

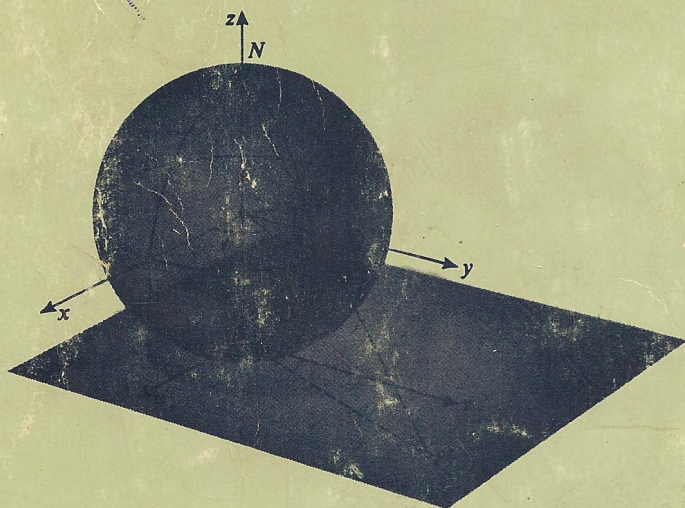
# هندسه دیفرانسیل

نوشته

آبراهام گوئنس

ترجمه

علی اکبر عالم زاده  
علی استاد باشی زاده



# آشنایی با هندسه دیفرانسیل

نوشته

آبراهام گوئتس

ترجمه

علی اکبر عالم زاده      علی استاد باشی زاده

## پیشگفتار مترجمان

هندسه دیفرانسیل سرود فارغ التحصیلی است. زمانی نواخته می شود که دانشجو عزم رفتن از دانشگاه را دارد. ناگاه افق تازه ای برابرش باز و با رشته جالبی مواجه می شود. بزودی مفتون جاذبه های آن شده و با شور و شوق به جنبه های مختلفش دست می یازد. این آشنایی خاطره آمیز بوده و ارتباطش را با ریاضی مستحکمتر می سازد به این نحو که از دانشگاه می رود ولی از ریاضیات نخواهد رفت.

هندسه دیفرانسیل سابقه ای طولانی دارد. لکن، بحث دقیقش در ریاضیات معاصر صورت می گیرد. استفاده از مشتق در هندسه ابزار توانای اوست آنچنان توانا که اعجاب همگان را برانگیخته است. حاصل تزویج رشته های هندسه و آنالیز است، دورشته بظاهر نامربوط از دو تیره مختلف با ویژگیهای متفاوت، و لذا مولود باید این چنین استثنایی باشد.

در این میحت کتاب به زبان بیگانه بسیار و به زبان فارسی اندک است. لذا، بر آن شدیم که منبع ضعیف فارسی را با ترجمه کتاب مناسبی در این رشته قویتر سازیم. انتخاب کتاب کار مشکلی نبود، زیرا کتاب حاضر بر تارک کتب مشابه می درخشید. امیدواریم این ترجمه بیش از پیش هندسه دیفرانسیل را به خواننده علاقه مند بشناساند.

علی اکبر عالم زاده علی استادبashi زاده

گروه ریاضی

دانشگاه تربیت معلم

## پیشگفتار مؤلف

کتاب حاضر حاصل درسهایی است که مولف در دانشگاه رکلاو<sup>۱</sup>، در لهستان، و دانشگاه نوتردام داده است. کتاب ویرایش کامل متنی است که در ۱۹۶۵ در لهستان<sup>۲</sup> به طبع رسیده است.

کتاب اساساً "در باب هندسه دیفرانسیل موضعی منحنیها و سطوح در فضای اقلیدسی سه بعدی (گهگاه در حالات مجردتر و در ابعاد بالاتر) است. مسائل فراگیر فقط در رابطه با قضیه گاوس - بونه مطرح شده اند. با آنکه روش و نمادگذاری ما در نظریه سطوح از آن حساب تانسورهاست، می توان کتاب را بی هیچ اطلاعی از این مبحث، حتی ذکر تعریف تانسور، مطالعه کرد. برای خواننده علاقه مند، مطالبی از تانسورها در بخشهای ۱۹، ۲۴، و ۳۰ ذکر شده است، ولی بقیه کتاب به این مطالب بستگی ندارد.

کتاب برای دوره های لیسانس پیشرفته یا شروع فوق لیسانس طرح، و زمینه معمول در حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، به انضمام حساب دیفرانسیل و انتگرال دو و سه متغیره و مبانی معادلات دیفرانسیل، دانسته گرفته شده است. اگر برهانهای منجر شده به قضیه گاوس - بونه حذف شوند، حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره لازم به تنها حساب دیفرانسیل تقلیل می یابد. کتاب را می توان در اکثر دانشکده ها در سال آخر، و در بعضی دانشکده ها حتی در سال سوم، به آسانی تدریس نمود.

جبر برداری و کمی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری به طور وسیع به کار گرفته شده است. برای راحتی خواننده، در فصل ۱ خلاصه ای از نتایج با چند برهان ذکر گردیده است.

بعضی از قسمتها که سرشت کلیتر و مجردتری دارند را می توان در اولین مطالعه یا

در یک دورهء مقدماتی تر حذف کرد. این قسمت‌ها مشتملند بر بخشهای ۱۹، ۲۴، ۳۰، و ۳۱ و مطالب خاصی در سایر بخشها. هر مطلب با ستاره‌ای شروع و به ستاره‌ای ختم می‌شود. حذف این مطالب در فهم بقیهء کتاب اثری نخواهد داشت.

اگر درس کوتاه‌تری در یک ترم مد نظر باشد، مباحث بیشتری را می‌توان کنار گذاشت، مثلاً، "زیربخشهای ۱۰۷، ۲۰۷، ۲۰۸ تا ۹۰۸، ۱۰۹ تا ۵۰۹، ۴۰۲۰، ۵۰۲۰، ۷۰۲۱، ۱۰۲۲، و بعضی از مطالب زیربخشهای ۱۰۲۳ تا ۹۰۲۳. اما در اینجا مدرس به احتیاط بیشتری تا حذف مطالب ستاره‌دار نیاز دارد.

فصل ۸ نقش خاصی در کتاب ایفا می‌کند. هدفش انتقال دانشجوی مایل به مطالعهء بیشتر هندسهء دیفرانسیل از روشها و نمادهای حساب تانسورهای کلاسیک به کار رفته در کتاب به روشها و نمادهای جدید که در مقالات تحقیقی جاری مرتب تکرار می‌شوند می‌باشد. در این فصل مطالب هندسی جدیدی عرضه نمی‌شود، لیکن با خواندن آن آمادهء رفتن به قسمت‌های پیشرفته‌تر هندسهء دیفرانسیل، با هر نمادگذاری، خواهید شد.

فصل ۸ مجردتر است و نسبت به بقیهء کتاب پختگی ریاضی بیشتری از خواننده می‌خواهد. توجیهش این است که اصولاً این فصل را کسانی می‌خوانند که مایلند مطالعاتشان را در زمینه‌ای خاص ادامه دهند، و نیز بدین خاطر که درس زمانی تدریس می‌شود که فرهنگ ریاضی شاگرد در حال رشد بسیار سریع می‌باشد. مدرس همچنین می‌تواند فصل ۸ را در رابطه با نظریهء سطوح به کار برده و شاگرد را در استفاده از هر دو نوع نماد تعلیم دهد.

تمرینات بخش مهمی از متن را تشکیل می‌دهند. در بعضی جاها مطلب به نتایجی که شاگرد در تمرینات به دست می‌آورد بستگی دارد. کتاب شامل نکات تاریخی نیست، و اسامی طبق آنچه مرسوم شده، بدون ادعایی از تقدم در کشف، به قضایا منتسب شده‌اند.

ماایلم از افراد زیر که در اصلاح کتاب سهم بسیار دارند تشکر نمایم: پروفیسور استانیسلاو گولاب<sup>۱</sup>، رومن سیکورسکی<sup>۲</sup>، و ولادیسلاو اسلیبودزینسکی<sup>۳</sup> که نسخهء لهستانی را خوانده‌اند، دکتر ویتولد روتر<sup>۴</sup> از دانشگاه راکلاو که محاسبات بسیاری را ساده کرده است.

---

1. Stanisław Gołąb

2. Roman Sikorski

3. Władysław Ślebodziński

4. Witold Roter

اصلاحات با ارزش پروفیسور توماس اف. بنکوف<sup>۱</sup>، از دانشگاه برارون، در نسخه انگلیسی را ارج می‌نهم. همچنین، مایلم از ناشران برای زحماتشان در چاپ این کتاب و خانم هووارد اوزبورن<sup>۲</sup> به خاطر ماشین کردن تمام متن تشکر نمایم. در پایان، مراتب امتنان خود را نسبت به اجازه مشفقانه برای اخذ شکل ۱۱۰۱۰ از کتاب منحنیهای ای.اچ. لاکوود<sup>۳</sup>، و شکل ۴۰۱۷ از کتاب هندسه و خیال دی. هیلبرت و کوهن - وسن<sup>۴</sup>، که ترجمه انگلیسی کتابی است که اول بار توسط اشپرینگر - فرلاگ چاپ شده، ابراز می‌دارم.

آبراهام گوئتس

نوتردام، ایندیانا

فوریه، ۱۹۷۰

---

1. Thomas F. Banchoff

2. Howard Osborne

3. E. H. Lockwood, *The Book of Curves*, Cambridge University Press

4. D. Hilbert and Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea Publishing Co.

## فهرست مطالب

### فصل ۱ مقدمه . بردارها

|    |                                              |
|----|----------------------------------------------|
| ۱  | ۱ جبر برداری                                 |
| ۱  | ۱.۱ موضوع کتاب                               |
| ۲  | ۲.۱ بردارهای مقید و بردارهای آزاد            |
| ۳  | ۳.۱ تعریف هندسی اعمال روی بردارها            |
| ۶  | ۴.۱ استقلال خطی بردارها، جهت فضای سه بعدی    |
| ۸  | ۵.۱ ضرب برداری و ضرب مختلط بردارها           |
| ۱۰ | ۶.۱ چند فرمول از هندسهء تحلیلی به شکل برداری |
| ۱۱ | ۷.۱ بردارها و مختصات                         |

|    |                                                     |
|----|-----------------------------------------------------|
| ۱۴ | ۲ مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری             |
| ۱۴ | ۱.۲ حد و پیوستگی یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی   |
| ۱۶ | ۲.۲ مشتق یک تابع برداری                             |
| ۱۹ | ۳.۲ مشتقات مراتب بالاتر، فرمول تیلور                |
| ۲۱ | ۴.۲ تعبیر سینماتیک و هندسی یک تابع برداری و مشتق آن |
| ۲۲ | ۵.۲ توابع برداری چند متغیره                         |
| ۲۴ | ۶.۲ مقایسهء توابعی که به صفر میل می کنند            |
| ۲۶ | ۷.۲ دیفرانسیل یک تابع برداری                        |

### فصل ۲ نظریهء عمومی منحنیها

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| ۲۹ | ۳ نمایش پارامتری یک منحنی         |
| ۲۹ | ۱.۳ قوس ساده                      |
| ۲۹ | ۲.۳ منحنیها و نمایش پارامتری آنها |
| ۳۲ | ۳.۳ نمایشهای پارامتری هم ارز      |
| ۳۳ | ۴.۳ منحنیهای پارامتری منتظم       |

|    |     |                                              |
|----|-----|----------------------------------------------|
| ۳۷ | ۵۰۳ | طول قوس یک منحنی . پارامتری سازی طبیعی       |
| ۴۲ | ۴   | تماس منحنیها و یک منحنی با یک سطح            |
| ۴۲ | ۱۰۴ | تماس منحنیها                                 |
| ۴۴ | ۲۰۴ | مماس بر یک منحنی پارامتری                    |
| ۵۰ | ۳۰۴ | تماس یک منحنی با یک صفحه یا کره . صفحه بوسان |
| ۵۲ | ۴۰۴ | معادله صفحه بوسان با یک پارامتری سازی کلی    |
| ۵۲ | ۵۰۴ | مجاانبهای یک منحنی                           |
| ۵۹ | ۵   | سه وجهی فرنه و فرمولهای فرنه                 |
| ۵۹ | ۱۰۵ | سه وجهی فرنه                                 |
| ۶۲ | ۲۰۵ | فرمولهای فرنه                                |
| ۶۴ | ۶   | انحنای و تاب یک منحنی                        |
| ۶۴ | ۱۰۶ | انحنای                                       |
| ۶۶ | ۲۰۶ | دایره انحنای                                 |
| ۶۸ | ۳۰۶ | تاب یک منحنی                                 |
| ۷۲ | ۴۰۶ | بردار داربو                                  |
| ۷۳ | ۵۰۶ | موضع نسبی منحنی نسبت به سه وجهی فرنه اش      |
| ۷۴ | ۷   | گسترده و گسترنده                             |
| ۷۴ | ۱۰۷ | گسترده یک منحنی                              |
| ۷۸ | ۲۰۷ | گسترده یک منحنی                              |
| ۷۹ | ۸   | معادله طبیعی یک منحنی . انواع خاص منحنیها    |
| ۷۹ | ۱۰۸ | معادله طبیعی یک منحنی                        |
| ۸۳ | ۲۰۸ | مارپیچهای تعمیم یافته                        |
| ۸۴ | ۳۰۸ | منحنیهای برتران                              |
| ۸۷ | ۴۰۸ | کره بوسان                                    |
| ۹۱ | ۵۰۸ | منحنیهای کروی                                |

### فصل ۳ نظریه منحنیهای مسطح

- ۹ منحنیهای پارامتری مسطح ۹۳
- ۱۰.۹ فرمولهای فرنه برای یک منحنی مسطح ۹۳
- ۲۰.۹ انحناى یک منحنی مسطح ۹۴
- ۳۰.۹ دایره، بوسان یا دایره، انحناى یک منحنی مسطح ۹۶
- ۴۰.۹ گسترده و گسترزده یک منحنی مسطح ۱۰۱
- ۵۰.۹ مجانبهای یک منحنی مسطح ۱۰۳
- ۱۰ نمایشهای دیگر یک منحنی مسطح ۱۰۴
- ۱۰.۱۰ معادله ضمنی یک منحنی ۱۰۴
- ۲۰.۱۰ نقاط منفرد یک منحنی که با معادله ضمنی داده شده است ۱۰۶
- ۳۰.۱۰ مختصات قطبی ۱۰۹
- ۴۰.۱۰ پوش خانواده یک پارامتری از منحنیهای مسطح ۱۱۰

### فصل ۴ سطوح در فضای سه بعدی

- ۱۱ نمایش تحلیلی سطوح ۱۱۶
- ۱۰.۱۱ سطح معمولی ۱۱۶
- ۲۰.۱۱ سطوح منتظم . نقاط منفرد ۱۲۰
- ۳۰.۱۱ مختصات منحنی الخط ۱۲۱
- ۴۰.۱۱ چندگوناهای دیفرانسیل ۱۲۸
- ۵۰.۱۱ نگاشت چندگوناهای دیفرانسیل، جادهنده و نشاننده ۱۳۰
- ۶۰.۱۱ معادله ضمنی سطح ۱۳۱
- ۷۰.۱۱ نقاط منفرد یک سطح که با معادله ضمنی داده شده است ۱۳۳
- ۱۲ صفحه مماس ۱۳۴
- ۱۰.۱۲ صفحه مماس و بردار قائم به سطحی که با نمایش پارامتری داده شده است ۱۳۴
- ۲۰.۱۲ جهت یک سطح ۱۳۷
- ۳۰.۱۲ صفحه مماس در مورد معادله ضمنی ۱۳۹

- ۱۳ پوش خانوادههایی از سطوح ۱۴۰
- ۱۰.۱۳ پوش یک خانواده یک پارامتری از سطوح ۱۴۰

|     |                                                                   |      |
|-----|-------------------------------------------------------------------|------|
| ۱۴۴ | پوش خانوادهء یک پارامتری از صفحات                                 | ۲۰۱۳ |
| ۱۴۷ | پوش یک خانوادهء دو پارامتری از سطوح                               | ۳۰۱۳ |
| ۱۴۹ | ۱۴ سطوح خطدار و گسترده                                            |      |
| ۱۴۹ | ۱۰۱۴ سطوح گسترده                                                  |      |
| ۱۴۹ | ۲۰۱۴ سطح تشکیل شده به وسیلهء مماسهای یک منحنی در فضا              |      |
| ۱۵۲ | ۳۰۱۴ سطوح مخروطی و استوانه‌ای                                     |      |
| ۱۵۳ | ۴۰۱۴ سطوح خطدار                                                   |      |
| ۱۵۵ | ۵۰۱۴ خط محض یک سطح خطدار                                          |      |
|     | فصل ۵ فرمهای درجهء دوم اساسی یک سطح                               |      |
| ۱۶۰ | ۱۵ چند نکته در باب نمادگذاری                                      |      |
| ۱۶۰ | ۱۰۱۵ نماد جمعیندی                                                 |      |
| ۱۶۳ | ۲۰۱۵ مشتق و دیفرانسیل یک تابع دو متغیره                           |      |
| ۱۶۴ | ۳۰۱۵ علایم کرونگر                                                 |      |
| ۱۶۵ | ۴۰۱۵ تعمیم به ابعاد بالاتر                                        |      |
| ۱۶۶ | ۱۶ اولین فرم اساسی                                                |      |
| ۱۶۶ | ۱۰۱۶ منحنیهای واقع بر یک سطح و بردارهای مماس                      |      |
| ۱۷۰ | ۲۰۱۶ بردارهای مماس در چندگوناگونهای دیفرانسیل                     |      |
| ۱۷۱ | ۳۰۱۶ طول قوس یک منحنی واقع بر یک سطح                              |      |
| ۱۷۲ | ۴۰۱۶ اولین فرم اساسی یک سطح                                       |      |
| ۱۷۷ | ۵۰۱۶ طول بردار مماس. زاویهء بین بردارها و بین منحنیهای روی یک سطح |      |
| ۱۸۰ | ۶۰۱۶ تغییر مختصات منحنی الخط                                      |      |
| ۱۸۲ | ۷۰۱۶ شکلهای خاص اولین فرم اساسی                                   |      |
| ۱۸۴ | ۸۰۱۶ مساحت یک سطح                                                 |      |
| ۱۸۷ | ۱۷ دومین فرم اساسی                                                |      |
| ۱۸۷ | ۱۰۱۷ انحراف سطح از صفحهء مماس                                     |      |
| ۱۸۹ | ۲۰۱۷ دومین فرم اساسی یک سطح                                       |      |

|     |                                           |      |
|-----|-------------------------------------------|------|
| ۱۹۳ | رده‌بندی نقاط یک سطح                      | ۳۰۱۷ |
| ۱۹۸ | نگاشت کروی یا گاوسی یک سطح و انحناى گاوسی | ۴۰۱۷ |
| ۲۰۱ | تغییر مختصات منحنى الخط                   | ۵۰۱۷ |

|     |                                                    |  |
|-----|----------------------------------------------------|--|
| ۲۰۲ | ۱۸ قضیه اساسی نظریه سطوح                           |  |
| ۲۰۲ | ۱۰۱۸ فرمولهای گاوس و وینگرتن برای $m_i$ و $r_{ij}$ |  |
| ۲۰۳ | ۲۰۱۸ علایم کریستوفل                                |  |
| ۲۰۸ | ۳۰۱۸ فرمولهای گاوس و کودازی                        |  |
| ۲۱۳ | ۴۰۱۸ قضیه اساسی نظریه سطوح                         |  |
| ۲۱۵ | ۵۰۱۸ تفهیم اولین فرم اساسی                         |  |

|     |                                                |  |
|-----|------------------------------------------------|--|
| ۲۱۵ | ۱۹ تانسورها و جبر تانسورها                     |  |
| ۲۱۵ | ۱۰۱۹ اشیاء هندسی                               |  |
| ۲۱۶ | ۲۰۱۹ تانسورها در فضای برداری $n$ بعدی          |  |
| ۲۱۸ | ۳۰۱۹ تانسورها به عنوان توابع چندخطی            |  |
| ۲۱۹ | ۴۰۱۹ تانسورها در فضای اقلیدسی                  |  |
| ۲۲۱ | ۵۰۱۹ اعمال بر تانسورها                         |  |
| ۲۲۳ | ۶۰۱۹ میدانهای تانسوری بر سطوح                  |  |
| ۲۲۴ | ۷۰۱۹ میدانهای تانسوری بر چندگونا‌های دیفرانسیل |  |

## فصل ۶ هندسه ذاتی سطوح

|     |                                     |  |
|-----|-------------------------------------|--|
| ۲۲۶ | ۲۰ نگاشتهای سطوح                    |  |
| ۲۲۶ | ۱۰۲۰ کلیات                          |  |
| ۲۲۷ | ۲۰۲۰ نگاشتهای ایزومتریک             |  |
| ۲۳۱ | ۳۰۲۰ ایزومتري یک سطح گسترده با صفحه |  |
| ۲۳۳ | ۴۰۲۰ نگاشت همشکل یا همزاویه         |  |
| ۲۳۹ | ۵۰۲۰ نگاشتهای هم مساحت              |  |

|     |                                  |  |
|-----|----------------------------------|--|
| ۲۴۲ | ۲۱ انحناى ژئودزیک و خطوط ژئودزیک |  |
| ۲۴۲ | ۱۰۲۱ هندسه ذاتی یک سطح           |  |

|     |       |                            |
|-----|-------|----------------------------|
| ۲۴۳ | ۲۰.۲۱ | انحنای یک منحنی روی سطح    |
| ۲۴۴ | ۳۰.۲۱ | انحنای ژئودزیک             |
| ۲۵۰ | ۴۰.۲۱ | خطوط ژئودزیک               |
| ۲۵۳ | ۵۰.۲۱ | مختصات نیمه ژئودزیک        |
| ۲۵۷ | ۶۰.۲۱ | خاصیت مینیمال خطوط ژئودزیک |
| ۲۵۹ | ۷۰.۲۱ | تاب ژئودزیک                |

|     |       |                           |
|-----|-------|---------------------------|
| ۲۶۲ | ۲۲    | سطوح با انحنای گاوسی ثابت |
| ۲۶۲ | ۱۰.۲۲ | قضایای عمومی              |
| ۲۶۴ | ۲۰.۲۲ | سطوح دوار با انحنای ثابت  |

|     |       |                                           |
|-----|-------|-------------------------------------------|
| ۲۷۰ | ۲۳    | قضیه گاوس - بونه                          |
| ۲۷۰ | ۱۰.۲۳ | گسترش یک منحنی از سطح روی صفحه            |
| ۲۷۱ | ۲۰.۲۳ | دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری روی یک سطح |
| ۲۷۵ | ۳۰.۲۳ | انتقال موازی به مفهوم لوی - سیویتا        |
| ۲۷۷ | ۴۰.۲۳ | انتقال موازی و انحنای ژئودزیک             |
| ۲۷۸ | ۵۰.۲۳ | انتقال موازی در امتداد یک کنتور بسته      |
| ۲۸۲ | ۶۰.۲۳ | قضیه گاوس - بونه                          |
| ۲۸۷ | ۷۰.۲۳ | فرمول گاوس - بونه تعمیم یافته             |
| ۲۸۹ | ۸۰.۲۳ | انتگرال انحنای                            |
| ۲۹۱ | ۹۰.۲۳ | مشخص اویلر - پوانکاره                     |

|     |       |                                                   |
|-----|-------|---------------------------------------------------|
| ۲۹۲ | ۲۴    | مشتقگیری مطلق در چندگونا‌های ریمانی               |
| ۲۹۲ | ۱۰.۲۴ | دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری و یک میدان تانسوری |
| ۲۹۴ | ۲۰.۲۴ | تانسور ریمان - کریستوفل                           |
| ۲۹۵ | ۳۰.۲۴ | تغییر مکان موازی و خطوط ژئودزیک                   |

|     |       |                                        |
|-----|-------|----------------------------------------|
|     |       | فصل ۷ خواص غیرذاتی سطوح                |
| ۲۹۶ | ۲۵    | انحنای قائم، انحنای میانگین، نقاط نافه |
| ۲۹۶ | ۱۰.۲۵ | انحنای قائم سطح                        |

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| ۲۹۸ | قضیهٔ مونیه ۲۰۲۵                   |
| ۳۰۰ | نقش کروی بردار مماس بر یک سطح ۳۰۲۵ |
| ۳۰۲ | نگاشت کروی و انحنا ی گاوسی ۴۰۲۵    |
| ۳۰۳ | انحنای میانگین یک سطح ۵۰۲۵         |
| ۳۰۶ | رابطهٔ بین انحناهای $H$ و $K$ ۶۰۲۵ |
| ۳۰۶ | نقاط نافه ۷۰۲۵                     |
| ۳۰۸ | سطوح مینیمال ۸۰۲۵                  |

|     |                                  |
|-----|----------------------------------|
| ۳۱۱ | ۲۶ راس‌تاهای مزدوج و خطوط مجانبی |
| ۳۱۱ | ۱۰۲۶ راس‌تاهای مزدوج             |
| ۳۱۴ | ۲۰۲۶ تورهای مزدوج                |
| ۳۱۷ | ۳۰۲۶ راس‌تاهای مجانبی            |
| ۳۱۸ | ۴۰۲۶ خطوط مجانبی                 |
| ۳۲۱ | ۵۰۲۶ مختصات مجانبی               |

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| ۳۲۲ | ۲۷ راس‌تاهای اصلی و انحناهای اصلی |
| ۳۲۲ | ۱۰۲۷ راس‌تاهای اصلی               |
| ۳۲۴ | ۲۰۲۷ انحناهای اصلی                |
| ۳۲۷ | ۳۰۲۷ تعامد راس‌تاهای اصلی         |
| ۳۲۸ | ۴۰۲۷ قضیهٔ اوپلر                  |
| ۳۳۰ | ۵۰۲۷ خواص اکستریمال انحناهای اصلی |

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| ۳۳۱ | ۲۸ شاخص دوپن                                         |
| ۳۳۱ | ۱۰۲۸ تعریف                                           |
| ۳۳۳ | ۲۰۲۸ شاخص دوپن و راس‌تاهای مزدوج، اصلی، و مجانبی سطح |
| ۳۳۶ | ۳۰۲۸ شاخص دوپن به عنوان حدشکلهای مقاطع مسطح          |
| ۳۳۷ | ۴۰۲۸ شاخص تعمیم یافته                                |

|     |                                |
|-----|--------------------------------|
| ۳۳۸ | ۲۹ خطوط انحنا و گستردهٔ یک سطح |
| ۳۳۸ | ۱۰۲۹ خطوط انحنا                |

|     |                             |      |
|-----|-----------------------------|------|
| ۳۴۱ | یک دستگاه مختصات خاص        | ۲۰۲۹ |
| ۳۴۲ | قضیه یوشیم اشتال            | ۳۰۲۹ |
| ۳۴۳ | یک خاصیت مشخصه خطوط انحنا   | ۴۰۲۹ |
| ۳۴۴ | گسترده یک سطح               | ۵۰۲۹ |
| ۳۴۸ | تاب ژئودزیک و راستاهای اصلی | ۶۰۲۹ |

