noble, 1966.
- NAGEL, ERNEST, and J. R. NEWMAN, *Gödel's Proof*. New York: New York University Press, 1958.
- NEWMAN, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. New York: Cambridge University Press, 1939.
- NEWSOM, C. V., *Mathematical Discourses: The Heart of Mathematical Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
- NICOD, JEAN, *Foundations of Geometry and Induction*. New York: The Humanities Press, 1950.
- POINCARÉ, HENRI, *The Foundations of Science*. Translated by G. B. Halsted. Lancaster, Pa.: The Science Press Printing Company, 1913.
- POLYA, GEORGE, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945.
- , *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1954.
- , *Patterns of Plausible Inference*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1954.
- , *Mathematical Discovery*. 2 vols. New York: John Wiley, 1962 and 1965.
- PRASAD, GANESH, *Mathematical Research in the Last Twenty Years*. Berlin: Walter de Gruyter, 1923.
- QUINE, W. V., *Mathematical Logic*. New York: W. W. Norton, 1940.
- , *Elementary Logic*. Rev. ed. Cambridge Mass.: Harvard University Press, 1980.
- , *Methods of Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1950.
- RAMSEY, F. P., *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. New York: The Humanities Press, 1950.

- RASHEVSKY, N., *Looking at History Through Mathematics*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1968.
- REICHENBACH, HANS, *The Theory of Probability: An Inquiry into the Logical and Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1949.
- REID, CONSTANCE, *Hilbert*. New York: Springer-Verlag, 1970.
- , *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- RESCHER, NICHOLAS, *Hypothetical Reasoning*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1964.
- ROBB, A. A., *A Theory of Time and Space*. New York: Cambridge University Press, 1914.
- ROBINSON, G. DE B., *The Foundations of Geometry*. 2d ed. Toronto: University of Toronto Press, 1946.
- ROSENBLOOM, P. C., *The Elements of Mathematical Logic*. New York: Dover, 1950.
- ROSSER, J. B., *Logic for Mathematicians*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- , and A. R. TURQUETTE, *Many-valued Logics*. Amsterdam, Holland: North-Holland, 1951.
- RUSSELL, BERTRAND, *Introduction to Mathematical Philosophy*. 2d ed. New York: Macmillan, 1924.
- , *Mysticism and Logic*. New York: W. W. Norton, 1929.
- , *Principles of Mathematics*. 2d ed. New York: W. W. Norton, 1937.
- , *An Essay on the Foundations of Geometry*. New York: Dover, 1956.
- SCHAAF, W. L., *Mathematics. Our Great Heritage: Essays on the Nature and Cultural Significance of Mathematics*. Rev. ed. New York: Collier Books, 1963.
- SCHOLZ, HEINRICH, *Concise History of Logic*. Translated by K. F. Leidecker. New York: Philosophical Library, 1961.
- SIERPIŃSKI, WACŁAW, *Introduction to General Topology*. Translated by C. C. Krieger. Toronto: University of Toronto Press, 1934.
- SINGH, JAGJIT, *Great Ideas of Modern Mathematics: Their Nature and Use*. New York: Dover, 1959.
- STABLER, E. R., *An Introduction to Mathematical Thought*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1953.
- STIBITZ, G. R., and J. A. LARRIVEE, *Mathematics and Computers*. New York: McGraw-Hill, 1957.
- STOLL, R. R., *Sets, Logic and Axiomatic Theories*. San Francisco: W. H. Freeman, 1961.
- STYAZHKIN, N. I., *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1969.
- SUPPES, PATRICK, *Axiomatic Set Theory*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1960.
- TARSKI, ALFRED, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Translated by O. Helmer. New York: Oxford University Press, 1954.
- VAN HEIJENOORT, JEAN, *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.
- VON NEUMANN, JOHN, *The Computer and the Brain*. New Haven: Yale University Press, 1959.
- WAISMANN, FRIEDRICH, *Introduction to Mathematical Thinking*. Translated by T. J. Benac. New York: Frederick Ungar, 1951.
- WEDBERG, ANDERS, *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm, Sweden: Almqvist and Wiksell, 1955.
- WEYL, HERMANN, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Revised and augmented English ed., based on tr. by O. Helmer. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
- WHITEHEAD, A. N. and BERTRAND RUSSELL, *Principia mathematica*. 2 vols. New York: Cambridge University Press, 1925 and 1927.
- WIENER, NORBERT, *I Am a Mathematician: The Later Life of a Prodigy*. Garden City, N.Y.: Doubleday, 1956.
- WILDER, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2d ed. New York: John Wiley, 1965.
- , *The Evolution of Mathematical Concepts: A Historical Approach*. New York: John Wiley, 1968.

- WOLFF, PETER, *Breakthroughs in Mathematics*. New York: New American Library, 1963.
- WOODGER, J. H., *The Axiomatic Method in Biology*. New York: Cambridge University Press, 1937.
- YOUNG, J. W., *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. New York: Macmillan, 1936.
- YOUNG, J. W. A., ed., *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*. New York: Dover, 1955.

کتابنامہ عمومی

- ARCHIBALD, R. C., "Outline of the History of Mathematics." Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper No. 2. Buffalo, N.Y.: The Mathematical Association of America, 1949.
- BALL, W. W. R., *A Primer of the History of Mathematics*. 4th ed. New York: Macmillan, 1895.
- , *A Short Account of the History of Mathematics*. 5th ed. New York: Macmillan, 1912.
- BELL, E. T., *The Development of Mathematics*. 2d ed. New York: McGraw-Hill, 1945.
- , *Mathematics, Queen and Servant of Science*. New York: McGraw-Hill, 1951.
- BOCHNER, SALOMON, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1966.
- BOYER, C. B., *A History of Mathematics*. New York: John Wiley, 1968.
- CAJORI, FLORIAN, *A History of Elementary Mathematics*. Rev. ed. New York: Macmillan, 1924.
- , *A History of Mathematics*. 2d ed. New York: Macmillan, 1919.
- CARRUCCIO, ETTORE, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*. Translated by Isabel Quigly. Chicago: Adline, 1964.
- EVES, HOWARD, *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1981.
- , *Great Moments in Mathematics (After 1650)*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1982.
- FINK, KARL, *A Brief History of Mathematics*. Translated by W. W. Beman and D. E. Smith. Chicago: Open Court, 1900.
- FREEBURY, H. A., *A History of Mathematics*. New York: Macmillan, 1961.
- GITTLEMAN, ARTHUR, *History of Mathematics*. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill, 1975.
- HOFMANN, J. E., *The History of Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1957.
- , *Classical Mathematics, A Concise History of the Classical Era in Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1959.
- HOGBEN, L. T., *Mathematics for the Million*. New York: W. W. Norton, 1937.
- HOOPER, ALFRED, *Makers of Mathematics*. New York: Random House, 1948.
- KLINE, MORRIS, *Mathematics in Western Culture*. New York: Oxford University Press, 1953.
- , *Mathematics and the Physical World*. New York: Thomas Y. Crowell, 1959.
- , *Mathematics, a Cultural Approach*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- , *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.
- KRAMER, E. E., *The Main Stream of Mathematics*. Greenwich, Conn.: Fawcett Publications, 1964.

- , *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. New York: Hawthorn Books, 1970.
- KUZAWA, SISTER MARY GRACE, *Modern Mathematics, The Genesis of a School in Poland*. New Haven, Conn.: College & University Press, 1968.
- LARRETT, DENHAM, *The Story of Mathematics*. New York: Greenberg Publishers, 1926.
- MAY, K. O., *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics*. Toronto: University of Toronto Press, 1973.
- MIDONICK, H. O., *The Treasury of Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1965.
- MORITZ, R. E., *On Mathematics and Mathematicians*. New York: Dover Publications, 1958.
- NEWMAN, JAMES, ed., *The World of Mathematics*. 4 vols. New York: Simon and Schuster, 1956.
- OSEN, L. M., *Women in Mathematics*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1974.
- SANFORD, VERA, *A Short History of Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin, 1930.
- SARTON, GEORGE, *The Study of the History of Mathematics*. New York: Dover Publications, 1954.
- SCOTT, J. F., *A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century*. London: Taylor & Francis, 1958.
- SMITH, D. E., *History of Mathematics*. 2 vols. Boston: Ginn & Company, 1923-25.
- , and JEKUTHIEL GINSBURG, *A History of Mathematics in America Before 1900* (Carus Mathematical Monograph No. 5). Chicago: Open Court, 1934.
- , *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
- STRUICK, D. J., *A Concise History of Mathematics*. Rev. ed. New York: Dover Publications, 1967.
- , *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969.
- TARWATER, D., Editor, *The Bicentennial Tribute to American Mathematics, 1776-1976*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1977.
- WILLERDING, MARGARET, *Mathematical Concepts, A Historical Approach*. Boston, Prindle, Weber & Schmidt, 1967.
- نوشته‌های مندرج در مجلات درباره تاریخ ریاضیات گسترده‌اند. برای یافتن مطلبی عالی در شروع، می‌توان به نوشته‌های زیر رجوع کرد:
- READ, C. B., "The History of Mathematics—A Bibliography of Articles in English Appearing in Six Periodicals." *School Science and Mathematics* (Feb 1966):147-59. This is a bibliography of over 1000 articles devoted to the history of mathematics and appearing prior to Sept. 15, 1965 in the six journals: *The American Mathematical Monthly*, *The Mathematical Gazette* (New Series), *The Mathematics Teacher*, *National Mathematics Magazine* (vols. 1-8 were published as *Mathematics News Letter*; starting with vol. 21 the title became *Mathematics Magazine*), *Scripta Mathematica*, and *School Science and Mathematics*. The articles are classified into some thirty convenient categories.
- چیزی که برای محققان تاریخ ریاضیات و کسانی که در این رشته فعالیت دارند ارزش ویژه‌ای دارد، مجله بین‌المللی هیستوریکا ماتماتیکا است (که مجلد اول آن در ماه مه ۱۹۷۴ منتشر شده است) و در دانشگاه تورنتو کانادا چاپ می‌شود. مجموعه زیر برای هر معلم ریاضی ارزش بالایی دارد.
- Class Historical Topics for the Mathematics Classroom* (thirty-first yearbook), National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D.C.
- برای داستانها و حکایاتی درباره ریاضیات و ریاضیدانان نگاه کنید به:
- EVES, HOWARD, *In Mathematical Circles*. 2 vols. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1969.
- , *Mathematical Circles Revisited*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1971.
- , *Mathematical Circles Squared*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
- , *Mathematical Circles Adieu*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1977.

فیلمها و نوارهای ویدیویی درباره تاریخ ریاضیات موجودند. بسیاری از آنها را می‌توان در نوشته زیر یافت:

- SCHNEIDER, D. I., *An Annotated Bibliography of Films and Videotapes for College Mathematics*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1980.

يك جدول گاهشناختي *

- ۶۰۰۰ — تاريخ تقريبي استخوان ايشانگو.
- ۴۷۰۰ — شروع احتمالي تقويم بابلي.
- ۴۲۲۸ — آغاز احتمالي تقويم مصري.
- ۴۰۰۰ — كشف فلز.
- ۳۵۰۰ — استفاده از كتابت.
- ۳۱۰۰ — تاريخ تقريبي يك گرز سلطنتي در موزه‌اي در آكسفورد.
- ۲۹۰۰ — بنای هرم بزرگ جيزه.
- ۲۴۰۰ — لوحهاي بابلي اورا.
- ۲۲۰۰ — تاريخ لوحهاي متعدد رياضي كه در نيبور پيدا شده‌اند، تاريخ اسطوره‌اي لوشو، قديمترين مورد معلوم از يك مربع جادويي.
- ۱۹۵۰ — عصر حمورابي، پادشاه بابل.
- ۱۸۵۰ — پاپيروس مسكو (۲۵ مسئله عددي، «بزرگترين هرم مصري»); قديمترين ايزان نجومی موجود.
- ۱۷۵۰ — پليمپتون ۳۲۲ كه تاريخش بين ۱۹۰۰ — و ۱۶۰۰ — است.
- ۱۶۵۰ — پاپيروس، ريند يا احمس (۸۵ مسئله عددي).
- ۱۶۰۰ — تاريخ تقريبي اغلب لوحهاي بابلي در مجموعه پيل.
- ۱۵۰۰ — بزرگترين مسئله موجود؛ قديمترين ساعت آفتابي مصري موجود.
- ۱۳۵۰ — تاريخ لوحهاي رياضي بعدي كه در نيبور پيدا شده؛ پاپيروس رولن (مسائل ماهرانهاي درباره نان).
- ۱۱۶۷ — پاپيروس هريس (فهرست دارايي معبد).
- ۱۱۰۵ — تاريخ احتمالي چوئو — پي، قديمترين اثر رياضي چيني.
- ۷۵۳ — بنای رم.
- ۶۵۰ — زمان رواج پاپيروس در يونان.

* علامت منفي قبل از يك تاريخ نشانه آن است كه تاريخ ق. م. است.

- ۶۰۰ — تالس (آغاز هندسه برهانی).
- ۵۴۰ — فیثاغورس (هندسه، حساب، موسیقی).
- ۵۰۰ — تاریخ احتمالی شولوسوترها (نوشته‌های مذهبی که نشان از آشنایی با اعداد فیثاغورسی و ساختمانهای هندسی دارند)، پیدایش ارقام میله‌ای چینی.
- ۴۸۰ — فبرد ترموپیل.
- ۴۶۰ — پارمنیدس (کرویت زمین).
- ۴۵۰ — زنون (پارادوکسهای حرکت).
- ۴۴۰ — سقراط خیوسی (تحویل مسئله تضعیف، هلالها، تنظیم قضایای هندسه به سبک علمی)، آناکساگوراس (هندسه).
- ۴۳۰ — آنتیقون (روش افنا).
- ۴۲۵ — هیپاس الیسی (تثلیث به کمک مربع ساز)؛ تئودورس کورنه‌ای (اعدادناگویا)؛ سقراط.
- ۴۱۰ — دموکریتوس (نظریه اتمی).
- ۴۰۴ — شکست نهایی آتن به دست اسپارت.
- ۴۰۰ — آرخوتاس (رهبر مکتب فیثاغورسی در تارتوم، کاربرد ریاضیات در مکانیک).
- ۳۸۰ — افلاطون (ریاضیات در پرورش ذهن، آکادمی افلاطون).
- ۳۷۵ — تثایتوس (کمیت‌های نامتوافق، اجسام منتظم).
- ۳۷۰ — ائودوکسوس (کمیت‌های نامتوافق، روش افنا، نجوم).
- ۳۵۰ — منایخموس (مقاطع مخروطی)؛ دینوستراتوس (تربیع با مربع ساز، برادر منایخموس)؛ کسنوکراتس (تاریخ هندسه)؛ توماریداس (حل دستگاههای معادلات ساده).
- ۳۴۰ — ارسطو (سازمان دهنده منطق قیاسی).
- ۳۳۶ — آغاز فرمانروایی اسکندر کبیر.
- ۳۳۵ — ائودموس (تاریخ ریاضیات).
- ۳۳۲ — بنای اسکندریه.
- ۳۲۳ — مرگ اسکندر کبیر.
- ۳۲۰ — آریستائوس (مقاطع، اجسام منتظم).
- ۳۰۰ — اقلیدس (اصول، اعداد تام، رساله نور، داده‌ها).
- ۲۸۰ — آریستارخوس (دستگاه کپرنیکی).
- ۲۶۰ — کونون (نجوم، ماریچ ارشمیدسی)، دوسیئتوس (مخاطب چندین نامه از سوی ارشمیدس).
- ۲۵۰ — ستونهای سنگی برپا شده توسط شاه آشوکا و متضمن قدیمیترین مثالهای معلوم از علائم عددی کنونی ما.

۲۴۰ — نیکومدس (تثلیث به کمک کو نکوئید).

۲۳۰ — اراتستن (غریبال اعداد اول، اندازه زمین).

۲۲۵ — آپولونیوس (مقاطع مخروطی، مکانهای مسطح، تماسیها، دایره آپولونیوس)؛ ارشمیدس (بزرگترین ریاضیدان عهد باستان، اندازه گیری دایره و کره، محاسبه π ، مساحت قطعه سهموی، مارپیچ ارشمیدس، سریهای نامتناهی، روش تعادل، مکانیک، ئیدروستاتیک).

۲۱۳ — کتایسوزی چین.

۱۸۰ — هوپسکلیدس (نجوم، نظریه اعداد)؛ دیوکلز (تضعیف به کمک سیسوئید).

۱۴۰ — هیپارخوس (مثلثات، نجوم، فهرست ستارگان).

۱۰۰ — تاریخ احتمالی کننده کاریهای بر دیوار غاری نزدیک پونا.

۷۵ — سالی که سیسرون قبر ارشمیدس را کشف کرد.

۵۰ — سون تزی (معادلات نامعین).

۷۵ — زمان احتمالی هرون (ماشینها، یافتن مساحت اجسام مسطحه و صلب، استخراج جذر، مساحی).

۱۰۰ — نیکوماخوس (نظریه اعداد)؛ متلائوس (مثلثات کروی)؛ تئودوسیوس (هندسه، نجوم)؛ حساب در نه بخش، پلوتارک.

۱۵۰ — بطلمیوس (مثلثات، جدول اوتار، نظریه منظومه خورشیدی، فهرست ستارگان، زمینسنجی، مجسطی).

۲۰۰ — تاریخ احتمالی کتیبههایی که در غارهای ناسیک حکاکی شده.

۲۵۰ — تاریخ احتمالی رونق دیوفانتوس (نظریه اعداد، اختصاری کردن جبر).

۲۶۵ — وانگ فان (نجوم، $\pi = ۱۴۲/۴۵$)؛ لیوهوی (شرحی بر حساب در نه بخش).

۳۰۰ — پاپوس (مجموعه ریاضی، شروح، هم محیطی، پایداری تصویری نسبت ناتوافقی، مسئله کاستیون - کرامر، قضیه آربلوس، تعمیم قضیه فیثاغورس، قضایای مربوط به مرکز هندسی، قضیه پاپوس).

۳۲۰ — پامیلیخوس (نظریه اعداد).

۳۹۰ — تئون اسکندرانی (شارح، اصول اقلیدس را ویرایش کرد).

۴۱۰ — هوپاتیای اسکندرانی (شارح، اولین زنی که نامش در تاریخ ریاضیات ذکر شده است. دختر تئون اسکندرانی).

۴۶۰ — پروکلوس (شارح).

۴۸۰ — تقریب تسو چونگ - چی برای π برابر با $۳۵۵/۱۱۳$.

۵۰۰ — مترودوروس و آنتولوژی یونانی.

۵۰۵ — وراهمیپره (نجوم هندی).

۵۱۰ — بوئتیوس (نوشتههایش درباره هندسه و حساب به صورت متون استاندهای در

مدارس رهبانی در آمد)؛ آریبیطه بزرگ (نجوم و حساب).

۵۲۹ — بسته شدن مدرسه آتن

سیمپلیکیوس (شارح).	۵۳۰
ائوتوکیوس (شارح).	۵۶۰
هجرت محمد [ص] از مکه.	۶۲۲
وانگت هسیائوتونگت (معادلات درجه سوم).	۶۲۵
برهمگوپته (جبر، چهارضلعیهای محاطی).	۶۲۸
آخرین کتابخانه در اسکندریه به آتش کشیده شد.	۶۴۱
بد (تقویم، محاسبه سرانگشتی).	۷۱۰
هجوم مسلمانان به اسپانیا.	۷۱۱
آثار برهمگوپته به بغداد آورده شد.	۷۶۶
آلکون به دربار شارلمانی فرا خوانده شد.	۷۷۵
هارون الرشید (خلیفه حامی علم).	۷۹۰
محمد بن موسی الخوارزمی (رساله مؤثری درباره جبر و کتابی درباره ارقام هندسی، نجوم، «جبر»، «الگوریتم»؛ مأمون (خلیفه حامی علم).	۸۲۰
مهاویره (حساب، جبر).	۸۵۰
ثابت ابن قره (مترجم آثار یونانی، مقاطع مخروطی، جبر، مربعهای جادویی، اعداد متحابه).	۸۷۰
آغاز حکومت آلفرد کبیر.	۸۷۱
ابو کامل (جبر).	۹۰۰
البتانی، یا آلبا تگنیوس (نجوم).	۹۲۰
دستنویس بخشالی (با تاریخ کاملاً نامعلوم).	۹۵۰
ابوالوفا (ساختمانهای هندسی با پرگارهای با فرجه ثابت، جداول مثلثاتی).	۹۸۰
ابن هیثم (اپتیک، جبر هندسی)؛ ژربر، یا پاپ سیلوستر II (حساب، کرهها).	۱۰۰۰
کرخی (جبر).	۱۰۲۰
به سلطنت رسیدن ادوارد معترف.	۱۰۴۲
پیروزی نورمانها.	۱۰۶۶
آغاز اولین جنگ صلیبی.	۱۰۹۵
عمر خیام (حل هندسی معادلات درجه سوم، تقویم).	۱۱۰۰
چاپ ویرایش مهمی از حساب دد نه بخش.	۱۱۱۵
پلاتوی تیولیائی (مترجم از عربی)؛ آدلارد بانی (مترجم از عربی).	۱۱۲۰
جابر بن افلق، یا جبر (مثلثات).	۱۱۳۰
یوهانس هسپالنسیس (مترجم از عربی)، رابرت چستری (مترجم از عربی).	۱۱۴۰
آغاز دومین جنگ صلیبی.	۱۱۴۶
گراردوی کرمونایی (مترجم از عربی)؛ بهاسکره (جبر، معادلات نامعین).	۱۱۵۰
فیوناتیچی (حساب، جبر، هندسه، دنباله فیوناتیچی، لیبرآباکی).	۱۲۰۲

۱۲۲۵	يوردانوس نمودار يوس (جبر).
۱۲۵۰	ساكرو بوسكو (ارقام هندی-عربی، كره)؛ نصيرالدين (مثلثات، اصل توازي)؛ راجر بيكن (ستايشگر رياضيات)؛ چئين كيوشا (معادلات نامعين، نماد برای صفر، روش هورنر)؛ لی به (نماد برای اعداد منفي)؛ پيدایش دانشگاههای اروپایی.
۱۲۶۰	كمپانوس (ترجمة اصول اقليدس، هندسه)؛ يانگ هوی (كسره های اعشاری، قديمترين نمایش موجود از مثلث حسابی پاسكال)؛ آغاز فرمانروایی قوبلای قاآن.
۱۲۷۱	آغاز سفرهای ماركو پولو.
۱۳۰۳	چوشی - كيئه (جبر، حل عددی معادلات، مثلث حسابی پاسكال).
۱۳۲۵	تامس برادوردین (حساب، هندسه، چند ضلعيهای ستاره ای).
۱۳۴۹	مرگ سیاه بخش عظیمی از جمعیت اروپا را نابود کرد.
۱۳۶۰	نيكول اورم (مختصات، نماهای كسری).
۱۴۳۱	ژاندارك سوزانده شد.
۱۴۳۵	الخ بيگك (جداول مثلثاتی).
۱۴۵۰	نيكولاس كوزایی (هندسه، اصلاح تقويم)؛ چاپ از نوع متحرك.
۱۴۵۳	سقوط قسطنطنيه.
۱۴۶۰	گئورگ فون پوير باخ (حساب، نجوم، جداول سينوسی).
۱۴۷۰	رگيومو نئانوس، يابوهان مولر (مثلثات).
۱۴۷۸	اولين كتاب حساب چاپ شده، در ترويزو، ايتاليا.
۱۴۸۲	اولين چاپ اصول اقليدس.
۱۴۸۴	نيكولاس شوكه (حساب، جبر)؛ حساب يورگی.
۱۴۸۹	يوهان ويدمان (حساب، جبر، علامات + و -).
۱۴۹۱	حساب كالاندری.
۱۴۹۲	كريستف كلمب آمريكا را كشف کرد.
۱۴۹۴	پاچولي (سوما، حساب، جبر، حسابداری دابل).
۱۵۰۰	لئوناردو داوينچی (اپتيك، هندسه).
۱۵۰۶	شپيونه دل فرو (معادلات درجه سوم)؛ آنتونیوماريا فيور (معادلات درجه سوم).
۱۵۱۰	آلبرشت دورر (منحيها، مناظر و مریا، تثليث تقریبی، الگویی برای تاكردن چند وجهیهای منتظم).
۱۵۱۴	ياكوب كوبل (حساب).
۱۵۱۸	آدام ریز (حساب).
۱۵۲۱	تكفير شدن لوتر.
۱۵۲۲	حساب نونستال.