## فصل ۸ روشهای جدیدتر در هندسه دیفرانسیل

|     |                                                      |  |
|-----|------------------------------------------------------|--|
| ۳۵۱ | ۳۰ نماد پایا                                         |  |
| ۳۵۱ | ۱۰۳۰ مقدمه                                           |  |
| ۳۵۱ | ۲۰۳۰ بردارهای مماس به عنوان اشتقاقها                 |  |
| ۳۵۳ | ۳۰۳۰ میدانهای برداری مماس                            |  |
| ۳۵۴ | ۴۰۳۰ گروه دومیدان برداری                             |  |
| ۳۵۵ | ۵۰۳۰ ضرب اسکالر بردارهای مماس                        |  |
| ۳۵۶ | ۶۰۳۰ مشتق مطلق                                       |  |
| ۳۵۹ | ۷۰۳۰ کاربردهای هندسه ذاتی سطوح                       |  |
| ۳۵۹ | ۸۰۳۰ توسعه نگاشتها به میدانهای برداری                |  |
| ۳۶۰ | ۹۰۳۰ عملگر انحنا                                     |  |
| ۳۶۲ | ۱۰۰۳۰ عملگر انحنا و انحنا گوسی                       |  |
| ۳۶۴ | ۱۱۰۳۰ دومین فرم اساسی                                |  |
| ۳۶۵ | ۱۲۰۳۰ تعمیم به چندگونا‌های ریمانی                    |  |
| ۳۶۸ | ۱۳۰۳۰ مشتگیری مطلق از تانسورها                       |  |
| ۳۷۰ | ۱۴۰۳۰ جادهنده‌ها از چندگونا‌ها در یک چندگونای ریمانی |  |

|     |                                                             |  |
|-----|-------------------------------------------------------------|--|
| ۳۷۱ | ۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی                                   |  |
| ۳۷۱ | ۱۰۳۱ فرمهای دیفرانسیل خطی بر یک سطح                         |  |
| ۳۷۳ | ۲۰۳۱ فرمهای دیفرانسیل خطی در ابعاد بالاتر                   |  |
| ۳۷۳ | ۳۰۳۱ نگاشتها و فرمهای دیفرانسیل                             |  |
| ۳۷۵ | ۴۰۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی درجه دوم و ضرب برونی فرمهای خطی |  |
| ۳۷۹ | ۵۰۳۱ لم کارتان                                              |  |
| ۳۷۹ | ۶۰۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی از درجه دلخواه                  |  |

|     |                                                             |       |
|-----|-------------------------------------------------------------|-------|
| ۳۸۴ | دیفرانسیل برونی یک فرم دیفرانسیل خطی                        | ۷۰۳۱  |
| ۳۸۷ | دیفرانسیل‌های برونی فرم‌ها از درجه بالاتر                   | ۸۰۳۱  |
| ۳۸۸ | کاربردهای فرم‌های دیفرانسیل برونی                           | ۹۰۳۱  |
| ۳۸۸ | میدان کنج‌های موضعی بر یک سطح                               | ۱۰۰۳۱ |
| ۳۸۹ | کنج‌های موضعی با دو بردار مماس بر سطح و یک بردار قائم بر آن | ۱۱۰۳۱ |
| ۳۹۱ | کنج‌های متعامد بیکه و راستاهای اصلی                         | ۱۲۰۳۱ |
| ۳۹۳ | رابطه با فرم‌های اساسی                                      | ۱۳۰۳۱ |
| ۳۹۴ | واژه‌نامه فارسی به انگلیسی                                  |       |
| ۴۰۱ | واژه‌نامه انگلیسی به فارسی                                  |       |
| ۴۱۲ | فهرست راهنما                                                |       |

## ۱ مقدمه. بردارها

### ۱ جبر برداری

#### ۱.۱ موضوع کتاب

هدف از کتاب حاضر بررسی خواص عمومی منحنیها و سطوح در فضای اقلیدسی سه بعدی است. ما، همانند در هندسه تحلیلی، روش مختصات را به کار خواهیم برد. لیکن ابزارهای بررسی در هندسه تحلیلی تقریباً "به طور کامل در انحصار جبر است، حال آنکه در اینجا به طور وسیع از حساب دیفرانسیل و گهگاه از حساب انتگرال استفاده خواهد شد.

استفاده از مختصات شامل عیبهایی نیز هست چون همراه با شئی هندسی عنصری اضافی، یعنی دستگاه مختصات، را در نظر می گیریم، نتایج حاصل اشاره به رابطه آن شئی با دستگاه مختصات دارد تا با خودش. مثلاً، در صفحه، یک مقطع مخروطی در دستگاههای مختصات مختلف با معادلات مختلفی بیان می شود.

بنابراین، برای رسیدن به نتایج هندسی با معنی، باید دید که آیا نتیجه مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است یا اینکه، طبق سیاق، تحت تبدیل مختصات یا است.

برای مثال، فرمول مشهور

$$(1.1) \quad [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$$

را در نظر می گیریم، که معرف فاصله بین نقاط  $(x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_2, y_2, z_2)$  در فضای اقلیدسی سه بعدی مجهز به یک دستگاه مختصات قائم است، هر تغییر دستگاه به دستگاه مختصات قائم دیگر، مختصات نقاط را به  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  و  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  تغییر می دهد. لیکن، با قرار دادن فرمولهای متناظر تغییر مختصات، پس از محاسبه درمی یابیم که مقدار عبارت

$$[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2]^{1/2}$$

همان مقدار (۱.۱) باقی مانده است. بنابراین، فرمول (۱.۱) تحت تبدیل مختصات پایاست، و در باب نقاطی که از انتخاب دستگاههای مختصات مستقل هستند اطلاعاتی هندسی به ما می دهد.

امتحان پایا بودن ممکن است به محاسباتی پیچیده، و یا دست کم وقت گیر، منجر شود، که می توان آنها را با استفاده از بردارها به نحو قابل ملاحظه ای ساده کرد.

فرض می کنیم خواننده با مبانی جبر برداری آشنایی داشته باشد. از اینرو، این فصل فقط فشرده ای است از مفاهیم و نتایجی اساسی، به صورت قاعده و بدون اثبات که بعداً در کتاب مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

### ۲.۱ بردارهای مقید و بردارهای آزاد

یک بردار مقید در  $A$  و در فضای اقلیدسی سه بعدی جفت مرتبی است از نقاط مانند  $A, B$ ، یا پاره خط جهت داری است چون  $AB$  به مبدا  $A$ ، ما این بردار را با  $\overrightarrow{AB}$  نشان می دهیم. ما بردار مقید  $\overrightarrow{AA}$  را نیز در نظر می گیریم، و آن را بردار صفر در  $A$  می خوانیم. با این کار تناظری یک به یک بین بردارهای مقید در یک نقطه ثابت و همه نقاط فضا برقرار می شود. در نتیجه، پس از انتخاب مبدا  $O$  در فضا، می توان نقطه  $P$  را با بردار  $\overrightarrow{OP}$  یکی گرفت.

پیش از معرفی اعمال بر بردارها باید بردارهای آزاد را تعریف کنیم.

دو بردار مقید  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  را همسنگ گوئیم اگر این دو بردار یک طول داشته، موازی یا منطبق بر یک خط بوده، و دارای یک جهت باشند. به عبارت دیگر، اگر نقطه وسط پاره خط  $AD$  بر نقطه وسط  $BC$  منطبق باشد، جز حالتی که نقاط  $A, B, C, D$  بر یک خط واقعند، این نیز بدان معناست که چهار ضلعی  $ABDC$  متوازی الاضلاع می باشد.

هر کلاس از تمام بردارهای مقید همسنگ، یک بردار آزاد، یا به طور خلاصه یک بردار، نامیده می شود. هر بردار مقید  $\overrightarrow{AB}$  یک بردار آزاد را معین می کند که کلاس تمام بردارهای همسنگ  $\overrightarrow{AB}$  است. بعکس، با معلوم بودن نقطه  $A$ ، هر بردار آزاد دقیقاً شامل یک بردار مقید در  $A$  است.

بردار آزاد معین شده به وسیله بردار مقید  $\overrightarrow{AB}$  را با  $\overrightarrow{AB}$  نشان می دهیم. بدین ترتیب همسنگی بردارهای مقید  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  همان اتحاد

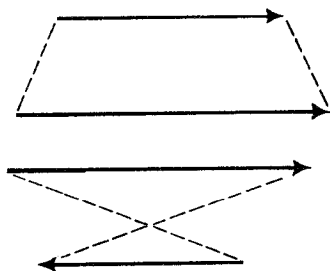
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

خواهد بود. بردارهای آزاد در حالت کلی، و در صورتی که بردارهای مقید نمایش آنها ذکر نشده باشند، با حروف سیاه الفبای لاتینی یا یونانی  $a, b, \dots, r$  یا  $\alpha, \beta, \dots, \rho$ ، و از این قبیل، نشان داده می شوند.

با معلوم بودن دو نقطه  $O$  و  $P$ ، بردار آزاد  $\overrightarrow{OP}$  را بردار موضع  $P$  نسبت به مبدا

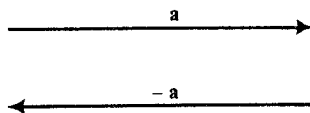
$O$  می نامند . اگر مبدأ  $O$  ثابت باشد ، تناظری یک به یک بین نقاط و بردارهای موضع آنها وجود خواهد داشت . بردارهای موضع بیشتر به جای مختصات یک نقطه به کار خواهند رفت . همه بردارهای مقید صفر همسنگ هستند و بردار صفر را نمایش می دهند که با  $0$  نشان داده می شود .

دو بردار آزاد  $a$  و  $b$  را همخط یا موازی گوئیم اگر که بردارهای مقید نمایش آنها موازی یا واقع بر یک خط مستقیم باشند . دو بردار همخط  $a$  و  $b$  را همجهت گوئیم هرگاه وقتی با بردارهای مقید  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  غیر واقع بر یک خط نشان داده می شوند ، پاره خطهای  $AC$  و  $BD$  نقطه درونی مشترک نداشته باشند ؛ در غیر این صورت ، مختلف‌الجهت خوانده خواهند شد ( شکل ۱.۱ ) .



شکل ۱.۱

طول بردار  $a$  ، که با  $|a|$  نموده می شود ، مساوی طول یک پاره خط نمایش  $a$  تعریف می شود . طول بردار صفر برابر است با  $0$  . بردارهای نا صفر همیشه طول مثبت دارند . یک بردار همطول با بردار  $a$  ولی خلاف جهت آن ( شکل ۲.۱ ) را با  $-a$  نشان داده و بردار قرینه  $a$  می نامیم . چنانچه  $a = \overrightarrow{AB}$  ،  $-a = \overrightarrow{BA}$  .



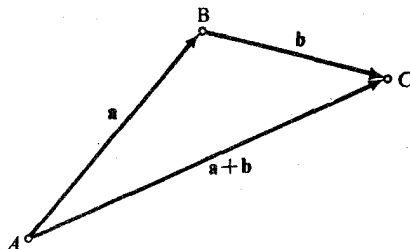
شکل ۲.۱

توجه کنید که در تعریفهای فوق از بردارهای مقید به عنوان نمایشهای یک بردار آزاد استفاده شده است . برای توجیه این تعاریف باید ثابت شود که آنها به انتخاب خاص نمایش بستگی ندارند .

### ۳.۱ تعریف هندسی اعمال روی بردارها

۱. جمع بردارها . مجموع  $a + b$  دو بردار  $a$  و  $b$  برداری است که با بردار مقید  $\overline{AC}$

ساخته شده به صورت زیر نمایش داده می شود. فرض کنیم  $A$  یک نقطه دلخواه بوده، و  $B$  نقطه‌ای باشد که  $\overrightarrow{AB}$  بردار آزاد  $a$  را نمایش داده، و  $C$  نقطه‌ای باشد که  $BC$  بردار  $b$  را نمایش دهد. در این صورت، اگر  $a = \overrightarrow{AB}$  و  $b = \overrightarrow{BC}$ ، مجموع آنها عبارت است از  $\overrightarrow{AC} = a + b$  (شکل ۳.۱).



شکل ۳.۱

مثل قبل، لازم است که این تعریف با اثبات مستقل بودنش از انتخاب نقطه  $A$  توجیه شود.

عمل جمع بردارها از قوانین زیر پیروی می کند:

$$(2.1) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{شرکتپذیری}),$$

$$(3.1) \quad a + b = b + a \quad (\text{تعویضپذیری}),$$

$$(4.1) \quad a + 0 = a,$$

$$(5.1) \quad a + (-a) = 0.$$

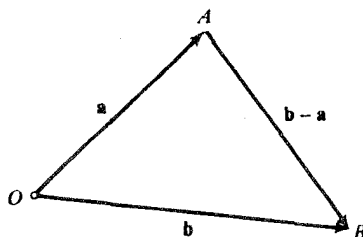
بنابراین، مجموعه بردارهای آزاد با عمل جمع یک گروه آبدی تشکیل می دهد.

بردار صفر عنصر بی اثر، و  $-a$  معکوس  $a$  در این گروه است.

همچنین، می توان تفریق بردارها را با قرار دادن

$$(6.1) \quad a - b = a + (-b)$$

تعریف کرد. هرگاه  $a = \overrightarrow{OA}$  و  $b = \overrightarrow{OB}$ ، که بردارهای مقید نمایش آنها  $\overrightarrow{OA}$  و  $\overrightarrow{OB}$  مبدأ مشترک  $O$  را دارند، آنگاه  $\overrightarrow{AB} = b - a$  (شکل ۴.۱).



شکل ۴.۱

نامساوی زیر، به نام نامساوی مثلثی، برقرار است :

$$(۷.۱) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

تساوی  $|a + b| = |a| + |b|$  برقرار است اگر و فقط اگر  $a$  و  $b$  همجهت باشند.

۲. ضرب یک بردار در عدد حقیقی  $\lambda$ . حاصل ضرب  $\lambda a$  بردار  $a$  در عدد  $\lambda$  برداری تعریف می شود به طول  $|\lambda a| = |\lambda| |a|$  و همجهت با  $a$  اگر  $\lambda > 0$  و، خلاف جهت آن، اگر  $\lambda < 0$ .

این ضرب از خواص زیر برخوردار است :

$$(۸.۱) \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$$

$$(۹.۱) \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$$

$$(۱۰.۱) \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$$

$$(۱۱.۱) \quad 1a = a, \quad (-1)a = -a,$$

$$(۱۲.۱) \quad 0a = 0, \quad \lambda 0 = 0.$$

با دو عملی که تعریف شدند، بردارهای آزاد یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی تشکیل می دهند.

۳. ضرب اسکالر بردارها. حاصل ضرب اسکالر (یا حاصل ضرب نقطه ای) دو بردار ناصفر  $a$  و  $b$  مساوی عدد  $\langle a, b \rangle = |a||b| \cos \theta$  است، که در آن  $\theta$  عبارت است از زاویه بین بردارهای مقید هم میدانی که  $a$  و  $b$  را نمایش می دهند. اگر یکی از بردارهای  $a$  و  $b$  بردار صفر باشد،  $ab = 0$ .

حاصل ضرب اسکالر  $ab = 0$  اگر و فقط اگر یکی از بردارها بردار صفر بوده یا نمایشهای  $a$  و  $b$  برهم عمود باشند. اگر دو بردار  $a$  و  $b$  همجهت باشند،  $\langle a, b \rangle = 0$ ؛ در نتیجه،  $ab = |a||b|$  در حالت خاص،

$$(۱۳.۱) \quad a^2 = |a|^2.$$

ضرب اسکالر تعویضپذیر و نسبت به جمع برداری پخشپذیر است :

$$(۱۴.۱) \quad ab = ba,$$

$$(۱۵.۱) \quad (a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac.$$

بعلاوه، از خاصیت زیر نیز برخوردار است :

$$(۱۶.۱) \quad (\lambda a)b = \lambda(ab), \quad a(\lambda b) = \lambda(ab).$$

چون حاصل ضرب اسکالر دو بردار، بردار نیست، رعایت شرکتپذیری برای آن معنی ندارد.

### ۴.۱ استقلال خطی بردارها؛ جهت فضای سه بعدی

بردارهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را وابسته خطی گوئیم اگر دستگاهی از اعداد مانند  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  وجود داشته باشد به طوری که

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \quad (17.01)$$

و لااقل یکی از این اعداد مخالف 0 باشد. جز این، یعنی اگر (17.01) ایجاب کند که  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ، بردارها مستقل خطی یا، مختصراً، "مستقل خوانده می شوند. واضح است که اگر یکی از بردارهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  بردار صفر باشد، بردارها وابسته خطی می باشند.

دو بردار ناصفر وابسته خطی اند اگر و فقط اگر نمایشهای هم مبدأ آنها بر یک خط واقع باشند. این بردارها را همخط نیز می نامند.

سه بردار  $a, b, c$  وابسته خطی اند اگر و فقط اگر نمایشهای هم مبدأ آنها در یک صفحه باشند. بنابراین، این بردارها را همصفحه خواهیم نامید.

در یک فضای سه بعدی همیشه سه بردار مستقل وجود دارد، لیکن هر مجموعه متشکل از چهار بردار وابسته خطی می باشد. بنابراین، اگر سه بردار مستقل  $e_1, e_2, e_3$  انتخاب شده باشند، هر بردار  $a$  را می توان به شکل

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

نمایش داد. ضرایب این تبدیل منحصر "به وسیله"  $e_1, e_2, e_3$  و  $a$  معین می شوند. سه بردار  $e_1, e_2, e_3$  را پایه فضا می نامند. سه بردار دیگر

$$v_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + a_1^3 e_3,$$

$$v_2 = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3,$$

$$v_3 = a_3^1 e_1 + a_3^2 e_2 + a_3^3 e_3,$$

را در نظر می گیریم، که بالانویسها در  $a_i^j$  ها فقط اندیس هستند نه نام دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

صفر است اگر و فقط اگر سه بردار  $v_1, v_2, v_3$  وابسته باشند.

اگر  $\Delta > 0$ ، می گوئیم دو سه تایی مرتب  $e_1, e_2, e_3$  و  $v_1, v_2, v_3$  از بردارها همجهت هستند. چنانچه  $\Delta < 0$ ، می گوئیم آنها مختلف جهت می باشند، بالاخص، با تعویض دو بردار یک سه تایی جهت آن تغییر می کند؛ یعنی،  $e_1, e_2, e_3$  و  $e_2, e_1, e_3$

سه تاییهایی مختلف الجته ولی  $e_1, e_2, e_3$  و  $e_2, e_3, e_1$  سه تاییهایی همجهت می باشند. به طور شهودی تر، دو سه تایی از بردارهای مستقل همجهت هستند اگر بتوان یکی از آنها را به طور پیوسته چنان به دیگری تبدیل کرد که در هیچ نقطه از فرایند استقلال از بین نرود. به طور دقیقتر، این یعنی سه تابع برداری پیوسته\* تعریف شده به ازای هر  $t \in [0, 1]$  مانند  $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$  وجود دارند به طوری که

$$w_i(0) = e_i, \quad w_i(1) = v_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

و  $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$  به ازای هر  $t$  مستقل می باشند. فرض کنیم

$$w_i(t) = \phi_i^1(t)e_1 + \phi_i^2(t)e_2 + \phi_i^3(t)e_3,$$

که در آن  $\phi_i^j(t)$  ها توابعی حقیقی و پیوسته در  $[0, 1]$  اند. در این صورت، شرطهای بالا بدین معنی اند که

$$\phi_i^j(0) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}, \quad \phi_i^j(1) = a_i^j,$$

و دترمینان  $\Delta(t) = \det \phi_i^j(t)$  مخالف صفر است.

این تعریف با تعریف قبلی معادل است. در واقع، اگر این تعریف برقرار باشد، دترمینان  $\Delta(t)$ ، که تابع پیوسته ای از  $t$  در  $[0, 1]$  است، نمی تواند تغییر علامت دهد. اما  $\Delta(0) = 1$  و  $\Delta(1) = \Delta$  در نتیجه،  $\Delta$  مثبت می باشد. از آن سو، اگر تعریف اول برقرار باشد، فرمولهای

$$w_1 = [1 + t(a_1^1 - 1)]e_1 + ta_1^2e_2 + ta_1^3e_3,$$

$$w_2 = ta_2^1e_1 + [1 + t(a_2^2 - 1)]e_2 + ta_2^3e_3,$$

$$w_3 = ta_3^1e_1 + ta_3^2e_2 + [1 + t(a_3^3 - 1)]e_3,$$

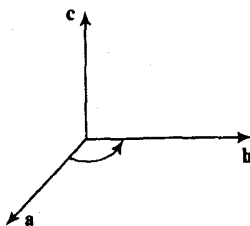
توابع پیوسته ای را تعریف می کنند که در شرایط تعریف دوم صادق هستند.

هر فضا بایک سه تایی مرتب  $e_1, e_2, e_3$  از بردارهای مستقل یک فضای جهته\* نامیده می شود. در هر فضای جهته، جهت یک سه تایی را مثبت گوییم اگر که هر جهت سه تایی پایه\*  $e_1, e_2, e_3$  منطبق باشد. در غیر این صورت، جهت منفی نامیده می شود.

در یک فضای جهته، بردار قائم  $n$  به یک صفحه، جهت دوران مثبتی را در صفحه معین می کند. مثلاً، اگر بردار  $a'$  حاصل دوران بردار  $a$  به اندازه زاویه  $\phi$ ،  $0 < \phi < \pi$ ، درجهت مثبت باشد، سه تایی  $a, a', n$  باید جهت مثبت داشته باشد.

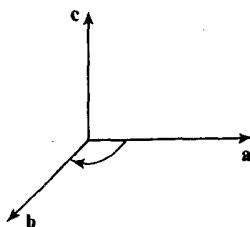
با استفاده از مفاهیم تشبیه به انسان (که هیچ معنی ذاتی ریاضی ندارند)، می توان از سه تاییهای راست دست و چپ دست از بردارها نیز سخن گفت. سه تایی  $a, b, c$  یک سه تایی راست دست است اگر همان جهت سه تایی مرکب از انگشت شست، سبابه، و میانی

دست راست را داشته باشد، سه‌تایی چپ دست است اگر این مطلب برای دست چپ صادق باشد.



شکل ۵.۱

شکل ۵.۱ یک سه‌تایی راست دست، و شکل ۶.۱ یک سه‌تایی چپ دست را نمایش می‌دهد.



شکل ۶.۱

### ۵.۱ ضرب برداری و ضرب مختلط بردارها

در یک فضای سه‌بعدی جهتدار، حاصل ضرب برداری، یا حاصل ضرب خارجی، دو بردار  $a$  و  $b$  برداری مانند  $a \times b$  تعریف می‌شود به طول  $|a||b|\sin \angle(a, b)$  عمود بر هر دو بردار  $a$  و  $b$  به‌طوری که سه‌تایی  $a, b, a \times b$  دارای جهت مثبت می‌باشد. توجه کنید که، درحالتی که  $a$  و  $b$  وابسته خطی باشند،  $\angle(a, b)$  مساوی ۰ یا  $\pi$  بوده و حاصل ضرب خارجی مساوی بردار صفر است. بعکس، اگر حاصل ضرب خارجی دو بردار صفر باشد، بردارها وابسته خواهند بود.

ضرب برداری در شرطهای زیر صدق می‌کند:

(۱۸.۱)

$$a \times b = -b \times a,$$

(۱۹.۱)

$$(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b),$$

(۲۰.۱)

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c, \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

(۲۱.۱)

$$(a \times b) \times c = (ac)b - (cb)a.$$

اتحاد آخر، که یک حاصل ضرب خارجی مکرر را برحسب حاصل ضربهای نقطه‌ای بیان

می‌کند، بارها در آینده به کار خواهد آمد.

واضح است که این اتحاد وقتی یکی از بردارها صفر باشد برقرار است. بنابراین، کافی است آن را با این فرض که تمام بردارها ناصفرند ثابت کنیم. برای اثبات آن سه بردار یکه، دبدو متعامد  $e_1, e_2, e_3$  را به طریق زیر اختیار می‌کنیم:  $e_1 = (1/|a|)a$ ،  $e_2$  را در صفحه‌ای موازی  $a$  و  $b$  اختیار می‌کنیم، و  $e_3 = e_1 \times e_2$ . بردارهای  $e_1, e_2, e_3$  مستقل خطی‌اند، و هر بردار ترکیبی خطی از آنهاست. لذا، داریم

$$a = |a|e_1, \quad b = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad c = \gamma e_1 + \delta e_2 + \varepsilon e_3.$$

چون

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2 \quad (\text{چرا؟})$$

خواهیم داشت

$$a \times b = |a|e_1 \times (\alpha e_1 + \beta e_2) = |a|\beta e_1 \times e_2 = |a|\beta e_3,$$

$$(a \times b) \times c = |a|\beta e_3 \times (\gamma e_1 + \delta e_2 + \varepsilon e_3) = |a|\beta \gamma e_2 - |a|\beta \delta e_1.$$

از آن طرف،

$$(ac) = |a|\gamma, \quad (bc) = \alpha\gamma + \beta\delta$$

و

$$(ac)b - (bc)a = |a|\gamma(\alpha e_1 + \beta e_2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)|a|e_1$$

$$= |a|\gamma\alpha e_1 + |a|\gamma\beta e_2 - |a|\alpha\gamma e_1 - |a|\beta\delta e_1$$

$$= |a|\beta\gamma e_2 - |a|\beta\delta e_1,$$

و از اینجا

$$(a \times b) \times c = (ac)b - (bc)a.$$

حاصل ضرب مختلط سه بردار  $a, b, c$  به صورت اسکالر  $abc = (a \times b)c$  تعریف می‌شود.

\* قدر مطلق این حاصل ضرب حجم متوازی‌السطوحی است که با بردارهای  $a, b, c$  به عنوان یالهایی که از یک رأس مشترک خارج می‌شوند ساخته شده است، علامت حاصل ضرب مختلط با علامت جهت سه‌تایی  $a, b, c$  یکی خواهد بود.

ضرب مختلط در اتحادهای

$$(22.1) \quad abc = bca = cab = -acb = -cba = -bac$$

صدق می‌کند. حاصل ضرب مختلط صفر است اگر و فقط اگر سه بردار  $a, b, c$  وابسته خطی باشند.

ما به یک اتحاد دیگر نیز نیاز خواهیم داشت:

$$(23.1) \quad (a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}.$$

حاصل ضرب خارجی و حاصل ضرب مختلط هر دو به جهت فضا بستگی دارند، وقتی جهت تغییر کند، علامت حاصل ضرب نیز تغییر خواهد کرد.