۱۵۲۵	رودلف (جبر، ارقام اعشاری)؛ شتیفل (جبر، رازگرایی عددی)؛ بوتو (حساب).
۱۵۳۰	داکوی (معادلات درجه سوم)؛ کوپرنیکوس (مثلثات، نظریه سیاره‌ای).
۱۵۴۵	فراری (معادلات درجه چهارم)؛ تارتاگلیا (معادلات درجه سوم، حساب، علوم آتشیاری)؛ کاردان (جبر).
۱۵۵۰	رائیکوس (جدول توابع مثلثاتی)؛ شوبل ^۱ (جبر)، کوماندینو (مترجم، هندسه).
۱۵۵۶	چاپ اولین اثر ریاضی در ینگه دنیا.
۱۵۵۷	رابرت رکورد (حساب، جبر، هندسه، علامت =).
۱۵۵۸	الیزابت ملکه انگلیس شد.
۱۵۷۰	بیلینگزلی و دی ^۲ (اولین ترجمه انگلیسی اصول).
۱۵۷۲	بو-بلی (جبر، حالت تحویل ناپذیر معادلات درجه سوم).
۱۵۷۳	والنتین اوتو مقدار چینی قدیمی برای π ، $355/113$ را پیدا کرد.
۱۵۷۵	کسیلاندر، یا ویلیام هولتسمان (مترجم).
۱۵۸۰	فرانسوا ویت، یا ویتا (جبر، هندسه، مثلثات، نمادگذاری، حل عددی معادلات، نظریه معادلات، حاصلضربهای نامتناهی همگرا به $2/\pi$).
۱۵۸۳	کلاویوس (حساب، جبر، هندسه، تقویم).
۱۵۹۰	کاتالندی (کسور مسلسل)، استوین (کسرهای اعشاری، جدول ربح مرکب، استاتیک، میدروستاتیک).
۱۵۹۳	آدریانوس رومانوس (محاسبه مقدار π ، مسئله آپولونیوس).
۱۵۹۵	پیتسکوس (مثلثات).
۱۶۰۰	تامس هاریوت (جبر، نمادگرایی)؛ یوبست بورگی (لگاریتم)؛ گالیله (سقوط اجسام، آونگ، پرتابه‌ها، نجوم، تلسکوپ، سیکلوئید)؛ شکسپیر ^۳ .
۱۶۰۳	تأسیس آکادمیا دای لینچی (دررم).
۱۶۰۸	اختراع تلسکوپ.
۱۶۱۰	کپلر (قوانین حرکت سیاره‌ای، احجام، چند ضلعیهای ستاره‌ای، اصول پیوستگی)؛ لودلف وان سویلن (محاسبه π).
۱۶۱۲	باشه دومزیریاک (تفریحات ریاضی، ویرایش آدیشمیتیکای دیوفانتوس).
۱۶۱۴	نپر (لگاریتم، قاعده اجزاء مستدیر، میله‌های محاسبه).
۱۶۱۵	هنری بریگز (لگاریتم طبیعی، جداول).
۱۶۱۹	استادی ساویلی در آکسفورد دایر شد.
۱۶۲۰	گاننیر (مقیاس لگاریتمی، زنجیر گاننیر در مساحی)؛ پل گولدین (قضایای مربوط به مرکز هندسی پاپوس)؛ اسنل (هندسه، مثلثات، تنقیح روشهای کلاسیک محاسبه π ، لوکسودرومها).

- ۱۶۳۵ مرسن (نظريه اعداد، اعداد مرسن، خانه تكانی برای ایده های رياضي)؛ اوترد (جبر، نماد گذاری، خط كش محاسبه، اولين جدول لگاريتم طبيعي)؛ میدورڈ (اپتيك، هندسه)؛ آلبرت ڈيرار (جبر، هندسه كروي).
- ۱۶۳۵ فرما (نظريه اعداد، ماكزيموم و مينيموم، احتمالات، هندسه تحليلي، آخرين «قضيه» فرما)؛ كاواليري (روش تقسيم ناپذيرها).
- ۱۶۳۷ دكارت (هندسه تحليلي، فوليوم، مرغانه، قانون علامات).
- ۱۶۴۰ دزارگه (هندسه تصويري)؛ دوبون (هندسه دكارتی)؛ توريچلي (فيزيك، هندسه، مركز همزايه ای)؛ فرنيكل دوبسي (هندسه)؛ روبروال (هندسه، مماسها، تقسيم ناپذيرها)؛ دولالوير (منحنی ها، مربعهای جادویی).
- ۱۶۴۳ تاجگذاری لوئی چهاردهم.
- ۱۶۴۹ اعدام چارلز اول.
- ۱۶۵۰ بلز پاسكال (مقاطع مخروطي، سيكلويد، احتمالات، مثلث پاسكال، ماشينهای محاسبه)؛ جان واليس (جبر، اعداد موهومي، طول قوس، نماها، علامت برای بي نهايت، حاصلضرب نامتناهي همگرا به $\pi/2$ ، آغاز انتگرالگيري)؛ فرانس وان سخوتن (آمار دكارت و ويت را ويرايش كرد)؛ گرگوار دوسن و نسان (تربيع كننده دایره، ساير تربيعها)؛ وينگيت (حساب)؛ نيكولاس مركاتور (مثلثات، نجوم، محاسبه لگاريتمها از طريق سريها)؛ جان پل (جبر، انتساب نابجای به اصطلاح معادله پل به او).
- ۱۶۶۰ اسلوزه (مارپیچها، نقاط عطف)؛ ويواني (هندسه)؛ برونكر (اولين رئيس انجمن سلطنتي، محاسبه طول قوس سهمي و سيكلويد، سريهای نامتناهي كسرهایی مسلسل).
- ۱۶۶۲ تأسيس انجمن سلطنتي (لندن).
- ۱۶۶۳ تأسيس كرسی استادی لوکاسی در کیمبريج.
- ۱۶۶۶ تأسيس آكادمی فرانسه (پاریس).
- ۱۶۷۰ برو (مماسها، قضيه اساسی حسابان)؛ جيمز گريگوري (اپتيك، قضيه دوجمله ای، بسط توابع به صورت سري، نجوم)؛ هوینگنس (تربيع دایره، احتمالات، گستره ها، ساعت های آونگ دار، اپتيك)؛ سر كريستوفر رن (معماری، نجوم، فيزيك، مولدهای هيپر بولويد يك دامنه، طول قوس سيكلويد).
- ۱۶۷۱ جيواني دومنيكو كاسيني (نجوم، منحنی های كاسيني).
- ۱۶۷۲ موهر (ساختمانهای هندسی با ابزارهای محدود).
- ۱۶۷۵ تأسيس رصدخانه گرينويچ.
- ۱۶۸۰ سر آيزك نیوتن (فلوكسيونها، ديناميك، ثيدروستاتيك، ثيدرو ديناميك، جاذبه، منحنی های درجه سوم، سريها، حل عددي معادلات، مسائل چلنجاری)؛ يوهان هود (نظريه معادلات)؛ رابرت هوک (فيزيك، ساعت های فنری)؛ سكي کووا

(دترميناها، حسابان).

۱۶۸۲ لاينيتز (حسابان، دترميناها، قضيه چند جمله‌اى، منطق علامتى، نمادگذارى، ماشينهاى محاسبه).

۱۶۸۵ كوخانسكى (محاسبه تقريبى طول محيط دايره).

۱۶۹۰ ماركى دولوپيتال (حسابان كاربرى، صور مبهم)؛ هالى (نجوم، جداول زاد ومير ويمة عمر، مترجم)؛ ياكوب (جيمز، ژاك) برنولى (منحنىهاى همزمان، كلوتونيدا، ماريچ لگارىتمى، احتمالات)؛ دولاهير (منحنىها، مربعاى جادويى، نقشه‌ها)؛ چرنهاوزن (اپتيك، منحنى‌ها، نظريه معادلات).

۱۷۰۰ يوهسان (جسان، ژان) برنولى (حسابان كاربرى)؛ جيروانى سوا (هندسه)؛ ديويديگرورى (اپتيك، هندسه)؛ پارت (هندسه تحليلى فضايى).

۱۷۰۶ ويليام جونز (اولين استفاده از π به نشانه نسبت دايره).

۱۷۱۵ تيلر (بسط به صورت سرى، هندسه).

۱۷۲۰ دموآور (رياضيات آمارى، احتمالات، اعداد مختلط، فرمول استرلينگ).

۱۷۳۱ آلکسى كلرو (هندسه تحليلى فضايى).

۱۷۳۳ ساكرى (پيشگام هندسه نااقليدسى).

۱۷۴۰ ماكلورن (منحنىهاى مسطحه از درجات بالا، فيزيك)؛ فردريك كبير پادشاه پروس شد.

۱۷۵۰ اويلر (نمادگذارى، $1 - \pi$ ، خط اويلر، معادلات درجه چهارم، تابع ϕ ، تابعهاى بتا و گاما، رياضيات كاربرى).

۱۷۷۰ لامبرت (هندسه نااقليدسى، توابع هيپر بوليک، تصوير نقشه، ناگويابى π)؛ قاعده كرامر.

۱۷۷۶ استقلال آمريكا.

۱۷۷۷ كنت دوفوفون (محاسبه π به كمك احتمالات).

۱۷۸۰ لاگرانژ (حساب تغييرات، هندسه ديفرانسيل، مكانيك، حل عددى معادلات، تلاش براى تدقيق حسابان (۱۷۹۷)، نظريه اعداد).

۱۷۸۹ انقلاب فرانسه.

۱۷۹۰ موزيه (سطوح).

۱۷۹۴ تأسيس مدرسه بلى تكنيك ومدرسه نرمال؛ مونژ (هندسه تصويرى، سطوح هندسه ديفرانسيل).

۱۷۹۷ ماسكرونى (هندسه پرگار)؛ وسل^۲ (نمايش هندسى اعداد مختلط).

۱۷۹۹ جمهورى فرانسه دستگاه مترى اوزان ومقادير را پذيرفت.

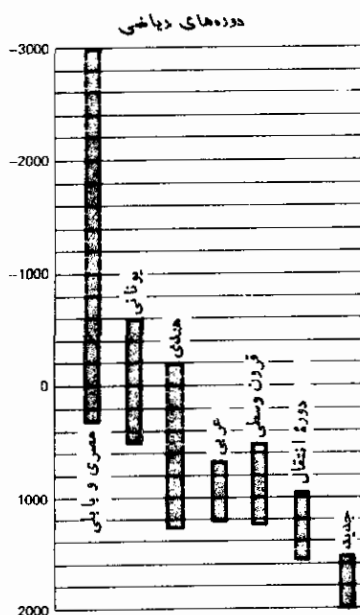
۱۸۰۰ گاوس (ساختمان چند ضلعيها، نظريه اعداد، هندسه ديفرانسيل، هندسه نااقليدسى،

قضيه اساسي جبر، نجوم، زمينسجی).	
كارنو (هندسه جديد).	۱۸۵۳
انتخاب ناپلئون به امپراطوری.	۱۸۵۴
لاپلاس (مکانیک سماوی، احتمالات، معادلات دیفرانسیل)؛ لژاندر (اصول هندسه	۱۸۵۵
(۱۷۹۴)، نظریه اعداد، تابعهای بیضوی، روش کمترین مربعات، انتگرال.	
آرگانند (نمایش هندسی اعداد مختلط).	۱۸۵۶
ژرگون (هندسه، سردبیر مجله آنالیز).	۱۸۱۵
تأسیس «انجمن تحلیلی» ^۲ در کیمبریج.	۱۸۱۵
هورنر (حل عددی معادلات).	۱۸۱۹
پوانسو ^۳ (هندسه).	۱۸۲۵
فوریه (نظریه ریاضی حرارت، سری فوریه)؛ پونسله (هندسه تصویری،	۱۸۲۲
ساختمانهای با خط کش)؛ قضیه فوئر باخ.	
تامس کارلایل (ترجمه انگلیسی هندسه لژاندر).	۱۸۲۴
مجله کرله؛ اصل دوگانی (پونسله، بلوکر، ژرگون)؛ توابع بیضوی (آبل،	۱۸۲۶
گاوس، یا کوپی).	
کوشی (تدقیق آنالیز، توابع متغیرهای مختلط، سریهای نامتناهی، دترمینانها)؛	۱۸۲۷
آبل (جبر، آنالیز).	
گرین (فیزیک ریاضی).	۱۸۲۸
لباچسکی (هندسه ناقلیدسی)؛ بلوکر (هندسه تحلیلی عالی).	۱۸۲۹
پواسون (فیزیک ریاضی، احتمالات)؛ پیکاک (جبر)؛ بولسانو (سریها)؛ بایج	۱۸۳۵
(ماشینهای محاسبه)؛ یا کوپی (توابع بیضوی، دترمینانها).	
بویونی (هندسه ناقلیدسی)؛ گالوا (گروهها، نظریه معادلات).	۱۸۳۲
اشتاینر (هندسه ترکیبی عالی).	۱۸۳۴
مجله لیوویل.	۱۸۳۶
اثبات غیر ممکن بودن تثلیث زاویه و تضعیف مکعب.	۱۸۳۷
مجله ریاضی کیمبریج ^۴ ، که در سال ۱۸۵۵ به فصلنامه ریاضیات محض و کاربرده	۱۸۳۹
تبدیل شد.	
آدشیو ریاضیات و فیزیک.	۱۸۴۱
مجله جدید ریاضیات.	۱۸۴۲
همیلتن (کواترینوینها).	۱۸۴۳
گراسمن (حساب توسیع).	۱۸۴۴
اشاتوت (هندسه را از مبنای مادی آن رها نید).	۱۸۴۷

دیریکله (نظریه اعداد، سریها).	۱۸۲۹
مانایم (خط کش محاسبه جدید استانده شده).	۱۸۵۰
شال (هندسه عالی، تاریخ هندسه).	۱۸۵۲
ریمان (آنالیز، هندسه نا اقلیدسی، هندسه ریمانی)؛ بول (منطق).	۱۸۵۲
زاخاریاس دازه (محاسب برق آسا).	۱۸۵۵
کیلی (ماتریسها، جبر، هندسه بعدهای بالاتر).	۱۸۵۷
تأسیس انجمن ریاضی لندن، گزارشهای انجمن ریاضی لندن.	۱۸۶۵
انجمن ریاضی فرانسه تأسیس شد، برنامه اولانگروکلاین؛ دکینند (اعداد ناگویا).	۱۸۷۲
ارمیت متعالی بودن e را ثابت کرد؛ پروکار (هندسه مثلث).	۱۸۷۳
گتورگ کانتور (نظریه مجموعه ها، اعداد ناگویا، اعداد متعالی، اعداد ترانسفینی).	۱۸۷۴
سیلوستر (جبر، نظریه پایا)	۱۸۷۷
مجله آمریکایی ریاضی.	۱۸۷۸
گیس (آنالیز برداری).	۱۸۸۱
لیندمان (متعالی بودن π ، اثبات امتناع تربیع دایره).	۱۸۸۲
تأسیس محفل ریاضی پالمو.	۱۸۸۴
تأسیس خلاصه گزارشها.	۱۸۸۷
لموان (هندسه مثلث، هندسه نگاری)؛ انجمن آمریکایی ریاضی (بدواً با نام دیگری) تأسیس شد؛ بولتن انجمن ریاضی آمریکا.	۱۸۸۸
پتانو (اصول موضوعه اعداد طبیعی).	۱۸۸۹
وایرشراس (حسابیدن ریاضیات)؛ انجمن ریاضی آلمان سازمان یافت.	۱۸۹۰
تأسیس گزارش سالانه.	۱۸۹۲
پوانکاره (هندسه وضع).	۱۸۹۵
اثبات قضیه اعداد اول توسط آدامار و دولواله پوسن.	۱۸۹۶
هیلبرت (مبانی هندسه، صوری گرایی).	۱۸۹۹
انتشار کادنامه انجمن ریاضی آمریکا؛ راسل و وایتهد (پرنسپیماتماتیک، منطق گرایی).	۱۹۰۰
انتگرال لیگت.	۱۹۰۳
فرشه (فضاهای مجرد، آنالیز تابعی).	۱۹۰۶
براوئر (شهود گرایی).	۱۹۰۷
اینشتین (نظریه نسبیت عام).	۱۹۱۶
هاردی و رمونجن (نظریه تحلیلی اعداد)؛ انقلاب روسیه.	۱۹۱۷
فضای باناخ.	۱۹۲۳

۱۹۲۷	پرواز لیندبرگ بر فراز اقیانوس اطلس.
۱۹۳۱	قضیه گودل.
۱۹۳۳	رسیدن هیتلر به صدر اعظمی آلمان.
۱۹۳۴	قضیه گلفوند.
۱۹۳۹	آغاز کارهای بورباکی.
۱۹۴۱	بمباران بندر پرل هاربر.

۱۹۴۴	IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ASCC).
۱۹۴۵	ENIAC Electronic Numerical Integrator and Computer؛ بمباران هیروشیما.
۱۹۴۸	اصلاح شده در آزمایشگاههای نیروی دریایی آمریکا، در دالگرن، ویرجینیا، نصب شد.
۱۹۶۳	پ. ج. کوهن درباره فرض پیوستار؛ قتل کندی.
۱۹۷۴	م. ژ. گیو و همکارانش π را با ۱۰۰۰۰۰۰۰ رقم اعشار بر يك CD۷۶۰۰ حساب کردند.
۱۹۷۶	حدس چهار رنگ توسط ك. اهل و و. هیکن ثابت شد.



شكل ۱۲۸

جوابها و راهنماییها برای حل مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰.۹ (الف) تقریباً به هر کتاب درس جبر یا مثلثات دبیرستانی می‌توانید مراجعه کنید.
(ب) ۱. قرار دهید $y = \log_b N$ ، $z = \log_a N$ ، $w = \log_a b$. در این صورت
 $b^y = N$ ، $a^z = N$ ، $a^w = b$ ، که از آنجا $a = b^{1/w}$ ، یا $a^z = b^{z/w} = b^y$. بنابراین
 $y = z/w$.

۲. قرار دهید $y = \log_b N$ و $z = \log_N b$. در این صورت $b^y = N$ ، $N^z = b$ ، که
از آنجا $N = b^{1/z} = b^y$. بنابراین $y = 1/z$.

۳. قرار دهید $y = \log_N b$ و $z = \log_{1/N}(1/b)$. در این صورت $N^y = b$ ،
 $(1/N)^z = 1/b$ ، که از آنجا $N = b^{1/z} = b^{1/y}$. بنابراین $y = z$.

(ج) $\log 4726 = 1/2 + 1/8 + 1/256 + \dots = 0.96294 \dots$

۲۰.۹ (ب) $\cos c = \cos a \cos b$

(ج) (۱) $A = 122^\circ 39'$ ، $C = 83^\circ 5'$ ، $b = 109^\circ 22'$. (۲) $A = 105^\circ 36'$ ،
 $c = 78^\circ 46'$ ، $b = 44^\circ 0'$

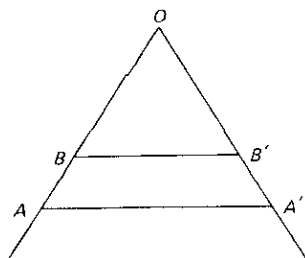
۳۰.۹ از چوب بستنیهای چوبی یا چوبهایی که پزشکان در معاینه گلو استفاده می‌کنند، می‌توان
میله‌های مورد نظر را ساخت.

۵۰.۹ شتاب افزایش سرعت است در واحد زمان.

۶۰.۹ (الف) پرگار را طوری باز کنید که قطعه خط مفروض AA' بین درجه ۱۰۰ بر روی دو
مقیاس ساده پرگار قرار گیرد (نگاه کنید به شکل ۱۲۹). در این صورت فاصله بین
دو درجه ۲۰ يك پنجم طول قطعه خط مفروض است. در صورتی که طول پاره خط
مفروض بزرگتر از آن باشد که بین دو ساق این ابزار قرار گیرد، چه باید کرد؟

(ب) پرگار را طوری باز کنید که AA'/OA نسبت مطلوب مقیاس باشد. در این
صورت BB' طول جدیدی است که باید با طول قدیم OB وابسته گردد.

(ج) نقطه a را بر روی يك بازو به نقطه b در روی بازوی دیگر وصل کنید. از نقطه



شکل ۱۳۹

c بر روی بازوی اول خطی به موازات خطی که هم اکنون رسم شده، رسم نمایید تا بازوی دیگر را در جزء چهارم تناسب که مطلوب مسئله است، قطع کند.
(د) پرگار را طوری باز کنید که فاصله بین درجه‌های ۱۰۶ برابر ۱۵۰ باشد. در این صورت فاصله بین درجه‌های ۱۰۰ نمایش مقدار سرمایه گذاری در سال قبل است. این عمل را پنج بار تکرار کنید تا مقدار مطلوب به دست آید.

۷۰۹ (ب) نشان دهید که $(HG)^2 = (HB)^2 = (BF)^2 - (HF)^2 = (HE)^2 - (HF)^2$ و الخ.

(ج) دو مجموعه را که بتوان در یک تناظر یک به یک قرارداد، معادل، یا دارای یک عدد اصلی می نامند. فرق بین یک مجموعه متناهی و نامتناهی آن است که یک مجموعه نامتناهی معادل با جزئی از خودش است.

۸۰۹ (ج) ۱۰۰۰ سال.

(د) ۲۵ A.U.

(و) ۱ ساعت و ۲۴ دقیقه.

۱۰۰۹ (الف) صفحه π' را صفحه‌ای به موازات صفحه مار بر O و خط l بگیرید.

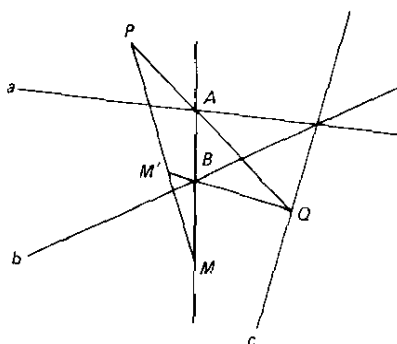
(ج) خط OU را بر بینهایت تصویر کنید.

(د) خط LMN را بر بینهایت تصویر کنید و از این حقیقت مقدماتی استفاده کنید که خطوط واصل بین رأسهای متناظر دو مثلث متشابه و متشابه وضع هم رس اند.

(ه) صفحه‌ای مانند π' به موازات محور اقصر بیضی و طوری انتخاب کنید که زاویه θ بین π' و صفحه بیضی مفروض چنان باشد که $\cos \theta = b/a$ ، که در آن a و b به ترتیب نیم قطرهای اطول و اقصر بیضی هستند. حال بیضی را به طور عمودی بر π' تصویر کنید.

(ز) فرض کنید که c خط دلخواهی مار بر محل تلاقی a و b باشد (نگاه کنید به شکل ۱۳۰). فرض کنید PA، c را در Q قطع کند و QB، MP را در M'.

۱۲۰۹ (الف) فرض کنید نقاط ۱ و ۶ طوری بر هم منطبق شوند که خط ۱۶ به مماس



شکل ۱۳۰

برمقطع مخروطی در نقطه ۱ بدل شود.

(ب) از قسمت (الف) استفاده کنید.

(ج) فرض کنید ۱، ۲، ۳، ۴ چهار نقطه باشند و ۴۵ مماس در ۴ باشد، و فرض

کنید ۱۲، ۴۵ را در P قطع کند. بر ۱ خط دلخواهی مانند ۱۶ بگذرانید تا ۳۴

را در R قطع کند، و سپس خط پاسکال PR را رسم کنید تا ۲۳ را در Q قطع

کند. در این صورت Q ، ۵، ۱۶ را در نقطه ۶ واقع برمقطع مخروطی قطع می کند.

(د) $۱ \equiv ۶$ و $۳ \equiv ۴$ اختیار کنید، و سپس $۲ \equiv ۳$ و $۵ \equiv ۶$ اختیار کنید.

(ه) اختیار کنید $۱ \equiv ۲$ ، $۳ \equiv ۴$ و $۵ \equiv ۶$.