### ۶.۱ چند فرمول از هندسهٔ تحلیلی به شکل برداری

همانطور که دیده شد، با انتخاب مبدا  $O$ ، تناظری یک به یک بین نقاط و بردارهای آزاد حاصل می‌شود؛ یعنی، هر نقطه  $P$  نظیر است به بردار موضعی  $\vec{OP} = \mathbf{r}$  نسبت به مبدا  $O$ . نقطه  $P$  با بردار موضع  $\mathbf{r}$  را گاهی با  $[\mathbf{r}]$  نشان خواهیم داد. حال چند فرمول معروف از هندسهٔ تحلیلی را ذکر می‌کنیم که، به جای مختصات، برحسب بردارهای موضع بیان شده‌اند.

۱. فاصله  $d$  بین نقاط  $P$  و  $Q$  با بردارهای موضع  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  برابر است با

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \quad (24.1)$$

در واقع، بردار  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  به وسیله  $\vec{PQ}$  نمایش داده می‌شود، زیرا  $\vec{OP}$  و  $\vec{OQ}$  نمایش  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  می‌باشند.

۲. معادلهٔ صفحهٔ عمود بر بردار  $\mathbf{N}$  و مار برنقطه  $P_0$  با بردار موضع  $\mathbf{r}_0$  عبارت است از

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (25.1)$$

که در آن  $\mathbf{r}$  بردار موضع نقطهٔ متغیر  $P$  از صفحه است. در واقع، معنی شرط (۲۵.۱) این است که پاره خط  $P_0P$  بر  $\mathbf{N}$  عمود است و این برای نقاط  $P$  در صفحهٔ مورد نظر و فقط همین نقاط برقرار است.

۳. معادلهٔ صفحهٔ مار برنقطه  $P_0$  و موازی دو بردار مستقل  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  عبارت است از

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{ab} = 0. \quad (26.1)$$

در واقع، بردار  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  بر صفحه عمود می‌باشد.

۴. فاصلهٔ نقطه  $P_1$  با بردار موضع  $\mathbf{r}_1$  از صفحهٔ  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$  مساوی است با

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|} \quad (27.1)$$

عبارت  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}$  دارای مقدار مثبت است اگر نقطه  $P_1$  در نیم فضایی که بردار  $\mathbf{N}$  به آن اشاره دارد واقع باشد. در غیر این صورت، عبارت مقدار منفی خواهد داشت.

در واقع،  $(r_1 - r_0)N$  مساوی  $|N| \cos \phi$  است، که در آن  $\phi$  زاویه بین نمایش  $\overrightarrow{P_0P_1}$  از  $r_1 - r_0$  و بردار قائم  $N$  می‌باشد. اما  $|N| \cos \phi$ ، یعنی تصویر  $\overrightarrow{P_0P_1}$  روی قائم به صفحه، مساوی فاصله نقطه  $P_1$  از صفحه است؛ یعنی، فرمول (۲۷.۱) برقرار است.

۵. معادله خط مستقیم مار برنقطه  $P_0$  با بردار موضع  $r_0$  و موازی بردار  $a$  به شکل زیر است:

$$(28.1) \quad (r - r_0) \times a = 0,$$

یا به شکل پارامتری معادل آن، یعنی

$$(29.1) \quad r = r_0 + ta,$$

که در آن پارامتر  $t$  تمام مقادیر حقیقی را اختیار می‌کند؛ یعنی،  $t \in (-\infty, \infty)$ . در واقع، این یک شرط لازم و کافی برای توازی  $\overrightarrow{P_0P}$  و  $a$  می‌باشد.

۶. معادله کره به شعاع  $a$  و مرکز  $P_0$  با بردار موضع  $r_0$  عبارت است از

$$|r - r_0| = a,$$

یا، معادلش،

$$(30.1) \quad (r - r_0)^2 = a^2.$$

تغییر مبدا از  $O$  به  $O'$  سبب تغییر بردارهای موضع تمام نقاط می‌شود. اگر بردار

$\overrightarrow{OO'}$  را با  $a$  نشان دهیم، بردارهای موضع جدید و قدیم  $r'$  و  $r$  نقطه  $P$  با فرمول

$$(31.1) \quad r = r' - a \quad \text{یا} \quad r' = r + a$$

به هم مربوط می‌شوند.

## ۷.۱ بردارها و مختصات

فرض کنیم دستگاه مختصات دکارتی قائم  $Oxyz$  در فضا داده شده باشد. با انتخاب بردارهای یکه  $i, j, k$  برمحورها به عنوان یک پایه، می‌توان هر بردار  $a$  را به شکل

$$(32.1) \quad a = a_x i + a_y j + a_z k$$

نمایش داد. اعداد  $a_x, a_y, a_z$  مولفه‌های بردار  $a$  نسبت به دستگاه مختصات نامیده می‌شوند.

گاهی یک بردار با مولفه‌های  $a_x, a_y, a_z$  را با  $\{a_x, a_y, a_z\}$  نشان می‌دهیم، مشروط براینکه یک دستگاه مختصات ثابت مانند  $Oxyz$  داشته باشیم. اتحادهای زیر برای بردارهای پایه

برقرارند :

$$(۳۳.۱) \quad i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = jk = ki = 0.$$

از اینها نتیجه می شود که مولفه های بردار  $a$  عبارتند از

$$(۳۴.۱) \quad a_x = ai, \quad a_y = aj, \quad a_z = ak.$$

انتخاب پایه به فضا جهت نیز می دهد. اگر این جهت را مثبت بگیریم، خواهیم داشت

$$(۳۵.۱) \quad i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j.$$

با استفاده از (۳۲.۱)، (۳۳.۱) و (۳۵.۱)، به آسانی می توان مولفه های حاصل

از اعمال روی بردارها را برحسب مولفه های بردارهای مربوطه نسبت به یک دستگاه مختصات بیان کرد. مثلاً،

$$(۳۶.۱) \quad \{a_x, a_y, a_z\} \pm \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$

$$(۳۷.۱) \quad \lambda \{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\},$$

$$(۳۸.۱) \quad \{a_x, a_y, a_z\} \{b_x, b_y, b_z\} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$(۳۹.۱) \quad \{a_x, a_y, a_z\} \times \{b_x, b_y, b_z\} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\},$$

$$(۴۰.۱) \quad \{a_x, a_y, a_z\} \{b_x, b_y, b_z\} \{c_x, c_y, c_z\} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$(۴۱.۱) \quad |\{a_x, a_y, a_z\}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

وقتی دستگاه مختصات تغییر می کند، مولفه های بردار مفروض نیز تغییر می کنند ولی روابط (۳۶.۱) تا (۴۱.۱) برای مولفه ها نسبت به دستگاه مختصات جدید برقرار می مانند. از اینرو، فرمولهای مربوطه اعمال برداری با قرار دادن مولفه های بردارها در آنها تحت تغییرات دستگاه مختصات پایا خواهند ماند. اگر بردارهای موضع نقاط را داشته باشیم، آنچه که باید برای پایایی فرمول تحقیق کنیم پایایی تحت تغییرات مبدأ است که بر بردارهای موضع اثر می گذارد.

اگر مبدأ بردارهای موضع بر مبدأ دستگاههای مختصات منطبق باشد، مختصات  $x, y, z$ نقطه  $P$  بر مولفه های بردار موضعش

$$r = xi + yj + zk$$

منطبق خواهند بود.

با استفاده از فرمولهای (۳۶.۱) تا (۴۱.۱)، می توان هر فرمول برداری را با دستگاه

معادلی از فرمولها برحسب مختصات و مولفه های نقاط و بردارها عوض کرد. مثلاً، اگر

مولفه‌های  $N$  را با  $A, B, C$  نشان دهیم، فرمول (۲۵.۱) شکل معروف

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

را به‌خود می‌گیرد.

به‌همین ترتیب، فرمول (۲۷.۱) به

$$d = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

تغییر می‌کند، و معادله\* (۲۹.۱) با دستگاه معادلات مرکب از سه معادله\*

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt$$

تعویض می‌شود، که در اینجا

$$a = mi + nj + pk.$$

تمرین

۱. ثابت کنید هرگاه بردارهای  $a, b, c$  مستقل خطی باشند، هیچ‌یک از آنها مساوی ۰ نیست.

۲. ثابت کنید هرگاه  $a$  و  $b$  بردارهایی وابسته باشند، یک جواب همزمان از معادلات

$$ax = \alpha, \quad bx = \beta$$

وجود دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{\alpha}{|a|} = \frac{\beta}{|b|}$$

هرگاه  $a$  و  $b$  متعامد باشند، جواب عمومی عبارت خواهد بود از

$$x = \frac{\alpha}{|a|^2} a + \frac{\beta}{|b|^2} b + \lambda a \times b,$$

که در آن  $\lambda$  یک پارامتر دلخواه است.

۳. ثابت کنید معادله\*

$$r \times a = b,$$

که در آن  $r$  بردار موضع یک نقطه\* متغیر است، نمایش یک خط است اگر و فقط اگر

$$ab = 0.$$

۴. با این فرض که  $a_1$  و  $a_2$  بردارهایی مستقل اند، و  $a_1 b_1 = 0, a_2 b_2 = 0$ ، ثابت کنید

فاصله\*  $d$  بین خطوط

$$r \times a_2 = b_2 \quad \text{و} \quad r \times a_1 = b_1$$

مساوی است با

$$d = \frac{|a_1 b_2 + a_2 b_1|}{|a_1 \times b_2|}.$$

۵. ثابت کنید هرگاه سه بردار  $a, b, c$  مستقل خطی باشند و

$$ra = 0, \quad rb = 0, \quad rc = 0$$

آنگاه  $r = 0$ .

۶. با این فرض که

$$a = p\mathbf{i} + q\mathbf{j},$$

$$b = s\mathbf{i} + t\mathbf{j},$$

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$r_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},$$

$$N = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k},$$

فرمولهای زیر را محاسبه کنید:

$$r - r_0 = a \quad (\text{آ})$$

$$(r - r_0)^2 \quad (\text{ب})$$

$$(ab)^2 + (a \times b)^2 = (|a||b|)^2 \quad (\text{پ})$$

$$rN = -D \quad (\text{ت})$$

تحقیق کنید (پ) یک اتحاد است که به ازای هر  $a$  و  $b$  برقرار می باشد.

۷. جمیع فرمولهای زیر بخش ۶.۱ را برحسب مختصات بیان کنید.

۲. مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری

۱۰۲ حد و پیوستگی یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی

ما در هندسه دیفرانسیل از توابع برداری یک یا دو متغیر حقیقی استفاده می کنیم. برای نمایش این توابع، حروف سیاه مانند  $f(t)$ ،  $r(t)$ ،  $r(u^1, u^2)$ ،  $v(t)$ ، و غیره را به کار می بریم.

با معلوم بودن دستگاه مختصات، هر تابع برداری  $r(t)$  معادل یک سه تایی مرتب از توابع حقیقی مانند  $x(t)$ ،  $y(t)$ ،  $z(t)$  است که، به ازای هر  $t$ ، مولفه های مقدار نظیر  $r(t)$  را نشان می دهند. رابطه بین تابع برداری و مولفه هایش عبارت است از

$$r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

یا، معادلاً،

$$x(t) = r(t)\mathbf{i}, \quad y(t) = r(t)\mathbf{j}, \quad z(t) = r(t)\mathbf{k}.$$

یک تابع حقیقی دیگر نیز هست که به تابع برداری  $r(t)$  مربوط می شود، و آن قدر مطلق این تابع یعنی  $|r(t)|$  است. این تابع، برخلاف مولفه ها، به دستگاه مختصات بستگی ندارد؛ و لذا، دارای معنی ذاتی است.

حال می توانیم مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی را برای توابع برداری تعریف کنیم. در این راه از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی آزادانه استفاده خواهیم کرد. بردار  $a$  در صورتی حد تابع برداری  $r(t)$  در  $t_0$  نامیده می شود که

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |r(t) - a| = 0.$$

(توجه کنید که در فرمول بالا حد یک تابع حقیقی را داریم). در این صورت، می نویسیم

$$r(t) \rightarrow a \quad \text{یا} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = a$$

بالاخص، فرمولهای

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |r(t)| = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = 0$$

معادل می باشند.

تابع برداری  $r(t)$  را در مجموعه  $T$  گراندار گوئیم هرگاه تابع اسکالر  $|r(t)|$  گراندار باشد؛ یعنی، عددی مانند  $M$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $t \in T$ ،  $|r(t)| < M$ . مجموع دو تابع برداری تعریف شده بر مجموعه  $T$ ، حاصل ضرب یک تابع برداری در یک تابع اسکالر، و حاصل ضرب خارجی دو تابع برداری توابعی برداری هستند که بر همان مجموعه  $T$  تعریف می شوند، حاصل ضرب اسکالر دو تابع برداری و حاصل ضرب مختلط سه تابع برداری توابعی اسکالر خواهند بود. در این مورد فرمولهای زیر برقرار می باشند:

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [u(t) + v(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} v(t),$$

$$(2.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [\lambda(t)v(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \lim_{t \rightarrow t_0} v(t),$$

$$(3.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [u(t)v(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \lim_{t \rightarrow t_0} v(t),$$

$$(4.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [u(t) \times v(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} v(t),$$

$$(5.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [u(t)v(t)w(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) \lim_{t \rightarrow t_0} w(t).$$

به بیان دقیق، این فرمولها مبین احکام زیر هستند: هر وقت حدود سمت راست یکی از فرمولها موجود باشند، حد سمت چپ آن فرمول نیز وجود دارد و معادله برقرار است.

بهرحال، وجود حد سمت چپ عموماً "حدود سمت راست را ایجاب نمی‌کند".

تابع برداری  $r(t)$  را در  $t_0$  پیوسته گوییم هرگاه در  $t_0$  تعریف شده بوده و  $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$ . این تعریف را می‌توان به شکل معادل زیر نیز بیان کرد:

تابع برداری  $r(t)$  در  $t_0$  پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر عدد  $\varepsilon > 0$  عددی مانند  $\delta > 0$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $t$  که  $r(t)$  تعریف می‌شود نامساوی  $|t - t_0| < \delta$  نامساوی  $|r(t) - r(t_0)| < \varepsilon$  را ایجاب نماید.

یک تابع پیوسته در هر نقطه از مجموعه  $T$  پیوسته در  $T$  نامیده می‌شود.

رابطه بین تابع برداری  $r(t)$  و مولفه‌هایش  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  ایجاب می‌کند که یک تابع برداری در  $t_0$  حد دارد اگر و فقط اگر مولفه‌هایش در  $t_0$  حد داشته باشند. مولفه‌های حد مساوی حدود مولفه‌های نظیر می‌باشند.

در نتیجه، یک تابع برداری در  $t_0$  پیوسته است اگر و فقط اگر هر سه مولفه آن در این نقطه پیوسته باشند.

همچنین، لازم به تذکر است که اگر یکی از توابع  $u(t)$  یا  $v(t)$  در همسایگی  $t_0$  کراندار بوده و دیگری در  $t_0$  حد 0 داشته باشد،

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (u(t) \times v(t)) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (u(t) \cdot v(t)) = 0$$

به طریق مشابه، اگر یکی از توابع  $u(t)$ ,  $\lambda(t)$  کراندار و دیگری، وقتی  $t \rightarrow t_0$  به 0 میل کند،

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\lambda(t)u(t)) = 0.$$

## ۲.۲ مشتق یک تابع برداری

فرض کنیم  $r(t)$  یک تابع برداری باشد که در همسایگی  $t_0$  تعریف شده است. عبارت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((r(t_0 + h) - r(t_0)))$$

(به شرط وجود حد) را مشتق  $r(t)$  در  $t_0$  نامیده و آن را با  $r'(t_0)$  یا  $\dot{r}(t_0)$  یا  $dr(t_0)/dt$  نشان می‌دهیم.

هرگاه مشتق  $r(t)$  در  $t_0$  موجود باشد، می‌گوییم تابع  $r(t)$  در  $t_0$  مشتقپذیر است. تابعی که در هر نقطه از مجموعه  $A$  مشتقپذیر باشد مشتقپذیر در  $A$  نامیده می‌شود. مولفه‌های عبارت

$$\frac{1}{h}(\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0))$$

منطبق بر عبارات نظیر برای مولفه‌های  $\mathbf{r}(t)$  اند. از اینرو، یک تابع برداری در نقطه  $t_0$  مشتق پذیر است اگر و فقط اگر مولفه‌هایش در این نقطه مشتق پذیر باشند. مولفه‌های مشتق مساوی مشتقهای مولفه‌های نظیر خواهند بود؛ یعنی،

$$\frac{d}{dt}\{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\} = \left\{ \frac{d}{dt}x(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0), \frac{d}{dt}z(t_0) \right\}.$$

به شرط وجود مشتقهای سمت راست، فرمولهای زیر برای توابع برداری برقرارند:

$$(۶.۲) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\mathbf{u} + \frac{d}{dt}\mathbf{v},$$

$$(۷.۲) \quad \frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{v}) = \left( \frac{d}{dt}\lambda \right) \mathbf{v} + \lambda \frac{d}{dt}\mathbf{v},$$

$$(۸.۲) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \left( \frac{d}{dt}\mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \left( \frac{d}{dt}\mathbf{v} \right),$$

$$(۹.۲) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \left( \frac{d}{dt}\mathbf{u} \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \left( \frac{d}{dt}\mathbf{v} \right),$$

$$(۱۰.۲) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}) = \left( \frac{d}{dt}\mathbf{u} \right) \mathbf{v}\mathbf{w} + \mathbf{u} \left( \frac{d}{dt}\mathbf{v} \right) \mathbf{w} + \mathbf{u}\mathbf{v} \frac{d}{dt}\mathbf{w}.$$

در فرمولهای (۹.۲) و (۱۰.۲) ترتیب عوامل اهمیت دارد.

درست مثل حالت توابع اسکالر، یک تابع برداری بربازه  $(a, b)$  ثابت است اگر و فقط اگر مشتق آن در هر نقطه از بازه ۰ باشد.

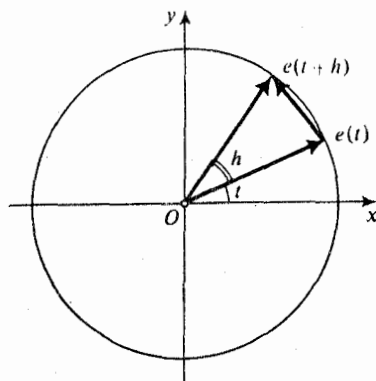
قانون زیر در مورد مشتقگیری از توابع مرکب برقرار است:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{v}(t(s_0)) = \left( \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t_0) \right) \cdot \frac{d}{ds}t(s_0),$$

که در آن  $t_0 = t(s_0)$ .

امثله و تمرین

۱. تابع  $\mathbf{e}(t)$ . فرض کنید  $\mathbf{e}(t)$  برداریکه در صفحه\* مفروض  $\Pi$  باشد که جهتش با دورانی به اندازه زاویه\*  $t$  در جهت ثابتی به دست می‌آید (شکل ۱.۲). این یک تابع متناوب با دوره\* تناوب  $2\pi$  است؛ یعنی، به ازای هر  $t$ ،  $\mathbf{e}(t + 2\pi) = \mathbf{e}(t)$ ، هرگاه دستگاه مختصات طوری مفروض باشد که جهت ثابت همان جهت محور  $x$  بوده، محور  $y$  در صفحه\*  $\Pi$  قرار



شکل ۱.۲

داشته، و محور  $z$  قائم به  $\Pi$  باشد، آنگاه مولفه‌های  $e(t)$  عبارت خواهند بود از

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0.$$

در نتیجه، تابع  $e(t)$  مشتق‌پذیر است. این مشتق دارای مولفه‌های

$$\dot{x} = -\sin t = \cos(t + \frac{1}{2}\pi), \quad \dot{y} = \cos t = \sin(t + \frac{1}{2}\pi), \quad \dot{z} = 0$$

است. بنابراین،

$$\dot{e}(t) = e(t + \frac{1}{2}\pi).$$

۲. هرگاه تمام مقادیر یک تابع برداری موازی یک صفحه باشند، مشتق آن، در صورت وجود، نیز موازی همان صفحه است.

در واقع، بردار ثابت و قائم به صفحه را با  $N$  نشان می‌دهیم. در این صورت، داریم  $Nr(t) = 0$  که، چون  $\dot{N} = 0$ ،  $N\dot{r}(t) = 0$  را ایجاب می‌کند. این یعنی بردار  $\dot{r}$  بر  $N$  عمود است و، در نتیجه، موازی صفحه\* مفروض می‌باشد.

۳. هرگاه مقادیر توابع برداری  $r(t)$  و  $\dot{r}(t)$  به‌ازای هر  $t$  موازی باشند و  $r(t) \neq 0$ ، آنگاه تمام مقادیر  $r(t)$  یک جهت خواهند داشت. در واقع، برداریکه\*

$$r_0(t) = \frac{r(t)}{|r(t)|} = \frac{r(t)}{\sqrt{[r(t)]^2}}$$

را در نظر می‌گیریم. مشتق این تابع برداری مساوی است با

$$\dot{r}_0(t) = \frac{\sqrt{[r(t)]^2}\dot{r}(t) - r(t)(r(t)\dot{r}(t)/\sqrt{[r(t)]^2})}{[r(t)]^2} = \frac{(r^2)\dot{r} - (r\dot{r})r}{|r|^3} = \frac{(r \times \dot{r}) \times r}{|r|^3}.$$

اما بردارهای  $r(t)$  و  $\dot{r}(t)$  همیشه موازی‌اند؛ در نتیجه،  $r(t) \times \dot{r}(t) = 0$ . بنابراین، به‌ازای هر

$t$ ،  $\dot{r}_0(t) = 0$ ، ثابت  $r_0(t) = a$  و  $r(t) = |r(t)|a$  موازی  $a$  می‌باشد.

۴. ثابت کنید هرگاه تابع اسکالر  $\lambda(t)$  حد ناصفر داشته باشد، یعنی  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \neq 0$ ، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{\lambda(t)} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)},$$

که در آن

$$\frac{v(t)}{\lambda(t)} = \frac{1}{\lambda(t)} v(t).$$

۵. ثابت کنید

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\lambda} \right) = \frac{\lambda \frac{dv}{dt} - v \frac{d\lambda}{dt}}{\lambda^2}.$$

۶. مشتقات توابع برداری

$$(p \times q) \times r, \quad (p \times q)(r \times s), \quad (p \times q) \times (r \times s)$$

را برحسب مشتقات  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{s}$  بیان کنید. فرض کنید توابع  $p, q, r, s$  در یک قلمرو تعریف شده و مشتقپذیر باشند.

### ۳.۲ مشتقات مراتب بالاتر؛ فرمول تیلور<sup>۱</sup>

مثل حالت توابع اسکالر، مشتقات مراتب بالاتر یک تابع برداری  $r(t)$  را متوالیا "به صورت مشتق مشتقهای مرتبه قبلی آنها تعریف می‌کنیم. مشتقات متوالی  $r$  به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^3r}{dt^3}, \dots, \frac{d^k r}{dt^k}, \dots$$

یا

$$r, r', r'', r^{(4)}, \dots, r^{(k)}, \dots \quad \text{یا} \quad \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}, \ddot{\ddot{\ddot{r}}}, \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{r}}}}, \dots, \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{r}}}}}, \dots$$

تابعی که بر بازه  $[a, b]$  دارای مشتق مرتبه  $k$  ام پیوسته باشد یک تابع از کلاس  $C_k$  بر  $[a, b]$  نام دارد. این اصطلاح هم برای توابع برداری و هم اسکالر به کار می‌رود.

از تعریف مشتقات مراتب بالاتر نتیجه می‌شود که تابع برداری  $r(t)$  در  $t_0$  دارای مشتق  $n$  م است اگر و فقط اگر مولفه‌های  $x(t), y(t), z(t)$  در  $t_0$  مشتق  $n$  م داشته باشند. مولفه‌های مشتق  $n$  م  $r(t)$  بر مشتقات  $n$  م مولفه‌های نظیر منطبق است؛ یعنی،

$$\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{r}}}}(t) = \{ \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}(t), \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{y}}}}(t), \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{z}}}}(t) \}.$$

این خاصیت این امکان را به وجود می آورد که هر مسئله از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری را با مسائلی نظیر از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع اسکالر عوض کنیم. بالاخص، می توان قضیه تیلور را به صورت زیر ثابت کرد.

هرگاه تابع برداری  $r(t)$  دارای  $n + 1$  مشتق متوالی پیوسته باشد، آنگاه

$$(11.2) \quad r(t_0 + h) = r(t_0) + \frac{h}{1!} \dot{r}(t_0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{r}(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} r^{(n)}(t_0) + R_{n+1},$$

که در آن باقیمانده  $R_{n+1}$  به شکل  $R_{n+1} = h^{n+1} U_{n+1}(h)$  بوده و تابع  $U_{n+1}(h)$  در همسایگی  $h = 0$  کراندار می باشد.

اثبات مبتنی بر کاربرد فرمول تیلور برای هر مولفه جداگانه است. با اینحال، توجه کنید که، در مورد تابع اسکالر، باقیمانده را می توان در یک نقطه میانی برحسب مشتق مرتبه  $n + 1$  م تابع نمایش داد، حال آنکه در اینجا این کار میسر نیست. در واقع، تابع

$$r(t) = e(t) + tk$$

را در نظر می گیریم. به ازای  $n = 0$  داریم

$$R_1 = r(t_0 + h) - r(t_0) \quad \text{یا} \quad r(t_0 + h) = r(t_0) + R_1$$

بخصوص، به ازای  $t_0 = 0, h = 2\pi$  داریم

$$R_1 = r(2\pi) - r(0) = 2\pi k.$$

لذا، باقیمانده را نمی توان مثلاً "به شکل لاگرانژ"

$$2\pi \dot{r}(\tau) = 2\pi [e(\tau + \pi/2) + k]$$

با  $0 < \tau < 2\pi$ ، نمایش داد، زیرا این بردار هرگز حتی موازی  $k$  هم نیست.

چون از یک شکل خاص باقیمانده همیشه نمی توان استفاده کرد، تنظیم دیگری از قضیه

تیلور، با مفروضات ضعیفتر و نتیجه ضعیفتر، ممکن است سودمند باشد:

هرگاه  $r(t)$  در  $(t_0, t_0 + h)$  از کلاس  $C_n$  باشد، آنگاه فرمول (11.2) برقرار است.

که در آن باقیمانده مساوی است با

$$(11.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} V_{n+1}(h) = 0 \quad \text{به طوری که} \quad R_{n+1} = h^n V_{n+1}(h)$$

با فرض قویتر قبلی می داشتیم  $V_{n+1}(h) = h U_{n+1}(h)$  با  $U_{n+1}(h)$  کراندار، که

$V_{n+1}(h) \rightarrow 0$  را ایجاب می کند ولی خاصیت قویتری می باشد.

### امثله و تمرین

۱. اگر تمام مقادیر تابع برداری  $r(t)$ ،  $a \leq t \leq b$ ، از کلاس  $C_2$  موازی یک صفحه باشند، بردارهای  $\dot{r}(t), \ddot{r}(t)$  نیز به ازای هر  $t$  موازی این صفحه هستند. بعکس، اگر بردارهای  $r(t)$ ،  $\dot{r}(t)$  و  $\ddot{r}(t)$  به ازای هر  $t$  هم‌صفحه (وابسته خطی) بوده و بردارهای  $r(t)$  و  $\dot{r}(t)$  به ازای هر  $t$  مستقل خطی باشند، تمام مقادیر  $r(t)$  موازی یک صفحه خواهند بود. در واقع، اگر  $N(t)$  برداریکه عمود بر صفحه معین شده به وسیله  $\dot{r}(t), \ddot{r}(t), \ddot{\dot{r}}(t)$  باشد، به خاطر استقلال  $r(t)$  و  $\dot{r}(t)$  داریم  $r(t) \times \dot{r}(t) \neq 0$ ؛ در نتیجه،

$$N(t) = \pm \frac{r(t) \times \dot{r}(t)}{|r(t) \times \dot{r}(t)|}.$$

این یک تابع مشتق‌پذیر است که در اتحادهای

$$(12.2) \quad N(t)r(t) = 0, \quad N(t)\dot{r}(t) = 0, \quad N(t)\ddot{r}(t) = 0$$

صدق می‌کند. با مشتق‌گیری از اتحاد اول و دوم داریم

$$\dot{N}r + N\dot{r} = 0, \quad \dot{N}\dot{r} + N\ddot{r} = 0,$$

که، در پرتو (۱۲.۲)، نتیجه می‌شود

$$\dot{N}r = 0, \quad Nr = 0.$$

بعلاوه، چون طول بردار  $N$  ثابت است، داریم

$$\dot{N}N = 0.$$

بردارهای  $\dot{r}, r, N$  مستقل خطی‌اند، و بردار  $\dot{N}$  به هر سه بردار متعامد است. در نتیجه،  $\dot{N} = 0$  و  $N$  بردار ثابتی می‌باشد.

۲. هرگاه در  $[a, b]$  تابع برداری  $r(t)$  در معادله دیفرانسیل  $r^{(n)}(t) = 0$  صدق کند، خواهیم داشت

$$r(t) = a_1 + ta_2 + \dots + t^{n-1}a_n,$$

که در آن  $a_1, a_2, \dots, a_n$  بردارهای ثابتی می‌باشند.

۳. دو تابع برداری با فرمولهای

$$E(t) = \cos ta + \sin tb, \quad E_1(t) = -\sin ta + \cos tb,$$

که در آنها  $a$  و  $b$  بردارهای ثابتی هستند، تعریف شده‌اند. ثابت کنید که  $\dot{E}_1(t) = -E(t)$  و  $\dot{E}(t) = E_1(t)$ .

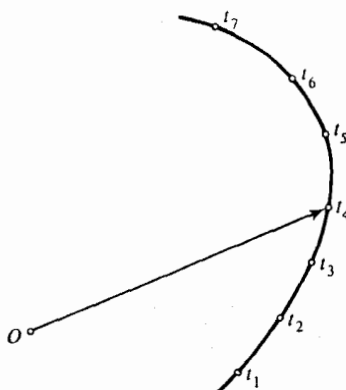
۴. مشتق  $k$  ام تابع  $E(t)$  را پیدا کنید (حالت‌های  $k$  فرد و  $k$  زوج را جدا در نظر بگیرید).

### ۴.۲ تعبیر سینماتیک و هندسی یک تابع برداری و مشتق آن

حال شناسه  $t$  را زمان و مقدار  $r(t)$  تابع در  $t$  را بردار موضع یک نقطه متحرک در لحظه

$t$  می‌گیریم. در این صورت، تابع  $r(t)$  حرکت نقطه را توصیف خواهد کرد. در این تعبیر سینماتیک، مجموعه<sup>۱</sup> نقاط انتهایی بردارهای  $r(t)$  مقید در مبدأ  $O$  به‌ازای هر  $t$  از قلمرو تابع  $r(t)$ ، مدار نقطه<sup>۲</sup> متحرک طبق قانون  $r = r(t)$  است، این مجموعه، تحت شرایطی برای تابع برداری  $r(t)$  یک منحنی تشکیل می‌دهد. به‌رحال، در حالت کلی، ممکن است مجموعه‌ای باشد خیلی دور از تصور ما از یک منحنی؛ مثلاً، یک مکعب توپر باشد.

این مجموعه به تنهایی تابعی را معین نمی‌کند. همین مجموعه از نقاط می‌تواند از توابع کاملاً<sup>۳</sup> متفاوتی به دست آید. برای مشخص کردن یک تابع به مقیاسی روی مدار نیز نیاز داریم که مقادیر شناسه<sup>۴</sup>  $t$  متناظر با نقاط مدار را نشان دهد (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲

بردار  $r(t+h) - r(t)$  نمایش تغییر مکان نقطه<sup>۵</sup> متحرک در فاصله زمانی  $t$  تا  $t+h$  است. در نتیجه،  $(1/h)(r(t+h) - r(t))$  نمایش سرعت متوسط در این فاصله است که هم مقدار سرعت و هم جهت تغییر مکان را نشان می‌دهد. مشتق  $\dot{r}(t)$ ، که حد سرعت متوسط است وقتی  $h \rightarrow 0$ ، نمایش سرعت لحظه<sup>۶</sup>ای نقطه در لحظه<sup>۷</sup>  $t$  می‌باشد. طول این بردار سرعت اسکالر است، و جهتش جهت حرکت را نشان می‌دهد. مشتق  $\dot{r}(t)$  برداری است که برمدار در نقطه<sup>۸</sup> نظیر به مقدار  $t$  از شناسه مماس است.

## ۵.۲ توابع برداری چند متغیره

همه<sup>۹</sup> مفاهیم اساسی تعریف شده برای توابع برداری یک متغیره را می‌توان، با تغییراتی آشکار، به توابع برداری دو یا چند متغیره حقیقی تعمیم داد. با یک دستگاه مختصات معلوم، یک تابع برداری چند متغیره معادل دستگاهی از سه تابع اسکالر با همان متغیره می‌شود؛

و لذا، امکان اعمال حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی چند متغیره را، وقتی لازم باشد، فراهم می‌آورد.

به عنوان مثال، بردار  $a$  حد تابع  $r(u, v)$  در  $(u_0, v_0)$  نامیده می‌شود اگر تابع اسکالر دو متغیره  $|r(u, v) - a|$  وقتی  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$  به صفر میل کند. تابع برداری  $r(u, v)$  در  $(u_0, v_0)$  پیوسته نامیده می‌شود اگر و فقط اگر  $r(u, v) = \lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} r(u, v)$  و از این قبیل.

با ثابت گرفتن تمام متغیره‌های تابع برداری چند متغیره  $r(u, v, \dots)$  جزئیکی، تابع به تابعی یک متغیره، یعنی متغیر باقیمانده، بدل می‌شود. مشتق این تابع مشتق جزئی  $r$  نسبت به این متغیر نامیده می‌شود. مشتق جزئی تابع  $r(u, v, \dots)$  را نسبت به متغیر  $u$  با

$$r_u(u, v, w, \dots) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial r(u, v, w, \dots)}{\partial u}$$

نشان می‌دهیم. ما اغلب شناسه‌های  $u, v, \dots$  را حذف کرده فقط می‌نویسیم

$$r_u \quad \text{یا} \quad \frac{\partial r}{\partial u}$$

برای مشتقات جزئی مراتب بالاتر، نمادهای زیر به کار می‌روند:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial r}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial r}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, \quad \dots,$$

یا، خلاصه‌تر،

$$r_{uu} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, \quad r_{vu} = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, \quad \dots$$

گوییم یک تابع از کلاس  $C_n$  است اگر همه مشتقات جزئی آن تا مرتبه  $n$  پیوسته باشند. مشتقات جزئی یک تابع برداری چند متغیره در یک نقطه وجود دارند اگر و فقط اگر همه مولفه‌های آن دارای مشتقات جزئی نظیر در این نقطه باشند. مولفه‌های مشتق جزئی مساوی مشتقات جزئی مولفه‌های نظیر از همان نوع هستند. مثلاً، اگر تابع  $r(u, v)$  دارای مولفه‌های  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  باشد،

$$\mathbf{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}, \quad \mathbf{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \{x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}\}, \quad \mathbf{r}_{uv} = \{x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}\}, \quad \mathbf{r}_{vv} = \{x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}\},$$

$$\mathbf{r}_{uuu} = \{x_{uuu}, y_{uuu}, z_{uuu}\}.$$

مثل یک تابع اسکالر، مشتقات جزئی مختلط از مرتبه‌ای معین، اگر همه‌شان پیوسته

باشند، به ترتیب مشتگیری بستگی ندارند. به عنوان نمونه،

$$\text{و غیره. } \mathbf{r}_{uvu} = \mathbf{r}_{vu u} = \mathbf{r}_{uu v}, \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$$

هرگاه متغیرهای  $u$  و  $v$  خود توابعی از متغیرهای  $t$  و  $s$  باشند؛ یعنی  $u = u(t, s)$ ،  $v = v(t, s)$ ، و تابع برداری  $\mathbf{r}(u, v)$  دیفرانسیل داشته باشد (در حالت خاص، تمام مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند)، و توابع  $u(t, s)$  و  $v(t, s)$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشند، آنگاه تابع مرکب  $\mathbf{r}(u(t, s), v(t, s))$  دارای مشتقات جزئی نسبت به  $t$  و  $s$  است و خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

فرمول تیلور برای توابع برداری چند متغیره نیز برقرار است. در حالتی که تابع از کلاس  $C_{n+1}$  و دو متغیره باشد، داریم

$$\mathbf{r}(u_0 + h, v_0 + k) = \mathbf{r} + \frac{1}{1!}(h\mathbf{r}_u + k\mathbf{r}_v) + \frac{1}{2!}(h^2\mathbf{r}_{uu} + 2hk\mathbf{r}_{uv} + k^2\mathbf{r}_{vv}) + \dots + \mathbf{R}_{n+1},$$

(۱۳.۲)

در طرف راست، شناسه‌های  $u_0, v_0$  به صراحت قید نشده‌اند. باقیمانده  $\mathbf{R}_{n+1}$  به شکل

$$\sqrt{(h^2 + k^2)^{n+1}} U_{n+1}$$

است، که در آن تابع  $U_{n+1}(h, k)$  در حوالی نقطه  $h = 0, k = 0$  کراندار است.

تبصره ۱. شکل لاگرانژ باقیمانده را نمی‌توان برای تابع برداری، مثل حالت یک متغیره، به‌کار برد.

تبصره ۲. فرمول (۱۳.۲) برای توابعی از کلاس  $C_n$  نیز برقرار است، اما در این حالت، تنها چیزی که می‌توان در مورد باقیمانده گفت این است که باقیمانده به شکل

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \sqrt{(h^2 + k^2)^n} V_{n+1} = 0 \quad \text{است، که در آن}$$

۶.۲ مقایسه توابعی که به صفر میل می‌کنند

در این بخش توابعی را در نظر می‌گیریم که وقتی شناسه‌هایشان به مقادیر معینی میل می‌کنند،

مثلاً " $t \rightarrow t_0$  یا " $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ "، تابعها به صفر میل می نمایند. این مقادیر در طول بحث ثابت هستند و صریحاً ذکر نخواهند شد. هدف مامقایسه این است که توابع مختلف چگونه سریع به صفر میل می کنند. توابع مورد بحث می توانند اسکالر یا برداری و یک یا چند متغیره باشند. این توابع با حروف یونانی نشان داده خواهند شد.

می گوییم  $\alpha$  سریعتر از  $\beta$  به صفر میل می کند یا که  $\alpha$  از مرتبه بالاتر از  $\beta$  است، و با علامت می نویسیم

$$\alpha = o(\beta) \text{ در صورتی که } |\alpha|/|\beta| \rightarrow 0.$$

علامت  $o(\beta)$  نمایش یک تابع خاص نیست، بلکه نشانگر هر تابع مانند  $\alpha$  است که از مرتبه بالاتر از  $\beta$  باشد. در نتیجه، علامت تساوی در  $\alpha = o(\beta)$  یعنی  $\alpha$  متعلق به کلاس توابعی است که سریعتر از  $\beta$  به صفر میل می کنند. مثلاً، "معادلات"  $\alpha = o(\beta)$  و  $\gamma = o(\beta)$  تساوی  $\alpha = \gamma$  را ایجاب نمی کنند. لذا، شخص باید در برخورد با این علائم جانب احتیاط را داشته باشد.

هرگاه نسبت  $|\alpha|/|\beta|$  در همسایگی مقادیر حدی شناسه ها کراندار باشد، می گوییم  $\alpha$  دست کم به سرعت  $\beta$  به صفر میل می کند یا که  $\alpha$  از مرتبه پایین تر از  $\beta$  نیست، و می نویسیم

$$\alpha = O(\beta).$$

چنانچه  $\alpha = O(\beta)$  و  $\beta = O(\alpha)$  با هم برقرار باشند، می گوییم  $\alpha$  و  $\beta$  از یک مرتبه می باشند. همه نکات قید شده در مورد علامت "تساوی" در  $\alpha = O(\beta)$  را می توان در باب علامت  $\alpha = O(\beta)$  تکرار کرد.

هرگاه  $\alpha = O(\beta)$ ، نیز داریم  $\alpha = O(\beta)$  ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثالی از موارد استعمال این نمادگذاری، فرمول (۱۱.۲) تیلور را وقتی  $h \rightarrow 0$  [یا (۱۳.۲)] را وقتی  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  در نظر می گیریم. با این فرض که تابع  $f$  از کلاس  $C_{n+1}$  است، داریم  $R_{n+1} = O(h^{n+1})$  [یا  $R_{n+1} = O(\sqrt{(h^2 + k^2)^{n+1}})$ ] زیرا نسبت  $|R_{n+1}|/|h|^{n+1} = |U(h)|$  در همسایگی  $h = 0$  کراندار است، البته، این ایجاب می کند که  $R_{n+1} = o(h^n)$  در واقع  $|R_{n+1}|/|h|^n = |U(h)|$ ؛ در نتیجه  $\lim_{h \rightarrow 0} |R_{n+1}|/|h|^n = 0$  به همین نحو، در (۱۱.۲) داریم  $R_{n+1} = o(h^n)$ .

با این فرض که  $f$  تابعی از کلاس  $C_n$  است، فقط می توان ادعا کرد که  $R_{n+1} = o(h^n)$  [یا  $R_{n+1} = O(\sqrt{(h^2 + k^2)^n})$ ] ولی نه لزوماً " $R_{n+1} = O(h^{n+1})$ ". با احتیاط های لازم می توان چند عمل صوری روی علائم  $o$  و  $O$  انجام داد. مثلاً،

معادله صوری زیر را داریم

$$o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha).$$

معنی این فرمول آن است که مجموع هر دو تابع از مرتبه بالا تر از  $\alpha$  خود تابعی از مرتبه بالا تر از  $\alpha$  است، که براحتی می توان آن را تحقیق کرد. خواننده معنی فرمولهای زیر را برای خود توضیح داده آنها را اثبات نماید:

$$o(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha), \quad O(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha),$$

$$o(\alpha)o(\beta) = o(\alpha\beta), \quad o(\alpha)O(\beta) = o(\alpha\beta), \quad O(\alpha)O(\beta) = O(\alpha\beta).$$

ما اغلب از چند تابع متعارف برای مقایسه استفاده می کنیم. به ازای  $t \rightarrow t_0$  یا  $(u_0, v_0)$   $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$  اینها اغلب توانهای  $\alpha_k = |t - t_0|^k$  یا  $\alpha_k = ((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2)^{k/2}$  هستند. در این حالت می گوییم  $\alpha$  از مرتبه بالا تر از  $k$  است اگر که  $\alpha = o(\alpha_k)$ ؛ و  $\alpha$  از مرتبه ناکمتر از  $k$  است اگر که  $\alpha = O(\alpha_k)$ .

هرگاه  $\alpha$  از مرتبه  $\alpha_k$  باشد، می گوییم  $\alpha$  از مرتبه  $k$  می باشد.

### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید  $\alpha = |u - u_0| + |v - v_0|$  از مرتبه ۱ است. در واقع،

$$\alpha^2 = |u - u_0|^2 + |v - v_0|^2 + 2|u_1 - u_0||v - v_0| \geq (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2.$$

در نتیجه  $\alpha_1 = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2} = \alpha_1$  و از اینجا  $\alpha_1/\alpha \leq 1$  و  $\alpha = O(\alpha_1)$  از آن طرف،  $|u - u_0| \leq \alpha$ ،  $|v - v_0| \leq \alpha$ ، و  $|u - u_0| + |v - v_0| \leq 2\alpha$ ، بنابراین  $\alpha/\alpha_1 \leq 2$  و  $\alpha = O(\alpha_1)$ .

۲. ثابت کنید  $\beta = \max(|u - u_0|, |v - v_0|)$  از مرتبه ۱ است.

۳. تابعی مثال بزنید که، وقتی  $t \rightarrow 0$  به صفر میل کند و از مرتبه بالاتر از هر توان  $n$  باشد.

۴. تابعی مثال بزنید که، وقتی  $t \rightarrow 0$  به صفر میل کند و از مرتبه کوچکتر از هر توان حقیقی مثبت  $n$  ( $\alpha > 0$ ) باشد.

۵. تابعی مثال بزنید از مرتبه بین  $t$  و  $t^2$ .

### ۷.۲ دیفرانسیل یک تابع برداری

دیفرانسیل تابع برداری  $r(t)$  از کلاس  $C_1$  در نقطه  $t_0$  تابعی است از یک متغیر جدید، یعنی نمو  $h$  متغیر مستقل  $t$  به صورت زیر:

$$(dr)_{t_0} = \dot{r}(t_0)h. \quad (14.2)$$

وقتی آن را در نقطه دلخواه  $t$  در نظر می گیریم، تابعی خواهد بود از دو متغیر  $t$  و  $h$  که برای سادگی خواهیم نوشت  $dr$ .

تفاضل بین نمو  $\Delta r = r(t_0 + h) - r(t_0)$  و دیفرانسیل  $(dr)_{t_0}$  وقتی  $h \rightarrow 0$ ، به صفر

میل می‌کند و از مرتبه بالاتر از  $h$  است؛ یعنی،

$$\Delta \mathbf{r} - d\mathbf{r} = o(h).$$

چون دیفرانسیل تابع همانی  $t$  مساوی نمو  $t$  است، می‌توان نوشت

$$(15.2) \quad (d\mathbf{r})_{t_0} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) dt.$$

فرمول (15.2) درحالتی که  $t$  متغیر مستقل نبوده بلکه تابع مشتق‌پذیری چون  $t = t(s)$  از متغیر دیگر  $s$  باشد نیز برقرار می‌ماند، مشروط براینکه  $dt$  به معنی دیفرانسیل تابع  $t(s)$  گرفته شود. در واقع، برای ترکیب  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$  داریم

$$(d\mathbf{r})_{s_0} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}(t(s_0)) ds = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t_0) \frac{d}{ds} t(s_0) ds = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t_0) (dt)_{s_0},$$

که در آن

$$(dt)_{s_0} = \frac{d}{ds} t(s_0) ds$$

دیفرانسیل تابع اسکالر  $t(s)$  در  $s_0$  بوده و  $t_0 = t(s_0)$ .

دیفرانسیل تابع  $\mathbf{r}(u, v)$  از کلاس  $C_1$  و از دو متغیر مستقل  $u$  و  $v$  در نقطه  $(u_0, v_0)$  تابعی است از دو متغیر جدید، یعنی نموهای  $h$  و  $k$  از متغیرهای  $u$  و  $v$ :

$$(16.2) \quad (d\mathbf{r})_{u_0, v_0} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)h + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)k.$$

با در نظر گرفتن این عبارت در نقطه متغیر  $(u, v)$  تابعی از چهار متغیر  $u, v, h, k$  حاصل می‌شود، که در این حالت دیفرانسیل آن را به‌طور ساده به صورت  $d\mathbf{r}$  نشان می‌دهیم. دیفرانسیل  $(d\mathbf{r})_{u_0, v_0}$  یک تابع خطی از  $h$  و  $k$  است، که نمو تابع

$$(\Delta \mathbf{r})_{u_0, v_0} = \mathbf{r}(u_0 + h, v_0 + k) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

را تقریب می‌کند، به این ترتیب که

$$(17.2) \quad (\Delta \mathbf{r})_{u_0, v_0} - (d\mathbf{r})_{u_0, v_0} = o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

مثل قبل، دیفرانسیل (16.2) را می‌توان به شکل

$$(18.2) \quad (d\mathbf{r})_{u_0, v_0} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) du + \mathbf{r}_v(u_0, v_0) dv$$

نوشت، که در آن  $du$  و  $dv$  به ترتیب دیفرانسیلهای دو متغیر  $u$  و  $v$  اند. این فرمول حتی در حالتی که  $u, v$  متغیرهای مستقل نبوده بلکه تابعی از یک یا چند متغیر باشند نیز معتبر است؛ در این حالت،  $du$  و  $dv$  دیفرانسیلهای توابع اسکالر مربوطه خواهند بود.

استفاده از دیفرانسیلها به‌جای مشتقها این مزیت را دارد که به ما اجازه نوشتن فرمولها را به‌شکلی می‌دهد که تحت تغییر مختصات پایا می‌باشند. مثلاً، وقتی متغیر جدید  $s$  را با قرار دادن  $t = t(s)$  در  $\mathbf{r}(t)$  معرفی می‌کنیم، برای مشتقها داریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

فرمول مربوط به دیفرانسیل  $d\mathbf{r}$  در هر دو حالت یکی خواهد بود :

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt, \quad d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds.$$

## ۳ نمایش پارامتری یک منحنی

## ۱۰۳ قوس ساده

یک مجموعه از نقاط فضا که نقش پیوسته و یک به یک بازه بسته‌ای مانند  $[a, b]$  باشد یک قوس ساده نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر، یک قوس ساده مجموعه نقاطی است که بردارهای موضعشان مقادیر یک تابع برداری پیوسته مانند  $r(t)$  اند که بر بازه بسته‌ای چون  $[a, b]$  تعریف شده است به طوری که به ازای مقادیر مختلف  $t_1 \neq t_2$  از  $t$ ، مقادیر متمایز  $r(t_1) \neq r(t_2)$  را به خود می‌گیرد.

نمودار تابع پیوسته  $y = f(x)$  تعریف شده در بازه بسته  $[a, b]$  در صفحه  $xy$  نمونه‌ای است از یک قوس ساده. در واقع، این نمودار متناظر است با تابع برداری  $r(t) = ti + f(t)j$ ،  $a \leq t \leq b$ . این تابع برداری پیوسته است، و  $t_1 \neq t_2$  بوضوح ایجاب می‌کند که

$$r(t_1) = t_1 i + f(t_1)j \neq t_2 i + f(t_2)j = r(t_2).$$

همچنین، مجموعه نقاطی از فضای سه‌بعدی که در هر دو معادله

$$y = f(x), \quad z = g(x),$$

که در آنها  $f(x)$  و  $g(x)$  توابع پیوسته تعریف شده بر  $[a, b]$  اند، صدق کنند یک قوس ساده خواهد بود.

دایره یک قوس ساده نیست، زیرا هر نگاشت پیوسته از یک بازه بسته بروی آن باید لااقل دو نقطه متمایز بازه را به یک نقطه بنگارد؛ لذا، این نگاشت یک به یک نیست.

## ۲۰۳ منحنیها و نمایش پارامتری آنها

یک نگاشت از بازه  $(a, b)$  یا  $[a, b]$ ،  $(a, b)$ ، و  $[a, b]$  به انضمام حالت‌های  $a = -\infty$  یا  $b = \infty$  (یا هر دو) بتوی فضا را موضعا "یک به یک یا موضعا" انژکتیو گوییم هرگاه به ازای

هر نقطه  $t_0 \in (a, b)$ ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  باشد به طوری که  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$  و تحدید نگاشت مزبور به  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  یک به یک (انژکتیو) باشد. در حالت بازه بسته، یا نیم بسته، مثلاً "شامل  $a$ "، علاوه بر این لازم است  $\delta$  ای باشد به طوری که  $[a, a + \delta] \subset [a, b]$  و تحدید نگاشت به  $[a, a + \delta]$  یک به یک باشد؛ اگر بازه شامل  $b$  باشد، فرضی مشابه در مورد  $[b - \delta, b]$  خواهد شد. به عبارت دیگر، نقش  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  (همچنین  $[a, a + \delta]$  و  $[b - \delta, b]$ ) یک قوس ساده می باشد.

نقش یک بازه (باز، بسته، نیم بسته، متناهی، یا نامتناهی) تحت یک نگاشت پیوسته و موضعا "انژکتیو بتوی فضا را یک منحنی می نامیم. لذا، اگر مبدا انتخاب شود، یک منحنی مجموعه نقاطی است که بردارهای موضعشان مقادیر یک تابع برداری پیوسته و موضعا "یک به یک است. بنابراین، چنین منحنی با یک معادله پارامتری برداری مانند  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یا با دستگاه معادل آن مرکب از سه معادله اسکالر  $x = x(t)$ ،  $y = y(t)$ ،  $z = z(t)$ ، که مولفه های بردار موضع  $\mathbf{r}(t)$  را بیان می کنند، نمایش داده می شود. خود تابع  $\mathbf{r}(t)$ ، یا سه تایی  $x(t)$ ،  $y(t)$ ،  $z(t)$  از توابع، نمایش پارامتری یا، خلاصه تر، مسیر یک منحنی نامیده می شود.

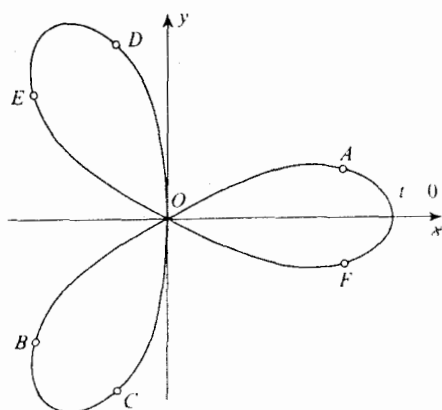
### امثله و تمرین

۱. دایره یک منحنی است. در واقع، نمایش پارامتری آن، مثلاً "تابع  $\mathbf{r}(t) = ae(t)$  است، که در آن  $a$  شعاع دایره بوده و  $t$  در هر بازه  $(a, b)$  باز مانند  $2\pi$  به طول بیش از  $2\pi$  تغییر می کند. به ازای هر  $t_0$  در چنین بازه ای و  $\delta$  ی به قدر کافی کوچک  $(\pi, t_0 - a, b - t_0)$   $(\delta < \min)$  تحدید نگاشت مزبور به  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  انژکتیو، و لذا، نقش این بازه یک قوس ساده می باشد. با اینحال، هر دو نقطه  $t, t + 2\pi$  در صورت تعلق به قلمرو تابع، به یک نقطه از دایره نگاشته می شوند. وقتی  $t$  از ۰ تا  $2\pi$  تغییر می کند، نقش تابع یکبار دایره را می پوشاند، و هنگامی که  $t$  مجدداً از  $2\pi$  تا  $4\pi$  تغییر می کند، این نقش دایره را برای دومین بار می پیماید، الی آخر.