(و) از قسمت (ه) استفاده کنید.

۱۳.۹ (الف) این، از تعریف مثلث حسابی به صورتی که در بخش ۹-۹ داده شده نتیجه می شود.

(ب) با کاربردهای متوالی قسمت (الف).

(ج) از استقراء ریاضی و قسمت (الف) استفاده کنید.

(د) بنا بر قسمت (ج).

(ه) بنا بر قسمت (الف).

(و) بنا بر قسمت (ه).

(ز) بنا بر قسمت (ج).

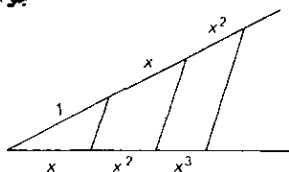
۱۰.۱۰ (الف) به شکل ۱۳۱ نگاه کنید.

(ج) بنا بر قسمتهای (الف) و (ب)، و ۹.۳ (ج).

(د) داریم $rs = h$ و $r + s = g$

(ه) داریم $-rs = -h$ و $-r + s = -g$

۲۰.۱۰ (الف) $x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy$



شکل ۱۳۱

(ب) نگاه کنید به ۱۰۱۰ (ج).

(ج) معادله‌های L_1, L_2, L_3 و L_4 را در شکل نوحال، یا قائم در نظر بگیرید. در این صورت به آسانی می‌بینید که معادله مکان هندسی از درجه چهارم است.

(د) داریم $x_4 - x_1 = m$.

۴۰۱۰ (ب) $r = (3a \sin \theta \cos \theta) / (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$

(ج) $x = 3at / (1 + t^2)$, $y = 3at^3 / (1 + t^2)$; حلقه $(0, \infty)$ ، بازوی تحتانی

$(-\infty, -1)$ ، بازوی فوقانی $(-1, 0)$.

(د) $y = \pm x \sqrt{\frac{3 - x\sqrt{2}}{3x\sqrt{2} + 3}}$

(ه) داریم $h + m - k^2 = -2$, $k(m - h) = 8$, $mh = -3$ با حذف m و

h ، از طریق حل دو معادله اول برای h و m بر حسب k ، و سپس قراردادن آنها در معادله سوم، به دست می‌آوریم

$$k^6 - 4k^4 + 16k^2 - 64 = 0,$$

که يك معادله درجه سوم بر حسب k^2 است.

۵۰۱۰ الف) $\phi(n)$ ، به ازای $n = 2, \dots, 12$ برابر است بسا $1, 2, 2, 4, 2, 4, 6, 4$.

$4, 10, 4, 6$

(ب) تنها اعداد صحیح مثبت نایبتر از p^a و غیر اول نسبت به p^a مضارب p^{a-1} از p هستند،

$$p, 2p, \dots, p^{a-1}p.$$

(ه) فرض کنید $n = ab$. در این صورت، اگر $x^n + y^n = z^n$ داریم

$$(x^a)^b + (y^a)^b = (z^a)^b.$$

(و) فرض کنید که نقطه $(a/b, c/d)$ ، که در آن a, b, c, d اعداد صحیح هستند،

بر منحنی واقع باشند. در این صورت $(bd)^n = (ad)^n + (bc)^n$.

(ز) مثلث قائم الزامی‌ای را در نظر بگیرید که اضلاع آن به صورت زیر داده می‌شوند

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2.$$

مساحت این مثلث برابر است با

$$A = (1/2)ab = mn(m^2 - n^2).$$

با اختیار $m = x^2$ و $n = y^2$ ، و قرار دادن $z^2 = x^4 - y^4$ ، خواهیم داشت

$$A = x^2 y^2 (x^4 - y^4) = x^2 y^2 z^2.$$

بنابراین اگر $z^2 = x^4 - y^4$ جوابی در مجموعه اعداد صحیح مثبت، مانند x, y, z داشته باشد، مثلث قائم الزامی با اضلاع صحیح وجود خواهد داشت که مساحت آن عدد مربعی است.

سرانجام اگر $z^4 = x^4 + y^4$ ، آنگاه $(x^2)^2 = z^4 - y^4$.

(ج) فرض کنید $a/b = \sqrt{3}$ ، که در آن a و b اعداد صحیح مثبت اند. داریم

$$\sqrt{3} + 1 = 2/(\sqrt{3} - 1).$$

با گذاشتن a/b به جای $\sqrt{3}$ در طرف دوم، به دست می آوریم

$$\sqrt{3} = (3b - a)/(a - b).$$

چون $2 < a/b < 3/2$ ، نتیجه می شود که $3b - a$ و $a - b$ اعداد صحیح مثبت اند با $a - b < b$ و $3b - a < a$.

۶۰۱۵ (الف) ۱:۱۵.

(ب) ۱۱:۲۱.

۸۰۱۵ (ج) زیرا، بنابر تعریف سیسوئید (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۴۰۴)،

$$r = OP = AB.$$

بنابر قاعده سینوسها که در مورد مثلث OBC (نگاه کنید به شکل ۱۳۲) به کار گرفته شود،

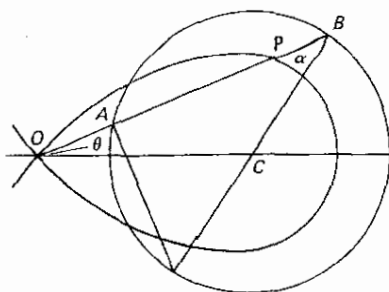
$$\frac{\sin \alpha}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sin \theta}{\frac{a}{2}}.$$

که از آنجا

$$r = AB = a \cos \alpha = a\sqrt{1 - 2\sin^2 \theta},$$

و

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$



شکل ۱۳۲

۹۰۱۰ (ب) فرض کنید عدد انتخاب شده x باشد. در این صورت

$$x = 3a' + a = 4b' + b = 5c' + c,$$

که از آنجا

$$\begin{aligned} \frac{40a + 45b + 36c}{60} &= \frac{2(x - 3a')}{3} + \frac{3(x - 4b')}{4} + \frac{3(x - 5c')}{5} \\ &= 2x - (2a' + 3b' + 3c') + \frac{x}{60}. \end{aligned}$$

(ج) در حالت کلی، به B ، $q(p+1)$ مهره می‌رسد.

۱۰۱۰ (الف) در مورد بیضی، نقطه‌ای بر منحنی را متحرك فرض کنید که از يك كانون

به طرف كانون دیگر حرکت می‌کند؛ در مورد هذلولی، نقطه‌ای را بر منحنی متحرك فرض کنید که از هر دو كانون دور یا به آنها نزدیک می‌شود. در مورد اول، مجموع شعاعهای حامل نقاط متحرك ثابت است، و در مورد دوم، تفاضل شعاعهای حامل ثابت است.

(ب) يك هلال بخشی از سطح کره محصور بین دو نیم‌دایره از دو دایره عظیمه می‌باشد؛ زاویه هلال، زاویه بین این دو نیم‌دایره است.

(ج) اضلاع مثلث ABC را امتداد دهید تا دوائر عظیمه کامل شوند، فرض کنید A' ، B' ، C' به ترتیب نقاط متقاطع A ، B ، C باشند. مثلثهای $A'BC$ و $AB'C'$ متقارن هستند، و بنا بر این معادل‌اند. نتیجه می‌شود که

$$\triangle ABC + \triangle AB'C' = \triangle ABA'C.$$

$$\triangle ABC + \triangle AB'C = BAB'C \text{ هلال}$$

$$\triangle ABC + \triangle ABC' = CAC'B \text{ هلال}$$

اما

$$ABC + AB'C' + AB'C + ABC' = ۳۶۰ \text{ درجه کروی}$$

و

$$ABA'C + BAB'C + CAC'B = ۲(A+B+C) \text{ درجه کروی}$$

بنابراین

$$۲ABC + ۳۶۰ \text{ درجه کروی} = ۲(A+B+C)$$

(د) فرض کنید S مساحت کره باشد. در این صورت $A:S=E:۷۲۰$. اما $S = ۴\pi r^2$

(ه) ۹۸π اینج مربع.

۱۱۰۱۰ (الف) $\ln 2 = ۰.۶۹۳۱۵$

(ب) $\ln 3 = ۱.۰۹۸۶۱$

(ج) $\ln 4 = ۲ \ln 2 = ۱.۳۸۶۳$

۱۰۱۱ (الف) فرض کنید M کمیت مفروض و m ، که کوچکتر از M اختیار می‌شود، هر کمیت تخصیص یافته از همان نوع باشد. بنابر اصل ارشمیدس عدد صحیحی مانند n $۲ \leq n$ وجود دارد به طوری که $nm > M$. چون $n \geq ۲$ ، نتیجه می‌شود که $n-1 \leq n/2$. فرض کنید M_1 کمیتی باشد که بعد از تفریق کردن جزئی از M که کمتر از نصف آن نیست، باقی می‌ماند. در این صورت

$$M_1 \leq \frac{M}{2} < \frac{nm}{2} \leq (n-1)m.$$

با ادامه این عمل سرانجام به دست می‌آوریم، $M_{n-1} < m$.

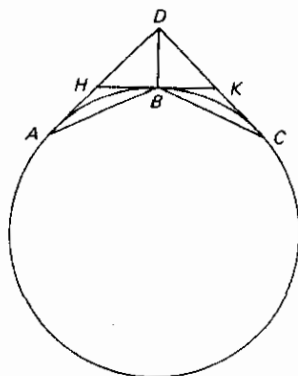
(ب) در شکل ۱۳۳، $HA = HB < HD$. بنابراین $\triangle HBD > \triangle HBA$ ، یا $\triangle HKD > 1/2(ABCD)$.

۲۰۱۱ (الف) داریم $(OM)(AO) = (OP)(AC)$. در این صورت با جمع کردن رابطه زیر را به دست می‌آوریم،

$$(HK) = (\triangle AFC) KC / ۳. \text{ (مساحت قطعه)}$$

۳۰۱۱ (الف) $۲\pi rh$

(ب) به يك كتاب حسابان مراجعه كنيد.



شکل ۱۴۳

(ج) $V = \frac{2r^2h}{3}$ شعاع استوانه و h = ارتفاع گاو.
(د) $V = \frac{16r^3}{3}$

۴.۱۱ (الف) منشور مثلث القاعده $ABC - A'B'C'$ را در نظر بگیرید. منشور را با صفحات

$B'AC$ و $B'A'C$ قطع کنید.

(ج) $V = \frac{2r^2h}{3}$

(د) $V = \frac{\pi h^3}{6}$

(ه) به قسمت (د) نگاه کنید.

(ز) $V = \frac{2\pi^2cr^2}{3}$

(ح) $A = \pi a^2$

(ط) طول و ترهای همفاصله بین دو ضلع يك چندضلعی به طور یکنواخت تغییر می کند، در حالی که در مورد و ترهای همفاصله در يك دایره وضع چنین نیست.

۵.۱۱ (ب) فرض کنید O نقطه ای دلخواه در بخش میانی باشد و هرمهای P_U و P_L را

که رأس آنها O و قاعده های آنها، به ترتیب قاعده های فوقانی و تحتانی منشوروار باشد، از آن جدا کنید. در این صورت حجمهای P_U و P_L با $hU/6$ و $hL/6$ داده

می شوند. حال قطرهای وجوه را، در صورت لزوم، رسم کنید به طوری که همه وجوه جانبی منشوروار مثلث باشند، و صفحاتی بر O و یالهای جانبی بگذرانید،

تا قطعه باقیمانده منشوروار را به مجموعه ای از هرمها تقسیم کنید که رأس هر يك از آنها O و قاعده مقابل به آن يك وجه مثلث شکل جانبی منشوروار باشد. نشان

دهید که حجم یکی از این هرمها $4hS/6$ است که در آن S مساحت بخش میانی منشوروار گنجیده در هرم است.

(ج) هر مقطع، از آنجا که تابع درجه دومی از فاصله تا یکی از قاعده هاست،

برابر است با جمع جبری مساحت يك مقطع ثابت منشور، مساحت مقطعی (متناسب با فاصله از قاعده) از يك گاو، و مساحت مقطعی (متناسب با مربع فاصله از قاعده) از يك هرم. بنا بر این منشور و ابر است با جمع جبری حجمهای يك متوازی السطوح، يك گاو، يك هرم. حال قسمت (الف) را به کار برید.

(د) فرض کنید $A(x) = ax^2 + bx + c$. نشان دهید که

$$V = \int_0^h A(x) dx = \frac{h}{6} \left[A(0) + 4A\left(\frac{h}{2}\right) + A(h) \right]$$

۶۰۱۱ (ب) از استقراء ریاضی استفاده کنید.

۸۰۱۱ (ب) قرار دهید $x = y + h$ ، در این صورت، بنا بر قسمت (الف)،

$$f(x) \equiv f(y+h) \equiv f(h) + f'(h)y + \dots + f^{(n)}(h) \frac{y^n}{n!}.$$

اگر h چنان باشد که $f(h), f'(h), \dots, f^{(n)}(h)$ همه مثبت باشند، در این صورت معادله $f(y+h) = 0$ بر حسب y نمی تواند ریشه مثبتی داشته باشد. یعنی، $f(x) = 0$ هیچ ریشه بزرگتر از h ندارد، و h کران بالایی برای ریشه های $f(x)$ است.

(ج) داریم

$$f^{(n-k)}(a+h) \equiv f^{(n-k)}(a) + f^{(n-k+1)}(a)h + \dots + f^{(n)}(a) \frac{h^k}{k!}$$

که نشان می دهد اگر $f^{(n-k)}(a), f^{(n-k+1)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$ همه مثبت باشند، و h نیز مثبت باشد، آنگاه $f^{(n-k)}(a+h)$ باید مثبت باشد. به طور مشابه، سایر تابعها نیز به ازای $x = a+h$ مثبت اند.

(د) بزرگترین ریشه بین ۳ و ۴ قرار دارد.

۹۰۱۱ (الف) چهار حالتی را که در شکل ۱۳۴ نشان داده شده اند، در نظر بگیرید.

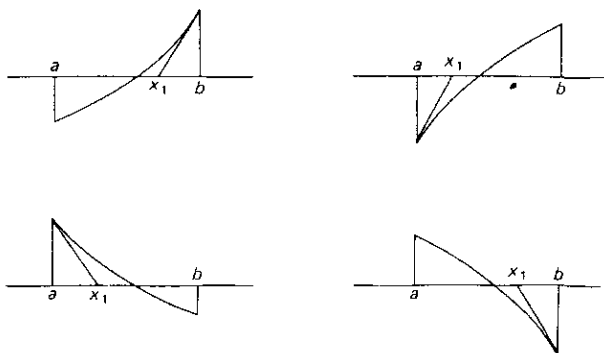
(ب) ۲۰۹۴۵۵۱۴ ، که تا هفت رقم اعشار درست است.

(ج) ۰.۴۲۴۹۳۴ .

(ح) نگاه کنید، مثلاً، به و. و. لاویت، نظریه مقدماتی معادلات، صفحه ۱۴۴ [متن انگلیسی].

۱۰۱۲ (الف) $B_5 = 5/66, B_4 = 1/30, B_3 = 1/42, B_2 = 1/30, B_1 = 1/6$

(ب) $۰.۷۷۰۹۳۲۱۰۴۱۲۱۷ = ۳۷(۲۰۸۳۶۰۰۲۸۱۴۱)$



شکل ۱۳۴

$$B_A = 6 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/17; B_F = -1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 \quad (\text{ج})$$

۲۰۱۲ (الف) از استقراء ریاضی استفاده کنید.

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \quad (\text{ب})$$

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos^3 x - 8 \sin^3 x \cos x$$

$$(-1-i)^{15} = 2^{15/2} (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)^{15} \quad (\text{ج})$$

$$= 2^{15/2} (\cos 3375^\circ + i \sin 3375^\circ)$$

$$= 2^{15/2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$= 2^7 (-1+i).$$

$$\cos(n\pi/2) + i \sin(n\pi/2) = [\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)]^n = i^n \quad (\text{د})$$

$$\pm (\sqrt{2}-i\sqrt{2})/2, \pm i, \pm (\sqrt{2}+i\sqrt{2})/2, \pm 1 \quad (\text{ه})$$

$$3012 \quad (\text{ج}) \quad 2996 \text{ شیر در هر پرتاب.}$$

$$(د) \quad 2 \text{ شیر در هر پرتاب.}$$

$$(ه) \quad 3 \text{ شیر در هر پرتاب.}$$

(و) میانگین افزایش زیادی می‌یابد، میانه کمی تغییر می‌کند، مد تغییر نمی‌کند.

(ز) مد.

(ح) همه یکسان هستند.

$$\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots, \quad (\text{الف}) \quad 4012$$

$$\cos z = 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots,$$

$$e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + z^4/4! + \dots.$$

۷۰۱۲ نگاه کنید، مثلاً، به کادول^۱، مباحثی در تفریحات ریاضی^۲، فصل ۱۵.

۸۰۱۲ نگاه کنید، مثلاً، به بال، تفریحات و مقاله‌های ریاضی (ویرایش یازدهم)، صفحات ۲۴۲-۲۵۲ [متن انگلیسی].

۱۰۰۱۲ (ب) داریم $du = xdy - ydx$ که در مورد دایره به صورت زیر درمی آید

$$du = xd(1-x^2)^{1/2} - (1-x^2)^{1/2}dx = -\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}},$$

که از آنجا

$$u = \int \frac{-dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \cos^{-1}(x).$$

درمورد هذلولی داریم

$$du = xd(x^2-1)^{1/2} - (x^2-1)^{1/2}dx = \frac{dx}{(x^2-1)^{1/2}},$$

که از آنجا

$$u = \int \frac{dx}{(x^2-1)^{1/2}} = \ln[x + (x^2-1)^{1/2}].$$

۱۵۰۱۲ برای بررسی ترکیبی قسمتهای (ب)، (ج)، (د)، (و) نگاه کنید، به ترتیب، به بخشهای ۲۲۸، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۹۹ کتاب هندسه فضایی محض نوین^۱، اثر آلنشیلر-کورت^۲ (ویرایش دوم) شرکت چاپ چلسی^۳. بررسی تحلیلی قسمتهایی از این مطالعه مسئله‌ای پروژه تحقیقی کوچک مناسبی در هندسه تحلیلی فضایی است.

۱۶۰۱۲ (الف) سه حالت زیر را در نظر بگیرید: (۱) C بین A و B ، (۲) B بین A و C ، (۳) A بین B و C .

(ب) از قسمت (الف) استفاده کنید.

(ج) بنا بر قسمت (ب)، برای طرف چپ، داریم

$$AD(DC-DB) + BD(DA-DC) + CD(DB-DA).$$

(د) با $AM = MB$ شروع کنید و سپس مبدئی در P درج کنید.

(ه) يك مبدأ در P درج کنید.

(و) قرار دهید $AA' = OA' - OA = (O'A' - O'O) - OA$ ، و به همین قیاس.
(ز) مبدائی در O درج و فرض کنید M و N معرف اوساط CR و PQ باشند.
در این صورت $2OM = 2OR + 2OC = OA + OB + 2OC = OB + OC$
 $2OQ = 2OP + 2OQ = 2ON$ ، یا M و N در صورتی که A, B, C همخط نباشند آشکارا منطبق اند؛ حال C را به سوی همخطی با A و B میل دهید.

۱۷.۱۲ (الف) اگر اضلاع AB, CA, BC از مثلث ABC يك منحنی درجه n را در $P_1, P_2, \dots, P_r; Q_1, Q_2, \dots, Q_s; R_1, R_2, \dots, R_n$ تلاقی کنند، آنگاه

$$(AR_1)(AR_2)\dots(A R_n)(BP_1)(BP_2)\dots(BP_r)(CQ_1)(CQ_2)\dots(CQ_s) \\ = (AQ_1)(AQ_2)\dots(AQ_s)(BR_1)(BR_2)\dots(BR_n)(CP_1)(CP_2)\dots(CP_r).$$

(ب) اگر اضلاع $AB, BC, CD, \dots$ از چند ضلعی يك مقطع مخروطی را در $A_1, A_2, \dots, A_r; B_1, B_2, \dots, B_s; C_1, C_2, \dots, C_n$ قطع کنند، آنگاه

$$(AA_1)(AA_2)\dots(AA_r)(BB_1)(BB_2)\dots(BB_s)(CC_1)(CC_2)\dots \\ = (BA_1)(BA_2)\dots(BA_r)(CB_1)(CB_2)\dots(CB_s)(DC_1)(DC_2)\dots.$$

(ج) نشان دهید که تحت انتقالی که در آن مبدأ به نقطه (x_0, y_0) منتقل می شود، ضرایب جملات با بالاترین درجه يك چند جمله ای $f(x, y)$ بدون تغییر باقی می ماند، و جمله ثابت به $f(x_0, y_0)$ تبدیل می شود.

(د) از هر نقطه دلخواهی مانند O بر صفحه چندضلعی خطوطی به موازات اضلاع چندضلعی رسم کنید. حال قسمت (ج) را در مورد هر يك از اضلاع مجاور چندضلعی به کار برید.

۱.۱۳ (الف) دو خط $x + y = 0$ و سهمی $xy = 2$ را داریم.

(ب) دو سهمی $xy = 0$ و $x^2 - y^2 - 2y = 0$ را داریم.

۲.۱۳ نگاه کنید، مثلاً، به د. م. برتون، نظریه مقدماتی اعداد (چاپ تجدید نظر شده)، فصل ۴.

۳.۱۳ (الف) $n(a+1)/2$.

(ج) فرض کنید $p = 4m + 3$ ، $q = 4n + 3$. در این صورت $P = (p-1)/2$ ، $Q = (q-1)/2$ هر دو فرد هستند، که از آنجا $1 - (-1)^{PQ} = 1$.

۵.۱۳ (الف) (۱) همگرا، (۲) مطلقاً همگرا، (۳) واگرا.

(ب) (۱) همگرا، (۲) واگرا.

(ج) (۱) همگرا، (۲) واگرا.

۶.۱۳ (الف) بنابر گک ۳، c^{-1} موجود است. در این صورت با توجه به $a*c = b*c$ داریم $a*(c*c^{-1}) = b*(c*c^{-1})$ ، یا بنابر گک ۱، $a*(c*c^{-1}) = b*(c*c^{-1})$ ، اکنون داریم $a*i = b*i$ ، که سرانجام از آن، بنابر گک ۲، داریم $a = b$.

(ب) بنابر گک ۳، a^{-1} موجود است. بنابراین، با به کار بردن گک ۱، گک ۳، گک ۲، گک ۳ به نوبه خود، داریم $a^{-1}*(a*a^{-1}) = i*(a*a^{-1}) = i*i = i = a*a^{-1}$ ، در این صورت بنابر قسمت (الف) داریم $i*a = a$ ، اما، بنابر گک ۲، داریم $a*i = a$ ، اکنون نتیجه می شود که $i*a = a*i$.

(ج) فرض کنید i و j دو عنصر همانی برای گروه باشند. در این صورت، بنابر گک ۲، که برای عنصر همانی j به کار گرفته شود، $i*j = i$ ، همچنین، بنابر قسمت (ب)، $i*j = j*i$ ، اما، بنابر گک ۲، که در مورد عنصر همانی i به کار گرفته شود، $j*i = j$ ، اکنون نتیجه می شود که $i = j$.

(د) بنابر گک ۱، گک ۳، و قسمت (ب)، که به نوبت به کار گرفته شوند، $a^{-1}*(a*a^{-1}) = a^{-1}*i = i*a^{-1}$ ، بنابر این، طبق قسمت (الف)، $a^{-1}*a = i$ ، اما، بنابر گک ۳، داریم $a*a^{-1} = i$ ، اکنون نتیجه می شود که $a^{-1}*a = a*a^{-1}$.

۸.۱۳ همان گروههای قسمتهای (الف)، (ب)، (ج)، (د)، (ه).

۹.۱۳ (الف) فرض کنید M وسط قاعده AB باشد. DM و CM را رسم کنید.

(ج) عمودی از رأس مثلث بر خط واصل بین اواسط دو ضلع مثلث وارد کنید.

۱۵.۱۳ (الف) عمل $*$ نه جابجایی و نه شرکتپذیر است؛ عمل $|$ هم جابجایی و هم شرکتپذیر است؛ قانون توزیعپذیری برقرار است.