۲. بزرگ شبر (شکل ۱۰۳)، که با معادلات

$$x = \cos 3t \cos t, \quad y = \cos 3t \sin t, \quad z = 0 \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

تعریف می شود، نیز یک منحنی است. در این حالت، منحنی در نقطه ۰ خود قطعی دارد. اما این نقطه نظیر است به سه مقدار متمایز  $t_1 = \frac{1}{6}\pi$ ،  $t_2 = \frac{1}{2}\pi$ ،  $t_3 = \frac{5}{6}\pi$  از پارامتر. نقش بازه های  $AOB$ ،  $COD$ ،  $EOF$  قوسهای ساده  $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ ،  $[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi]$ ،  $[\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi]$  هستند.



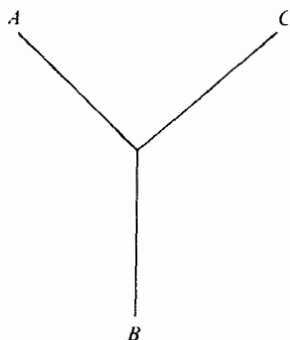
شکل ۱.۳

۳. معادله  $r = ta + r_0$  که در آن  $a$  و  $r_0$  ثابت اند و  $-\infty < t < \infty$  نمایش یک خط مستقیم ماربر نقطه  $[r_0]$  و موازی  $a$  است. چون این نگاشت بوضوح یک به یک است، خط مستقیم یک منحنی می باشد. نقش هر بازه بسته مانند  $[a, b]$  یک پاره خط است؛ لذا، یک قوس ساده می باشد.

تبصره. گاهی یک منحنی را صرفاً "نقش یک بازه تحت یک نگاشت پیوسته تعریف می کنند. این تعریف کلاس بسیار وسیعی از منحنیها را به وجود می آورد؛ بخصوص، منحنی پئانو را، که در آنالیز ریاضی دیدیم که تمام مربع را می پوشاند. تعریف ما، که انژکتیو موضعی نگاشت را می طلبد، این پدیده ها را مستثنی می کند. منحنی پئانو طبق تعریف ما یک منحنی نیست.

بهر حال، تعریف ما شکلهایی مثل حرف Y را نیز از کلاس منحنیها خارج می کند (شکل ۲.۳). تحت هر نمایش پارامتری این مجموعه، لااقل یکی از نقاط انتهایی  $A, B, C$  مثلاً  $A$ ، باید نقش یک مقدار درونی  $t_0$  از پارامتر باشد. در این صورت، نقطه ای که طبق این نمایش پارامتری حرکت می کند، پس از رسیدن به  $A$  باید در امتداد همان پاره خط  $OA$  که به  $A$  رسیده برگردد. بنابراین، نگاشت در همسایگی  $t_0$  یک به یک نخواهد بود. نکته مشهود ورای تعریف ما از منحنی این است که یک منحنی را می توان با یک حرکت بدون توقف و بازگشت در امتداد خطی که به نقطه شروع ما منتهی می شود رسم نمود. برای آنکه شکلهایی نظیر شکل ۲.۳ منحنی باشند، باید شرط انژکتیو موضعی را،

مثلاً"، با شرط ضعیفتر قطعه قطعه موضعی عوض کرد؛ یعنی، فرض می‌کنیم بازه  $(a, b)$  به تعدادی متناهی زیر بازه تقسیم شده و  $r(t)$  بر هر یک از آنها موضعا "انزکتیو باشد.



شکل ۲.۳

### ۳.۳ نمایشهای پارامتری هم‌ارز

دو مسیر  $r = r_1(t), t \in (a, b)$  و  $r = r_2(\tau), \tau \in (\alpha, \beta)$  در صورتی هم‌ارز نامیده می‌شوند که تابعی پیوسته و صعودی مانند  $t = t(\tau)$  وجود داشته باشد که  $(\alpha, \beta)$  را بروی  $(a, b)$  بنگارد به طوری که، به ازای هر  $\tau$ ،  $r_1(t(\tau)) = r_2(\tau)$ .

دو نمایش پارامتری هم‌ارز نه تنها یک مجموعه را به عنوان نقش دارند بلکه در این مجموعه یک توالی از نقاط را نیز برقرار می‌کنند.

هرگاه یک تابع پیوسته و نزولی مانند  $t(\tau)$  وجود داشته باشد که  $(\alpha, \beta)$  را بروی  $(a, b)$  بنگارد به طوری که، به ازای هر  $\tau$ ،  $r_1(t(\tau)) = r_2(\tau)$ ، آنگاه دو نمایش پارامتری قرینه نامیده می‌شوند.

در این حالت، دو مسیر یک مجموعه از نقاط را معین می‌کنند ولی ترتیب القا شده به نقاط به وسیله یک نمایش عکس ترتیب القا شده از دیگری می‌باشد.

یک مجموعه از نقاط را می‌توان به وسیله دو مسیر نا هم‌ارز و ناقرینه نیز نمایش داد. به عنوان مثال، برگ شبد در شکل (۱.۳) دارای نمایش پارامتری دیگری با ترتیب نقاط به صورت  $AODEOBCOEFA$  می‌باشد، حال آنکه ترتیب نقاط در نمایش پارامتری ملحوظ در بالا  $AOBCODEOEFA$  بود. واضح است که این دو مسیر نه هم‌ارز هستند نه قرینه. در این حالت، تغییر پارامترها با یک تابع نایک‌نوا و نیز ناپیوسته (در این حالت خاص) صورت می‌گیرد.

نمایشهای پارامتری ابزار اصلی ما در بررسی منحنیها خواهند بود. با اینحال، از

دیدگاه هندسی، دلیلی برای آنکه بین نمایشهای پارامتری هم ارز فرقی نگذاریم وجود ندارد. بنابراین، موضوع مطالعه ما کلاس مسیرهای هم ارز است تا خود مسیرها. هر کلاس از مسیرهای هم ارز یک منحنی پارامتری نامیده می شود. ما در این کتاب منحنیهای پارامتری را مورد مطالعه قرار می دهیم نه منحنیها را به عنوان مجموعه هایی از نقاط. بنابراین، اصطلاح خلاصه تر منحنی را به جای منحنی پارامتری به کار خواهیم برد. به خاطر این امر که ابزارهای ما نیاز به استفاده از مسیرهای خاص دارند در حالی که هدف ما بررسی کلاسهای هم ارزی است، باید مسئله پایایی را در هر وضع سامان دهیم؛ یعنی، تحقیق کنیم که آیا نتایج حاصل به انتخاب خاص یک مسیر در یک کلاس از مسیرهای هم ارز بستگی دارد یا نه یا، به عبارت دیگر، آیا نتایج حاصل تحت یک تغییر یکنوا پارامتری سازی حفظ خواهد شد یا نه.

### ۴.۳ منحنیهای پارامتری منتظم

یک منحنی پارامتری را منتظم از کلاس  $C_n$  گوئیم هرگاه بین نمایشهای پارامتری اش نمایشی مانند  $r = r(t), t \in (a, b)$  وجود داشته باشد به طوری که  $r(t)$  تابعی از کلاس  $C_n$  بوده و، به ازای هر  $t, \dot{r}(t) \neq 0$ .

البته، یک منحنی منتظم از کلاس  $C_n$  منتظم از هر کلاس پایین تر  $C_k$  ( $k < n$ ) نیز هست.

یک منحنی را قطعه قطعه منتظم از کلاس  $C_n$  گوئیم هرگاه بین نمایشهای پارامتری اش نمایشی مانند  $r = r(t), t \in (a, b)$  وجود داشته باشد به طوری که بازه  $(a, b)$  را بتوان با نقاط  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  چنان تقسیم کرد که تحدید  $r(t)$  به هر بازه جزئی  $(t_k, t_{k+1})$  از کلاس  $C_n$  بوده و در شرط  $\dot{r}(t) \neq 0$  صدق نماید. نقاطی که مشتق  $n$  م ممکن است در آنها پیوسته نباشد یا وجود نداشته باشد یا که  $\dot{r}(t) = 0$  فقط نقاط  $t_1, \dots, t_{n-1}$  است. نقاطی چون  $t$  که در آنها  $\dot{r}(t)$  وجود ندارد یا  $\dot{r}(t) = 0$ ، نقاط منفرد مسیر  $r = r(t)$  نامیده می شوند. چنین انفرادی ممکن است خاصیت یک مسیر خاص باشد، اما این نیز محتمل است که تمام مسیرهای هم ارز به ازای مقادیری از پارامتر انفراد داشته باشند. در این حالت، انفراد یک خاصیت منحنی پارامتری است نه یک خاصیت نمایش پارامتری خاص. در این صورت، انفراد را انفراد اساسی منحنی می نامیم.

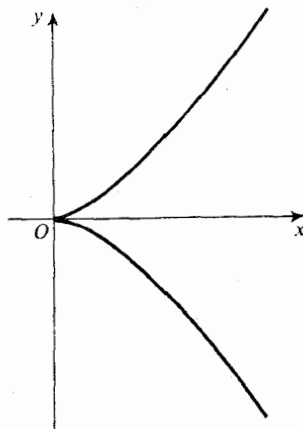
### امثله و تمرین

۱. دو نمایش پارامتری یک خط مستقیم به صورتهای

$$\mathbf{r} = \tau^3 \mathbf{a} \quad (-\infty < \tau < \infty), \quad \mathbf{r} = t\mathbf{a} \quad (-\infty < t < \infty)$$

هم ارز هستند ( $t = \tau^3$ ). نقطه  $\tau = 0$  یک نقطه منفرد نمایش پارامتری اول است.  $(d\mathbf{r}/d\tau)_{\tau=0} = 0$  حال آنکه نقطه نظیر ( $t = 0$ ) در نمایش دوم نامنفرد است ( $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{a} \neq 0$ ). این یک نمونه از افراد غیر اساسی است.

۲. سهمی نیمه مکعبی ( $-\infty < t < \infty$ ) دارای افراد اساسی  $(0, 0, 0)$  نظیر به مقدار  $t = 0$  از پارامتر است. در این حالت، هر نمایش پارامتری هم ارز در مقدار نظیر از پارامتر افراد دارد، و این را می توان بی اشکال از نتایج بخش بعد نتیجه گرفت. این نوع افراد یک بازگشت نامیده می شود (شکل ۳.۳).



شکل ۳.۳

۳. مارپیچ. هر منحنی که مسیر یک نقطه متحرک با سرعت ثابت در امتداد مولد یک استوانه باشد در حالی که استوانه حول محورش با سرعت زاویه ای ثابت می چرخد یک مارپیچ نامیده می شود. دستگاه مختصات را در فضا طوری اختیار می کنیم که محور استوانه محور  $z$  باشد، و جهت این محور را همان جهت حرکت نقطه در امتداد مولد استوانه می گیریم. فرض کنیم محور  $x$  از موضع اولیه نقطه متحرک بگذرد. در این صورت، معادله حرکت خواهد بود:

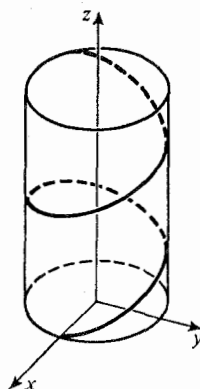
$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = vt,$$

که در آن  $a$  شعاع استوانه،  $\omega$  سرعت زاویه ای، و  $v$  سرعت نسبی حرکت در امتداد مولد است. این مسیر با

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = kt \quad (k = v/\omega)$$

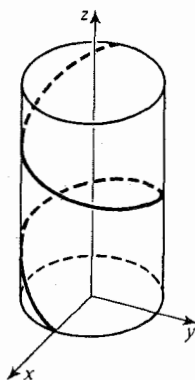
هم ارز است.

مارپیچ را راست گرد نامیم (شکل ۴.۳) اگر در نمایش نسبی آن در یک دستگاه مختصات



شکل ۴.۳

راست دست داشته باشیم  $k > 0$ . اگر در همان دستگاه مختصات  $k < 0$ ، مارپیچ را چپ گرد خواهیم گفت (شکل ۵.۳).



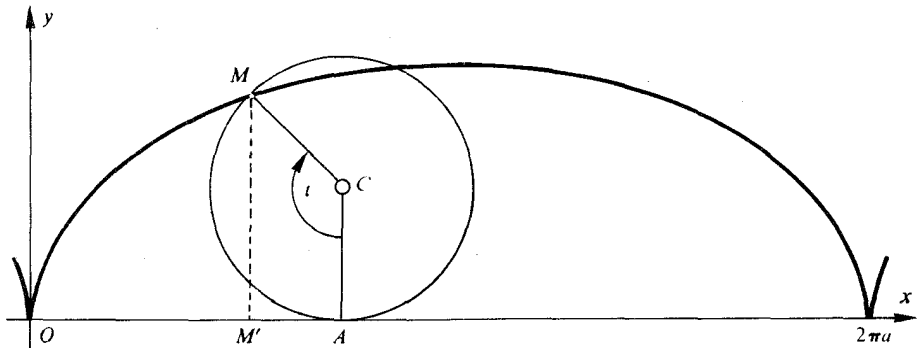
شکل ۵.۳

مارپیچ یک منحنی پارامتری تحلیلی منتظم است، زیرا در نمایشی که برای آن یافتیم از توابع تحلیلی یک پارامتر حقیقی استفاده شده است، و  $\dot{r} \neq 0$ .

۴. چرخزاد. چرخزاد منحنی مسطحی است که مسیر یک نقطه از دایره‌ای است که در امتداد یک خط بدون لغزش می‌غلتد. برای یافتن نمایش پارامتری چرخزاد، این خط را محور  $x$  می‌گیریم و مبدأ مختصات را در نقطه تماس محور با نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم. همچنین، فرض می‌کنیم این موضع نظیر مقدار ۰ از پارامتر باشد. پارامتر خودش زاویه‌ای است که دایره به اندازه آن از موضع اصلی‌اش چرخیده است (شکل ۶.۳).

فرض کنیم  $C$  مرکز دایره بوده، و  $M$  نقطه متحرکی باشد که چرخزاد را رسم می‌کند. تصویر مرکز دایره را در وضعی که دایره به اندازه زاویه  $t$  چرخیده با  $A$  نشان می‌دهیم. در این صورت، پاره خط  $OA$  برابر با قوس  $AM$  است؛ در نتیجه،  $OA = at$ ، که در آن  $a$  شعاع دایره است. بردار  $\overrightarrow{CM}$  با محور  $x$  زاویه‌ای به اندازه  $t - \frac{1}{2}\pi$  می‌سازد. بنابراین، تصاویر بردار  $\overrightarrow{CM}$  روی محور عبارتند از

$$a \cos(-\frac{1}{2}\pi - t) = -a \sin t, \quad a \sin(-\frac{1}{2}\pi - t) = -a \cos t.$$



شکل ۶.۳

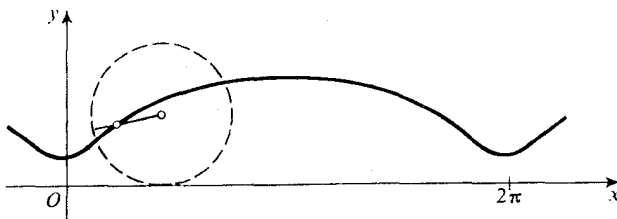
بردار موضع  $M$  عبارت است از

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}.$$

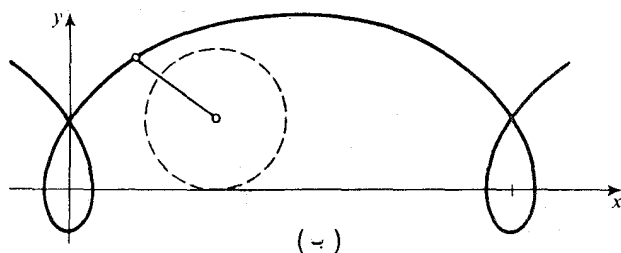
تصویر آن روی محورهای مختصات معادلات پارامتری

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

را به دست می‌دهد. یک چرخش کامل دایره متناظر است با تغییر پارامتر از ۰ تا  $2\pi$ . با این کار یک قوس از چرخزاد حاصل می‌شود. بقیه منحنی از قوسهای همبسته‌ای تشکیل شده که با انتقال آن قوس در امتداد محور  $x$  و به اندازه مضربی از  $2\pi a$  به دست می‌آیند. نشان دهید نقاط  $t = 2\pi n$ ، که  $n$  عدد صحیح دلخواهی است، نقاط منفرد اساسی منحنی‌اند.



(I)



شکل ۷.۳

### ۵.۳ طول قوس یک منحنی . پارامتری سازی طبیعی

طول مسیر  $r = r(t)$  در بازه بسته  $[a, b]$  به صورت زیر تعریف می شود .

بازه  $[a, b]$  را به وسیله نقاط تقسیم  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$  به تعدادی متناهی بازه مجزا تقسیم می کنیم ، و سپس مجموع طول قطعات مربوط به هر جفت نقاط نظیر به دو مقدار متوالی  $t_i$  و  $t_{i+1}$  از پارامتر در این تقسیم ، یعنی

$$\sum_{k=1}^n |r(t_k) - r(t_{k-1})|,$$

را تشکیل می دهیم . کوچکترین کران بالایی (l.u.b) این مجموعه ها به ازای تمام تقسیمها ، طول قوس یا ، خلاصه تر ، طول مسیر نامیده می شود . چنانچه این l.u.b متناهی باشد ، مسیر با طول متناهی در  $[a, b]$  نامیده می شود .

در حالت خاصی که مسیر  $r = r(t)$  قطعه قطعه از کلاس  $C_1$  است ، می توان از حساب انتگرال استفاده کرده قضیه زیر را به دست آورد که برهانش در هر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال یافت می شود .

قضیه ۱ . نمایش پارامتری قطعه قطعه منتظم  $r = r(t), a \leq t \leq b$  با طول متناهی بوده و طولش برابر است با

$$l = \int_a^b |\dot{r}(t)| dt. \quad (۱.۳)$$

یا ، بر حسب مختصات ،

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

از این نتیجه زیر به دست می آید :

نتیجه ۱. طول مسیرهای قطعه قطعه منتظم هم‌ارز با هم مساوی‌اند.

برهان. نمایشهای پارامتری هم‌ارز، از مسیر معلوم  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  با گذاردن  $t = t(\tau)$  در آن، که یک تابع صعودی از پارامتر جدید  $\tau$  است، حاصل می‌شوند. از اینرو، مسیر هم‌ارز به شکل  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau))$ ,  $\alpha \leq \tau \leq \beta$  است، که در آن  $t(\alpha) = a$ ,  $t(\beta) = b$  است. اگر هر دو نمایش قطعه قطعه منتظم از کلاس  $C_1$  باشند، تابع  $t(\tau)$  قطعه قطعه مشتق‌پذیر است و، احتمالاً "جز در نقاط منفرد هر نمایش، داریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

در نتیجه، چون  $dt/d\tau \geq 0$ ،

$$\int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right| d\tau = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right| d\tau = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt.$$

به عنوان نتیجه‌ای از این، می‌توان از طول یک منحنی پارامتری بدون توسل به یک نمایش خاص سخن گفت.

نتیجه ۲. طول یک منحنی پارامتری به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد.

برهان. پایایی تحت دوران دستگاه مختصات حول مبدأ از شکل برداری (۱۰۳) نتیجه می‌شود، زیرا قدر مطلق هر بردار تحت دوران پایا است. اگر مبدأ را تغییر دهیم، نمایش پارامتری  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  به  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}_0$  تغییر می‌یابد، که در آن  $\mathbf{r}_0$  یک بردار ثابت است. در نتیجه،  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}}$ .

بطور کلی، می‌توان ادعا کرد که هر فرمول برداری شامل مشتقات بردار موضع فقط تحت تغییر مبدأ دستگاه مختصات پایاست.

اگر یک نمایش پارامتری قطعه قطعه منتظم  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  از کلاس  $C_1$  یا بالاتر داده شده باشد، می‌توان پارامتر جدید  $s$  را با فرمول

$$(2.3) \quad s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(u)| du$$

معرفی کرد. چون این یک تابع صعودی است ( $|\dot{\mathbf{r}}(u)| > 0$ ) جز حداکثر در تعدادی متناهی

نقطه)، تابع معکوس  $t = t(s)$  نیز صعودی و قطعه قطعه از کلاس  $C_1$  است. با استفاده از این تابع، یک نمایش پارامتری هم ارز، یعنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)),$$

به دست خواهد آمد.

پارامتر  $s$  پارامتر طبیعی یا پارامتر قوس نام دارد. هرگاه  $t \in [a, b]$ ، آنگاه  $s \in [\alpha, \beta]$  که در آن  $\alpha$  طول منفی قسمتی از منحنی نظیر به مقادیری از  $t$  بین  $a$  و  $t_0$  بوده و  $\beta$  طول قسمتی از منحنی بین نقطه نظیر به  $t = t_0$  و نقطه نظیر به  $t = b$  است. مقدار  $s$  از پارامتر طبیعی خود طول قوس (طول منفی در حالت  $s < 0$ ) قسمتی از منحنی بین نقطه نظیر به  $t = t_0$  یا  $s = 0$  (مبداء پارامتری سازی طبیعی)، و نقطه نظیر به این مقدار  $s$  از پارامتر طبیعی است. پارامتری سازی طبیعی به انتخاب مبداء  $t_0$  بستگی دارد. تغییر مبداء به  $t_1$  موجب تغییر پارامتر طبیعی می شود.

پارامتر جدید  $s'$  و پارامتر قدیم  $s$  با فرمول

$$s = s' + c$$

به هم مربوط می شوند، که در آن  $c$  ثابتی است (مثبت اگر  $t_1 < t_0$  و، منفی، اگر  $t_1 > t_0$ ) برابر با طول قسمتی از منحنی بین دو مبداء؛ یعنی،

$$c = \int_{t_1}^{t_0} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

در غیر این صورت، پارامتری سازی طبیعی از انتخاب نمایش خاص یک منحنی پارامتری مفروض مستقل است. این خاصیت پارامتری سازی طبیعی را، لاقول در بررسیهای نظری، مناسبترین وسیله برای پرداختن به منحنیهای پارامتری می سازد، زیرا مسئله پایایی تحت تغییرات پارامتری سازی را می توان در اینجا به تغییر ساده  $s' = s + c$  تقلیل داد.

درآینده از پارامتری سازی طبیعی خیلی استفاده خواهیم کرد. برای ساده کردن نمادگذاری، نمادهای  $\mathbf{r}'$ ،  $\mathbf{r}''$ ، و غیره را به مشتقات نسبت به پارامتر طبیعی اختصاص می دهیم. چون تغییر پارامترهای طبیعی عبارت است از جمع با یک ثابت، این مشتق برای تمام پارامتری سازیهای طبیعی هم ارز یکی است. درحالت کلی، ما از نمادهای  $\dot{\mathbf{r}}$ ،  $\ddot{\mathbf{r}}$  یا  $d\mathbf{r}/dt$ ،  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  و غیره استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۲. هرگاه  $P$  نقطه نامنفردیک نمایش قطعه قطعه منتظم از کلاس  $C_n$  یک منحنی پارامتری  $\mathcal{K}$  باشد، یک نقطه منتظم نمایش طبیعی  $\mathcal{K}$  نیز هست، و این نمایش نیز قطعه قطعه از کلاس  $C_n$  است.

برهان. فرض کنیم  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  نمایش اصلی  $\mathcal{M}$  باشد، و قرار می‌دهیم  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t_0)$ . چون جایگذاری  $t = \tau + t_0$  انتظام نقاط را تغییر نمی‌دهد، می‌توان بی‌آنکه خللی به کلیت وارد شود فرض کرد  $t_0 = 0$ . لذا، فرض می‌کنیم  $P$  نظیر به مقدار 0 از پارامتر  $t$  باشد. با معرفی پارامتر طبیعی

$$s = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(u)| du,$$

و به خاطر پیوستگی  $\dot{\mathbf{r}}(u)$  در  $u = 0$ ، داریم

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)_{t=0} = |\dot{\mathbf{r}}(0)|.$$

چون نقطه منتظم است، این مشتق ناصفر بوده و

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(0)|}.$$

بنابراین، مشتق

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

وجود داشته و در  $s = 0$  مخالف صفر است.

بعلاوه، این امر که  $|\dot{\mathbf{r}}(0)| \neq 0$  و پیوستگی مشتقات  $\ddot{\mathbf{r}}, \dots, \mathbf{r}^{(n)}$  در  $t = 0$  وجود و پیوستگی مشتقات

$$\frac{d^2 t}{ds^2}, \dots, \frac{d^n t}{ds^n}$$

را ایجاب می‌کند که این، به نوبه خود، پیوستگی مشتقات  $\mathbf{r}', \dots, \mathbf{r}^{(n)}$  را نسبت به پارامتر طبیعی در نقطه  $s = 0$  ایجاب خواهد کرد.

چون این امر برای هر نقطه منتظم یک نمایش درست است، لذا نمایش طبیعی قطعه  $C_n$  خواهد بود احتمالاً "با نقاط منفردی در نقاط منفرد نمایش اصلی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ."

قضیه اخیر نشان می‌دهد که نمایش طبیعی دارای نقطه منفرد  $P$  است اگر و فقط اگر این نقطه برای هر نمایش هم‌ارز منفرد باشد. بنابراین، نقاط منفرد پارامتری سازی طبیعی بر نقاط منفرد اساسی منحنی پارامتری منطبق می‌شوند.

قضیه ۳. مشتق بردار موضع یک نقطه از منحنی نسبت به پارامتر طبیعی، در صورت وجود،

یک بردار یگانه است. در نقاط منفرد اساسی یک منحنی پارامتری، این مشتق وجود نخواهد داشت.

برهان. در واقع، از (۲.۳) نتیجه می شود که، در نقاط منتظم نمایش  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ،

$$(3.3) \quad \frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|.$$

لذا،

$$(4.3) \quad |\mathbf{r}'(t)| = |\dot{\mathbf{r}}(t)| \frac{dt}{ds} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = 1.$$

بنابراین، در مورد پارامتری سازی طبیعی نمی توان داشت  $\mathbf{r}' = 0$ ؛ و لذا، مشتق  $\mathbf{r}'$  در یک نقطه منفرد اساسی وجود نخواهد داشت.

امثله و تمرین

۱. طول قسمتی از مارپیچ

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

واقع بین نقاط نظیر به مقادیر 0 و  $t$  از پارامتر را پیدا کنید.

داریم

$$\dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t, \quad \dot{z} = b,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2,$$

که از اینجا

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

بنابراین،

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

یکی از پارامترهای طبیعی بوده و نمایش طبیعی زیر را خواهیم داشت:

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} s.$$

۲. طول یک قوس از چرخزاد را که  $0 \leq t \leq 2\pi$  پیدا کنید. طول بین نقاط نظیر به مقادیر

0 و  $t$  از پارامتر را بیابید. با استفاده از نتیجه آخر، نمایش طبیعی چرخزاد را بنویسید.

۳. با استفاده از نمایش طبیعی، ثابت کنید نقاط تماس چرخزاد با محورش نقاط منفرد اساسی

هستند.

۴. ثابت کنید نقطه  $t=0$  یک انفراد اساسی منحنی  $x=t^2, y=t$  است.

تصوره ۱. در مثالهای ۱ و ۲ فوق می توانستیم پارامتر طبیعی را با استفاده از توابع مقدماتی برحسب پارامتری سازی داده شده بیان کنیم. لیکن، در حالت کلی، محاسبه طول یک منحنی به انتگرالهایی ختم می شود که نمی توان آنها را به صورت توابع مقدماتی نمایش داد. ساده ترین مثال بیضی است که با نمایش پارامتری معروف

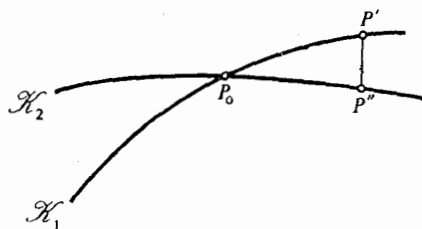
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad a \neq b$$

نموده شده است. این دلیل خوبی است از اینکه در نظریه منحنیها نباید فقط به پارامتری سازیهای طبیعی محدود شویم.

۴. تماس منحنیها و یک منحنی با یک سطح

۱.۴. تماس منحنیها

دو منحنی پارامتری  $\mathcal{K}_1$  و  $\mathcal{K}_2$  با نقطه مشترک  $P_0$  را در نظر می گیریم (شکل ۱.۴). فرض کنیم  $P'$  نقطه ای از  $\mathcal{K}_1$  و  $P''$  نقطه ای از  $\mathcal{K}_2$  باشد به طوری که تفاضل مقادیر پارامترهای طبیعی  $P'$  و  $P''$  بر  $\mathcal{K}_1$  و  $P_0$  و  $P''$  بر  $\mathcal{K}_2$  هر دو مساوی  $h$  باشند. این یعنی قوسهای  $P_0P'$  و  $P_0P''$  دارای طول  $|h|$  اند و  $P'$  و  $P''$  هر دو نسبت به  $P_0$  در جهت افزایش پارامتر بر منحنیهای نظیر واقعند اگر  $h > 0$ ، یا در جهت کاهش پارامتر قرار دارند اگر  $h < 0$ .



شکل ۱.۴

می گوئیم دو منحنی دارای تماس از مرتبه  $n$  اند اگر  $\overline{P'P''} = o(h^n)$  ولی، وقتی  $h \rightarrow 0$  (یا  $P', P'' \rightarrow P_0$ )،  $\overline{P'P''} \neq o(h^{n+1})$ .

قضیه. دو منحنی پارامتری  $\mathcal{K}_1$  و  $\mathcal{K}_2$  منتظم از کلاس  $C_{n+1}$  دارای تماس از مرتبه  $n$  در نقطه نامنفرد  $P_0$  اند اگر و فقط اگر، برای نمایشهای طبیعی آنها،  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s), \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\sigma)$  روابط زیر در  $P_0$  برقرار باشند:

$$r_1 = r_2, r'_1 = r'_2, \dots, r_1^{(n)} = r_2^{(n)}, r_1^{(n+1)} \neq r_2^{(n+1)}.$$

برهان. فرض کنیم نقطه  $P_0$  به ترتیب نظیر به مقادیر  $s_0$  و  $\sigma_0$  از پارامترهای طبیعی  $s$  و  $\sigma$  از  $\mathcal{K}_1$  و  $\mathcal{K}_2$  باشد.

در این صورت، بردارهای موضع  $P'$  و  $P''$  عبارتند از  $\overrightarrow{OP'} = r_1(s_0 + h)$  و  $\overrightarrow{OP''} = r_2(\sigma_0 + h)$  که از اینجا

$$\overrightarrow{P''P'} = r_1(s_0 + h) - r_2(\sigma_0 + h) = r_1(s_0) - r_2(\sigma_0) + \frac{h}{1!}[r'_1(s_0) - r'_2(\sigma_0)] + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!}[r_1^{(n)}(s_0) - r_2^{(n)}(\sigma_0)] + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[r_1^{(n+1)}(s_0) - r_2^{(n+1)}(\sigma_0)] + o(h^{n+1}).$$

البته، داریم  $r_1(s_0) = r_2(\sigma_0)$  زیرا این بردار موضع نقطه مشترک  $P_0$  دو منحنی است. برای آنکه  $\overrightarrow{P''P'} = o(h^n)$  ولی نه  $\overrightarrow{P''P'} = o(h^{n+1})$ ، این مجموع باید با جمله

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[r_1^{(n+1)}(s_0) - r_2^{(n+1)}(\sigma_0)]$$

شروع شود. بنابراین، شرط لازم و کافی عبارت است از

$$r'_1(s_0) = r'_2(\sigma_0), \dots, r_1^{(n)}(s_0) = r_2^{(n)}(\sigma_0), r_1^{(n+1)}(s_0) \neq r_2^{(n+1)}(\sigma_0),$$

که برهان را تمام می‌کند.

توجه کنید که، از دیدگاه ما، یک منحنی پارامتری و قرینه‌اش، با اینکه مجموعه‌های نظیر از نقاط آنها برهم منطبق اند، باهم تماس ندارند. برای آنکه دو منحنی پارامتری تماس داشته باشند، تماس مجموعه‌های نظیر در یک نقطه کافی نیست بلکه باید جهت منحنیها که به وسیله پارامتری سازیه‌ها در نقطه تماس معین می‌شود نیز یکی باشد. اگر ما به تماس دو منحنی  $\mathcal{K}_1$  و  $\mathcal{K}_2$  به عنوان مجموعه‌هایی از نقاط علاقه‌مند باشیم، می‌توانیم آنرا تماس  $\mathcal{K}_1$  و  $\mathcal{K}_2$  یا تماس  $\mathcal{K}_1$  و قرینه  $\mathcal{K}_2$  تعریف کنیم.

#### تمرین

ثابت کنید دو منحنی مسطح به معادلات

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x)$$

از کلاس  $C_{n+1}$  دارای تماس از مرتبه  $n$  در نقطه  $x_0$  اند اگر و فقط اگر

$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \quad \frac{df_1(x_0)}{dx} = \frac{df_2(x_0)}{dx},$$

$$\frac{d^n f_1(x_0)}{dx^n} = \frac{d^n f_2(x_0)}{dx^n}, \quad \frac{d^{n+1} f_1(x_0)}{dx^{n+1}} \neq \frac{d^{n+1} f_2(x_0)}{dx^{n+1}}.$$

راهنمایی. توجه کنید که فرمول برای  $d^k \mathbf{r}_i / ds^k$  در نقطه  $x = x_0$  شامل مشتقات  $f_i$  نسبت به  $x$  فقط تا مرتبه  $k$  است.

#### ۲.۴ مماس بر یک منحنی پارامتری

مماس بر منحنی  $\mathcal{C}$  در نقطه  $P$  خط مستقیمی است که با منحنی در نقطه  $P$  تماس از مرتبه ۱ لاقط ۱ دارد.

قضیه. یک منحنی پارامتری از کلاس  $C_1$  در هر نقطه منتظم مماس داشته و بردار  $\mathbf{r}'$  برداریکه این خط می باشد.

برهان. فرض کنیم نمایش پارامتری طبیعی منحنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

بوده ر نقطه  $P$  نظیر به مقدار  $s_0$  از پارامتر باشد. معادله پارامتری خط مار بر  $P$  به شکل

$$\mathbf{R} = \sigma \mathbf{a} + \mathbf{r}(s_0)$$

است، که در آن  $\mathbf{a}$  برداریکه خط و  $\sigma$  پارامتر طبیعی آن می باشد.

طبق قضیه بخش قبل، هر خط دارای تماس از مرتبه اول است اگر و فقط اگر  $\mathbf{r}'(s_0) = \mathbf{a}$ .

بنابراین،  $\mathbf{r}'(s_0)$  بردار یکه هادی خط می باشد.

معادله پارامتری مماس عبارت است از

$$(۱.۴) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}(s_0) + \mathbf{r}'(s_0)u,$$

که در آن  $u$  پارامتر طبیعی است. این معادله را می توان به شکل

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s_0)) \times \mathbf{r}'(s_0) = 0$$

نیز نمایش داد.

یک منحنی می تواند تماسی از مرتبه بالاتر با مماس داشته باشد و این در صورتی است

که از کلاس  $C_n$  بوده و مشتقات  $\mathbf{r}''(s_0), \dots, \mathbf{r}^{(k)}(s_0)$  مساوی صفر باشند. در این صورت، تماس از مرتبه اولین مشتق ناصفر یکی کمتر است.

نقطه  $P_0$  که در آن مماس دارای تماس از مرتبه بالاتر است یک نقطه اصطلاح منحنی نامیده می شود .

اگر یک منحنی با پارامتری سازی کلی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  داده شده باشد ،  $d\mathbf{r}/dt$  نیز بردار مماس است اما لزوماً " بردار یکه نیست ، و معادله پارامتری مماس عبارت است از

$$(2.4) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)u,$$

که در آن  $u$  یک پارامتر است که ، عموماً " ، پارامتر طبیعی نیست . معادله ( ۲.۴ ) معادل است با

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)) \times \dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0.$$

اگر معادله پارامتری منحنی با مختصات داده شده باشد ، یعنی

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

معادله مماس در  $t_0$  خواهد بود :

$$(3.4) \quad X = x(t_0) + u\dot{x}(t_0), \quad Y = y(t_0) + u\dot{y}(t_0), \quad Z = z(t_0) + u\dot{z}(t_0)$$

یا

$$(4.4) \quad \frac{X - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}$$

بردار  $\mathbf{r}'(s_0)$  یا  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  فقط راستای مماس را معین نمی کند بلکه به آن جهتی نیز می دهد که در آن جهت پارامتر افزایش می یابد . هر تغییر در نمایش پارامتری قرینه ( با قرار دادن یک تابع نزولی از پارامتر ) جهت  $\mathbf{r}'(s_0)$  را به جهت مخالف تغییر می دهد . لذا ، منحنی پارامتری قرینه دارای همان خط مماس در نقطه داده شده است منتها با جهت متفاوت .

هرگاه  $P_0$  یک نقطه منتظم یک مسیر از کلاس  $C_1$  باشد ، خطی که  $P_0$  را به نقطه متغیر  $P$  از مسیر وصل می کند به مماس در  $P$  ، وقتی  $P$  به  $P_0$  میل می کند ، میل خواهد کرد . در واقع ، خطوطاصل بین نقاط  $P_0$  و  $P$  نظیر به مقادیر  $t_0$  و  $t$  از پارامتر  $t$  مسیر دارای معادله پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{u}{t - t_0}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0))$$

است ، که در آن  $u$  پارامتر خط می باشد . این عبارت ، وقتی  $t \rightarrow t_0$  ، معادله ( ۲.۴ ) مماس را حاصل می کند .

★ هرگاه  $P_0$  نقطه منفرد یک نمایش پارامتری باشد به این صورت که ، به ازای مقدار  $t_0$  نظیر از پارامتر ،  $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0$  ولی مشتقات مراتب بالاتر در  $t_0$  وجود داشته و همه آنها صفر

نباشند، آنگاه راستای خط مماس به وسیله مشتق ناصفر از پایین‌ترین مرتبه در این نقطه معین خواهد شد.

هرگاه این پایین‌ترین مرتبه عددی زوج باشد، آنگاه

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dots = {}^{(2k-1)}\mathbf{r}(t_0) = 0,$$

$$\mathbf{r}(t_0 + h) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{(2k)!} {}^{(2k)}\mathbf{r}(t_0) h^{2k} + o(h^{2k}),$$

و انحراف نقطه  $P$  نظیر به مقدار  $t_0 + h$  از صفحه مار بر  $P_0$  و عمود بر  ${}^{(2k)}\mathbf{r}(t_0)$  به ازای  $h$  به قدر کافی کوچک، به یک نیم فضا به ازای مقادیر مثبت و منفی  $h$  اشاره دارد. بنابراین، نقطه  $P_0$  یک بازگشت می‌باشد. خط مستقیم با بردار هادی  ${}^{(2k)}\mathbf{r}(t_0)$  بر هر دو شاخه منحنی در  $P_0$  مماس است. اگر پارامتری سازی را به وضع طبیعی درآوریم، هیچ مشتقی در  $P_0$  نسبت به پارامتر طبیعی وجود ندارد.

از آن طرف، هرگاه پایین‌ترین مرتبه یک مشتق ناصفر در  $t_0$  فرد باشد، آنگاه نقطه  $P$  در پارامتری سازی طبیعی یک نقطه منتظم خواهد شد. در واقع، هرگاه

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dots = {}^{(2k)}\mathbf{r}(t_0) = 0, \quad {}^{(k+1)}\mathbf{r}(t_0) \neq 0,$$

آنگاه

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{(2k+1)!} {}^{(2k+1)}\mathbf{r}(t_0) (t - t_0)^{2k+1} + o((t - t_0)^{2k+1}).$$

جایگذاری  $(t - t_0)^{2k+1} = \tau$  نمایش پارامتری جدید  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(\tau)$  را حاصل می‌کند، که در آن  $P$  نظیر به مقدار  $\tau = 0$  از پارامتر  $\tau$  بوده، و

$$\dot{\mathbf{r}}^*(0) = \frac{1}{(2k+1)!} {}^{(2k+1)}\mathbf{r}(t_0) \neq 0,$$

زیرا، طبق فرمول تیلور،

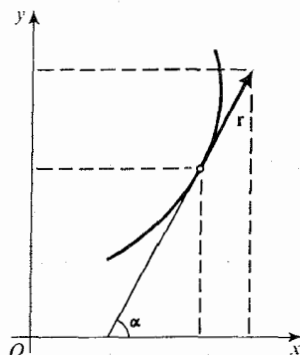
$$\mathbf{r}^*(\tau) = \frac{\tau}{(2k+1)!} {}^{(2k+1)}\mathbf{r}(t_0) + o(\tau). \quad \star$$

نقاط اصلاح را می‌توان بدون معرفی صریح پارامتری سازی طبیعی نیز شناخت. خاصیت نظیر به اینکه  $\mathbf{r}''', \dots, \mathbf{r}^{(k)}$  در  $s_0$  صفرند این است که مشتقات  $\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{r}$  با  $\dot{\mathbf{r}}$  همخط هستند. این مطلب را ثابت کنید.

در مورد یک منحنی مسطح، بردار  $\dot{\mathbf{r}}$  موازی صفحه منحنی است. اگر در صفحه یک

دستگاه مختصات متعامد معرفی کنیم، تصاویر این بردار روی محورهای مختصات  $x$  و  $y$  به ترتیب مساوی طول بردار ضربدر کسینوس و سینوس زاویه  $\alpha$  بین محور  $x$  و بردار  $\vec{r}$  است (شکل ۲۰۴). لذا، خواهیم داشت

$$(۵۰۴) \quad \frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{\dot{y}(t_0)}{\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}} = \sin \alpha.$$



شکل ۲۰۴

تمرین

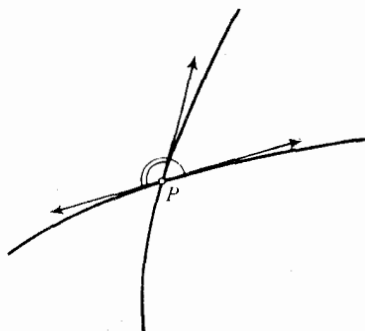
۱. زاویه بین منحنیها. زاویه بین دو مسیر  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$  و  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\tau)$  با نقطه مشترک  $P$ ، به ترتیب نظیر به مقادیر  $t_0$  و  $\tau_0$  از پارامترهای  $t$  و  $\tau$ ، زاویه بین بردارهای مماس بر مسیرها در نقطه مشترک تعریف می شود. در نتیجه، فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$(۶۰۴) \quad \cos \phi = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1(t_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(\tau_0)}{|\dot{\mathbf{r}}_1(t_0)| |\dot{\mathbf{r}}_2(\tau_0)|};$$

یا، اگر مسیرها با معادلاتی بر حسب مختصات مانند  $x = x_1(t)$ ,  $y = y_1(t)$ ,  $z = z_1(t)$  و  $x = x_2(\tau)$ ,  $y = y_2(\tau)$ ,  $z = z_2(\tau)$  داده شده باشند، این فرمول به صورت زیر درمی آید:

$$(۷۰۴) \quad \cos \phi = \frac{\dot{x}_1(t_0)\dot{x}_2(\tau_0) + \dot{y}_1(t_0)\dot{y}_2(\tau_0) + \dot{z}_1(t_0)\dot{z}_2(\tau_0)}{\sqrt{(\dot{x}_1(t_0))^2 + (\dot{y}_1(t_0))^2 + (\dot{z}_1(t_0))^2} \sqrt{(\dot{x}_2(\tau_0))^2 + (\dot{y}_2(\tau_0))^2 + (\dot{z}_2(\tau_0))^2}}.$$

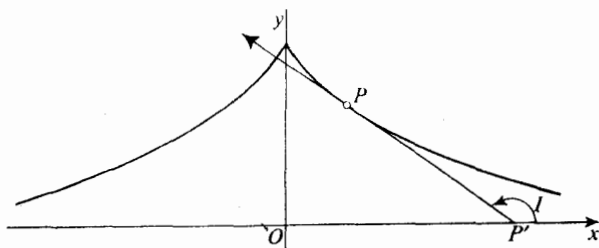
زاویه ای که به این طریق تعریف شود، وقتی پارامتری سازی یک یا هر دو منحنی با پارامتری سازی هم ارزی عوض شود، تغییر نمی کند. اما، اگر جهت یکی از منحنیها تغییر کند، تعریف مایلجاب می کند که زاویه اصلی با زاویه مکملش عوض شود (شکل ۳۰۴). اگر بد زاویه بین منحنیها علاقه مند باشیم درحالی که آنها را مجموعه هایی گرفته ایم تا مسیرها، می توان



شکل ۳.۴

قرار گذاشت که از دو زاویه مکمل همیشه کوچکتر را اختیار نمود. در این حالت، باید طرف راست (۶.۴) و (۷.۴) را با قدر مطلق آن عوض کرد.

۲. کشاننده. کشاننده منحنی مسطحی است با خاصیت زیر: آن قطعه از مماس که بین نقطه تماس  $P$  و خط مستقیم ثابتی در صفحه (مجاانب کشاننده) واقع است دارای طول ثابت  $a$  می باشد (شکل ۴.۴). این خط را محور  $x$  دستگاه مختصات می گیریم، و فرض می کنیم



شکل ۴.۴

$t$  زاویه جهتدار بین محور  $x$  و بردار  $\overrightarrow{PP'}$  باشد، که در آن  $P$  نقطه متغیر کشاننده بوده و  $P'$  نقطه مشترک مماس در  $P$  و محور  $x$  باشد. جهت محور  $y$  را طوری می گیریم که این  $t$  بین  $0$  و  $\pi$  قرار گیرد. فرض کنیم  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  که پارامتر است، معادله پارامتری منحنی باشد (که باید تعیین شود). در این صورت، داریم

$$(۸.۴) \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \pm \cos t, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \pm \sin t.$$

بعلاوه، مختص  $y$  نقطه  $P$  برابر است با تصویر بردار  $\overrightarrow{PP'}$  روی محور  $y$ . لذا،

$$y = a \sin t,$$

که از اینجا  $a \cos t = x$  از (۸.۴) خواهیم داشت

(۹.۴)

$$\dot{x} = y \cot t.$$

دیگر آنکه،

$$\dot{x} = y \cot t = a \cos t \cot t = a \frac{\cos^2 t}{\sin t} = a \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} = -a \sin t + \frac{a}{\sin t},$$

و

$$x = a \cos t + \int \frac{a dt}{\sin t} = a \cos t + a \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C.$$

اگر مبدأ دستگاه مختصات را طوری اختیار کنیم که به ازای  $t = \frac{1}{2}\pi$  داشته باشیم  $x = 0$ ، می‌توانیم  $C$  را صفر کنیم؛ و در نتیجه، معادله خواهد شد:

$$(10.4) \quad x = a \cos t + a \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right|, \quad y = a \sin t.$$

وقتی  $t$  از ۰ تا  $\pi$  تغییر کند، تمام نقاط کشاننده را خواهیم داشت. هرگاه  $t \rightarrow 0$  آنگاه  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$  و هرگاه  $t \rightarrow \pi$  آنگاه  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$ . از اینرو، کشاننده به طور نامتناهی گسترش دارد و به مجانبش از دو طرف به طور مجانبی نزدیک می‌شود. نقطه  $t = \frac{1}{2}\pi$  یک نقطه منفرد می‌باشد.

۳. بردارهای مماس بر یک چرخزاد را در نقاط مختلف پیدا کنید. حد بردار یکه مماس بر یک چرخزاد را وقتی پارامتر  $t$  از چپ به ۰ نزدیک می‌شود، و نیز وقتی  $t$  از راست به ۰ نزدیک می‌شود، چیست؟

۴. طول قطعه‌ای از کشاننده را از نقطه منفرد ( $t = \frac{1}{2}\pi$ ) تا نقطه نظیر به مقدار  $t$  از پارامتر بیابید.

۵. نشان دهید که

$$x = a \left( \ln t + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right), \quad y = \frac{2at}{1 + t^2}, \quad 0 < t < \infty,$$

نمایش پارامتری دیگری از کشاننده است.

۶. ثابت کنید تمام خطوط مماس بر مارپیچ در نقاط مختلف با محور  $z$  زاویه ثابتی می‌سازند.

۷. روی مخروط  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  یک منحنی بیابید که با خطوط مستقیم روی آن زاویه ثابت  $\alpha$  را بسازد. ثابت کنید تمام خطوط مماس بر این منحنی با محور  $z$  زاویه ثابت  $\beta$  را می‌سازند.

راهنمایی. زاویه  $t$  بین محور  $x$  و تصویر مولد مستقیم الخط مخروط مار بر نقاط منحنی روی صفحه  $xy$  را به عنوان پارامتر به کار ببرید. در این صورت، مختصات نقطه‌ای از

منحنی که نظیر به مقدار  $t$  از پارامتر است عبارتند از

$$x = u \cos t, \quad y = u \sin t, \quad z = u,$$

که  $u$  خود به  $t$  وابسته است. ( توجه کنید که در حالت کلی اینها معادلات پارامتری مخروط با پارامترهای  $t$  و  $u$  اند. ) این بستگی را می توان با داده های مسئله تعیین کرد.

$$[ \text{جواب} . x = e^{mt} \cos t, y = e^{mt} \sin t, z = e^{mt} . \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \alpha \text{ و } \cot \alpha = m\sqrt{2} \text{ که } ]$$

۸. ثابت کنید که

( آ ) اگر تمام خطوط مماس بر یک منحنی هم رس باشند، منحنی یک خط راست است؛  
( ب ) اگر تمام خطوط مماس بر یک منحنی موازی باشند، منحنی نیز یک خط راست است.

### ۳.۴ تماس یک منحنی با یک صفحه یا کره. صفحه بوسان

فرض کنیم  $P_0$  نقطه مشترک منحنی  $\mathcal{K}$  با یک صفحه یا کره  $\mathcal{P}$  بوده، و  $P$  یک نقطه متغیر از منحنی باشد به طوری که طول قوس علامتدار بین  $P$  و  $P_0$  مساوی  $h$  باشد. فاصله  $P$  از سطح ( صفحه یا کره ) را با  $d_h$  نشان می دهیم.

می گوئیم سطح و منحنی در نقطه  $P_0$  دارای تماس از مرتبه  $n$  اقل هستند، اگر داشته باشیم  $d_h = o(h^n)$ .

صفحه ای که در  $P_0$  دارای بالاترین مرتبه تماس ممکن با منحنی باشد صفحه بوسان  $P_0$  نامیده می شود.

قضیه. منحنی پارامتری  $r = r(s)$  از کلاس  $C_2$  در هر نقطه منتظم  $s_0$  که در آن مشتق دوم نسبت به طول قوس مخالف صفر است، یعنی  $r''(s_0) \neq 0$ ، صفحه بوسان دارد. این صفحه موازی بردارهای  $r'(s_0)$  و  $r''(s_0)$  است و، در نتیجه، معادله صفحه بوسان مساوی است با

$$[R - r(s_0)]r'(s_0)r''(s_0) = 0. \quad (11.4)$$

این معادله بر حسب مختصات برابر است با

$$(12.4) \quad \begin{vmatrix} X - x(s_0) & Y - y(s_0) & Z - z(s_0) \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix} = 0.$$

مرتبه تماس ناگهتر از ۲ است.

برهان. معادله صفحه مار بر نقطه  $P_0$  و عمود بر بردار یکه‌ای چون  $\mathbf{m}$  عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s_0))\mathbf{m} = 0.$$

فاصله نقطه  $P$  با بردار موضع  $\mathbf{r}(s_0 + h)$  از این صفحه برابر است با

$$d_h = |[\mathbf{r}(s_0 + h) - \mathbf{r}(s_0)]\mathbf{m}|.$$

با استفاده از فرمول تیلور داریم

$$\mathbf{r}(s_0 + h) - \mathbf{r}(s_0) = h\mathbf{r}'(s_0) + \frac{h^2}{2}\mathbf{r}''(s_0) + o(h^2).$$

در نتیجه،

$$d_h = h\mathbf{r}'(s_0)\mathbf{m} + \frac{h^2}{2}\mathbf{r}''(s_0)\mathbf{m} + o(h^2).$$

توجه کنید که، چون بردارهای  $\mathbf{r}'(s_0)$  و  $\mathbf{r}''(s_0)$  بدلیل ناصفر و عمود بودن، مستقل اند نتیجه می‌شود که بالاترین مرتبه تماس فقط وقتی است که

$$\mathbf{r}''(s_0)\mathbf{m} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{r}'(s_0)\mathbf{m} = 0$$

به آسانی دیده می‌شود که این دو معادله  $\mathbf{m}$  را با تقریب علامت به طور منحصر بفرد معین می‌کنند. در واقع،  $\mathbf{m}$ ، بدلیل عمود بودن بر  $\mathbf{r}'(s_0)$  و  $\mathbf{r}''(s_0)$ ، موازی  $\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)$ ، که با مفروضات ما بردار ناصفری است، می‌باشد. بنابراین، فقط ممکن است

$$\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)}{|\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)|} \quad \text{یا} \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)}{|\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)|}$$

اما در معادله یک صفحه می‌توان هر بردار عمود، نه الزاماً یک برداریکه، را نیز به کار برد. بنابراین، با استفاده از  $\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)$  به جای  $\mathbf{m}$ ، معادله (۱۱.۴) را خواهیم داشت. در حالت کلی، تماس از مرتبه بالاتر از دو انتظار نمی‌رود. اگر این مورد در یک نقطه خاص رخ دهد، مثل حالتی که  $\mathbf{r}'''(s_0) = 0$ ، می‌گوییم این نقطه یک نقطه تخت منحنی است. هرگاه  $\mathbf{r}''(s_0) = 0$ ، یا صفحه بوسان در نقطه  $s_0$  اصلاً وجود ندارد یا وجود داشته ولی با مشتقات مراتب بالاتر از ۲ معین می‌شود. در این حالت، صفحه بوسان تماس از مرتبه بالاتر از ۲ دارد. اما، در همین حال، خط مماس نیز دارای تماس از مرتبه بالاتر از ۱ است. لذا، آن نقطه یک نقطه اصلاح منحنی می‌باشد.