(ب) هیچیک از قوانین برقرار نیست.

(ج) تنها دو قاعده جابجایی برقرار است.

(د) $|$ شرکتپذیر و توزیعپذیر است.

۱۸.۱۳ (و) هیچ مقسوم علیه صفر موجود نیست؛ قانون اسقاط از چپ برای ضرب.

(ز) نشان دهید تساوی $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2$ ایجاب می کند: (۱) $b(a+d) = 1$

(۲) $c(a+d) = 0$ ، (۳) $a^2 + bc = 0$ ، (۴) $cb + d^2 = 0$. از (۱) نتیجه می شود که $a+d \neq 0$. این با نتیجه $a+d \neq 0$ متناقض است.

۱۹.۱۳ نگاه کنید، مثلاً به ه. ایوز، نظریهٔ مقدماتی ماتریسها، بخش ۷.۱ (الف) و ۷.۶. ۲۰.۱۳ (ج) این را می‌توان به چند طریق نشان داد، اما همهٔ آنها حيله آمیزند. به برهانهایی که در کتب آنالیز برداری داده شده مراجعه کنید.

۲۰.۱۴ (ب) نگاه کنید، مثلاً، به آلتیشلر - کورت، هندسهٔ فضایی محض نوین، ویرایش دوم، بخش ۱۷۰، صفحهٔ ۵۷ [متن انگلیسی].
(ج) نگاه کنید به همانجا، بخش ۱۷۲، صفحهٔ ۵۸.
(د) نگاه کنید به همانجا، بخش ۱۷۶، ۱۰، صفحهٔ ۵۹.

۳۰.۱۴ تنها به شرطی که هریال چهار وجهی بویال مقابل عمود باشد. (چنین چهار وجهی را چهار وجهی اورتوسنتریک می‌نامند.)

۵۰.۱۴ (ج) به جای خطوط مزدوج همزاویه يك زاویهٔ مسطحه، صفحات مزدوج همزاویه يك فرجه را در نظر بگیرید.

۶۰.۱۴ (الف) $\cos \theta = \cos(2\theta/3 + \theta/3)$.
(ب) زاویهٔ مرکزی يك نهضلی منظم برابر است با $60^\circ = (2/3) \cdot 360^\circ$.
(د) فرض کنید $360^\circ = 7\theta$. در این صورت $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ ، یا با قراردادن $x = \cos \theta$ داریم $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.
(و) $m^2 = 2s^2$.
(ح) فرض کنید c محیط دایره‌ای به شعاع واحد باشد. در این صورت $c = 2\pi$.
(ط) $\angle AOB = 90^\circ <$ اختیار و فرض کنید M و N پای عمودهایی مرسوم از P بر OA و OB باشند. فرض کنید R مرکز مستطیل $OMPN$ باشد. حال اگر CD خط فیلون برای زاویهٔ AOB و نقطهٔ P باشد، نشان دهید که $RE = RP$ ، و بنابراین $RD = RC$. اکنون راه حل آپولونیوس برای مسئلهٔ تضعیف را داریم (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۴).

۷۰.۱۴ (ب)، (د)، (ه) نگاه کنید به ر.س. بیتز، مسئلهٔ تثلیث.

۸۰.۱۴ نگاه کنید به هاورد ایوز، بردسی هندسه، جلد ۱، بخش ۴-۴.

۹۰.۱۴ نگاه کنید به ۱.۱. هالبرگ، «هندسهٔ پرگار ثابت» مجلهٔ معلم ریاضیات، ۵، (آوریل ۱۹۵۹)، ص ص ۲۳۵ - ۲۴۴. ۱.۱. هالبرگ، «گئورگ موهر و شگفتیهای افلیدس» مجلهٔ معلم ریاضیات، (فوریه ۱۹۶۰)، ص ص ۱۲۷ - ۱۳۲.

-
1. H. Eves, Elementary Matrix Theory	2. R. C. Yates
3. A. E. Hallerberg	4. The geometry of the fixed-compass
5. The Mathematics Teacher	6. Georg Mohr and Euclids Curiosi

۱۰.۱۴ (الف) سهولت ۱۳، دقت ۸.

(ب) سهولت ۹، دقت ۶.

(ج) سهولت ۹، دقت ۵.

(د) سهولت ۹، دقت ۵.

(ه) سهولت ۸، دقت ۵.

۱۱.۱۴ (ز) قضیه، خوددوگان است.

۱۴.۱۴ (الف) (۱) $\alpha = \beta$ ، (۲) $\alpha + \beta = k$.(ب) $y = a/(\cot\alpha + \cot\beta)$ ، $x = a(\cot\alpha - \cot\beta)/2(\cot\alpha + \cot\beta)$ $\beta = \cot^{-1}[(a - 2x)/2y]$ ، $\alpha = \cot^{-1}[(a + 2x)/2y]$ که در آن

$$a = AB$$

(ج) (۱) يك بیضی، (۲) يك خط مستقیم قائم، (۳) يك خط مستقیم.

(د) (۱) $(x^2 - y^2) = a^2$ ، (۲) $(x^2 + y^2) = a^2$ (و) $x = r \cos \phi \cos \theta$ ، $y = r \cos \phi \sin \theta$ ، $z = r \cos \phi$

۱۶.۱۴ (و) ۲؛ (ز) ۲؛ (ح) ۲؛ (ط) ۴؛ (ی) ۳؛ (ک) ۳؛ (ل) ۶؛ (م) ۴؛ (ن) ۳؛ (س) ۲.

۱۷.۱۴ نگاه کنید، مثلاً به، ه. ایوز، بردسی هندسه، جلد ۲، بخش ۲.۹.

۱۸.۱۴ (ب) $(b, -a, 0)$.(د) $2x + y + k = 0$.(ه) $x^2 + y^2 + 2fyz + 2gxz + cz^2 = 0$.

(ز) نگاه کنید، مثلاً به، ه. ایوز، بردسی هندسه، جلد ۲، قضیه ۹.۳.۱۰ (صفحه ۸۳) [متن انگلیسی].

۲۰.۱۴ (الف) مجموعه کلیه نقاط z به طوری که

$$z_i = (1 - t)x_i + ty_i,$$

که در آن t عدد حقیقی دلخواهی است.(ب) مجموعه مرتب اعداد $(y_i - x_i)/d$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، که در آن d فاصله

بین دو نقطه مفروض است.

(ج) در قسمت (الف) t را به $0 < t < 1$ محدود کنید.(د) نقطه z به طوری که $z_i = (x_i + y_i)/2$.

(و) (۱)، (۲)، و (۳) بدیهی اند. برای اثبات (۴)، ابتدا نشان دهید که فاصله بین

دو نقطه تحت انتقال پایاست. در نتیجه (۴) در صورتی که نقاط x و y و z بر اثرانتقالی که z را به مبدأ می برد، تبدیل شوند، همچنان معتبر خواهد بود. بنا براین

(۴) به نامساوی

$$[\sum (x_i - z_i)^2]^{1/2} \leq (\sum x_i^2)^{1/2} + (\sum z_i^2)^{1/2},$$

تبدیل می شود که می توان آن را با اعمال ساده جبری ثابت کرد.

۲۲.۱۴ (الف) از رابطه های مطالعه مسئله ای ۱۰.۱۲ استفاده کنید.

(ج) این يك پیامد بلافضلی از قسمتهای (الف) و (ب) است.

$$K = - (1/QP)(1/QT) = -1/(QF)^2 = -1/k^2 \quad (ه)$$

$$\log(1/2) < 0 \quad (الف) \quad ۲۶.۱۴$$

(ج) اگر دو کسر برابر باشند و مخرجهای غیر صفر برابر داشته باشند، صورتهای آنها هم برابرند.

(د) مرحله ۲ را برای $k=2$ امتحان کنید.

(ه) مرحله ۲ را برای $a=1$ یا $b=1$ امتحان کنید.

۲۷.۱۴ (الف) انتگرال توسعی است، چون انتگرال در $x=0$ ناپیوسته است.

(ب) وجود ماکزیموم و مینیمومهای انتهایی را امتحان کنید.

(ج) وجود ماکزیموم و مینیمومهای انتهایی را امتحان کنید.

(د) ثابت انتگرالگیری را فراموش نکنید.

۲۸.۱۴ نگاه کنید، مثلاً، به هاوردایوز، یودسی هندسه، جلد ۲، بخش ۴.۱۳.

۲۹.۱۴ (ب) نه. مثلاً $\sqrt{2}$ جبری است، زیرا يك ریشه $x^2 - 2 = 0$ است.

(ج) جبری. يك ریشه $x^2 + 1 = 0$ است.

(د) اگر $\pi/2$ يك ریشه معادله چند جمله ای $f(x) = 0$ باشد، در این صورت π

يك ریشه معادله چند جمله ای $f(x/2) = 0$ است.

(ه) اگر $\pi + 1$ يك ریشه معادله چند جمله ای $f(x) = 0$ باشد، آنگاه π يك ریشه

معادله چند جمله ای $f(x+1) = 0$ است.

(و) اگر $\sqrt{\pi}$ يك ریشه معادله چند جمله ای $f(x) = 0$ باشد، آنگاه π يك ریشه

معادله چند جمله ای $f(\sqrt{x}) = 0$ است و الخ.

۳۰.۱۴ (ب) اگر p مرکب باشد، آنگاه $p = ab$ ، که در آن $a \leq b$ و، در نتیجه، $a^2 \leq p$.

(ج) برای $n = 10^9$ داریم $A_n \log_e n / n = 1.053 \dots$

(د) $1 + (n+1) + \dots + (n+1) + 1$ را در نظر

بگیرید.

۴.۱۵ تحقیق صحت چهار اصل موضوع اول چندان دشوار نیست. برای تحقیق صحت و

سقم اصل موضوع پنجم کافی است نشان دهیم که دو خط مستقیم متقاطع، که هر يك توسط دو نقطه، با محدودیت مذکور، معین می شوند، یکدیگر را در يك نقطه با همان محدودیت قطع می کنند. این کار را می توان بدین طریق نشان داد که معادله خط مستقیمی که توسط

دو نقطه با مختصات گویا تعیین می شود ضرایب گویا دارد، و اینکه چنین دوخطی، اگر متقاطع باشند، باید یکدیگر را در نقطه ای با مختصات گویا قطع کنند. برای آخرین قسمت مسئله، دایره واحد به مرکز مبدأ، و خط مار بر مبدأ با شیب یک را در نظر بگیرید.

۶.۱۵ (الف) فرض کنید که این خط از رأس A وارد مثلث شود. نقطه دلخواهی مانند U را بر آن و خارج از مثلث اختیار و فرض کنید V نقطه ای بر قطعه خط AC باشد، و خط UV را رسم کنید. بنابراین موضوع پاش، UV (۱) خط AB ، یا (۲) خط BC را قطع خواهد کرد، یا (۳) بر B خواهد گذشت. اگر UV ، AB را قطع کند، محل تلاقی را با W نشان دهید و WC را رسم کنید؛ حال اصل پاش را، به نوبت، برای مثلثهای VWC و BWC به کار برید. اگر UV ، BC را قطع کند، محل تلاقی را با R نشان دهید؛ حال اصل موضوع پاش را در مورد مثلث VRC به کار برید. اگر UV بر B بگذرد، اصل موضوع پاش را در مورد مثلث VBC به کار برید.

۷.۱۵ T۱ فرض کنید هم داشته باشیم $R(a, b)$ و هم $R(b, a)$. در این صورت بنا بر $P۲$ ، داریم $R(a, a)$. اما بنا بر $P۲$ ، این غیرممکن است. بنابراین، قضیه با برهان خلف ثابت می شود.

T۲ چون $a \neq b$ ، داریم، بنا بر $P۱$ ، یا $R(a, c)$ یا $R(c, a)$. اگر داشته باشیم $R(c, a)$ ، چون همچنین $R(a, b)$ را داریم، بنا بر $P۳$ داریم $R(c, b)$. بنابراین قضیه حاصل می شود.

T۳ فرض کنید قضیه نادرست باشد و فرض کنید a هر عنصر K باشد. در این صورت عنصری مانند b از K وجود دارد به طوری که $R(a, b)$ بنا بر $P۲$ ، $a \neq b$. بنابراین a و b اعضای متمایز K هستند. بنا بر فرض ما، عنصری مانند c از K وجود دارد به طوری که داریم $R(b, c)$ بنا بر $P۲$ ، $b \neq c$ بنا بر $P۳$ ، همچنین داریم $R(a, c)$ بنا بر $P۲$ ، $a \neq c$. لذا a, b, c عناصر متمایز K هستند. بنا بر فرض ما، عنصری مانند d از K وجود دارد به طوری که داریم $R(c, d)$ بنا بر $P۲$ ، $c \neq d$ بنا بر $P۳$ ، همچنین داریم $R(b, d)$ و $R(a, d)$ بنا بر $P۲$ ، $a \neq d$ ، $b \neq d$. بنا بر این a, b, c, d عناصر متمایز K هستند. بنا بر فرض ما، عنصری مانند e در K موجود است به قسمی که داریم $R(d, e)$ بنا بر $P۲$ ، $d \neq e$ بنا بر $P۳$ ، همچنین داریم $R(c, e)$ ، $R(b, e)$ ، $R(a, e)$ بنا بر $P۲$ ، $a \neq e$ ، $b \neq e$ ، $c \neq e$. بنا بر این a, b, c, d, e عناصر متمایز K هستند. اکنون تناقضی برای $P۴$ داریم. بنابراین، قضیه بنا بر برهان خلف ثابت می شود.

T۴ بنا بر T۳ حداقل یک چنین عضوی، مثلاً a ، وجود دارد فرض کنید $a \neq b$ هر عنصر دیگر K باشد. بنا بر $P۱$ داریم $R(a, b)$ یا $R(b, a)$. اما، بنا بر فرض، $R(a, b)$ را نداریم. بنا بر این، باید داشته باشیم $R(b, a)$ ، و قضیه ثابت می شود.

T۵ بنا بر تعریف ۱ داریم $R(b, a)$ و $R(c, b)$. در این صورت بنا بر $P۳$ داریم

$R(c, a)$ ، یا، بنابر تعریف ۱، داریم $D(a, c)$.

T_6 فرض کنید $a \neq b$. در این صورت، بنابر P_1 ، یا داریم $R(a, b)$ یا $R(b, a)$. فرض کنید داشته باشیم $R(a, b)$ ، چون داریم $F(b, c)$ ، همچنین داریم، بنابر تعریف ۲، $R(b, c)$. این غیرممکن است زیرا $F(a, c)$ را داریم. فرض کنید داشته باشیم $R(b, a)$. چون داریم $F(a, c)$ ، همچنین داریم، بنابر تعریف ۲، $R(a, c)$. این غیرممکن است زیرا $F(b, c)$ را داریم. بنابراین، در هر حالت به تناقضی با فرض خود می‌رسیم. بنابراین، قضیه با برهان خلف ثابت می‌شود.

T_7 زیرا، بنابر تعریف ۲، داریم $R(a, b)$ و $R(b, c)$. لذا، بنابر تعریف ۲، نمی‌توانیم $F(a, c)$ را داشته باشیم.

۸۰۱۵ (ب) T_1 اگر a جد b باشد، آنگاه b جد a نیست.

T_2 اگر a جد b باشد و اگر c عضو سومی از K متمایز از a و b باشد، آنگاه یا a یک جد c است یا c یک جد b است.

T_3 مردی در K وجود دارد که جد هیچکس در K نیست.

T_4 تنها یک مرد در K وجود دارد که جد هیچکس در K نیست.

تعریف ۱ اگر b یک جد a باشد گوییم که a یک زاده b است.

T_5 اگر a یک زاده b باشد، و b یک زاده c ، آنگاه a زاده c است.

تعریف ۲ اگر a یک جد b باشد و فردی مانند c از K موجود نباشد به قسمی که a یک جد c و c یک جد b باشد، آنگاه گوییم که a پدر b است.

T_6 هر مرد در K حداکثر یک پدر در K دارد.

T_7 اگر a پدر b و b پدر c باشد، آنگاه a پدر c نیست.

تعریف ۳ اگر a پدر b و b پدر c باشد، گوییم که a پدر بزرگ c است.

(د) چون T_1 از P_1, P_2, P_3, P_4 نتیجه گرفته شده است، آنچه باقی ماند تنها نتیجه گرفتن P_2 از P_1, T_1, P_2, P_4 است.

۹۰۱۵ (ب) عکس «اگر A آنگاه B » «اگر B آنگاه A » است.

(ج) متقابل «اگر A آنگاه B » «اگر نه A آنگاه نه B » است.

۱۰۰۱۵ (الف) ۴۸ مایل در هر ساعت.

(ب) ۲۴ روز

(د) $67\frac{1}{2}$ سنت.

(ه) دومی.

(و) در پایان دقیقه ۵۹.

(ز) مزد بسیار خوبی است.

(ح) ۱۱ ثانیه.

(ط) پنج سنت.

(ی) هیچکدام؛ مقادیر مساوی اند.

(ک) کپه نهایی بالغ بر ۱۷۰۰۰۰۰۰ مایل بلندی خواهد داشت.

(ل) نه.

(م) ثلث.

(ن) بلی.

۱۳.۱۵ (الف) اعضای S را به عنوان مجموعه‌ای از کلیه چارچوبهای ارجاع متعامد تعبیر کنید که با یکدیگر موازی اند ولی هیچ محوری از یک چارچوب ارجاع منطبق بر محور چارچوب دیگر نیست، و فرض کنید bFa به معنی این باشد که مبدأ چارچوب b در ربع اول چارچوب a باشد. یا، عناصر S را مجموعه‌های زوجهای مرتب از اعداد حقیقی مانند (m, n) تعبیر، و فرض کنید $(m, n) F (u, v)$ به معنی $m > u$ و $n > v$ باشد.

۱۴.۱۵ (الف) زنبورها را به عنوان شش شخص A, B, C, D, E, F ، و چهار کندو را به عنوان چهار کمیته (A, B, C) ، (A, D, E) ، (B, E, F) ، و (C, F, D) تعبیر کنید. یا، زنبورها و کندوها را به ترتیب به عنوان شش درخت و چهار ردیف از درختهایی تعبیر کنید که رأسها و اضلاع یک چهارضلعی کامل را تشکیل می‌دهند. (ب) برای نشان دادن P_2 ، زنبورها و کندوها را به عنوان چهار درخت و چهار ردیف درختان که تشکیل رأسها و اضلاع مربعی را می‌دهند، تعبیر کنید. برای نشان دادن استقلال P_3 ، زنبورها را به عنوان چهار درختی که در رأسها و پای یک ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند، و کندوها را به عنوان چهار ردیف درخت در امتداد اضلاع و ارتفاع مثلث، تعبیر کنید. برای نشان دادن استقلال P_4 ، زنبورها و کندوها را به عنوان سردرخت و سه ردیف درخت که رأسها و اضلاع مثلثی را تشکیل می‌دهند، تعبیر کنید.

(ج) چهار کندو را با a, b, c, d و زنبورها را با اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ... نشان دهید. اصول موضوعه، ضرورتاً، به طرح شکل ۱۳۵ منجر می‌شوند که در آن عدد طبیعی هر خانه زنبور منحصر به فردی را نشان می‌دهد که در دو کندویی که توسط سرستونها و سرسطرهای دربرگیرنده آن خانه داده شده، مشترک است. اکنون هر سه قضیه از این طرح آشکار هستند.

۱۵.۱۵ (ه) بنا بر M_1 داریم $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$ ، با تعویض x و y ، $d(y, x) \leq d(x, z) + d(z, y)$ با قراردادن $z = x$ در نامساوی اول و $z = y$ در نامساوی دوم، (و با یادآوری M_2) نامساویهای $d(x, y) \leq d(y, x) \leq d(x, y)$ را به دست می‌آوریم. از آنجا نتیجه می‌شود که $d(x, y) = d(y, x)$.

	a	b	c	d
a		1	2	3
b	1		4	5
c	2	4		6
d	3	5	6	

شکل ۱۳۵

در $d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x)$ قرار دهید $z = x$. در این صورت، چون بنا بر M_2 $d(x, x) = 0$ ، بنا بر مطالب بالا

$$0 \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

در نتیجه $d(x, y) \geq 0$ ، واضح.

(۳-ر) تنها تحقیق نامساوی مثلث کمی مشکل است. $d(x, y)$ ، $d(z, x)$ ، $d(y, z)$ را به ترتیب با a ، b ، c نشان دهید. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \frac{b}{1+b} &= \frac{1}{\frac{1}{b}+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{c+a}+1} = \frac{c+a}{1+c+a} \\ &= \frac{c}{1+c+a} + \frac{a}{1+c+a} \leq \frac{c}{1+c} + \frac{a}{1+a}. \end{aligned}$$

(ح) برای قسمت (ج)، يك دایره مربعی است به مرکز c و قطرهای آن طولی برابر $2r$ دارند و به موازات محورها می باشند.

۱۶.۱۵ (الف) فرض کنید M_1 وسط AB ، M_2 وسط M_1B ، M_3 وسط M_2B باشد واضح. مجموعه نقاط $[AB]$ به استثنای A ، B ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، ... را با E نشان دهید. در این صورت داریم

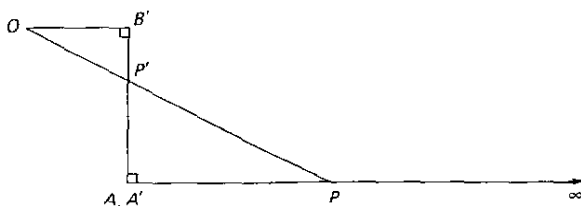
$$[AB] = E, A, B, M_1, M_2, M_3, \dots$$

$$[AB] = E, B, M_1, M_2, M_3, \dots$$

$$[AB] = E, A, M_1, M_2, M_3, \dots$$

$$[AB] = E, M_1, M_2, M_3, \dots$$

اکنون روشن است که چگونه می توان نقاط هریک از چهار پاره خط را در تناظر



شکل ۱۳۶

يك به يك با نقاط هر يك از باره خطهای دیگر قرار داد.
(ب) با شکل ۱۳۶ شروع کنید.

- ۱۷.۱۵ (ب) از فکری که در اثبات قضیه ۱ بخش ۱۵-۴ به کار گرفته شد، استفاده کنید.
(ج) از استدلال غیر مستقیمی همراه با قسمت (الف) و قضیه ۱ بخش ۱۵-۴ استفاده کنید.
(د) از استدلال غیر مستقیمی همراه با قسمت (الف) و قضیه ۲ بخش ۱۵-۴ استفاده کنید.

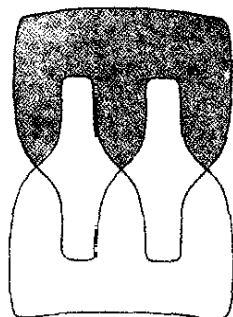
۲۱.۱۵ (الف) نگاه کنید به مسئله $E832$ ، ماهنامه آمریکایی ریاضی، ۵۶ (۱۹۴۹)، صفحه ۴۰۷.

- (ج) نه، زیرا c نقطه وجود دارند که بزرگ خط مستقیم یا يك دایره قرار دارند، و تنها d عدد گویا و d عدد جبری موجود است.
(د) محوری عددی بر خط مستقیم مفروض اختیار کنید. در هر بازه نقطه ای با مختصات گویا انتخاب کنید. این نقاط همه متمایزند، و بنا بر این در تناظر يك به يك با بازه ها قرار دارند، و يك زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای همه اعداد گویا تشکیل می دهند.

۲۳.۱۵ (ب) سطح تشکیل شده از يك نوار کاغذ که به اندازه 540° تاب داده شده و سپس دوسر آن به هم چسبانده شده اند.

- (ج) نگاه کنید به شکل ۱۳۷. این سطح توسط ف. فرانکل و ل.س. پونتریاگین در سال ۱۹۳۰ کشف شد.
(د) يك قرص مدور.

۲۵.۱۵ (ب) يك چهار وجهی شش یال دارد و يك هرم مربع القاعده هشت یال دارد. فرض کنید يك چند وجهی بسته ساده هفت یالی وجود داشته باشد. توجه خود را به هر وجه خاص چند وجهی معطوف و فرض کنید که این وجه n یال داشته باشد. چون



شکل ۱۳۷

حداقل سه یال از هر رأس این وجه خارج می‌شوند، ملاحظه می‌کنیم که $۲n \leq ۷$ ، یا $n < ۴$. نتیجه می‌شود که همهٔ وجوه چندوجهی باید مثلث باشند، که از آنجا $۱۴ = ۲e = ۳f$. اما این کار غیرممکن است چون f یک عدد صحیح است.

۲۶.۱۵ (الف) روابط (۱) و (۲) بدیهی‌اند. روابط (۳) و (۴) بدین دلیل نتیجه می‌شوند که هر یال دقیقاً به دو وجه متعلق است و هر یال دقیقاً از دو رأس بیرون می‌آید. برای به دست آوردن (۵) توجه کنید که $۲ = f + e - v$ ، یا $۲f + ۲v = ۴ + ۲e$. با قرار دادن مقادیر (۱)، (۲)، (۳) در (۵) به دست می‌آوریم

$$۲(v_3 + v_4 + \dots) + ۲(f_3 + f_4 + \dots) = ۴ + ۳f_3 + ۴f_4 + ۵f_5 + \dots,$$

یا

$$۲(v_3 + v_4 + \dots) = ۴ + f_3 + ۲f_4 + ۳f_5 + ۴f_6 + \dots$$

برای به دست آوردن (۶) به طور مشابه (۱)، (۲)، (۳) را در $۲e = ۴ + ۲f + ۲v$ قرار می‌دهیم. از دو برابر کردن (۶) و اضافه کردن آن به (۵) نتیجه می‌شود که

$$۴(f_3 + f_4 + \dots) + ۲(v_3 + v_4 + \dots) = ۸ + (۲v_3 + ۴v_4 + ۶v_5 + ۸v_6 + \dots) + ۴ + (f_3 + ۲f_4 + ۳f_5 + ۴f_6 + \dots)$$

یا

$$۳f_3 + ۲f_4 + f_5 = ۱۲ + (۲v_3 + ۴v_4 + ۶v_5 + \dots) + (f_6 + ۲f_7 + ۳f_8 + \dots)$$

که همان (۷) است.

(ب) اینها پیامدهای ساده‌ای از رابطه (۷) قسمت (الف) هستند.

(ج) برای (۱)، رابطه (۷) قسمت (الف) به $۱۲ = f_5$ تبدیل می‌شود؛ برای (۲)،

این رابطه به $۱۲ = ۴f_۴$ ، یا $۶ = f_۴$ تبدیل می‌شود؛ برای (۳)، این رابطه به $۱۲ = ۴f_۳$ ، یا $۳ = f_۳$ تبدیل می‌شود.

۲۷.۱۵ (ه) تحقیق درستی $H_۱$ و $H_۲$ که بدیهی است، حذف می‌کنیم.

برای تحقیق $H_۳$ ، فرض کنید که $d(x, y) < r$ و قرار دهید $R = r - d(x, y) > ۰$. طبق نامساوی مثلث در صورتی که $d(y, y') < R$ آنگاه

$$d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, y') = (r - R) + d(y, y') < r$$

با نشان دادن درون دایره به مرکز c و شعاع r با $S(c, r)$ ، نتیجه می‌گیریم که $S(y, R)$ مشمول در $S(x, r)$ است.

برای تحقیق $H_۴$ ، فرض کنید که x متمایز از y باشد و قرار دهید $r = d(x, y) > ۰$. در این صورت می‌توان به آسانی نشان داد که $S(x, r/۳)$ و $S(y, r/۳)$ نقطه مشترکی ندارند.

(و) چون x يك نقطه حدى S است، هر همسایگی N_x از x شامل نقطه‌ای مانند $y_۱$ از S است، که در آن $y_۱ \neq x$. در این صورت بنا بر $H_۴$ همسایگی‌های مجزایی مانند $N_{y_۱}$ و N'_x از $y_۱$ و x موجودند. مجدداً بنا بر $H_۲$ ، همسایگی از x مانند N''_x موجود است که هم مشمول در N_x و هم در N'_x است. نتیجه می‌شود که $y_۱$ در N''_x نیست. اما چون x يك نقطه حدى S است، N''_x و بنا بر این N_x شامل نقطه‌ای مانند $y_۲$ از S است که در آن $y_۲$ هم متمایز از x و هم از $y_۱$ است. با ادامه استدلال به این نحو، نتیجه می‌گیریم که N_x شامل دنباله‌ای نامتناهی از نقاط متمایز $y_۱, y_۲, \dots$ از S است و بنا بر این قضیه ثابت می‌شود.

۲۹.۱۵ (الف) سه ارزش درستی ممکن يك گزاره را با T (درست)، F (نادرست)، و؟ (غیر

از این دو) نشان دهید. می‌توانیم جدول درستی برای ترکیب عطفی را به صورتی که در شکل ۱۳۸ نشان داده شده، بسازیم که در آن بنا بر توافق ما در باره معنی « q و p »، خانه بالایی سمت چپ در جدول باید شامل يك T باشد، و هیچ خانه‌ای در جدول نمی‌تواند شامل يك T باشد. چون هشت خانه دیگر باقی می‌ماند و هر يك از آنها را می‌توان به دو طریق ممکن، یعنی یا با يك T یا با يك؟ پر کرد، مجموعاً $۲۵۶ = ۲^۸$ راه ممکن برای پر کردن هشت خانه وجود دارد.

(ب) جدول درستی برای نقیض را می‌توان به صورت شکل ۱۳۹ ساخت، که در آن دو طریق برای پر کردن خانه بالایی با نه p (یعنی F یا؟)، سه راه برای پر کردن خانه وسطی با نه p (یعنی با T ، F ، یا؟) و دو راه برای پر کردن خانه تحتانی یا نه p (یعنی با T یا؟) وجود دارد.

(ج) $(۱۲) = ۳۰۷۲$ (۲۵۶).

(د) $m^{m-۲}(m-۱)^{m-۲} + ۱$.

		q		
p	^	T	?	F
	T	T		
	?			
	F			

شکل ۱۳۸

p	نه p
T	
?	
F	

شکل ۱۳۹

- ۳۳.۱۵ (الف) نگاه کنید، مثلاً، به هاوردایوز تربیع دایره ریاضی^۱ چاپ پریندل، وبر، وشمیدت^۲، ۱۹۷۲، صفحات ۵۳-۵۵ [متن انگلیسی].
- (ب) نگاه کنید، مثلاً، به بال-کاستر، تفریحات و مقاله‌های ریاضی، مک‌میلان^۳ صفحات ۱۶۵-۱۷۰ [متن انگلیسی].

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

absurdity	بطلان
algebraic structure	ساختار جبری
algebraic topology	توپولوژی جبری
analysis situs	هندسه وضع
annuity	قسط السنین
anticomplementary tetrahedron	چهاروجهی پاد متمم
antinomy	تعارض (منطق)
antiprism	پاد منشور
Aristotles' wheel	چرخ ارسطو
arithmetization	حسابیدن
array	آرایه
axiom	اصل متعارفی
axiomatics	مبحث اصل موضوعیها
betweenness	بینیت
binary forms	صورت‌های دودویی
Boolean algebra	جبر بولی
brachystochrone	منحنی کوتاهترین زمان
bracket	قلاب
branch	شاخه
calculus of forms	حساب صورتها
calculus of variations	حساب تغییرات
capillary action	عمل موئین
cardinal number	عدد اصلی

cardinal number of continuum	عدد اصلی متصله
cardioid	کاردیوئید
catacaustic curves	منحنیهای محرق
catenary	منحنی زنجیری
centrifugal	گریز از مرکز
centroid	مرکز هندسی
challenging	حریف آزما
characteristic	مفسر (لگاریتم)
characteristic equation	معادله مشخصه
collinear	همخط
combinatorial topology	توپولوژی ترکیبیاتی
commensurable	متوافق
concurrent	همرس
congruent	همنهشت، مساوی
conicoid	مخروطیوار
conjecture	حدس
conjunction	عطف (منطق)
connectivity	همبندی
construction	ترسیم، ساختمان
continued fraction	کسر مسلسل
continuum hypothesis	فرض متصله
contrapositive	عکس نقیض
converse	عکس (گزاره)
corpuscular → emission	
criterion	ملاک
cross	نخاج
cross ratio group	گروه نسبت نخاجی
cubic curve	منحنی درجه سوم
cuboctahedron	چهارده وجهی مرکب
cuspid	نقطه بازگشت
defect	کاستی
demonstrative geometry	هندسه برهانی
De Morgan laws	قوانین دمورگن
denumerable	شمارا

descriptive geometry	هندسه ترسیمی
diagonal process	فرایند قطری کردن
dimensionality	بعد-چندی
direction number	مؤلفه هادی
director sphere, syn:Monge sphere	کره هادی، کره مونژ
divide	عادی کردن
domain of definition	حوزه تعریف
dual	دوگان
elasticity	کشسانی
elliptic geometry	هندسه بیضوی
embedded	نشانه
emission, syn:corpuscular	گسیلش
envelope	پوش
epicycloid	اپی سیکلوئید
equiform geometry	هندسه همشکلی
evolute	گسترده
exactitude of construction	دقت ساختمان
extrinsic geometry	هندسه عارضی
factorial	فاکتوریل
fallacy	مغالطه
false	نادرست (منطق)
finite differences	تفاضلات متناهی
folium	فولیوم، چینه
formalist	صوری گرا
formal logic.	منطق صوری
four leaved rose	منحنی گل چهاربرگی
frame of reference	چارچوب مرجع
frequency distribution	توزیع فراوانی
gauge	کیل
generalized prismoid	منشورگون تعمیم یافته
generating	مولد

geodesy	زمینسنجی
geometrography	هندسه‌نگاری
graph	گراف
grating	مشبکه
groupoid	گروهواره
harmonic ranges	تقسیمات توافق
hexagram	هکزاگرام
homeomorphic	همسانریخت
homographic pencils	دسته خطوط همنگار
homology	هومولوژی
homothetic transform	تبدیل تجانسی
hoof	سم
hyperbolic geometry	هندسه هذلولوی
hypothesis 1	فرض
hypothesis 2	فرضیه
hypothesis of the acute angle	فرض زاویه حاده
hypothesis of the obtuse angle	فرض زاویه منفرجه
hypothesis of the right angle	فرض زاویه قائمه
ideal	آرمانی
identity element	عنصر همانی
impredicative definition	تعریف غیراسنادی
incommensurable	نامتوافق
indicator	نشانگر
integral domain	حوزه صحیح
integral equation	معادله انتگرالی
interpolation	درونمایی
intrinsic geometry	هندسه ذاتی
intuitionist	شهودگرا
invariant	پایا
involute	گسترنده
isochrone	منحنی همزمان
isogonal	همزاویه
isogonal conjugate	مزدوج همزاویه‌ای

isogonic center	مرکز همزاویه‌ای
isoperimetric	هم‌پیرامون
Jordan algebra	جبر ژوردان
Kleinian geometry	هندسهٔ کلاینی
lattice	شبکه
latus rectum	لاتوس رکتوم، ضلع قائم
law of double negation	قانون نفی مضاعف
law of excluded middle	قانون طرد شق وسط
least squares	کمترین مربعات
lie between	میانبود
logistic	منطق‌گرا
logistics	سازوکار
loop	طوقه
manifold	خمینه
mantissa	مانتیس (لگاریتم)
many-valued logic	منطق چندارزشی
mathematical expectation	امید ریاضی
mean curvature	انحنای میانگین
measure curvature	انحنای اندازه
method of abridged notation	روش نماد اختصاری
method of equilibrium	روش تعادل
method of exhaustion	روش افنا
method of infinite descent	روش نزول نامتناهی
metric	متریک
Möbius strip	نوار موبیوس
mode	مد
modulus	هنگ
moment	گشتاور
Monge sphere→director sphere	تکواره
monoid	مونوئید
mosaic	موزائیک

multicursal graph	گراف چندپیمایه
multiple algebra	جبر چندگانیها
nebular hypothesis of cosmogony	فرضیهٔ سحابی کیهان‌زایی
nephroid	نفرئید، منحنی کلیه شکل
node	بند
operator	عملگر
opposite	متقابل (گزاره‌ها)
optical	نورشناختی
optics	نورشناسی، اپتیک
orbiform	مداری شکل
orthocentroidal circle	دایرهٔ مرکز-ارتفاعی
osculating circle	دایرهٔ بوسان
oval	مرغانه
palindromic number	عدد مقلوبی
parabolic geometry	هندسهٔ سهموی
parabolic segment	قطعهٔ سهموی
paradox	پارادوکس
paradromic rings	حلقه‌های همرو
parallel postulate	اصل موضوع توازی
partition	افراز
pedal curve	منحنی پادکی
plane centro-affine geometry	هندسهٔ مسطحهٔ آفین مرکزدار
plane equiform geometry $\rightarrow$ similarity geometry	
point geometry	هندسهٔ نقطه‌ای
point of inflection	نقطهٔ عطف
polar	قطبی
postulate	اصل موضوع
postulate of order	اصل موضوع ترتیب
power series	سری توانی
principle of duality	اصل دوگانگی
prism	منشور

prismatoid	منشوروار
prismoid	منشورگون
projectile	پرتابه
projective geometry	هندسهٔ تصویری
projective plane	صفحهٔ تصویر
quadrature	تربیع
quantics	توابع همگن جبری چند متغیره
quasi group	شبه گروه
quaternion	کواترنیون
quintic equation	معادلهٔ درجهٔ پنجم
range of values	دامنهٔ مقادیر
rational	گویا
reciprocant	عکس ساز
reciprocation	عکس یابی
rectangular hyperbola	هذلولی متساوی الساقین
rectification	راستش
reflexive	انعکاسی
refraction	انکسار
relatively prime	متباین
rhombic dodecahedron	دوازده وجهی لوزوی
rhombic triakontahedron	سی وجهی لوزوی
Riemann surface	سطح ریمان
roulette	چرخ دنداندار
route	مسیر
rule of signs	قاعدهٔ علامات
runner	عدد یاب (خط کش محاسبه)
rusty compasses	پرنگار با گشادگی ثابت، پرنگار زنگ زده
sector compasses	پرنگار تقسیم
self-consistent	خود سازگار
semigroup	نیم گروه
sensed magnitudes	کمیت های جهت دار
sequence	دنباله

sequential relation	نسبت دنباله‌ای
shift in hypothesis	تصرف در فرض
similarity geometry	هندسه تشابه
syn:plane equiform geometry	
skew lines	خطوط متقاطع
skew symmetric	متقارن چپ
slide rule	خط‌کش محاسبه
spherical zone	منطقه کروی
spiral	مارپیچ
straightedge	ستاره، خط‌کش
subconscious geometry	هندسه ناخودآگاه
subnormal	تحت قائم
subtangent	تحت مماس
summation	مجموعیابی
summit	تارک
symbolic algebra	جبر علامتی
symmedian point	نقطه هم‌میان
synthetic geometry	هندسه ترکیبی
tautology	راستگو
ternary forms	صورت‌های سه‌سبی
three body problem	مسئله سه‌جسم
transcendental number	عدد متعالی
transfinite	ترانسفینی
transposed	ترانهاد
trident	منحنی سه‌دندانه
triangular angle	کنج سه‌وجهی
truth table	جدول راستی
truth value	ارزش راستی
twin primes	اعداد اول توأمان
2- complexes	دو کمپلکسها
undecidable	غیر قابل تصمیم
unicursal graph	گراف یک‌پیمایه
uniform convergence	همگرایی یک‌نواخت

union

اجتماع

variation

واریاسیون

Venn diagram

دیاگرام ون

vicious circle principle

اصل دور فاسد

wedge

گروه، گاهه

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

array	آرایه
ideal	آرمانی
epicycloid	اپی‌سیکلوئید
union	اجتماع
truth value	ارزش راستی
vicious circle principle	اصل دور فاسد
principle of duality	اصل دوگانگی
axiom	اصل متعارفی
postulate	اصل موضوع
postulate of order	اصل موضوع ترتیب
parallel postulate	اصل موضوع توازی
twin primes	اعداد اول توأمان
partition	افراز
mathematical expectation	امید ریاضی
measure curvature	انحنای اندازه
mean curvature	انحنای میانگین
reflexive	انعکاسی
refraction	انکسار
absurdity	بطلان
dimensionality	بعد چندی
node	بند
betweenness	بینیت
antiprism	پاد منشور

paradox	پارادوکس
invariant	پایا
projectile	پرتابه
rusty compasses	پرگار با گشادگی ثابت
sector compasses	متر: پرگار زنگ‌زده
	پرگار تقسیم
	پرگار زنگ‌زده ← پرگار با گشادگی ثابت
envelope	پوش
summit	تارک
homothetic transform	تبدیل تجانس
subnormal	تحت قائم
subtangent	تحت مماس
transfinite	ترانسفینی
transpose	ترانهاده
quadrature	تربیع
construction	ترسیم، متر: ساختمان
shift in hypothesis	تصرف در فرض
antinomy	تعارض (منطق)
impredicative definition	تعریف غیراستادی
finite differences	تفاضلات متناهی
harmonic ranges	تقسیمات توافقی
monoid	تکواره
quantics	توابع همگن جبری چندمتغیره
combinatorial topology	توپولوژی ترکیباتی
algebraic topology	توپولوژی جبری
	توپولوژی ← هندسه وضع
frequency distribution	توزیع فراوانی
Boolean algebra	جبر بولی
multiple algebra	جبر چندگانیها
Jordan algebra	جبر ژوردان
symbolic algebra	جبر علامتی
truth table	جدول ارزش

frame of reference	چارچوب مرجع
Aristotles' wheel	چرخ ارسطو
roulette	چرخ دندانه‌دار
cuboctahedron	چهارده‌وجهی مرکب
anticomplementary tetrahedron	چهاروجهی پاد متمم
	چینه ← فولیوم
conjecture	حدس
challenging	حریف آزما
calculus of variations	حساب تغییرات
calculus of forms	حساب صورتها
arithmetization	حسابیدن
paradromic rings	حلقه‌های همرو
domain of definition	حوزه تعریف
integral domain	حوزه صحیح
cross	خاج
	خط کش ← ستاره
slide rule	خط کش محاسبه
skew lines	خطوط متنافر
manifold	خمینه
self-consistent	خودسازگار
range of values	دامنه مقادیر
amplitude of oscillation	دامنه نوسان
osculating circle	دایره بوسان
orthocentroidal circle	دایره مرکز ارتفاعی
interpolation	درونیابی
homographic pencils	دسته خطوط همنگار
exactitude of construction	دقت ساختمان
sequence	دنباله
rhombic dodecahedron	دوازده‌وجهی لوزوی
2- complexes	دوکومپلکسها
dual	دوگان
Venn diagram	دیاگرام ون

rectification	راستش
tautology	راستگو
truth	راستی
method of exhaustion	روش افنا
method of equilibrium	روش تعادل
method of infinite descent	روش نزول نامتناهی
method of abridged notation	روش نماد اختصاری
geodesy	زمینسنجی
algebraic structure	ساختار جبری
logistics	سازوکار
straightedge	ستاره
power series	متر: خط کش
Riemann surface	سری توانی
hoof	سطح ریمان
rhombic triakontahedron	سم
branch	سی‌وجهی لوزوی
lattice	شاخه
quasi group	شبکه
denumerable	شبه گروه
intuitionist	شمارا
projective plane	شهودگرا
binary forms	صفحه تصویر
ternary forms	صورت‌های دودویی
formalist	صورت‌های سه‌سویی
	صوری‌گرا
	ضلع قائم ← لانوس رکتوم
loop	طوقه
divide	عاد کردن
cardinal number	عدد اصلی

cardinal number of continuum

transcendental number

palindromic number

runner

conjunction

converse

reciprocant

reciprocation

contrapositive

operator

capillary action

identity element

undecidable

factorial

diagonal process

hypothesis 1

hypothesis of the acute angle

hypothesis of the right angle

hypothesis of the obtuse angle

continuum hypothesis

hypothesis 2

nebular hypothesis of cosmogony

folium

rule of signs

law of excluded middle

law of double negation

annuity

polar

parabolic segment

bracket

De Morgan laws

عدد اصلی متصله

عدد متعالی

عدد مقلوبی

عدد یاب (خط کش محاسبه)

عطف (منطق)

عکس (گزاره)

عکس ساز

عکس یابی

عکس نقیض

عملگر

عمل مویین

عنصر همانی

غیر قابل تصمیم

فاکتوریل

فرایند قطری کردن

فرض

فرض زاویه حاده

فرض زاویه قائمه

فرض زاویه منفرجه

فرض متصله

فرضیه

فرضیه سحابی کیهانزایی

فولیوم

متر: چین

قاعده علامات

قانون طرد شق وسط

قانون نفی مضاعف

قسط السنین

قطبی

قطعه سهموی

قلاب

قوانین دمورگن

cardioid	کاردیوئید
defect	کاستی
director sphere, Monge sphere	کرهٔ مونژ ← کرهٔ هادی
continued fraction	متر: کرهٔ مونژ
elasticity	کسر مسلسل
least squares	کشیانی
sensed magnitudes	کمترین مربعات
triectangular angle	کمیت‌های جهت‌دار
quaternion	کنج سه‌وجهی
gauge	کواترنیون
	کیل
graph	گراف
multicursal graph	گراف چندپیمایه
unicursal graph	گراف یک‌پیمایه
cross ratio group	گروه نسبت خاجی
groupoid	گروهواره
evolute	گسترده
involute	گسترنده
emission, corpuscular	گسیلش
moment	گشتاور
wedge	گوه
rational	گویا
latus rectum	لاتوس رکتوم
	متر: ضلع قائم
spiral	مارپیچ
mantissa	مانتیس (لگاریتم)
direction number	مؤلفهٔ هادی
axiomatics	مبحث اصل موضوعیها
relatively prime	متباین
metric	متریک
opposite	متقابل (گزاره‌ها)
skew symmetric	متقارن چپ

commensurable	متوافق
summation	مجموعیابی
conicoid	مخروطی‌وار
mode	مد
orbiform	مداری شکل
oval	مرغانه
isogonic center	مرکز همزویه‌ای
centroid	مرکز هندسی
isogonal conjugate	مزدوج همزویه‌ای
	مساوی ← همنهشت
three body problem	مسئله سه جسم
route	مسیر
grating	مشبک
integral equation	معادله انتگرالی
quintic equation	معادله درجه پنجم
characteristic equation	معادله مشخصه
fallacy	مغالطه
characteristic	مفسر (لگاریتم)
latent root	مقدار ویژه
criterion	ملاک
pedal curve	منحنی پادکی
cubic curve	منحنی درجه سوم
catenary	منحنی زنجیری
trident	منحنی سه‌دندانه
brachistochrone	منحنی کوتاه‌ترین زمان
four leaved rose	منحنی گل چهاربرگی
catacaustic curves	منحنیهای محرق
isochrone	منحنی همزمان
prism	منشور
prismoid	منشورگون
generalized prismoid	منشورگون تعمیم یافته
prismatoid	منشوروار
many-valued logic	منطق چندارزشی
formal logic	منطق صوری

logistic	منطق‌گرا
spherical zone	منطقه‌کروی
mosaic	موزائیک
generating	مولد
lie between	میان بود
false	نادرست (منطق)
incommensurable	نامتوافق
sequential relation	نسبت دنباله‌ای
embedded	نشانده
indicator	نشانگر
nephroid	نفروئید
cuspid	متر: منحنی کلیه‌شکل
point of inflection	نقطه بازگشت
symmedian point	نقطه عطف
Möbius strip	نقطه هم‌میان
optical	نوار موبیوس
optics	نورشناختی
semigroup	نورشناسی
variation	نیمگروه
rectangular hyperbola	وازیاسیون
hexagram	هندلوی متساوی‌الساقین
connectivity	هگزگرام
isoperimetric	همبندی
collinear	هم‌پیرامون
concurrent	همخط
isogonal	همرس
homeomorphic	همزایه
uniform convergence	همسانریخت
congruent	همگرایی یک‌نواخت
demonstrative geometry	همنهشت
	متر: مساوی
	هندسه برهانی

elliptic geometry	هندسه بیضوی
descriptive geometry	هندسه ترسیمی
synthetic geometry	هندسه ترکیبی
similarly geometry, plane equiform geometry	هندسه تشابه
projective geometry	هندسه تصویری
intrinsic geometry	هندسه ذاتی
parabolic geometry	هندسه سهموی
extrinsic geometry	هندسه عارضی
Kleinian geometry	هندسه کلاینی
plane centro-affine geometry	هندسه مسطحه آفین مرکزدار
subconscious geometry	هندسه ناخودآگاه
point geometry	هندسه نقطه‌ای
geometrography	هندسه نگاری
analysis situs	هندسه وضع
hyperbolic geometry	متر: توپولوژی
equiform geometry	هندسه هذلولوی
modulus	هندسه همشکلی
homology	هنگ
	هومولوژی