به عنوان مثال، اگر  $\mathbf{r}''(s_0) = 0$  و اولین مشتق  $\mathbf{r}(s)$  در  $s_0$  که از  $\mathbf{r}'(s_0)$  مستقل خطی است  $\mathbf{r}^k(s_0)$  باشد، صفحه بوسان وجود دارد. این صفحه موازی بردارهای  $\mathbf{r}'(s_0)$  و  $\mathbf{r}^k(s_0)$  است و مرتبه تماس از  $k$  کمتر نیست.

## ۴.۴ معادله صفحه بوسان با یک پارامتری سازی کلی

اینک حالت پارامتری سازی کلی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، که لزوماً "پارامتری سازی طبیعی نیست، را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم  $t_0$  یک نقطه منتظم این پارامتری سازی باشد. اگر پارامتری سازی طبیعی را نیز در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} + \mathbf{r}' \frac{d^2 s}{dt^2} = \mathbf{r}'' \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

بنابراین،

$$(13.4) \quad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \left( \frac{ds}{dt} \right)^3.$$

در نتیجه، بردارهای  $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$  و  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  در نقاط منتظم همخط هستند؛ و لذا، می‌توان در معادله صفحه بوسان جای یکی را با دیگری عوض کرده و شکل برداری

$$(14.4) \quad [\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)] \dot{\mathbf{r}}(t_0) \ddot{\mathbf{r}}(t_0) = 0$$

و یا شکل مختصاتی

$$(15.4) \quad \begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

آن را به دست آورد. در اینجا  $\mathbf{R}$  بردار موضع یک نقطه به مختصات  $X, Y, Z$  از صفحه بوسان است. در حالت خاص پارامتری سازی طبیعی، معادله (15.4) همان (12.4) خواهد بود.

## تمرین

۱. صفحه بوسان مارپیچ را پیدا کنید. زاویه بین آن و محور مارپیچ چیست؟

۲. صفحه بوسان منحنی  $x = y, x = \frac{1}{2}z^2$  را پیدا کنید.

۳. صفحه بوسان منحنی

$$x = t^2, \quad y = t - t^2, \quad z = 2t$$

را پیدا کنید. به شکل خاص بستگی صفحه بوسان به پارامتر  $t$  توجه نمایید. از این بستگی

چه چیز را می‌توان درباره موضع دوجانبه منحنی و صفحه بوسان نتیجه گرفت؟

## ۵.۴ مجانبهای یک منحنی

می‌گوییم منحنی پارامتری

$$(16.4) \quad r = r(t), \quad a < t < b,$$

که در آن ممکن است  $a = -\infty$  یا  $b = \infty$ ، وقتی  $t \rightarrow b$  (یا  $t \rightarrow a$ ) دارای یک شاخه بی کران است اگر  $|r(t)|$  وقتی  $t \rightarrow b - 0$  (یا  $t \rightarrow a + 0$ )، به بی نهایت میل کند. نکات زیر در ارتباط با حالت  $t \rightarrow b - 0$  است اما، با اصلاحاتی واضح، برای  $t \rightarrow a + 0$  نیز اعتبار دارند.

اگر پارامتر طول قوس (پارامتر طبیعی) باشد، یک شاخه بی کران منحنی فقط می تواند نظیر به حالت  $t \rightarrow \pm \infty$  باشد.

یک خط مستقیم در فضا خط مجانبی یا مجانب شاخه بی کران منحنی (۱۶.۴) نامیده می شود اگر فاصله یک نقطه متغیر منحنی از این خط، وقتی نقطه در امتداد شاخه به بی نهایت می رود، به صفر میل کند.

قضیه ۱. یک شاخه بی کران منحنی (۱۶.۴)، وقتی  $t \rightarrow b - 0$ ، دارای مجانب است اگر و فقط اگر حدود زیر وجود داشته باشند:

$$(17.4) \quad p = \lim_{t \rightarrow b-0} [r(t) - (ar(t))a] \quad \text{و} \quad a = \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{r(t)}{|r(t)|}$$

مجانب موازی بردار  $a$  است و از نقطه ای با بردار موضع  $p$  می گذرد. لذا، معادله اش خواهد بود:

$$(18.4) \quad (R - p) \times a = 0 \quad \text{یا} \quad R = p + ua$$

برهان. ابتدا فرض کنیم مجانب وجود داشته باشد. برداریکه هادی این خط را با  $a^*$  نشان داده، و  $p^*$  را بردار موضع پای عمود بر مجانب که از مبدا می گذرد می گیریم. در نتیجه، داریم

$$p^* a^* = 0.$$

بنابراین، معادله مجانب خواهد بود

$$(R - p^*) \times a^* = 0.$$

طبق زیربخش ۶.۱، فاصله یک نقطه با بردار موضع  $r(t)$  تا این خط از فرمول

$$d = |[r(t) - p^*] \times a^*|$$

به دست می آید.

بنابراین تعریف مجانب، داریم

$$(19.4) \quad \lim_{t \rightarrow b-0} [r(t) \times a^* - p^* \times a^*] = 0.$$

چون  $|r(t)| \rightarrow \infty$  ، نیز خواهیم داشت

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \left[ \frac{r(t)}{|r(t)|} \times a^* - \frac{p^* \times a^*}{|r(t)|} \right] = 0,$$

و

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \frac{r(t)}{|r(t)|} \times a^* = 0.$$

چون در اینجا هر دو عامل بردارهای یکه‌اند و هر دو به‌ازای مقادیر  $t$  به قدر کافی نزدیک به  $0 - b$  تعریف شده‌اند ، قدرمطلق حاصل ضرب برابر است با سینوس زاویه<sup>۶</sup> بین دو بردار  $r(t)/|r(t)|$  و  $a^*$  . در نتیجه ، این زاویه دارای حدی مساوی  $0$  یا  $\pi$  است ، و داریم

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \frac{r(t)}{|r(t)|} = \pm a^*.$$

حال (۱۹۰۴) را از چپ در  $a^*$  ضرب برداری می‌کنیم ؛ خواهیم داشت

$$\lim_{t \rightarrow b-0} [a^* \times (r(t) \times a^*) - a^* \times (p^* \times a^*)] = 0.$$

با اعمال (۲۱۰۱) و نیز استفاده از اتحادهای  $a^{*2} = 1$  ،  $a^* p^* = 0$  ، و  $a = \pm a^*$  ، داریم

$$\lim_{t \rightarrow b-0} [r(t) - (ar(t))a - p^*] = 0,$$

که وجود حد دوم در (۱۷۰۴) و معادله<sup>۷</sup>

$$p = \lim_{t \rightarrow b-0} [r(t) - (ar(t))a] = p^*$$

را ایجاب خواهد کرد .

بعکس ، هرگاه به‌ازای بردار یک‌های چون  $a$  حد

$$p = \lim_{t \rightarrow b-0} [r(t) - (ar(t))a]$$

وجود داشته باشد ، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \{a \times [(r(t) - p) \times a]\} = 0.$$

اما

$$|a \times [(r(t) - p) \times a]| = |(r(t) - p) \times a|,$$

زیرا عوامل سمت چپ برهم عمودند و  $|a| = 1$  . بنابراین ،

$$\lim_{t \rightarrow b-0} |(r(t) - p) \times a| = 0,$$

بدین معنی که فاصله<sup>۸</sup> نقطه<sup>۹</sup>  $P$  واقع بر منحنی تا خط موازی با  $a$  و مار برنقطه‌ای با بردار موضع  $p$  ، وقتی  $t \rightarrow b - 0$  و  $P$  به بی‌نهایت می‌رود ، به صفر میل می‌کند . در نتیجه ،

این خط یک مجانب نظیر به شاخه بی کران منحنی است. بنابراین، بردار  $\mathbf{a}$  باید در معادله

$$\mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$$

صدق کند، و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود.

راستای بردار  $\mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow b-0} (\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|)$  راستای مجانبی منحنی است.

یک منحنی ممکن است راستای مجانبی داشته باشد بی آنکه مجانب داشته باشد. مثلاً، سهمی  $y = x^2, z = 0$  مجانب ندارد در حالی که راستای محور  $y$  راستای مجانبی آن است. ثابت کنید!

تا پایان این بخش، به قضیه هوییتال<sup>۱</sup> با شکل زیر نیاز داریم.

لم. هرگاه تابع برداری  $\mathbf{u}(s)$  و تابع اسکالر  $\lambda(s) \neq 0$  وقتی  $s \rightarrow \infty$  به صفر میل کنند و

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mathbf{u}(s)/\lambda(s)) \text{ موجود باشد، آنگاه } \lim_{s \rightarrow \infty} (\mathbf{u}'(s)/\lambda'(s))$$

نیز وجود داشته و

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{u}(s)}{\lambda(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{u}'(s)}{\lambda'(s)}.$$

اثبات، کاربرد ساده قضیه هوییتال در مورد هر مولفه جداگانه است. با استفاده از این لم می توان قضیه زیر را به اثبات رسانید.

قضیه ۲. هرگاه مماس بر یک منحنی از کلاس  $C_1$ ، وقتی نقطه تماس در امتداد یک شاخه بی کران آن به بی نهایت می رود، همگرا به یک خط حدی باشد، آنگاه خط حدی یک مجانب خواهد بود.

برهان. روی منحنی پارامتری سازی طبیعی را اختیار می کنیم با جهتی که شاخه بی کران منحنی نظیر به  $s \rightarrow \infty$  باشد. فرض کنیم مبداء دستگاه مختصات در فضا بر خط حدی قرار داشته باشد. در این صورت، منحنی دارای نمایش پارامتری  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  است به طوری که

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(s)| = \infty. \quad (20.4)$$

مماس بر منحنی در نقطه  $s$  دارای معادله

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)] \times \mathbf{r}'(s) = 0$$

است، که در آن  $\mathbf{r}'(s)$  برداریکه هادی مماس می‌باشد. چون این مماس همگرا به خط حدی است و مبدأ روی آن قرار دارد، فاصله مبدأ تا مماس، یعنی  $d = |\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s)|$  به 0 میل می‌کند، و بردار یکه هادی  $\mathbf{r}'(s)$  به برداریکه هادی  $\mathbf{a}$  از خط حدی میل خواهد کرد؛ یعنی،

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s) = 0, \quad (21.4)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{r}'(s) = \mathbf{a}, \quad a^2 = 1. \quad (22.4)$$

حال دستگاه مختصات را در فضا طوری انتخاب می‌کنیم که همه مولفه‌های بردار  $\mathbf{a}$  مثبت باشند. در این صورت، (22.4) ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} x'(s) = \alpha > 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} y'(s) = \beta > 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} z'(s) = \gamma > 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \end{aligned} \quad (23.4)$$

این نیز ایجاب می‌کند که، وقتی  $s \rightarrow \infty$

$$x(s) \rightarrow \infty, \quad y(s) \rightarrow \infty, \quad z(s) \rightarrow \infty.$$

در واقع،  $s_0$  ی هست به طوری که به ازای  $s > s_0$  همیشه داریم  $x'(s) > \alpha/2 > 0$ ، که از اینجا، بنا بر قضیه لاگرانژ، به ازای  $s > s_0$ ،  $x(s) - x(s_0) > \frac{1}{2}\alpha(s - s_0)$ ، و، وقتی  $s \rightarrow \infty$ ،  $x(s) \rightarrow \infty$ . اثبات در مورد  $y(s)$  و  $z(s)$  نیز به همین نحو است.

حال بردار

$$\frac{\mathbf{r}(s)}{|\mathbf{r}(s)|} = \left\{ \frac{x(s)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y(s)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z(s)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

را در نظر می‌گیریم. در مورد مولفه اول این بردار داریم

$$\frac{x(s)}{\sqrt{x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [y(s)/x(s)]^2 + [z(s)/x(s)]^2}}.$$

بنا بر قضیه هوپتال،

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y(s)}{x(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y'(s)}{x'(s)} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{z(s)}{x(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{z'(s)}{x'(s)} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

مولفه اول این بردار حدش

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\beta/\alpha)^2 + (\gamma/\alpha)^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \alpha$$

است. به همین نحو، می توان ثابت کرد که حدود مولفه های دوم و سوم به ترتیب  $\beta$  و  $\gamma$  هستند. بنابراین، داریم

$$(24.4) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{r}(s)}{|\mathbf{r}(s)|} = \mathbf{a}.$$

راستای خط حدی راستای مجانبی خواهد بود.

برای اثبات اینکه خط حدی یک مجانب است، کافی است ثابت کنیم که فاصله یک نقطه متغیر منحنی تا خط حدی، وقتی  $s \rightarrow \infty$ ، به 0 میل می کند. این فاصله برابر است با

$$|\mathbf{r}(s) \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a} \times (\mathbf{r}(s) \times \mathbf{a})|.$$

پس از یک تبدیل ساده

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{a} \times \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{a} \right)}{\frac{1}{|\mathbf{r}|}},$$

صورت کسر فوق یک تابع برداری است که، بنا بر (24.4)، وقتی  $s \rightarrow \infty$ ، به صفر میل می کند و مخرج تابع اسکالری است که به صفر میل می کند. با استفاده از لم فوق داریم

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{r}|} \right]'}{\left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right]'} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\{ |\mathbf{r}|(\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{a})) - (\mathbf{r}\mathbf{r}')(\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})) \} |\mathbf{r}|^{-3}}{-(\mathbf{r}\mathbf{r}')|\mathbf{r}|^{-3}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{a}) - (\mathbf{r}\mathbf{r}') \left[ \mathbf{a} \times \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{a} \right) \right]}{-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}'} \end{aligned}$$

اما، بنا بر (24.4) و (22.4)، مخرج به  $-a^2 = -1$  میل کرده، و صورت به 0 میل می کند، زیرا، بنا بر (22.4) و (24.4)،

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{a} \rightarrow 0.$$

بنابراین،

$$\lim_{s \rightarrow \infty} r \times a = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} a \times (r \times a) = 0$$

توجه کنید که عکس این قضیه برقرار نیست. منحنیهایی هستند که بجانب دارند ولی مماس آنها حد ندارد؛ مثلاً "، تابع

$$y = \frac{\sin x^2}{x}, \quad x > 0,$$

نمایش یک منحنی است که بجانبش به ازای  $x \rightarrow \infty$  بر محور  $x$  منطبق است. از طرف دیگر، راستای مماس بر این منحنی، وقتی  $x \rightarrow \infty$ ، حد ندارد.

### امثله و تمرین

۱. یافتن جانبها در حالتی که بجانب موازی یکی از محورهای مختصات باشد ساده تر است. ثابت کنید خط  $x = x_0, y = y_0$  بجانب منحنی

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

است، وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، اگر و فقط اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \pm \infty.$$

شرطهای مشابه را برای جانبهای موازی محورهای  $x$  و  $y$  بیان دارید.

۲. محور  $z$  بجانب منحنی

$$x = e^{-t} \cos e^t, \quad y = e^{-t} \sin e^t, \quad z = t$$

است، وقتی  $t \rightarrow \infty$ . مولفه‌های برداریکه مماس بر این منحنی عبارتند از

$$\left( \frac{e^{-t} \cos e^t - \sin e^t}{\sqrt{2 + e^{-2t}}}, \quad \frac{e^{-t} \sin e^t + \cos e^t}{\sqrt{2 + e^{-2t}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2 + e^{-2t}}} \right).$$

بردار مماس، وقتی  $t \rightarrow -\infty$ ، حد ندارد. شاخه بی کران دیگر منحنی ( $t \rightarrow \infty$ ) بجانب ندارد ولی راستای محور  $x$  راستای جانبی آن است.

این احکام را ثابت کنید.

۳. بجانب منحنی

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = \frac{1}{t}, \quad 0 < t < \infty$$

را به ازای  $t \rightarrow 0$  بیابید. آیا این منحنی به ازای  $t \rightarrow \infty$  بجانب دارد؟ اگر چنین است، بجانب را پیدا کنید. آیا مماس بر منحنی همگرا به جانب است؟

۴. تمرین فوق را در مورد منحنی

$$x = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{t}}, \quad y = \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{t}}, \quad z = t, \quad 0 < t < \infty$$

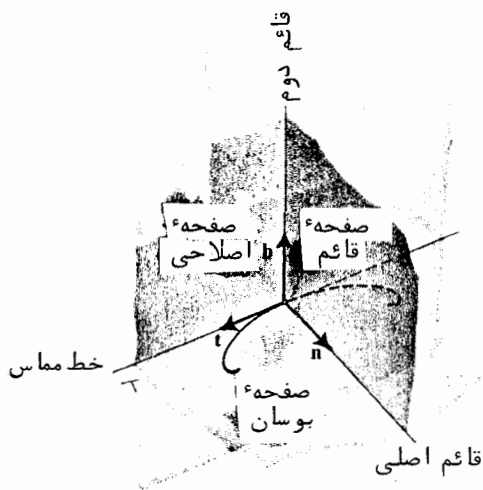
حل کنید.

## ۵. سه وجهی فرنه<sup>۱</sup> و فرمولهای فرنه

### ۱۰۵ سه وجهی فرنه

ما به هر نقطه<sup>۲</sup> یک منحنی پارامتری از کلاس  $C_2$  یک سه تایی متعامد یکه از بردارهای یکه مربوط می کنیم که عبارتند از بردار مماس  $t$ ، بردار قائم اصلی  $n$ ، و بردار قائم دوم  $b$ . بردار قائم اصلی  $n$  در نقطه<sup>۳</sup>  $P$  بردار یکه<sup>۴</sup> قائم اصلی است؛ یعنی، آن قائم به منحنی در  $P$  که در صفحه<sup>۵</sup> بوسان در  $P$  قرار دارد. جهت بردار قائم اصلی طوری انتخاب می شود که بردار اشاره به جهتی کند که منحنی، یا تصویرش روی صفحه<sup>۶</sup> بوسان، در آن جهت مقرر است. این یعنی  $n$  همان جهت مشتق دوم بردار موضع نسبت به پارامتر طبیعی، یعنی  $r''$  را دارد.

بردار قائم دوم  $b$  بردار یکه ای است که بر صفحه<sup>۷</sup> بوسان عمود است به طوری که سه بردار  $t, n, b$ ، با همین ترتیب، یک سه تایی با جهت مثبت را تشکیل می دهند. خطوط مار بر  $P$  و موازی بردارهای  $t, n, b$ ، بترتیب مماس، قائم اصلی، و قائم دوم منحنی در  $P$  نامیده می شوند. صفحه ای که شامل مماس و قائم اصلی باشد همان صفحه<sup>۸</sup> بوسان است. صفحه ای که قائم اصلی و قائم دوم منحنی را دربرگیرد صفحه<sup>۹</sup> قائم نامیده می شود. بالاخره، صفحه<sup>۱۰</sup> معین شده به وسیله<sup>۱۱</sup> مماس و قائم دوم صفحه<sup>۱۲</sup> اصلی منحنی در  $P$  نام دارد. کل این ساختمان بندی سه وجهی فرنه یا گنج فرنه نامیده می شود (شکل ۱۰۵).



شکل ۱۰۵

درحالتی که  $P$  نقطه منتظم یک منحنی پارامتری از کلاس  $C_2$  بوده و یک نقطهء اصلاح نباشد ( $r'' \neq 0$ ) بردارهای کنج فرنه از فرمولهای زیر به دست می آیند . همانطور که قبلاً دیدیم ، بردار یکه مماس عبارت است از

$$(1.5) \quad t = r'.$$

بردار  $r''$  در صفحه بوسان قرار دارد . چون  $r'$  بردار یکه است ،  $r''$  قائم به منحنی است ؛ و در نتیجه ، با بردار قائم اصلی همخط و همجهت است . بنابراین ، داریم

$$(2.5) \quad n = \frac{r''}{|r''|}.$$

بالاخره ، بردار قائم دوم عبارت است از

$$(3.5) \quad b = t \times n = \frac{r' \times r''}{|r''|}.$$

اگر پارامتری سازی منحنی را به قرینه اش ( $\sigma = -s$ ) تغییر دهیم ، بردار مماس جهتش را تغییر نمی دهد ، و بردار قائم دوم نیز جهتش را تغییر خواهد داد .

حال فرمولهایی را پیدا می کنیم که بردارهای کنج فرنه را برای یک پارامتری سازی دلخواه بیان کنند . با استفاده از فرمولهای (۳.۳) و (۱۳.۴) داریم

$$(4.5) \quad t = r' = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}, \quad r' \times r'' = (\dot{r} \times \ddot{r}) \left( \frac{dt}{ds} \right)^3.$$

چون  $b$  یک بردار یکه درجهت  $r' \times r''$  است ، درمی یابیم که

$$(5.5) \quad t = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|},$$

$$(6.5) \quad b = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|},$$

و چون

$$n = b \times t,$$

زیرا  $t, n, b$  یک دستگاه متعامد یکه جهتدار با جهت مثبت از بردارها را تشکیل می دهند ، داریم

$$(7.5) \quad n = \frac{(\dot{r} \times \ddot{r}) \times \dot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}| |\dot{r}|} = \frac{\ddot{r} |\dot{r}|^2 - \dot{r} (\ddot{r} \dot{r})}{|\dot{r}| |\dot{r} \times \ddot{r}|}.$$

در یک نقطهء اصلاح ، که  $r'' = 0$  یا ، به طور کلیتر ، بردارهای  $\dot{r}$  و  $\ddot{r}$  همخط هستند ، این فرمولها را نمی توان به کار برد ؛ و لذا ، سه وجهی فرنه تعریف نمی شود .

★ هرگاه منحنی از کلاس  $C_k$  بوده و مشتق  $k$  ام آن در نقطه اصلاح  $t_0$ ، یعنی  $\mathbf{r}^{(k)}(t_0)$ ، از  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  مستقل خطی باشد ولی تمام مشتقات مراتب از 2 تا  $k-1$  با  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  همخط باشند، می توانیم یک سه وجهی مشابه با سه وجهی فرنه تعریف کنیم. در واقع، در این وضع، بردارهای  $\mathbf{r}^{(k)}(t_0)$  و  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  صفحه بوسان منحنی را معین خواهند کرد (ر.ک. زیربخش ۳.۴). بردار عمود بر این صفحه را می توان به صورت بردار قائم دوم

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}^{(k)}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}^{(k)}|}$$

در نظر گرفت، و بردار قائم اصلی را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}.$$

بهر حال، باید به خاطر داشته باشیم که اگر کنج فرنه را در نقاط اصلاح این طور تعریف کنیم، دیگر نمی توان انتظار داشت که سه وجهی فرنه تابعی پیوسته از پارامتر باشد و یا اینکه فرمولهای فرنه در بخش بعد معتبر باشند. ★

### تمرین

۱. بردارهای کنج فرنه ماریچ را پیدا کنید. زاویه بین آنها و محور ماریچ چیست؟
۲. بردارهای سه وجهی فرنه منحنی  $y = x^3, z = x^4$  را پیدا کنید. نقاط تخت این منحنی را بیابید.
۳. ثابت کنید تمام صفحات بوسان ماریچ که از یک نقطه غیرواقع برخورد ماریچ می گذرند در نقاطی بر ماریچ مماسند که در یک صفحه قرار دارند.

برهان. در واقع، شرط لازم و کافی برای آنکه چهار صفحه  $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) نقطه مشترک داشته باشند آن است که

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

معادله صفحه بوسان ماریچ در نقطه نظیر به مقدار  $t_i$  از پارامتر عبارت است از

$$a \sin t_i x + a \cos t_i y - z + kt_i = 0.$$

بنابراین، شرط اینکه صفحات بوسان در  $t_1, t_2, t_3, t_4$  نقطه مشترک داشته باشند عبارت است از

$$\begin{vmatrix} a \cos t_1 & a \sin t_1 & kt_1 & 1 \\ a \cos t_2 & a \sin t_2 & kt_2 & 1 \\ a \cos t_3 & a \sin t_3 & kt_3 & 1 \\ a \cos t_4 & a \sin t_4 & kt_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

که این، شرط لازم و کافی برای همصفحه بودن چهار نقطه\*  $(a \cos t_i, a \sin t_i, kt_i)$  نیز هست. محاسبات لازم را کامل کنید.

۴. تابع  $\phi(u)$  را طوری بیابید که قائمهای اصلی منحنی  $x = a \cos u, y = a \sin u, z = \phi(u)$

موازی صفحه\*  $xy$  باشند. این منحنی چه نوع منحنی است؟

۵. ثابت کنید که اگر تمام صفحات بوسان یک منحنی از کلاس  $C_3$  نقطه\* مشترک داشته

باشند، منحنی بر یک صفحه واقع است. همچنین، ثابت کنید که اگر منحنی فقط از

کلاس  $C_2$  بوده و تمام صفحات بوسان موازی باشند، منحنی بر یک صفحه قرار دارد.

۶. ثابت کنید که اگر همه\* صفحات قائم به یک منحنی از کلاس  $C_1$  نقطه\* مشترک داشته

باشند، منحنی بر یک کره به مرکز این نقطه قرار دارد (قس. زیر بخش ۳.۲، مثال ۱).

## ۲.۵ فرمولهای فرنه

حال منحنیهایی از کلاس  $C_3$  را در نقاط منظمی که فقط نقاط اصلاح نیستند در نظر می گیریم. با داشتن چنین منحنیی، می خواهیم رفتار بردارهای کنج فرنه در  $P$  را وقتی  $P$  در امتداد منحنی حرکت می کند مطالعه کنیم. برای این کار، مشتقات این بردارها را نسبت به پارامتر طبیعی  $s$  پیدا می کنیم.