فهرست راهنما

۱۴۹، ۱۷۲، ۱۸۰، ۲۰۹ - ملی علوم ایالات متحده آمریکا ۲۰۰ - ملی لینچتی ۲۰۸ آکتا (دویتورد) ۱۰۷ آکرمان، و. ۲۵۲ آلبرت، آ. آ. ۲۲۲ آنالیز ۴۳ - بردادی (گیس) ۲۲۳ آنتیفون سوفسطائی ۸۲ آنیزی م. گ. ۱۵۰ آونگ - سیکلوئیدی ۶۲ - قانونی ۶۸ اثربولیدس ۳۱۹ پارادوکس - ۳۱۹ اثودوکسوس ۳۱۶، ۸۲، ۸۱ روش افنای - ۸۱ اپتیک ۶۷ اپل، ک. ۳۳۴ ای سیکلوئید ۷۴-۷۵ ایمنیدس ۳۱۹ پارادوکس - ۳۱۹ اتحاد ژاکوبی ۲۲۲ اتحادیه ریاضیدانان آلمانی ۲۱۰	آبل، ن. ۵۰، ۱۰۲، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۲، ۲۳۷ آزمون همگرایی - ۱۷۸ تصویر - ۱۷۸ حل معادله درجه پنجم کلی - ۱۷۷ قضیه - ۱۷۸ معادله انتگرالی - ۱۷۸ آپولونیوس ۲۱، ۴۴، ۶۳، ۲۴۶ مقاطع مخروطی - ۶۸ آدامار، ژ. ۲۶۷ آدلر، ا. ۲۳۲ آراگو، ف. ۱۳۲ آرشيو ریاضیات و فیزیک ۲۰۹ آزمون - ریشه کوشی ۱۷۶ - نسبت کوشی ۱۷۶ - همگرایی آبل ۱۷۸ آکادمی - پروس ۱۲۹، ۱۳۵ خلاصه مذاکرات - سن پترزبورگ ۱۳۰ - سن پترزبورگ ۱۲۴، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۴ - علوم برلین ۱۰۷، ۱۲۵ - علوم گوتینگن ۵۴ - فرانسه ۲۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۴۸

- باسکال ۲۳
- پیوستگی ۱۹
- پیوستگی پونسله، ۲۳۴، ۲۳۶
- پیوستگی هندسه ۲۳۶
- تداوم صورتهای معادل ۱۹۱
- توازی اقلیدس ۱۳۷، ۱۴۲، ۱۴۹
- ۱۸۴-۱۸۵، ۱۸۸، ۱۸۹، ۲۱۶
- دور فاسد (راسل) ۳۱۹
- دوگانگی (پونسله) ۲۳۴، ۲۳۵-۲۳۶
- دیریکله ۱۸۳
- موضوع پاش ۳۴۴-۳۴۵
- موضوع پاش پیوستگی (ددکیند) ۳۴۳-۳۴۴
- اصول ریاضی فلسفه طبیعی (نیوتن) ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۹۸، ۲۰۰
- اصول فلسفه (دکارت) ۴۵
- اصول کاوالیری ۸۹-۹۲، ۱۱۱-۱۱۲
- اصول کواترنیونها (همیلتن) ۲۰۰
- اصول مقدماتی مکانیک آماری (گیس) ۲۲۳
- اصول هندسه (لژاندر) ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۸۷
- اعداد
- اول توأمان ۲۶۸
- اول فرما ۲۶۹
- اول مرسن ۶۳
- برنولی ۱۲۳، ۱۵۰-۱۵۱
- تام ۶۳
- ترانسفینی ۳۰۳
- مقلوبی ۲۶۸
- اعمال دانشوران ۱۰۷، ۱۲۲
- اقلیدس ۸، ۱۳۷، ۱۶۸، ۱۸۴، ۲۶۶، ۲۶۷
- اصل توازی ۱۴۲
- اصول-۸، ۲۲، ۶۶، ۹۲، ۹۹، ۱۱۰، ۱۴۲
- ۱۸۵، ۱۹۱، ۲۰۶، ۲۹۵-۲۹۸
- دانهادکی (موهر) ۲۳۱
- گزارش سالانه - ۲۱۰
- اجتماع مجموعه‌ها ۱۱۶
- احتمال ۵۵، ۶۱، ۷۳، ۱۲۴، ۱۲۵-۱۲۷، ۱۴۰
- داوری ۱۲۷
- احتوای مجموعه‌ها ۱۰۷
- ادیسون، ت. ۱۷
- اراتستن ۲۶۶، ۲۹۲
- ارسطو ۱۷۹، ۳۱۳
- چرخ - ۳۴
- ارشمیدس ۸۳، ۸۴، ۸۷، ۸۹، ۹۸، ۱۱۰، ۱۱۱
- ۱۶۷، ۱۷۹، ۲۴۶
- ارمیت، ش. ۱۷۹، ۲۰۴، ۲۰۶-۲۰۸، ۳۰۷
- اسپیکر ۲۲۸
- استرلینگ، ج. ۱۲۸
- استقرای ریاضی ۲۶
- استوین، س. ۸۷، ۹۵، ۱۷۹
- اسقف بارکلی ۱۲۸
- اسکات، د. س. ۳۳۴
- اسکوت، پ. ۲۲۸
- اسکولم، ت. ۳۱۹
- اسلوزه، ر. ۶۵، ۶۶، ۹۴
- اسمیت، د. ی. ۹
- اسنل، و. ۶۵
- اشتايفر، ی. ۲۲، ۶۰، ۲۰۱، ۲۲۸، ۲۳۲، ۲۳۴
- ۲۳۶، ۲۶۰
- بسطهای منظم ۲۳۷
- تصویر - ۲۳۸
- نقاط - ۳۹
- اشتاوت، ک. گ. ف. ۱۵۱، ۲۳۴، ۲۳۷-۲۳۸
- هندسه وضع - ۲۳۸
- اشترک مجموعه‌ها ۱۱۶
- اشلفلی، ل. ۲۴۴
- اشلگل، و. ۲۴۴
- اصل
- ارشمیدس ۱۱۰

- مبری از هر خطا (ساگری) ۱۸۵
 اکول پلی تکنیک (دارالفنون) ۱۳۸، ۱۴۴
 ۱۵۰
 اکول نورمال (دارالمعلمین) ۱۳۸
 الر، ف. ۳۳۵
 الکساندر، ج. و. ۳۱۰
 امتناع ساختمانهای اقلیدسی ۲۲۹-۲۳۱
 امید اخلاقی ۱۲۴
 امید ریاضی ۶۱
 انتگرال
 تاریخچه کلمه - ۱۲۳
 - معین ۲۷
 انتگرالگیری ۸۷، ۸۴، ۸۰، ۱۹، ۹۶، ۹۲-۹۸
 انتگرالهای آبدی ۱۷۸
 انتگرالهای ابدی ۱۴۳
 انجمن
 - آمریکایی ریاضی ۲۱۰
 بولتن - آمریکایی ریاضی ۲۱۰
 بولتن - ریاضی فرانسه ۲۱۰
 خلاصه گزارشها در - ریاضی ایتالیا ۲۱۰
 خلاصه مذاکرات - آمریکایی ریاضی ۲۱۰
 خلاصه مذاکرات - ریاضی ادینبورگ ۲۱۰
 - ریاضی ادینبورگ ۲۱۰
 - ریاضی ایتالیا ۲۱۰
 - ریاضی فرانسه ۲۱۰
 - ریاضی لندن، ۲۱۰
 - سلطنتی لندن، ۶۱، ۶۶، ۶۷، ۹۶، ۱۰۰،
 ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۶، ۱۱۶، ۲۰۹
 - علوم طبیعی سویس، ۱۳۰
 کارنامه - آمریکایی ریاضی ۲۱۰
 انجمن
 - های اصلی ۲۸۱
 - ی کلی ۲۸۱
 - ی گاوسی ۲۸۱
 - ی میانگین ۱۵۰
 اندیشه‌ها (باسکال) ۶۱
 اندیشه‌های فیزیکی - ریاضی (مرسن) ۶۳
 انعکاس ۶۲
 انعکاس ۶۲
 - مضاعف ۶۲
 انولوسیون، ۲۱
 اوتورد، و. ا. ۱۰، ۱۳-۱۷۷، ۹۵
 تصویر - ۹
 دواير تناسب - ۱۰
 راهنمای ریاضیات - ۱۱، ۱۰
 کلاویس - ۹۹
 مثلثات - ۱۰
 اودنر، و. ت. ۳۳۰
 اولدنبورگ، ه. ۱۰۲، ۱۰۶، ۱۵۳
 اوپلر، ل. ۲۱، ۵۴، ۵۷، ۷۲، ۱۲۴، ۱۲۹-
 ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۳، ۱۵۳،
 ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۶۹، ۱۷۵، ۱۷۹، ۲۰۳، ۲۲۸،
 ۲۲۹، ۲۴۱، ۲۶۸، ۲۸۴، ۲۸۵، ۳۰۱، ۳۰۹
 تابع ϕ - ۱۳۱، ۷۲
 تأسیس حساب انتگرال - ۱۳۲
 تأسیس حساب دیفرانسیل - ۱۳۲
 تصویر - ۱۳۰
 خط - ۱۳۱، ۲۲۹
 روش - ۱۳۱
 قضیه - ۱۳۱
 مدخل در آنالیز بینهایت کوچکهای -
 ۱۳۲، ۱۵۴
 اوپلر، ی. آ. ۱۳۳
 اینشتین، آ. ۷، ۱۷۹، ۲۴۸، ۲۵۰، ۲۵۸، ۲۶۵،
 ۳۰۱، ۳۱۵
 بایج، ج. ۱۰۸، ۳۳۱-۳۳۲
 تصویر - ۳۳۲
 ماشین تحلیلی - ۳۳۲
 ماشین تفاضل - ۳۳۱
 - های اصلی ۲۸۱
 - ی کلی ۲۸۱
 - ی گاوسی ۲۸۱
 - ی میانگین ۱۵۰

- بارکلی، ج. ۲۸۳
 بازی همیلتنی ۲۲۴
 باشه دومزیریاك ۷۵،۶۳،۵۴،۵۲
 مسائل مطبوع و لذت بخش - ۷۵،۶۳
 بالدوین، ف. ا. ۳۳۱
 براوثر، ل. ا. ی. ۳۲۶، ۳۲۴، ۳۱۰، ۲۶۰
 قضیه پایانی - ۳۲۶
 قضیه نقطه ثابت - ۳۲۶
 برتران، ژ. ۲۴۷
 برتلسن، ن. پ ۲۶۶
 بردارها ۲۲۳
 مجموع - ۲۲۳
 برنامه ارلانگر ۲۴۸ - ۲۵۱، ۲۸۲، ۳۰۰، ۳۰۱
 برنولی، د. ۱۲۹، ۱۲۴، ۵۷
 نیدرودینامیک - ۱۲۴
 II - ۱۲۵
 برنولی، ك ۱۲۵
 برنولی، ن ۱۳۴، ۱۲۹، ۱۲۴
 برنولی، یا ۷۵، ۵۷، ۱۲۲ - ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۹،
 ۱۳۴، ۱۵۰، ۱۵۳، ۲۳۹
 تصویر - ۱۲۲
 فن حدس زدن - ۱۲۶، ۱۲۳، ۵۷
 II - ۱۲۵
 برنولی، یو ۱۰۹، ۱۲۲ - ۱۲۳، ۱۲۹،
 ۳۰۱، ۲۸۳، ۲۴۰
 II - ۱۲۴ - ۱۲۵
 III - ۱۲۵
 برنولی، یو. ك. ۱۲۵
 برنیس، پ. ۳۱۹، ۳۱۲
 مبانی ریاضی - ۳۲۸، ۳۱۲
 رو، آ. ۸، ۹۲، ۹۴، ۹۶ - ۹۹، ۱۰۲، ۱۱۳،
 ۱۷۷
 تصویر - ۹۷
 ددوسی نورشناسی و هندسه - ۹۸، ۹۶
 پروكار، ا. ۲۲۸
 نقاط - ۲۲۹
 برونكر، و. ۶۶ - ۶۷
 برهان خلف مضاعف، ۸۷، ۸۵، ۸۳
 بریانسون، ش. ژ. ۲۳۵، ۲۳۴، ۲۲
 بریگز، ا. ۸
 حساب لگاریتم - ۶
 برینگت، ا. س. ۶۵
 بسط
 - تیلر ۱۵۲
 - لاپلاس ۱۴۱
 - ماکلورن ۱۵۲
 - هندسه تحلیلی (پلوكر) ۲۴۳، ۲۴۱
 بطلمیوس ۶۳، ۱۸
 بعد چندی ۲۴۵
 بل، ا. ت. ۱۱۹
 پیدایش ریاضیات - ۱۱۹
 بلترامی، ا. ۱۸۹، ۱۸۶
 بلومنتال، ل. م. ۲۹۷
 بوارمون، پ. ۲۶۳، ۲۵۵
 بوبیلیه، ا. ۲۴۳، ۲۴۱
 بودنمیلر ۲۲۸
 بورالی - فورتی ۳۱۷
 بورباکی، ن. ۳۳۶ - ۳۳۸
 بوركههارت ۲۶۸
 بورگی، ی. ۷
 بوزجانی، ا. ۲۳۲
 بوفون، ك. ۱۷۹، ۱۶۱
 بول، ج. ۲۰۱، ۱۰۶ - ۲۰۳، ۳۱۱
 تحلیل ریاضی منطق، مقاله ای درجهت
 حساب استدلال قیاسی - ۳۱۱
 تفحص در قوانین تفكر - ۲۱۱، ۲۰۲
 رساله درباب تفاضلات متناهی - ۲۰۲

- مقاله‌ای دربارهٔ مقاطع مخروطی - ۲۴
مقالهٔ مثلث حسابی - ۲۳
- و مسئلهٔ امتیازها ۵۶
نامه‌های ولایتی - ۲۴
پاش، م. ۲۹۶، ۲۹۷
اصل موضوع - ۳۲۴-۳۲۵
پالیمپست ۸۵
پرسپکتیو ۲۱
پرگار
- تقسیم ۱۶
- های باگشادگی ثابت ۲۳۲
- های زنگ زده
پروکلوس ۱۸۴
پرون، ا. ۲۷۲
پرنسپیماتماتیکا ۳۱۲، ۳۲۱، ۳۲۲-۳۲۳
پست، ا. ل. ۳۱۴
پستالوتسی، ی. ه. ۲۳۷
پل، ج. ۲۶۷
پلاتو، ژ. ۲۴۷
پل کونیگسبرگ ۱۳۱، ۱۵۵
پلوتارک ۸۴
پلوکر، ی. ۳۹، ۲۳۴، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰-
۲۴۳، ۲۷۸
بسط هندسهٔ تحلیلی - ۲۴۱ - ۲۴۳
خطوط - ۳۹
دستگاه هندسهٔ تحلیلی - ۲۴۳
مختصات - ۲۷۸
نظریهٔ منحنیهای جبری - ۲۴۳
پلی فیر، ج. ۱۸۴
پواسون، س. د. ۱۷۱، ۱۷۳ - ۱۷۷، ۱۷۷
تصویر - ۱۷۴
ثابت - ۱۷۴
تحقیقات دربارهٔ احتمال دایره‌ای - ۱۷۴
دسالة مکانیک - ۱۷۳
نظریهٔ ریاضی حرارت - ۱۷۴
- دسالة دربارهٔ معادلات دیفرانسیل - ۲۰۲
بولسمان، ل. ۷
بولتن کاذبان، ۱۸۸
بومبلی، ر. ۱۷۸
بونه، ا. ۲۴۶
بویر، ک. ب. ۱۱۹
تاریخ ریاضیات - ۱۱۹
بویوئی، ف. ۱۷۹، ۱۸۸
بویوئی، ی. ۱۷۹، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹،
۱۹۲
بیرکهورف، گ. د. ۲۹۷
بینهایت کوچکها ۵۷، ۵۹، ۸۱
پاچوئی، ل. ۲۶
صومای - ۲۶
پاد منشور ۱۹
پارادوکس
- اثوبولیدس ۳۱۹
- اپیمنیدس ۳۱۹
- راسل ۳۱۷ - ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۵۷
- رنگ ۷۶
- سن پترزبورگ ۱۲۴
- های زنون ۸۱، ۸۲
پارن، آ. ۲۴۱
پاسکال، ا. ۲۴
لیماسون - ۲۴
پاسکال، ب. ۱، ۲۱، ۲۲ - ۲۷، ۴۳، ۵۸،
۶۱، ۷۳، ۹۶، ۱۷۹، ۲۳۵، ۳۲۹
- واحتمالات ۲۳، ۲۶-۲۷، ۵۶
اندیشه‌های - ۶۱
تصویر - ۲۴
خط - ۳۹
قضیهٔ هگزارامرمزی - ۲۲، ۲۵، ۳۸-۳۹
۲۴۱-۲۴۲، ۲۳۵
مثلث حسابی - ۳۹-۴۰

- نظریه نوین عمل‌مویین - ۱۷۴
پوانسو، ل. ۱۹
پوانکاره، ۰.۸، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۹، ۲۱۷،
۲۵۸، ۲۶۱، ۲۶۲، ۳۱۰
تصویر - ۲۶۲
هندسه وضع - ۳۱۰
پوسیلیه، ا. ۲۲۸
پونسله، ژ. و. ۲۵، ۲۲، ۱۴۴، ۲۳۲، ۲۳۴-
۲۳۶
اصل پیوستگی - ۲۳۴، ۲۳۶
اصل دوگانی - ۲۳۲، ۲۳۵ - ۲۳۶
تصویر - ۲۳۵
خواص تصویری اشکال - ۲۳۴
پوییزو، و. ۲۴۷
پیدایش ریاضیات (بل) ۱۱۹
پیرس، ب. ۳۱۱
پیرس، ج. س. ۳۱۱
پیری، ۰.۴، ۲۹۷، ۳۰۰
پیکار، ا. ۲۰۷
پیکاک، ج. ۱۹۱ - ۱۹۲
اصل تداوم صورتهای معادل - ۱۹۱
- به عنوان اقلیدس جبر ۱۹۱
جبر حسابی - ۱۹۱
مساله درجبر - ۱۹۱
تابع ۳۰۱ - ۳۰۲
اصطلاح - ۳۰۱
- بتا ۱۳۱، ۱۴۳
- تانژانت هذلولوی ۱۵۹
حوزه تعریف - ۳۰۲
حوزه مقادیر - ۳۰۲
- دیریکله ۱۸۳
- زنای ریمان ۲۵۸
- سکانت هذلولوی ۱۵۹
- سینوس هذلولوی ۱۵۸
- ϕ اویلر ۷۲، ۱۳۱
- کتانژانت هذلولوی ۱۵۹
- کسینوس هذلولوی ۱۵۸
- کوسکانت هذلولوی ۱۵۹
- گاما ۱۳۱، ۱۴۳
تارناگلیا ۲۶
تارسکی، ا. ۳۱۴
تاری ۲۲۸
تاریخ ریاضیات (بویر) ۱۱۹
تاکر، ر. ۲۲۸
تالس ۳۱۶
تامسن، و. ۳۰۹
تأملات (دکارت) ۴۵
تئودوسیوس ۹۸
تبدیل
- توپولوژیایی ۳۰۸
- چیرنهاوزن ۶۵
گروه - ۲۴۹
- لابلاس ۱۴۱
- معکوس ۲۴۹
- همانی ۲۴۹
تثلیث زاویه ۵۴، ۶۴
تحت قائم ۷۰
تحت مماس ۹۳
تحقیقات درباره احتمال داورها (پواسون)
۱۷۴
تحقیقات هندسی درباره نظریه داورها
(لیاجفسکی) ۱۸۹
تحلیل از راه سریها، فلوکسیونها، و جز آن
(نیوتن) ۱۰۲
تحلیل ریاضی منطق، مقاله‌ای در جهت حساب
استدلال قیاسی (بول) ۳۱۱
تحلیل معادلات عمومی (رفسون) ۱۱۶
تراکتریس ۲۸۲
تراکتوئید ۲۸۱

- تربیع
 - دایره ۵۴، ۶۵، ۶۷
 - سیکلوئید ۵۸
 - قطعه سهموی ۸۴
 - مقاطع مخروطی ۶۵
 - تسرملو، ا. ۲۵۲، ۳۱۹
 - تسیولکوفسکی، ک. ۷
 - تصویر
 - کروی ۶۳
 - گنجنگاشتی ۶۳
 - مرکاتور ۶۶
 - تفحص در قوانین تفکر (بول) ۲۰۲
 - تفویضات ریاضی (لورشون) ۶۳
 - تقسیمات توافقی ۲۱
 - تقسیم ناپذیرها ۵۸
 - تلسکوپ ۱۴
 - انعکاسی ۶۷
 - تمرینهای حساب دیفرانسیل (لزاندر) ۱۴۳
 - تناظر یک به یک ۳۰۲
 - توپولوژی ۳۰۸-۳۱۰
 - اصطلاح - ۳۰۹
 - جبری ۳۱۰
 - مجموعه‌ای ۳۱۰
 - توزیع
 - توربجلی، ا. ۲۳، ۵۷، ۱۷۹
 - توزیع
 - برنولی ۱۲۳
 - بواسون ۱۷۴
 - نیکو براهه ۱۷، ۱۷۹
 - تیلر، ب. ۱۲۱، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۴، ۱۳۸
 - حساب ۱۷۷
 - بسط - ۱۵۲
 - ثابت بواسون ۱۷۴
 - جادوگر آنیزی ۵۱
 - جبر ۴۳، ۱۰۰، ۱۹۵ - ۱۹۸
 - بولی ۲۰۲
 - حسایی ۱۹۱
 - ژوردان ۲۲۱-۲۲۲
 - لی ۲۲۱-۲۲۲
 - مجموعه‌ها ۱۱۶
 - نمادی ۱۹۱
 - هندسی ۴۳، ۶۹
 - جرارد، ج. ب. ۶۵
 - جنگ تحلیلی (دموآور) ۱۲۶
 - جهان (دکارت) ۴۵
 - چرچ، آ. ۳۱۳
 - چرناک، ل. ۲۶۸
 - چنبره ۱۱۲
 - چندجمله‌ای
 - لزاندر ۱۴۳
 - های برنولی ۱۲۳
 - چهارده وجهی مرکب منتظم ۱۹
 - چهارضلعی ساکری ۲۱۵
 - تارک - ۲۱۵
 - زوایای تارک - ۲۱۵
 - قاعده - ۲۱۵
 - چهاروجهی مقابل منتم ۲۷۰
 - چیرنهاوزن، ا. ۶۴-۶۵
 - تبدیل - ۶۵
 - حاصلضرب برداری ۲۲۳
 - حاصلضرب مجموعه‌ها ۱۱۶
 - حساب
 - انتگرال ۸۰، ۱۲۳
 - بینهایت کوچکها ۱۹
 - بینهایت کوچکها (والیس) ۹۵، ۹۹
 - تغییرات ۱۰۹، ۱۲۳، ۱۳۹
 - دیفرانسیل ۵۷، ۸۰، ۹۹، ۱۰۸، ۱۲۸

- دیفرانسیل و انتگرال ۹۸
- عمومی (نیوتن) ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۹۸
- گرانیگاهی (مویوس) ۱۴۶
- لگاریتم (بریگر) ۶
- مجموعه‌ات ۱۲۳
حسابان ۱۹، ۲۷، ۸۰-۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۱
حسابیدن آنالیز ۲۵۴
حلقهٔ کروی ۱۱۲
حلقهٔ لنگر ۱۱۲
حل معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی ۱۷۷
خانوادهٔ برنولی ۱۲۱-۱۲۵
خانوادهٔ کاسینی ۶۴
خصیصه‌های کلی (لایبنیتز) ۱۰۶، ۱۰۷
خط
- اوایلر ۱۳۱، ۱۶۳، ۲۶۹
- حجمها ۳۳
- فیلون ۲۷۱
- مساحتها ۳۳
- نیوتن ۱۰۴
خط‌کش محاسبه ۷، ۷۱-۳۲
عددیاب [شاخص] - ۱۲
- لگاریتمی ۱۲
- مدرن ۱۲
- مدور ۱۰
خطوط
- پلوکر ۳۹
- مزدوج همزاویه‌ای ۲۷۰
خفیتک، ل. ۳۲۱
خلاصهٔ مذاکرات آکادمی سن پترزبورگ ۱۳۰
خواجه نصیرالدین طوسی ۱۷۹
خواص
- اساسی همنهشتی ۲۱۱
- تصویری اشکال (پونسله) ۲۳۴
- توپولوژیایی ۳۰۸
داربو، ژ. گت. ۲۴۷
دازه، ز. ۲۶۸
دالامبر، ژ. ل. ۱۳۵-۱۳۶، ۱۴۱، ۱۶۹، ۱۷۹، ۲۵۳
تصویر- ۱۳۶
دسالة دینامیک- ۱۳۵
دایرة المعارف فرانسه ۱۳۶
دایره
- اوایلر ۲۶۹
- بوسان ۱۰۸
- فوئر باخ ۲۶۹
- مرکز ارتقاعی ۲۶۹
- مونز ۱۴۵
- نه-نقطه ۲۶۹، ۲۲۹
دترمینان ۱۸۱، ۲۵۶
ددکیندر. ۲۵۲، ۲۵۴، ۲۵۹، ۲۹۶، ۳۰۳، ۳۲۱
اصل موضوع پیوستگی- ۳۴۳-۳۴۴
درجهٔ کروی ۷۶
درخت ریاضیات ۳۳۸-۳۴۰
دروز-فارنی، ا. ۲۲۸
دروس نویدشناسی و هندسه (برو) ۹۶، ۹۸
دزارگ، ژ. ۲۰-۲۲، ۲۴، ۴۳، ۲۳۴، ۲۷۶
قضیهٔ دومنلت- ۲۱، ۳۷
دکارت، ر. ۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۴۳، ۴۴-
۵۱، ۶۰، ۶۳، ۹۵، ۲۴۰
اصول فلسفه- ۴۵
تأملات- ۴۵
جهان- ۴۵
فولیوم- ۵۰، ۷۱
قاعدهٔ علامتهای- ۹، ۴۹، ۷۰-۷۱، ۱۰۴
کائنات-جو- ۴۵

- گفتار در روش درست راه بردن عقل و دیوفانتوس ۵۲، ۵۴، ۶۳
 طلب حقیقت در علوم- ۴۵، ۵۰ علم حساب- ۵۲، ۶۳
 نورشناختی- ۴۵ هندسه- ۴۵، ۴۶، ۴۹، ۶۵، ۶۹-
 ۷۰، ۹۹ اصل دورفاسد- ۳۱۹
 راسل، ب. ۱۰۶، ۲۵۵، ۳۰۰، ۳۲۳-۳۲۴
 دکتربین شانس (دمو آور) ۱۲۶
 دلامین، ر. ۱۰
 دلسارت، ژ. ۳۳۷
 دمو آور، آ. ۵۷، ۱۲۱، ۱۲۵
 جنگ تحلیلی- ۱۲۶
 دکتربین شانس- ۱۲۶
 قسط السنین- ۱۲۶
 دمورگن، ا. ۱۰، ۱۹۲، ۲۰۱، ۲۰۲، ۳۰۹
 ۳۱۱ قوانین- ۲۰۲
 مجموعه پارادوکسهای- ۲۰۲
 منطق صوری- ۳۱۱
 دموکریتوس ۸۳، ۸۴، ۸۹
 دن، م. ۲۵۲
 دنیا ۳۴۶
 دوازده وجهی لوزی منظم ۱۹
 دو بروگلی، ل. ۷
 دو بون، ف. ۵۰
 دو پن، ش. ۲۲، ۱۴۴، ۲۴۷
 دور، آ. ۲۷۲
 دوکانی، م. ۲۷۲
 دیاگرامون ۱۱۶
 دیدرو، د. ۱۳۶
 دیریکله، پ. گ. ل. ۵۴، ۱۸۱، ۱۸۲-۱۸۴
 اصل- ۱۸۳
 تابع- ۱۸۳
 تصویر- ۱۸۳
 درس نظریه اعداد- ۱۸۳
 سری- ۱۸۳
 دیودونه، ژ. ۳۳۷
 دیوفانتوس ۵۲، ۵۴، ۶۳
 علم حساب- ۵۲، ۶۳
 اصل دورفاسد- ۳۱۹
 پارادوکس- ۳۱۷-۳۱۸، ۳۱۹، ۳۵۷
 پرنسپیا ماتماتیکای- ۱۰۶، ۳۱۲، ۳۲۱
 ۳۲۲-۳۲۳ تصویر- ۳۲۲
 ران، ی. ه. ۱۰، ۲۶۷
 رایت، ا. ۱۲
 رایشباخ، ه. ۳۱۴، ۳۱۵
 رساله‌ای در جبر، تاریخچه، و کاربردهای آن
 (والیس) ۹۶
 رساله‌ی توابع بیضوی و انتگرالهای اولیری
 (لزاندر) ۱۴۳
 رساله‌ی جایگشتها (ژوردان) ۱۸۰
 رساله در باب حساب تفاضلات متناهی (بول)
 ۲۰۲
 رساله در باب کواترینونها (همیلتن) ۱۹۹
 رساله در باب معادلات دیفرانسیل (بول) ۲۰۲
 رساله در حل معادلات عددی از کلیه درجات
 (لاگرانژ) ۱۳۹
 رساله در فن ترکیب (لایبنتز) ۳۱۱
 رساله‌ی دینامیک (دالامبر) ۱۳۵
 رساله‌ی فلوکسیونها (ماکلورن) ۱۲۸
 رساله‌ی مکانیک (یواسون) ۱۷۳
 رساله‌ی مکانیک سماوی (لاپلاس) ۱۴۰، ۱۹۸
 رفسون، ج. ۱۱۶
 تحلیل معادلات عمومی- ۱۱۶
 رگیومونتائوس ۸۷
 رمزی، ف. پ. ۳۲۱
 رمنوجن، ر. ۱۷۹
 رن، ک. ۸، ۱۰، ۶۷-۶۸، ۱۴۸
 تصویر- ۶۸

- روبروال، ژ. ۵۱، ۵۷-۶۰، ۷۶، ۹۰
 رودریگز، ا. ۲۴۷
 روزبال، و. و. ۱۴۱، ۷۵
 مقالات و تفریحات ریاضی - ۲۲۵
 روش
- ارشمیدس ۸۵، ۸۷
 - افنا ۸۱-۸۵، ۸۷، ۸۸، ۱۱۰
 - افنای اتودوکسوس ۸۱
 - اوپلر ۱۳۱
 - تعادل ارشمیدس ۸۵-۸۷، ۱۱۰
 - تقسیم ناپذیرهای کاولیری ۸۴، ۸۸-۹۲
 ۱۱۱-۱۱۲
 - ضرایب نامعین ۴۹
 - فرما (در تعیین ماکزیموم و مینیموم)
 ۹۳
 - فلوکسیونها ۹۹، ۱۰۲، ۱۱۶
 - کمترین مربعات ۱۴۲، ۱۶۲-۱۶۳، ۱۶۸
 - نزول نامتناهی ۵۴، ۷۸
 - نماد مختصر ۲۴۱-۲۴۲
 - نیوتن ۱۱۵
 - نیوتن-رفسن ۱۱۶
 رول، م. ۱۲۹
 رونگه، ک. ۲۵۲
 ری، ک. ت. ۲۳۴
 ریاضیات مقدماتی ۱۱۹
 ریچی کورباسترو، گ. ۲۴۸
 ریکاتی،
 جیا کومو-۱۳۴
 جیوردانو-۱۳۵
 فرانچسکو-۱۳۵
 معادله-۱۳۴
 وینچنتسو-۱۳۴
 ریمان، گ. ف. ب. ۱۸۹، ۲۴۴، ۲۴۸،
 ۲۵۱، ۲۵۵-۲۵۶، ۲۹۶، ۳۰۱،
 ۳۰۹
- تابع زتای-۲۵۸
 تصویر-۲۵۷
 سطح-۳۰۹
 فرضیهایی که اساس هندسه بر آنها مبتنی
 است، اثر-۲۹۶، ۳۰۹
 فرضیه-۲۵۸
 زنون، ۸۱، ۲۶۰
 زیادتیی کروی، ۶۵، ۷۶
 ژاکوبی، ک. گ. ی. ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۱-۱۸۲،
 ۱۸۳، ۲۲۳، ۲۳۷، ۲۴۷، ۲۶۰
 اتحاد-۲۲۳
 تصویر-۱۸۲
 ژاکوبین ۱۸۲
 ژریر ۱۷۹
 ژرگون، ژ. د. ۲۲، ۲۲۸، ۲۳۴
 ژرمن، س. ۱۵۰
 ژوردان، ک. ۱۸۰
 (سأله جایگشتها)-۱۸۰
 ژیرار، آ. ۶۵
 سائووه، ل. ۲۶۸
 ساختار جبری ۱۹۰-۱۹۸
 ساختمان
 - با پرگار ۲۳۱
 - با ستاره ۲۳۱
 دقت-۲۳۳، ۲۷۵
 سهولت-۲۳۳، ۲۷۵
 علامت-۲۳۳، ۲۷۵
 ساعت نوسانی (هویگنس) ۶۱، ۶۲
 ساکری، ج. ۱۸۵-۱۸۶
 اقلیدس مبری از هر خطای-۱۸۵
 برهان منطقی-۱۸۵
 چهارضلعی-۲۱۵

- سالنامه جدید ریاضیات ۲۰۷، ۲۰۹
 ساویل، ا. ۸
 سرووا، ف. ژ. ۲۳۶
 سره، ژ. ا. ۲۴۷
 سری
 — تیلر ۱۲۸، ۱۳۸، ۱۳۹
 — دیریکله ۱۸۳
 — فوریه ۱۷۲
 — مثلثاتی ۱۷۱
 — مرکاتور ۶۶، ۷۷
 — های نامتناهی ۶۶، ۶۷
 سطح
 خواص مطلق— ۲۴۸
 خواص نسبی— ۲۴۸
 — ریمان ۳۰۹
 هندسه ذاتی— ۲۴۸
 سطوح همسانریخت ۳۵۳
 سکانت هذلولوی ۱۵۹
 سکی کووا ۱۰۸
 سمن، ج. ۲۰۶
 نقاط— ۳۹
 سن و نان، ب. دو ۲۴۷
 سن و نسان، گک. ۶۵، ۶۶، ۶۷
 سوا، ج. ۳۷، ۲۲۹
 سوری، ف. ۲۳۲
 سومها (پاچولی) ۲۶
 سومرویل، د. م. ی. ۲۴۴
 کتابشناسی ناقلیدسی، به انضمام نظریه
 موازیها، مبانی هندسه، و فضای «بعدی»
 عدد
 — اصلی متصله ۳۰۷
 — اصلی مجموعه ۳۰۳
 — جبری ۲۹۱، ۳۰۵
 — متعالی ۲۹۱، ۳۰۵
 — هیلبرت ۳۰۷
 علامت
 سیب ۱۹
 سیب نفاق ۲۷
 سیسوئید ۶۲، ۷۴، ۹۴
 — دیو کلس ۶۲، ۷۴
 سیکلوئید وارون ۶۱، ۷۳
 سیلوستر ج. ج. ۱۸۲، ۲۰۳، ۲۰۴-۲۰۶
 ۲۴۴
 سیلوو، ل. ۱۸۱
 سینوس هذلولوی ۱۵۹
 سی و جهی لوزوی منتظم ۱۹
 شاخه گراف ۱۵۵
 شال، م. ۲۵، ۲۲، ۲۳۴
 بردسی تاریخی مبدأ و بسط روشها در هندسه
 ۲۳۸
 رساله مقاطع مخروطی— ۲۳۸
 شرودر، ا. ۳۱۱
 درسهایی در جبر منطق— ۳۱۲
 شکلهای هم پیرامون ۱۲۳
 شنیر لمان، ل. ۲۶۸
 شوالی، ک. ۳۳۷
 شوالیه دومره ۲۶
 شهود گرایبی
 فلسفه— ۳۲۴-۳۲۶
 صوری گرایبی
 فلسفه— ۳۲۶-۳۲۹
 موازیها، مبانی هندسه، و فضای «بعدی»
 عدد
 — اصلی متصله ۳۰۷
 — اصلی مجموعه ۳۰۳
 — جبری ۲۹۱، ۳۰۵
 — متعالی ۲۹۱، ۳۰۵
 — هیلبرت ۳۰۷
 علامت
 سوا، ج. ۳۷، ۲۲۹
 سوری، ف. ۲۳۲
 سومها (پاچولی) ۲۶
 سومرویل، د. م. ی. ۲۴۴
 کتابشناسی ناقلیدسی، به انضمام نظریه
 موازیها، مبانی هندسه، و فضای «بعدی»
 عدد
 — اصلی متصله ۳۰۷
 — اصلی مجموعه ۳۰۳
 — جبری ۲۹۱، ۳۰۵
 — متعالی ۲۹۱، ۳۰۵
 — هیلبرت ۳۰۷
 علامت
 سوا، ج. ۳۷، ۲۲۹
 سوری، ف. ۲۳۲
 سومها (پاچولی) ۲۶
 سومرویل، د. م. ی. ۲۴۴
 کتابشناسی ناقلیدسی، به انضمام نظریه
 موازیها، مبانی هندسه، و فضای «بعدی»
 عدد
 — اصلی متصله ۳۰۷
 — اصلی مجموعه ۳۰۳
 — جبری ۲۹۱، ۳۰۵
 — متعالی ۲۹۱، ۳۰۵
 — هیلبرت ۳۰۷
 علامت

- ۳۰۳۰۰ -
 - ساختمان ۲۳۳، ۲۷۵
 - انتگرال (f) ۱۰۸
 علم حساب (دیوفا نتوس) ۶۳:۵۲
- فرانس وان سخوتن پدر ۶۶
 فرانس وان سخوتن پسر ۶۵-۶۶، ۵۰، ۶۵-۶۶
 فرایند قطری کردن کانتور ۳۰۵
 قرشه، م. ۳۰۱، ۳۱۰
 فرض
- زاویه حاده ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۹، ۲۱۵-
 ۲۱۶
 - زاویه قائمه ۱۸۶، ۱۸۷
 - زاویه منفرجه ۱۸۶، ۱۸۷
 - متصله ۳۰۷
 فرضیهایی که اساس هندسه بر آنها مبتنی است
 (ربان) ۲۲۵، ۲۵۷، ۲۹۶، ۳۰۹، ۳۰۹
 فرضیه
- ربان ۲۵۸
 - سعایی کیهان‌نمایی (لاپلاس) ۱۴۱
 فرگه، گک. ۳۱۲
 قوانین اساسی حساب-۳۱۲
 مفهوم نگاشت-۳۱۲
 فرما، پ. ۱، ۲۳، ۲۶، ۲۷، ۴۳، ۴۴، ۵۱-
 ۵۷، ۶۳، ۶۶، ۷۲، ۷۳، ۹۲، ۹۳، ۹۴،
 ۱۱۳، ۱۵۱، ۲۶۷
 آخرین قضیه-۵۳، ۵۴، ۷۲
 روش نزول نامتناهی-۵۴، ۷۸
 قضیه کوچک-۵۳، ۷۲
 مدخل مکانهای مسطحه و فضایی-۵۱
 - واحتمال ۵۵
 - مسئله امتیازها ۵۵
 فرما، ک. س. ۵۲
 فرمول
 - استرلینگ ۱۲۶
- انتگرال کوشی ۱۷۶
 - دموآور ۱۵۱
 - ریاضی (پنانو) ۳۱۲
 - منشور گونی ۱۱۳
 فرنکل، ا. ا. ۳۱۹
 فرنه، ف. ۲۴۷
 فریکل دویسی ۵۳
 فصلنامه ریاضیات محض و کاربردها ۲۰۹
 فضا
- ی نا کسی ۳۵۰
 - ی ریمانی ۲۵۸
 - ی متریک ۳۵۰
 - ی ها و سلدورف ۳۵۵
 فلسفه
- شهودگرایی ۳۲۴-۳۲۶
 - صوری گرایی ۳۲۶-۳۲۹
 - منطوق گرایی ۳۲۱-۳۲۴
 - های ریاضیات ۳۲۰-۳۲۹
 فلکل، ا. ۲۶۷
 فلوئنت ۱۰۲-۱۰۳
 فلوکسیون ۱۰۲-۱۰۳، ۱۰۴، ۲۸۳
 - اصلی ۱۰۳
 فن حدس زدن (یا کوب برنولی) ۵۷
 قانون تحلیلی حل معادلات جبری (هارپوت)
 ۸
 فوئر باخ، ک. و. ۲۲۸، ۲۶۹
 دایره-۲۶۹
 قضیه-۲۶۹
 نقاط-۲۶۹
 فورمان، و. ۲۲۸
 قوریه، ژ. ب. ژ. ۱۴۴، ۱۷۱-۱۷۳، ۱۷۴
 ۱۷۷، ۳۰۱
 تصویر-۱۷۳
 قضیه-۱۱۵
 نظریه تحلیلی حرارت-۱۷۲-۱۷۳

- فولیوم [چینه] دکارت ۵۰، ۹۴، ۹۷
 فون نویمان، ج. ۳۱۵، ۳۳۵
 فیثاغورس ۱۷۹، ۲۶۱، ۳۱۶
 فیشر، ا. ۲۶۴
 قاعده
 اجزاء مستدیر (نبر) ۴، ۲۹-۳۰
 علامتها (دکارت) ۴۹، ۷۰-۷۱
 لایبنتز ۱۰۸، ۱۱۴
 هوپیتال ۱۰۹، ۱۲۴
 قانون
 تقابل مرعی ۱۶۹
 توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع ۱۹۰
 جابجایی جمع ۱۹۰
 جابجایی ضرب ۱۹۰
 جاذبه عمومی ۱۴۰
 شرکت پذیری جمع ۱۹۰
 شرکت پذیری ضرب ۱۹۰
 شگفت انگیز لگاریتمها (نبر) ۵
 قسط السنین غیر (دموآور) ۱۲۶
 قضیه
 آبل ۱۷۸
 اساسی جبر ۱۳۵، ۱۶۹، ۲۱۱
 اساسی حسابان ۹۸، ۹۹، ۱۰۶
 اعداد اول ۲۶۷
 اوایلر ۱۳۱، ۱۶۴
 اوایلر درباره توابع همگن ۱۳۱
 باریه ۱۵۵
 برنولی ۱۲۳
 پایائی براوتر ۳۲۶
 چند جمله ای ۱۰۸
 دالامبر ۱۳۵
 دو جمله ای ۱۰۲، ۱۱۴
 دو جمله ای کلی ۹۵، ۱۰۲
 دو مثلث (دزارگ) ۲۱، ۳۷
 - فوئر باخ ۲۶۹
 - فوریه ۱۱۵
 - کارنو ۱۶۴
 - کومانلینو ۲۷۰
 - لاگرانژ ۱۳۹
 - ماسکرونی ۲۷۳
 - مانایم ۱۶۳
 - مقدار میانگین ۱۲۹
 - منلائوس ۱۴۶
 - نقطه ثابت براوتر ۳۲۶
 - هگزگرام دمی (لاپلاس) ۳۸-۳۹،
 ۲۴۱-۲۴۲
 قطب ۲۳۶
 قطبی ۲۳۶
 قوانین حرکت سیاره ای ۱، ۱۷-۱۸، ۱۹،
 ۳۵، ۸۸
 قوانین دمورگن ۲۰۲
 کائنات جو (دکارت) ۴۵
 کاراتودوری، ک. ۲۵۲
 کاردینالیز در هندسه (مونژ) ۱۴۴
 کارتان، ا. ۲۵۱
 کاردان، ج. ۲۶
 کاردیوئید ۲۴-۷۵
 کارلایل، ت. ۱۴۲
 کارنپ، ر. ۳۲۱
 کارنو، س. ۱۴۷، ۱۷۳، ۱۷۹
 کارنو، ل. ۱۴۳، ۱۴۵-۱۴۸، ۱۴۹، ۱۶۴،
 ۱۷۷، ۱۷۹، ۲۲۹، ۲۳۴
 تصویر- ۱۴۷
 رساله در باب نظریه موربهای- ۱۴۶
 کارنو، س. ۱۴۷، ۱۷۳، ۱۷۹
 کاریتا، آ. ن. ۱۲۷
 کاژوری، ف. ۲۷۴
 تاریخ ریاضیات- ۲۷۴

- کاستی مثلث ۲۱۵
کاسینی، ج. د. ۶۴، ۱۳۳
کاسینی، ژ. ۶۴، ۱۳۳
کاسینی، ژ. د. ۶۴
کاسینی، س. ف. ۶۴
کامپوترها ۳۲۹-۳۳۵
کانتور، گت. ۱۶، ۲۵۴-۲۶۰، ۲۶۱، ۳۰۰
۳۰۵، ۳۰۳
تصویر-۲۵۹
کانتور، م. ۱۲۰
تاریخ ریاضیات- ۲۷۴، ۱۱۹
کاوالیری، ب. ۶، ۵۸، ۸۴، ۸۸-۹۲، ۹۵
۱۰۸، ۲۴۶
روش تقسیم ناپذیرهای - ۱۹، ۵۸، ۸۴، ۲۴۶
هندسه تقسیم ناپذیرهای- ۸۹
کپرنیک، ن. ۱۷۹
کپلر، ی. ۱، ۷، ۱۳، ۱۶-۱۷، ۲۰، ۶۴
۸۸، ۸۹، ۹۹، ۱۰۰
قوانین حرکت سیاره‌ای- ۱، ۱۷-۱۸، ۱۹، ۳۵
همسازی جهانهای- ۱۸
هندسه فضایی شبکه‌های شراب- ۱۹
کتابشناسی نااقلیدسی، به انضمام نظریه موازیها، مبانی هندسه، فضای بعدی (سومویل) ۲۴۴-۲۴۵
کنانزانت هذلولوی ۱۵۹
گرامپ، ک. ۲۶
کیرشهوف، گت. ر. ۲۶۳، ۳۰۹
کرله، ا. ل. ۲۰۹، ۲۳۷
کرمونا، ل. ۲۳۴
کرونکر، ل. ۲۵۹
تصویر-۲۶۰
کره مونز ۱۴۵
کریستوفل، ا. ب. ۲۴۷
کسور مسلسل ۶۷
کسیئوس هذلولوی ۱۵۸
کشف ساده‌ای از کلیه مکاشفات یوحنا قدیس (نپر) ۳
کلاین، ف. ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۹، ۲۱۶، ۲۴۸-
۲۵۲، ۳۰۰
تصویر-۲۵۱
کلاین، م. ۱۱۹
اندیشه ریاضی از عهد باستان تا عصر جدید- ۱۱۹
کلبش، ر. ف. آ. ۲۴۳
کلرو، ژ. ب. ۱۳۴
کلرو، ک. آ. ۱۳۳-۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶
تصویر-۱۳۳
معادله- ۱۳۴
نظریه- در باب شکل زمین ۱۳۴
نظریه ماه- ۱۳۴
کلروی کوچک ۱۳۴
کمیته‌های جهت دار ۱۶۴
کوآترنیون ۱۹۴
کوآدراتریکس ۹۴، ۹۷
کواپن، و. ۳۲۱
کوخ، ه. ۲۹۰
منحنی- ۲۹۰
کوداتسی، د. ۲۴۷
کوسکانت هذلولوی ۱۵۹
کوشی، آ. ل. ۹۹، ۱۷۴-۱۷۷، ۱۸۰، ۱۸۱، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۴۴، ۲۴۷، ۲۵۳، ۲۵۴
آزمون ریشه- ۱۷۶
آزمون نسبت- ۱۷۶
تصویر- ۱۷۵
کولبرن، ز. ۱۹۸
کولسون، ج. ۱۰۲
کولمار، ت. ۳۳۱
کولیک، ی. ب. ۲۶۸

- کومانندینو، ف. ۲۷۰، ۲۲۹
 قضیه—۲۷۰
 کومر، ا. ۵۴، ۱۵۱، ۲۶۰
 کونکوئید ۹۴
 کونیگسبرگ ۲۶۳
 کووالفسکی، س. ۲۶۳-۲۶۴
 تصویر—۲۶۴
 کوهن، پ. ج. ۳۰۷
 کیسی، ژ ۲۲۸
 کیلی، آ. ۱۸۱، ۱۹۶، ۱۹۸، ۲۰۳-۲۰۴
 ۲۰۵-۲۰۶، ۲۴۴، ۲۵۰، ۳۰۹
 تصویر—۲۵۳
 خط—۳۹
 مجموعه مقالات ریاضی—۲۵۳
 گالوا، ا. ۱۳۹، ۱۷۷، ۱۷۹-۱۸۱
 تصویر—۱۸۵
 گالیله، گ. ۱، ۹، ۱۳-۱۷، ۲۷، ۵۸، ۶۳، ۸۹، ۹۹، ۱۷۹، ۳۰۳
 پرگار تقسیم—۳۲-۳۳
 تصویر—۱۵
 محاوره در بارهٔ دودانش جدید و اثبات
 ریاضی آنها، اثر—۱۶، ۳۴، ۳۵
 — سقوط اجسام ۱۳-۱۴، ۳۲
 گانته، ا. ۱، ۶، ۱۲
 زنجیر—۶
 گاوس، ک. ف. ۱۳۹، ۱۵۰، ۱۶۷-۱۷۱، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۹، ۱۸۲-۱۸۳، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۲۸، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۸، ۲۶۲، ۲۸۱، ۳۰۹
 تحقیقات حسابی—۱۶۹، ۱۸۳، ۲۱۱
 تحقیقات کلی دربارهٔ رویه‌های منحنی—
 ۱۷۵
 تصویر—۱۶۸
 قانون تقابل مربعی—۱۶۹
- مهر—۱۷۰
 — وهندسهٔ ناقلیدسی ۱۷۰
 هلیوتروپ—۱۷۰
 گراسمن، ه. گ. ۱۹۲، ۱۹۶، ۱۹۸، ۲۰۰
 ۲۰۱، ۲۴۴
 حساب توسیعهای—۱۹۶، ۲۰۱
 گراف
 بند—۱۵۵
 شاخه—۱۵۵
 — های چندپیمایه‌ای ۱۵۵-۱۵۷
 — های یک پیمایه‌ای ۱۵۵، ۱۵۷
 گرشام، ت. ۸
 گروه ۱۸۵، ۲۱۳-۲۱۴
 — جایگشتی ۱۸۵
 عنصر معکوس—۲۱۳
 عنصر همانی—۲۱۳
 — نسبت خاجی ۲۱۴
 — های آبلی ۱۷۸، ۲۱۴
 — جایگشتی ۱۸۵
 گریگوری، ج. ۶۷
 سری—۶۷
 — و تربیع دایره ۶۷
 گریگوری، د. ۶۷
 گریگوری، د. ف. ۱۹۲
 گرین، ج. ۲۴۴
 گزاشهای آکادمی فرانسه ۱۷۵
 گسترده ۶۱، ۶۲، ۷۳
 گسترده ۶۱، ۶۲
 گشتاور ۸۶
 — فلوئنت ۱۵۳
 گفتار در روش درست راه بردن عقل و طلب
 حقیقت در علوم (دکارت) ۴۵
 گلفوند، ا. ا. ۳۰۷
 گلشیر، ج. و. ل. ۷۲، ۲۶۸
 گوتری، ف. ۳۰۹

- گودل، ک. ۳۲۸، ۳۰۰
گوردون، پ. ۲۶۴
گولدباخ، ک. ۲۶۸
گولدین، پ. ۹۲
گروه استوانه‌ای [سم] ۱۱۱، ۱۱۲
گیس، ج. و. ۲۰۳، ۲۰۰
اصول مقدّماتی مکانیک آماری-۲۲۳
- و آنالیز برداری ۲۲۳
- لاپلاس ۶، ۵۷، ۱۴۰-۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۹، ۱۶۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۹، ۲۰۱، ۲۶۱، ۲۶۳
بسط-۱۴۱
تبدیل-۱۴۱
تصویر-۱۴۰
دساله مکانیک سماوی-۱۴۰، ۱۹۸
نظریه تحلیلی معادلات-۱۴۰، ۱۶۱
لاتوس رکتوم [ضلع قائم] ۷۰
لاگرانژ، ژ. ۵۳، ۱۰۵، ۱۲۴، ۱۲۸، ۱۳۷-
۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۵۰، ۱۵۹، ۱۶۹، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۹، ۲۰۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷
تصویر-۱۳۸
دساله در حل معادلات عددی از کلیه درجات
-۱۳۹
مکانیک تحلیلی-۱۳۹
نظریه توابع تحلیلی شامل اصول حساب
دیفرانسیل-۱۳۸، ۲۵۳
لامبرت، ی. ه. ۱۳۶-۱۳۷، ۱۳۹، ۱۸۶، ۲۶۷
تصویر-۱۳۷
نظریه توافقی و-۱۳۷، ۱۸۶
لامه، گ. ۵۴، ۲۴۱، ۲۴۳
لانداو، ا. ۲۵۱، ۲۶۵
لاووازیه، ل. ۱۳۸، ۱۴۹
- لاهی، ف. ۲۰، ۲۱، ۳۷، ۳۸، ۶۳، ۱۴۵، ۲۴۰
لایبنتز، گ. ۱۰، ۱۰۱، ۲۴، ۲۵، ۶۴، ۸۰، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶-
۱۱۰، ۱۱۷، ۱۲۲، ۱۳۷، ۱۵۳، ۱۷۹، ۳۰۸، ۳۲۱
تصویر-۱۰۷
نخستین‌های کلی-۱۰۶، ۱۰۷
دساله در فن ترکیب-۳۱۱
لیاجسکی، ن. ۱۷۹، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۹۲، ۳۱۵
تصویر-۱۸۷
تحقیقات هندسی در باب نظریه موازیهای-
۱۸۹
هندسه عام-۱۸۹
لرد کلوین ۳۰۹
لواندر، آ. م. ۵۴، ۱۴۲-۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۹، ۱۶۸، ۱۷۲، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۶
اصول هندسه-۱۴۲، ۱۴۳، ۱۸۷
تصویر-۱۴۱
تمرینهای حساب انتگرال-۱۴۳
دساله توابع بیضوی و انتگرالهای اولی-
۱۴۳
افشنس، س. ۳۰۹، ۳۱۰
لگاریتم ۱، ۴-۸، ۸۹
- برنگزی ۶
محاسبه به روش ریشه‌ها ۲۷-۲۹
لمنیکات برنولی ۶۴، ۷۴، ۱۲۳
لموآن، ا. ۲۲۸، ۲۷۱
لنگفورد ۳۲۱
لوپیتال، م. ۱۰۹، ۱۲۳
تصویر-۱۰۹
لوکاس، آ. ۲۶۶
لوکاس، ه. ۸
لوکاسیویچ، ی. ۳۱۴

- لوکسودروم ۶۵، ۶۶
لی، م. س. ۱۸۵، ۲۲۲، ۲۴۸
لیبرشی، ه. ۱۴
لیستینگ، ی. ب. ۳۵۹
مطالعات اولیه در توپولوژی - ۳۵۹
لیماسون پاسکال ۲۴
لیمر، د. ه. ۲۶۶، ۲۶۸
لیمو ۱۹
لیندمان، ف. ۲۰۷، ۲۴۹، ۲۹۱
لیوویل، ژ. ۱۸۵
مجله ریاضیات - ۱۸۵
ماتریس ۱۹۷
ترانهاده ۲۲۲
مقارن کج ۲۲۲
ماتماتیکه آنالیز ۲۵۱، ۳۰۳، ۳۲۶، ۳۲۹
مارپیچ
فرما ۵۱
لگاریتمی ۶۵
ماسکرونی، ل. ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۷۲
تصویر ۲۳۲
هندسه پیرگار - ۲۳۱
ماشین
تحلیلی ۳۳۲
تصویر تفاضل - ۳۲۲
تفاضل ۳۳۱
حساب ۲۲، ۱۵۶
ماکزیموم و مینیموم ۵۷، ۸۵، ۹۲ - ۹۳
ماکسول، ج. ک. ۷، ۳۵۹
ماکلورن، ک. ۶۵، ۱۲۱، ۱۲۷، ۱۲۸ - ۱۲۹
۱۷۷
بسط - ۱۵۲
مسأله فلوکسیونهای - ۱۲۸
هندسه ذاتی - ۱۲۸
مؤلفه‌های هادی ۲۴۵
مالوس، ا. ل. ۲۴۷
مانتیس (در لگاریتم) ۶
مانهایم، آ. ۱۲، ۱۶۳
مبانی ریاضی (برنیس و هیلبرت) ۳۱۲، ۳۲۸
مبحث اصل موضوعه‌ها ۲۹۸ - ۳۵۵
متریک ۳۵۵
متغیر ۳۵۱
مستقل ۳۵۲
وابسته ۳۵۲
متمم (در مجموعه‌ها) ۱۱۶
مثبت
پاسکال ۲۶، ۲۷، ۳۹، ۴۵ - ۵۶
دیفرانسیل ۹۶
رولو ۱۵۴
مجله
آمریکایی ریاضی ۲۵۵، ۲۵۹
اکول پلی تکنیک ۱۴۵، ۲۵۹
ریاضیات (لیوویل) ۱۸۵
ریاضیات محض و کاربردها ۱۷۸، ۲۵۹
۲۳۶، ۲۳۷
ریاضی کیمبرج ۲۵۹
ریاضی کیمبرج و دویلین ۲۵۹
منطق علامتی ۳۱۲
نقد ریاضی ۲۱۵
مجموعه
پارادوکسها (دمورگن) ۲۵۲
شمارا ۳۵۳
عدد اصلی ۳۵۳
محور قطبی ۲۶۹
مختصات ۵۵
پلوکر ۲۷۸
دکاری ۲۳۹
دوقطبی ۲۷۶
قطبی ۲۳۹
کروی ۲۷۷

- مد ۱۵۲
مدل
- آرمانی ۲۹۸
— ملموس ۲۹۸
مربهای جادویی ۶۳
مرتبه گراف ۱۵۵
مرسن، م. ۴۴، ۵۳، ۶۳
اعداد اول — ۶۳
اندیشه‌های فیزیکی — ریاضی — ۶۳
مرغانه دکارتی ۴۹
مرکاتور، گک. ۶۶
مرکاتور، ن. ۶۶
مرکز همزایه‌ای ۵۹
مرواریدهای اسلوزه ۶۶
مسائل مطبوع و لذت بخش (باشه دومزیریاك)
۶۳، ۷۵
مسئله
- اشتاینر — لهموس ۳۴۷
— امتیازها ۲۶، ۵۵، ۷۲-۷۳
— تثلیث ۲۳۵-۲۳۱
— چهار رنگ ۳۰۹، ۳۳۴-۳۳۵
— سوزن بوفون ۱۲۷، ۱۶۰-۱۶۱
— کوتاهترین زمان ۱۲۴
— همزمانی ۱۲۴
مسیر ۱۵۵
مشابهات نهر ۴
مشتگیری ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۸، ۱۰۸
مطالعات اولیه در توپولوژی (لیستینگ) ۳۰۹
مطالعه چوبهای معجزه آسا (نهر) ۳۱، ۳۵
معادلات دیفرانسیل
— با مشتقات جزئی ۱۳۵، ۱۳۹
— کوشی — ریمان ۱۷۶
— لاگرانژ ۱۳۹
معادله
- انتگرالی آبل ۱۷۸
- اوایلر ۱۵۸
— برنولی ۱۲۳، ۱۵۷-۱۵۸
— بواسون ۱۷۴
— درجه سوم چیرنهاوزن ۶۵
— دیفرانسیل اوایلر ۱۳۱
— ریکاتی ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۵۸
— کلو ۱۳۴، ۱۵۸
— لاپلاس ۱۴۱
— مشخصه ماتریس ۱۷۶
مفسر (درلگاریتم) ۶
مقاطع مخروطی ۱۹، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۴۴،
۴۹، ۶۳، ۹۵، ۹۸، ۱۰۴
مقالات و تفریحات ریاضی (بال - کاکستر)
۷۵، ۲۲۵
مقاله‌ای درباره مقاطع مخروطی (لاپلاس)
۲۴
مکاتبات باسکال - فرما ۵۶، ۶۱
مکانیک تحلیلی (لاگرانژ) ۱۳۹
مکانیک سماوی ۱۸، ۶۷، ۱۰۱
مکانیک هندسی ۱۹
مک کال، ه. ۳۱۴
متایخموس ۴۴
منحنی
- دانه برفی ۲۹۱
— درجه سوم چیرنهاوزن ۷۴
— سه دندان ۷۵
— کاپا ۹۷
— کاسینی ۶۴، ۷۴
— کوخ ۲۹۵
— لامه ۹۷
— لگاریتمی ۶۲
— زنجیری ۶۲، ۱۲۳، ۲۸۱
— های چندپیمایه‌ای ۱۳۱
— های محرق ۶۵، ۷۴، ۷۵
— های مداری شکل ۱۳۱، ۱۵۴، ۱۵۵

- های يك پیمایه ای ۱۳۱
 منشورگون ۱۱۲
 منشوروار ۱۱۲
 منطق
 --چندارزشی ۳۱۴
 --دو ارزشی ۳۱۴
 --سه ارزشی ۳۱۴
 --ریاضی ۱۰۷، ۳۱۵-۳۱۵
 --صودی (دمورگن) ۳۱۱
 فلسفه --گرایی ۳۲۱-۳۲۴
 --های غیرارسطویی ۳۱۵
 منکه، ا. ۱۰۷
 منگر، ک. ۲۷۶
 منلائوس
 قضیه -- ۳۷
 مویوس، ا. ف. ۱۴۸، ۲۳۸، ۲۴۳، ۳۰۹
 حساب گرانیکاهی ۱۴۶
 نوار- ۳۰۹
 موپرتوئی، ب. ل. م. ۱۳۳
 مورلند، س. ۳۳۰
 مورلی، ف. ۲۲۸
 مونز، گ. ۱۴۳-۱۴۵، ۱۴۹، ۱۷۱، ۱۷۷،
 ۱۷۹، ۲۴۴، ۲۴۷، ۲۴۸
 تصویر- ۱۴۴
 کاربرد آنالیز دهنده- ۱۴۴
 نقطه- ۱۶۳-۱۶۴
 هندسه عارضی- ۱۴۴
 موهر، گ. ۲۳۱
 اقلیدس دانمارکی- ۲۳۱
 خلاصه ای از شگفتیهای اقلیدس- ۴۳۳،
 ۲۷۴
 میانه ۱۵۲
 میخالسکی، ک. ۳۱۴
 میدورث، ک. ۴۴، ۶۳
 میسل، ا. ۲۶۶
 میکروسکوپ ۱۶
 میکوئل، ا. ۲۲۸
 میلز، و. ه. ۲۶۷
 میله ها (استخوانها) ی نپر ۴، ۳۰-۳۱
 میناردی، گ. ۲۴۷
 مینکوفسکی، ه. ۱۵۵، ۲۵۱
 نامساوی
 --کوشی ۱۷۶
 --مثلث ۳۵۰
 نپر، ج. ۱، ۲-۸، ۴۰
 قاعده اجزاء مستدیر- ۴، ۲۹-۳۰
 قانون شگفت انگیز لگاریتمهای- ۵
 کشف ساده ای از کلیه مکاشفات یوحنا
 قدیس- ۳
 مشابها- ۴
 مطالعه چوبهای معجزه آسای- ۳۱، ۳۰
 میله ها (استخوانها) ی- ۴، ۳۰-۳۱
 نسبت دنباله ای ۳۴۶
 نشانگر ۷۲
 نظریه
 --اعداد ۵۲
 --ایده آله ۵۴
 --برهان ۳۲۸
 --پرتابه ها ۶۰
 --پوشها ۱۰۸
 --تحلیلی احتمالات (لابلاس) ۱۴۰،
 ۱۶۱
 --توابع تحلیلی شامل اصول حساب
 دیفرانسیل (لاگرانژ) ۱۳۸، ۲۵۳
 --توازی (لامبرت) ۱۳۷، ۱۸۶
 --جنبشی گازها ۱۲۴
 --دترمینانها ۱۰۸، ۱۸۱
 --ریاضی احتمال ۵۶، ۵۷، ۷۸
 --ریاضی جز و مد ۱۲۸

- ۱۱۴، ۱۱۷، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۳۳،
۱۳۴، ۱۳۵، ۱۴۰، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹،
۱۷۷، ۱۷۹، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۸۳،
اصول ریاضی فلسفه طبیعی - ۱۰۱،
۱۰۲، ۱۰۴، ۱۹۸، ۲۰۰،
تحلیل از راه سریها، فلوکسیونها، و جزآن-
۱۰۲
تصویر - ۱۰۰
حساب عمومی - ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۹۸
منحنیهای درجه سوم و - ۱۰۲
نودشناسی - ۱۰۲، ۱۰۴
واحدهای کواترنیونی ۱۹۵
وارد، س. ۱۰
واریاسیون ۷۰
والریو، ل. ۸۷
واله پوسن، ش. ۳. ۲۶۷
والیس، ج. ۸، ۱۰، ۶۶، ۶۸، ۹۴-۹۶،
۱۳۱، ۱۷۷
تصویر - ۹۵
حساب بینهایت کوچکیهای - ۹۵، ۹۹
رساله‌ای درجبر، تاریخچه و کاربردهای
آن - ۹۶
وایتهد، ا. ن. ۱۰۶، ۲۵۵، ۳۰۰، ۳۲۳،
پرنسپیماتماتیکای - وراسل ۱۰۶،
۳۱۲، ۳۲۱
وایر شتراس، ک. ۲۵۴، ۲۵۵ - ۲۵۶، ۲۵۹،
۲۶۳
تصویر - ۲۵۶
وایل، ا. ۳۳۷
وایل، ه. ۲۵۲، ۳۲۰، ۳۲۶
ویلن، ا. ۲۵۱، ۲۹۷، ۳۱۰
ولاك، آ. ۶
ولفسکهل، پ. ۵۴
وول، و. ۱۸
ریاضی حرارت (پواسون) ۱۷۴
فشارسنج ۶۰
گالوایی معادلات ۱۸۰
گرانث ۹۹، ۱۰۰ - ۱۰۱
گروهها ۱۳۹
گسیلی بودن نور ۶۲، ۱۰۰
معادلات ۱۰۰، ۱۰۴
موجی نور ۶۲، ۱۰۰
نسبت ۱۰۴
نوعها ۳۲۳
نوبین اعداد و فرما ۵۲
نوبین عمل موبین (پواسون) ۱۷۴
نفروئید [منحنی کلیه شکل] ۷۵
نقاط
بروکار ۲۲۹
فوئر باخ ۲۶۹
کیرکمن ۳۹
مزدوج همزاویه‌ای ۲۷۱
مستدیر در بینهایت ۲۸۰
نقطه
لموآن ۲۷۱
مونژ ۱۶۳ - ۱۶۴
نماد
بینهایت (∞) ۹۵
لژاندر ۱۴۳
نوئر، آ. ا. ۲۵۲، ۲۶۴
تصویر - ۲۶۵
نوئر، م. ۲۶۴، ۲۶۵
نوار موبیوس ۳۰۹، ۳۵۴
نود شناختی (دکارت) ۴۵
نودشناسی (نیوتن) ۱۰۲، ۱۰۳
نیکول اورم ۴۴
نیوتن، آ. ۷، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۵۰،
۶۲، ۶۷، ۶۸، ۷۰، ۸۰، ۹۴، ۹۵،
۹۶ - ۹۹، ۱۰۶، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۳

ویت، ف. ۹، ۴۹، ۵۱، ۶۵، ۶۶، ۹۲،

۱۷۸، ۹۹

ویتگشتین، ل. ۳۲۱

ویلیام اهل اوکام ۳۱۴

وینگیت، ا. ۶، ۷

وینوگرادوف، ی. ۲۶۸

ویویانی، ز. ۵۹، ۶۳

هارت، ا. ۲۲۸

هاردی، ک. ا. ۲۵۸

هاریوت، ت. ۱۰، ۸-، ۱۰، ۱۷۷

فنون تحلیلی حل معادلات جبری - ۸

هاگت ۲۲۸

هالی، ا. ۸، ۶۸، ۱۰۱

هانتینگتون، ا. و. ۲۹۷، ۳۰۰

هانکل، ا. ۱۹۲

هاوسدورف، ف. ۳۵۵

فضای - ۳۵۵

هذلولیهای فرما ۵۱

هسه، ل. ا. ۲۴۳

هگل، گ. ل. ۳۱۴

هلال، ۷۶

هلمهولتز، ا. ۲۶۳، ۳۰۹

هلم هندسه ۲۷

هلیوتروب ۱۷۰

همیلتن، و. ر. ۱۳۹، ۱۷۹، ۱۹۲، ۱۹۳،

۱۹۴، ۱۹۸-، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۲۴،

۳۱۵

احول کواترینوهای - ۲۰۰

تصویر - ۱۹۹

دساله درباب کواترینوهای - ۱۹۹

هندسه

تعریف - ۲۴۹

- بر بعدی ۲۴۲ - ۲۴۶

- بر هائی ۳۳۹

- بیضوی ۱۸۹

- پرگاد (ماسکرونی) ۲۳۱

- تحلیلی ۱، ۲۰، ۴۳، ۴۶، ۵۰، ۵۱،

۱۱۹، ۱۲۰، ۲۳۹-۲۴۴

- تحلیلی فضایی ۱۴۴ - ۱۴۵

- ترسیمی ۱۴۳

- تصویری ۲۱، ۲۲، ۴۳، ۲۳۳ - ۲۳۹

اصل پیوستگی - تصویری ۲۳۲

اصل دوگانی - تصویری ۲۳۴، ۲۳۵

۲۳۶

- تصویری ترکیبی ۲۰

- جبری ۲۵

- دیفرانسیل ۱۴۲، ۲۴۶

- ذاتی (ماکلورن) ۱۲۸

- ریمانی ۲۵۸

- سهموی ۱۸۹

- عارضی (موز) ۱۴۴

- علمی (تجربی) ۳۳۹

- کلابنی ۲۵۰

- لباچفسکی ۱۸۹

- مخروطات ۱۹

- مسطحه آفین ۲۸۲

- مسطحه آفین مرکزدار ۲۸۳

- ناقلیدسی ۱۳۷، ۱۸۴، ۱۹۰ -

- ناخود آگاه ۳۳۹

- وضع ۳۰۸

- های نقطه‌ای ۲۵۰

- هذلولوی ۱۸۹

هندسه (دکارت) ۴۴، ۴۵-۴۹، ۶۵-۶۹

۹۹، ۷۰

هود، ی. ۶۵، ۶۶

هوک، ا. ۶۸، ۱۰۱

هولدر، ا. ۱۸۱

همسانریخت ۳۰۸

هومولوژی ۲۱

- هیلبرت، د. ۲۵۸، ۲۵۱، ۲۶۰، ۲۶۴، ۲۹۷،
 ۳۰۰، ۳۲۷ - ۳۲۹
 تصویر - ۳۲۷
 عدد - ۳۰۷
 مبانی ریاضی - ویرتیس ۳۲۸
 یادداشتهای آکادمی فرانسه ۱۷۲
 یلمسلو، ی. ۲۳۱
- هویگنس، ک. ۱، ۵۴، ۵۶، ۵۷، ۶۰ - ۶۱، ۶۵،
 ۶۸، ۷۳، ۱۰۶، ۱۲۴، ۱۳۳، ۱۴۸، ۱۷۹،
 ۲۴۷
 ساعت نوسانی - ۶۱، ۶۲
 هیئت فوئر باخ ۲۶۹
 هیپارخوس ۱۷۹
 هیتینگک، ا. ۳۱۵، ۳۲۵
 هیکن، و. ۳۳۴