مشتق بردار  $t$ ، همانطور که فوراً از (۱.۵) و (۲.۵) نتیجه می شود، مساوی است با

$$\frac{dt}{ds} = |r''|n.$$

با معرفی نماد  $\kappa = |r''|$  این رابطه را می توان به شکل

$$(۸.۵) \quad \frac{dt}{ds} = \kappa n$$

نوشت. برای محاسبه\* مشتق بقیه\* بردارها، نمایشهای آنها را به صورت ترکیباتی خطی از بردارهای مستقل  $t, n, b$  اختیار می کنیم؛ یعنی،

$$(۹.۵) \quad \begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \alpha t + \beta n + \gamma b, \\ \frac{db}{ds} &= \lambda t + \mu n + \nu b. \end{aligned}$$

باضرب اینها در  $t, n, b$  خواهیم داشت

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \alpha &= t \frac{dn}{ds}, & \beta &= n \frac{dn}{ds}, & \gamma &= b \frac{dn}{ds}, \\ \lambda &= t \frac{db}{ds}, & \mu &= n \frac{db}{ds}, & \nu &= b \frac{db}{ds}. \end{aligned}$$

اتحادهای  $t^2 = 1, n^2 = 1, b^2 = 1, tn = 0, tb = 0, nb = 0$  ایجاب می‌کنند که

$$(11.5) \quad \begin{aligned} t \frac{dt}{ds} &= 0, & n \frac{dn}{ds} &= 0, & b \frac{db}{ds} &= 0, \\ t \frac{dn}{ds} &= -n \frac{dt}{ds}, & t \frac{db}{ds} &= -b \frac{dt}{ds}, & n \frac{db}{ds} &= -b \frac{dn}{ds}, \end{aligned}$$

که از آنجا  $\beta = \nu = 0$  و  $\gamma = -\mu$ . مقدار مشترک اخیر را با  $\tau$  نشان می‌دهیم؛ یعنی،

$$(12.5) \quad \tau = \gamma = -\mu.$$

باتوجه به (۸.۵) و (۹.۵) نتیجه می‌شود که  $b \, dt/ds = 0, n \, dt/ds = \kappa$ . بنابراین،

$$\alpha = -\kappa, \quad \lambda = 0.$$

قضیه. مشتقات بردارهای سه‌وجهی قرنه نسبت به پارامتر قوس در فرمولهای زیر صدق می‌کنند:

$$(13.5) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \kappa n, \\ \frac{dn}{ds} &= -\kappa t + \tau b, \\ \frac{db}{ds} &= -\tau n. \end{aligned}$$

این فرمولها فرمولهای قرنه یا فرمولهای سه<sup>۱</sup> -قرنه نامیده می‌شوند. معنی هندسی ضرایب  $\kappa$  و  $\tau$ ، موسوم به انحنا و تاب منحنی، در بخش بعد توضیح داده می‌شود.

تمرین

۱. ثابت کنید که اگر قائم اصلی یک منحنی راستای ثابتی داشته باشد، منحنی یک خط

راست است.

۲. نقطه  $P$  و نقطه متغیر  $Q$  از یک منحنی معلوم از کلاس  $C_3$  را در نظر بگیرید، و حد راستای عمود مشترک قائمهای اصلی در  $P$  و  $Q$  را وقتی  $Q \rightarrow P$  بیابید.
۳. همین تمرین را برای قائمهای دوم در  $P$  و  $Q$  حل کنید.
۴. همین تمرین را برای مماسهای در  $P$  و  $Q$  حل کنید.

## ۶ انحنا و تاب یک منحنی

### ۱.۶ انحنا

نقطه منتظم  $M$  از منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  نظیر به مقدار ثابت  $s$  از پارامتر، و نقطه متغیر  $N$  در همسایگی  $M$  نظیر به مقدار  $s + h$  از پارامتر را در نظر می‌گیریم. بنابراین،  $|h|$  مساوی طول قوس بین  $M$  و  $N$  است.

فرض کنیم  $\omega$  زاویه بین بردارهای مماس در  $M$  و  $N$  باشد (شکل ۱.۶).  
حد نسبت  $\omega/h$ ، وقتی  $h \rightarrow 0$  یا  $N \rightarrow M$ ، انحنا  $\kappa$  منحنی در  $M$  نامیده می‌شود.

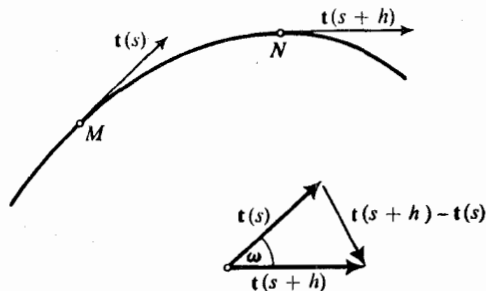
قضیه. یک منحنی پارامتری از کلاس  $C_2$  در هر نقطه انحنا دارد، و انحنا مساوی است با

$$\kappa = |\mathbf{r}''|$$

اگر منحنی از کلاس  $C_3$  باشد؛ انحنا با ضریب  $\kappa$  در فرمولهای فرنه یکی می‌باشد.

برهان. داریم  $\omega = \angle(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s+h))$  از اینرو  $|\mathbf{t}(s+h) - \mathbf{t}(s)| = 2 \sin \frac{1}{2}\omega$  (شکل ۱.۶).  
در نتیجه، داریم

$$\frac{\omega}{|h|} = \frac{\omega}{2 \sin \frac{1}{2}\omega} \frac{2 \sin \frac{1}{2}\omega}{|h|} = \frac{\frac{1}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \frac{|\mathbf{t}(s+h) - \mathbf{t}(s)|}{|h|}.$$



شکل ۱.۶

وقتی

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega}{|h|} = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \quad \text{و} \quad \frac{\frac{1}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \rightarrow 1 \quad \text{داریم}$$

حال فرمولهایی را می‌یابیم که انحنا را برحسب مختصات بیان می‌کنند. در حالت پارامتری سازی طبیعی (طول قوس)، داریم

$$(۱۰۶) \quad \kappa = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \quad \text{یا} \quad \kappa = |\mathbf{r}''|$$

در حالت پارامتری سازی دلخواه، از فرمول اول فرنه، یعنی  $\kappa = |\mathbf{t}'|$  و (۵۰۵) استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \kappa = |\mathbf{t}'| &= |\dot{\mathbf{t}}| |\dot{\mathbf{r}}|^{-1} = |\dot{\mathbf{t}}|^{-1} \left| \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|) \right| = |\dot{\mathbf{r}}|^{-3} \left| \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} - \frac{d|\dot{\mathbf{r}}|}{dt} \dot{\mathbf{r}} \right| \\ &= |\dot{\mathbf{r}}|^{-4} |\dot{\mathbf{r}}^2 \ddot{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}}|^{-4} |(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|. \end{aligned}$$

چون بردار  $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$  بوضوح بر  $\dot{\mathbf{r}}$  عمود است، داریم  $|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{r}}|$  و، در نتیجه،

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

برای بیان این فرمول برحسب مختصات، نمادهای کمکی

$$(۲۰۶) \quad A = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}$$

را معرفی می‌کنیم. در این صورت، فرمول مربوط به انحنا شکل

$$(۳۰۶) \quad \kappa = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} \quad \text{یا} \quad \kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

را به خود خواهد گرفت.

### امثله و تمرین

۱. انحنا یک دایره در تمام نقاط یکی بوده و برابر است با عکس شعاع. دایره به شعاع  $a$  و مرکز مبدأ دارای نمایش پارامتری

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0$$

است. از اینرو،

$$\dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t, \quad \ddot{x} = -a \cos t, \quad \ddot{y} = -a \sin t, \quad \dot{z} = \ddot{z} = 0;$$

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t \\ -a \cos t & -a \sin t \end{vmatrix} = a^2,$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{a^4}}{(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}.$$

۲. انحناى مارپیچ، چرخزاد، و کشاننده را پیدا کنید.

۳. انحناى منحنى زنجیری

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh \frac{x}{a}, \quad z = 0$$

را پیدا کنید.

## ۲.۶ دایره انحنا

لم. دو منحنى پارامتری از گلاس  $C_3$  دارای تماس از مرتبه لا اقل ۲ در نقطه مشترک  $A$  اند اگر و فقط اگر در  $A$  بردار مماس مشترک، بردار قائم اصلی مشترک و، بعلاوه، یک انحنا داشته باشند.

این لم نتیجه فوری قضیه زیر بخش ۱.۴ و فرمولهای  $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$  است.

دایره‌ای که با منحنى  $\mathcal{C}$  در نقطه  $P$  دارای تماس از بالاترین مرتبه ممکن باشد دایره بوسان  $\mathcal{C}$  در  $P$  یا دایره انحناى  $\mathcal{C}$  در  $P$  نامیده می‌شود.

مرکز این دایره مرکز انحناى منحنى  $\mathcal{C}$  در  $P$  نام دارد، شعاع آن شعاع انحناى منحنى در  $P$  نامیده می‌شود.

به عنوان نتیجه‌ای فوری از این لم و مثال ۱ زیر بخش قبل، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه. یک منحنى پارامتری از گلاس  $C_3$  در هر نقطه منتظمی که یک نقطه اصلاح نباشد ( $\kappa \neq 0$ ) دایره انحنا دارد. دایره انحنا بر صفحه بوسان واقع بوده و دارای تماس از مرتبه لا اقل دو با منحنى است. شعاعش عکس انحناى منحنى در نقطه تماس است، و مرکزش بر آن نیمه از قائم اصلی واقع است که بردار قائم اصلی به آن اشاره دارد.

بنابراین، مرکز انحناى منحنى  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  در نقطه  $s_0$  دارای بردار موضع

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0) \quad (4.6)$$

است، و شعاع انحنا برابر است با  $\rho = 1/\kappa$ .

خط مستقیم مار بر مرکز انحنا منحنی  $\mathcal{K}$  در  $P$  و عمود بر صفحهٔ بوسان  $\mathcal{K}$  در  $P$  خط قطبی منحنی در  $P$  نامیده می‌شود. معادلهٔ پارامتری خط قطبی منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  در  $s$  عبارت است از  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + u\mathbf{b}$  یا

$$(5.6) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} + u\mathbf{b},$$

که در آن  $u$  پارامتر خط قطبی است.

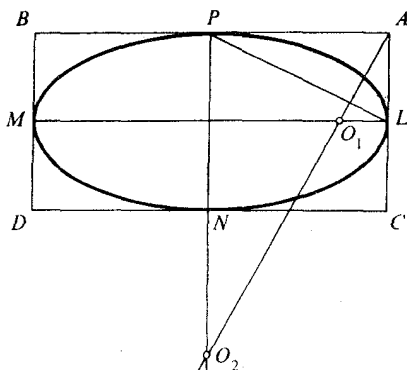
### تمرین

۱. مراکز انحنا بیضی  $x = a \cos t, y = b \sin t$  را در رئوس آن، یعنی نقاط برخورد بیضی با محورهای تقارنش، بیابید. ثابت کنید که این مراکز انحنا را می‌توان به طریق زیر به دست آورد: بیضی را در مستطیل  $ABCD$  محاط می‌کنیم (شکل ۲.۰۶). سپس از  $A$  خطی عمود می‌کنیم بر  $PL$ ، که رئوس بیضی واقع بر اضلاع مستطیل مار بر  $A$  را بهم وصل کرده است. این عمود محورهای بیضی یا امتدادهای آنها را در نقاط  $O_1$  و  $O_2$  قطع می‌کند، که به ترتیب مراکز انحنا در نقاط  $L$  و  $P$  می‌باشند.

۲. مکان هندسی مراکز انحنا مارپیچ  $\mathcal{K}$  خود یک مارپیچ مانند  $\mathcal{K}_1$  است با همان محور و همان پای پیچ. مکان هندسی مراکز انحنا  $\mathcal{K}_1$  نیز به نوبهٔ خود با  $\mathcal{K}$  یکی است. این احکام را ثابت کنید.

۳. معادلهٔ خط قطبی مارپیچ را در یک نقطهٔ دلخواه بیابید. آیا خط قطبی با محور مارپیچ هم‌مس است؟

۴. ثابت کنید مماس بر منحنی در یک نقطه و مماس در نقطهٔ نظیر از مکان هندسی مراکز انحنا آن، با اینکه در حالت کلی یکدیگر را قطع نمی‌کنند، راستاهای عمود برهم دارند.



شکل ۲.۰۶

## ۳.۶ تاب یک منحنی

حال ضریب  $\tau$  در فرمولهای فرنه را، شبیه تعبیر هندسی ضریب  $\kappa$  در ۱.۶، تعبیر هندسی می‌کنیم.

روی یک منحنی از کلاس  $C_3$ ، نقطه منتظم  $P$  را که یک نقطه اصلاح نباشد ( $\kappa \neq 0$ ) اختیار می‌کنیم و، در همسایگی به قدر کافی کوچک  $P$ ، نقطه متغیر  $Q$  را بر منحنی طوری می‌گیریم که  $Q$  نیز یک نقطه اصلاح نباشد. فرض کنیم  $P$  نظیر به مقدار  $s$  از پارامتر طبیعی منحنی و  $Q$  نظیر به مقدار  $s + h$  باشد. بنا بر تعریف، بردارهای قائم به صفحات بوسان در  $P$  و  $Q$  به ترتیب عبارتند از بردارهای قائم دوم  $b(s)$  و  $b(s + h)$ . جزد حالتی که راستاهای دو صفحه یکی هستند، که به ازای  $h$  به قدر کافی کوچک فقط وقتی می‌تواند روی دهد که  $\tau = 0$ ، زیرا در غیر این صورت  $b'(s) = -\tau n(s) \neq 0$ ، این دو صفحه در خط مستقیمی مانند  $l$  مشترکند، و این خط موازی بردار  $b(s) \times b(s + h)$  است. این خط را به صورت زیر جهتدار می‌کنیم: اگر خط مزبور عمود بر خط مماس به منحنی در نقطه  $P$  نباشد، جهت آن را جهت بردار  $w$  واقع بر خط می‌گیریم. که به همان نیم فضایی اشاره می‌کند که به وسیله صفحه قائم معین می‌شود و بردار  $t(s)$  بدان اشاره دارد. به عبارت دیگر،  $w$  یک بردار واقع بر خط است به طوری که  $t(s)w > 0$ . اگر خط عمود بر خط مماس باشد، جهت آن را دلخواه می‌گیریم.

به ازای  $h$  به قدر کافی کوچک، حالت اخیر فقط وقتی می‌تواند روی دهد که  $\tau = 0$  در واقع، داریم

$$b(s + h) = b(s) + hb'(s) + o(h) = b(s) - h\tau n(s) + o(h);$$

در نتیجه،

$$b(s) \times b(s + h) = -h\tau b(s) \times n(s) + o(h)$$

یا

$$(۶.۶) \quad b(s) \times b(s + h) = h\tau t(s) + o(h).$$

هرگاه  $\tau \neq 0$  و  $h$  به قدر کافی کوچک باشد، جملات موجود در  $o(h)$  نمی‌توانند جمله  $h\tau t(s)$  را حذف کنند. در حالتی که  $\tau \neq 0$  داریم  $h\tau t(s) = (b(s) \times b(s + h))t$ ؛ لذا، جهت فصل مشترک دو صفحه بوسان با جهت بردار  $b(s) \times b(s + h)$  یکی می‌شود اگر  $h\tau > 0$ ، و مخالف آن می‌شود اگر  $h\tau < 0$ .

همینکه جهت خط مشخص شود، زاویه بین هر جفت مرتب از صفحات گذرنده برای خط را می‌توان با عددی بین  $-\pi/2$  و  $\pi/2$  سنجید. در واقع، یک دوران حول خط به اندازه زاویه غیر منفرجه را در نظر می‌گیریم که صفحه اولی را روی صفحه دیگر قرار دهد. به

قدر مطلق این زاویه، بر حسب آنکه سه بردار زیر یک سه‌تایی جهتدار با جهت مثبت یا منفی بسازند، علامت مثبت یا منفی می‌دهیم: (یک) یک بردار عمود بر محور دوران: (دو) بردار موضع آن پس از دوران: (سه) برداری واقع بر محور دوران که جهت آن را مشخص می‌کند.

این امر متناظر است با تعیین جهت دوران حول محور جهتدار. در مورد دستگاه مختصات راست دست، یا، به‌طور دقیقتر، جهت راست دست فضا، جهت مثبت دوران چنان است که پیچش یک پیچ معمولی در جهت مثبت همان جهت مثبت محور دوران می‌باشد. حال زاویه جهتدار بین صفحه بوسان در  $P$  و صفحه بوسان در  $Q$  را با  $\psi$  نشان می‌دهیم. حد نسبت  $\psi/h$ ، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، تاب منحنی در  $P$  نامیده می‌شود.

قضیه. تاب منحنی  $\tau = \tau(s)$  از کلاس  $C_3$  در هر نقطه منظمی که نقطه اصلاح نباشد وجود داشته و همان ضریب  $\tau$  در فرمولهای فرنه می‌باشد.

برهان. به‌خاطر پیوستگی، زاویه بین  $b(s)$  و  $b(s+h)$ ، به ازای  $h$  به قدر کافی کوچک، از  $\pi/2$  کوچکتر است. در نتیجه، هر دوران به اندازه زاویه‌ای حاده که صفحه بوسان در  $P$  را روی صفحه بوسان در  $Q$  قرار دهد  $b(s)$  را به  $b(s+h)$  خواهد برد. بنابراین، قدر مطلق  $\psi$  همان زاویه بین دو بردار اخیر است؛ یعنی،

$$|\psi| = \angle(b(s), b(s+h))$$

یا

$$\sin |\psi| = |b(s) \times b(s+h)|.$$

پس، با توجه به (۶.۶)، داریم

$$\sin |\psi| = |h\tau(s) + o(h)| = |h||\tau| + o(h),$$

که به‌نوبه خود نتیجه می‌دهد که

$$(۷.۶) \quad \lim \left| \frac{\psi}{h} \right| = \lim \frac{\sin |\psi|}{|h|} = |\tau|.$$

هرگاه  $\tau = 0$ ، این رابطه معادل  $\lim \left| \frac{\psi}{h} \right| = 0$  است. توجه کنید که اگر  $\tau \neq 0$ ،  $\psi$  وقتی مثبت است که حاصل ضرب  $b(s) \times b(s+h)$  همان جهت محور دوران را داشته باشد که این حالت، همانطور که در بالا دیدیم، وقتی رخ می‌دهد که  $h\tau > 0$ ، و  $\psi$  وقتی منفی است که  $h\tau < 0$ . بنابراین،  $\psi/h > 0$  یا  $\psi/h$  هم‌علامت با  $\tau$  است. این، همراه با (۷.۶)، ایجاب می‌کند که

$$\lim \frac{\psi}{h} = \tau,$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود.

حال چند فرمول برای تاب به دست می آوریم. با ضرب آخرین فرمول فرنه در  $n$

داریم

$$\tau = -b'n = -(t \times n)'n = -(t' \times n)n - (t \times n')n = tnn',$$

$$\text{زیرا } t' \times n = \kappa n \times n = 0 \text{ بعلاوه،}$$

$$t = r', \quad n = \frac{r''}{|r''|} = \frac{r''}{\kappa}, \quad n' = \frac{r'''}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa^2} r'',$$

و

$$r'r'' \left( r''' - \frac{\kappa' r''}{\kappa} \right) = r'r''r'''. \quad 9$$

درنتیجه،

$$(۸.۶) \quad \tau = \frac{r'r''r'''}{\kappa^2} = \frac{r'r''r'''}{(r'')^2}$$

یا، برحسب مختصات،

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\kappa^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}.$$

این فرمولها فقط برای پارامتری سازی طول قوس معتبرند. با مراجعه به پارامتری سازی

عمومی، در می یابیم که

$$r' = \dot{r} \frac{dt}{ds},$$

$$r'' = \ddot{r} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \dot{r} \frac{d^2 t}{ds^2},$$

$$r''' = \dddot{r} \left( \frac{dt}{ds} \right)^3 + 3\ddot{r} \left( \frac{dt}{ds} \right) \frac{d^2 t}{ds^2} + \dot{r} \frac{d^3 t}{ds^3}.$$

با تشکیل حاصل ضرب مختلط سه معادله، داریم

$$r'r''r''' = \ddot{r}\ddot{r}\ddot{r} \left( \frac{dt}{ds} \right)^6 = \frac{\ddot{r}\ddot{r}\ddot{r}}{|r|^6}.$$

پس ، با یادآوری فرمول (۳.۶) ، یعنی  $\kappa = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|/|\dot{\mathbf{r}}|^3$  ، بالاخره خواهیم داشت

$$(9.6) \quad \tau = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{\dot{\mathbf{r}}^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 - (\ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}})^2}$$

یا ، برحسب مختصات ،

$$(10.6) \quad \tau = \frac{\begin{vmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

که در آن ، همانند در (۲.۶) ،

$$A = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}.$$

### امثله و تمرین

۱. بردار قائم دوم یک منحنی مسطح ثابت است ، زیرا بر صفحه منحنی عمود است ؛ و در نتیجه ،  $\tau = 0$  . بعکس ، هرگاه در بازه‌ای مانند  $(a, b)$  ،  $\tau = 0$  ، آنگاه نقش این بازه در صفحه قرار دارد . در واقع ، در این حالت  $\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} = 0$  در نتیجه ،  $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$  همیشه هم‌صفحه هستند . پس ، همانطور که در تمرین ۱ در ۳.۲ دیدیم ، بردار  $\dot{\mathbf{r}}$  موازی یک صفحه ثابت بوده و نقاط انتهایی بردارهای  $\dot{\mathbf{r}}$  در یک صفحه ثابت قرار دارند .
۲. تاب مارپیچ را پیدا کنید .

[حل.]

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, & y &= a \sin t, & z &= bt, \\ \dot{x} &= -a \sin t, & \dot{y} &= a \cos t, & \dot{z} &= b, \\ \ddot{x} &= -a \cos t, & \ddot{y} &= -a \sin t, & \ddot{z} &= 0, \\ \ddot{\ddot{x}} &= a \sin t, & \ddot{\ddot{y}} &= -a \cos t, & \ddot{\ddot{z}} &= 0, \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} a \cos t & b \\ -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ab \sin t, \quad B = \begin{vmatrix} b & -a \sin t \\ 0 & -a \cos t \end{vmatrix} = -ab \cos t,$$

$$C = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t \\ -a \cos t & -a \sin t \end{vmatrix} = a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = a^2,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^4 + a^2 b^2 = a^2(a^2 + b^2),$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b,$$

$$\tau = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

در تمرین ۲ در ۱.۶ دیدیم که انحنا ی ماریچ مساوی است با  $\kappa = a(a^2 + b^2)^{-1}$ .  
بنابراین، ماریچ یک منحنی با انحنا و تاب ثابت است. [۳].  
۳. انحنا و تاب منحنیهای زیر را بیابید:

$$x = u, \quad y = u^2, \quad z = u^3 \quad (\text{آ})$$

$$x = u, \quad y = \frac{1+u}{u}, \quad z = \frac{1-u^2}{u} \quad (\text{ب})$$

$$y = f(x), \quad z = g(x) \quad (\text{پ})$$

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u), \quad z = bu \quad (\text{ت})$$

$$x = a(3u - u^3), \quad y = 3au^2, \quad z = a(3u + u^3) \quad (\text{ث})$$

از این منحنیها کدامها در یک صفحه واقعند؟

۴. فرض کنید  $u(\tau)$  و  $v(\tau)$  توابع دلخواهی از کلاس  $C_2$  باشند. تاب منحنی

$$x = a \int_0^\tau \frac{\dot{u}}{u^2 + v^2 + 1} d\tau, \quad y = a \int_0^\tau \frac{\dot{v}}{u^2 + v^2 + 1} d\tau, \quad z = a \int_0^\tau \frac{u\dot{v} - v\dot{u}}{u^2 + v^2 + 1} d\tau,$$

که در آن  $a \neq 0$  ثابت است، را پیدا کنید.

۵. ثابت کنید هرگاه  $r = r(s)$ ، که در آن  $s$  پارامتر قوس است، یک منحنی با انحنا ی ثابت باشد، آنگاه  $r = \int_0^s b(u) du$  یک منحنی با تاب ثابت می باشد.

## ۴.۶ بردار داریو

اگر پارامتر طبیعی یک منحنی را زمان بگیریم، معادله آن را می توان به عنوان قانون حرکت نقطه ای که با سرعت ۱ در طول منحنی حرکت می کند در نظر گرفت. در این صورت، سه وجهی فرنه همراه نقطه به عنوان یک جسم صلب تغییر مکان خواهد داد. می توان این حرکت را به صورت انتقال رأس و دوران حول رأس تجزیه کرد. انتقال به وسیله معادله منحنی توصیف می شود. سرعت نقاط انتهایی بردارهای سه وجهی فرنه در دوران حول رأس عبارت است از  $t', n', b'$ . اما می توان سرعت نقاط یک جسم صلب در دوران حول یک نقطه را با یک بردار، یعنی بردار سرعت زاویه ای، مشخص کرد. اگر این بردار را برای قسمت دورانی حرکت سه وجهی فرنه با  $d$  نشان دهیم، داریم

$$(11.6) \quad t' = d \times t, \quad n' = d \times n, \quad b' = d \times b.$$

حال بردار  $d$  را معین می‌کنیم. برای این کار می‌نویسیم  $d = \alpha t + \beta n + \gamma b$  با قراردادن در (۱۱.۶)، داریم

$$t' = -\beta b + \gamma n, \quad n' = \alpha b - \gamma t, \quad b' = -\alpha n + \beta t.$$

از مقایسه این فرمولها با فرمولهای فرنه خواهیم داشت  $\alpha = \tau, \beta = 0, \gamma = \kappa$ . بنابراین،

$$(12.6) \quad d = \tau t + \kappa b.$$

این بردار بردار داریو نامیده می‌شود. بدنیست بدانید که این بردار قبل از داریو به وسیله لانکرت<sup>۱</sup> کشف شده بود، این نتیجه را با تمرین ۲ در ۲۰.۵ مقایسه کنید.

### ۵.۶ موضع نسبی منحنی نسبت به سه وجهی فرنه‌اش

برای آنکه موضع نسبی بخشی از یک منحنی در یک نقطه منتظم که نقطه اصلاح نیست را نسبت به سه وجهی فرنه دریابیم، تصاویر منحنی را روی صفحات سه وجهی مطالعه می‌کنیم. فرض کنیم نقطه ما نظیر به مقدار  $s = 0$  از پارامتر طبیعی باشد. معادله پارامتری منحنی را می‌توان به شکل

$$r = r'_0 + \frac{1}{2}r''_0 s^2 + \frac{1}{6}r'''_0 s^3 + o(s^3)$$

نوشت. زیرنویس ۰ بیانگر مقدار تابع در نقطه  $s = 0$  است. طبق فرمولهای فرنه، داریم

$$r'_0 = t_0, \quad r''_0 = \kappa_0 n_0, \quad r'''_0 = -\kappa_0^2 t_0 + \kappa'_0 n_0 + \kappa_0 \tau_0 b_0.$$

با قرار دادن اینها در فرمول قبل، داریم

$$r = (s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3)t_0 + (\frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \frac{1}{6}\kappa'_0 s^3)n_0 + \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3 b_0 + o(s^3).$$

حال یک دستگاه مختصات خاص را در فضا طوری اختیار می‌کنیم که نقطه مورد بحث مبدا<sup>۲</sup> بوده و بردارهای  $t_0, n_0, b_0$  بردارهای یک محورها مختصات باشند. در این دستگاه مختصات، منحنی را می‌توان با سه معادله

$$x = s + o(s),$$

$$y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + o(s^2),$$

$$z = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3 + o(s^3),$$

نمایش داد. ما در هر معادله فقط جمله‌ای را که درجه‌اش نسبت به  $s$  پایین‌ترین است نگه داشته، بقیه جملات را با علامت  $o$  نشان داده‌ایم.

نگاهی دقیقتر به این معادلات معلوم می‌سازد که، با افزایش  $s$ ، منحنی صفحه قائم را در جهت بردار  $t$  قطع می‌کند، زیرا مختص  $x$ ، بدنبال تغییرات  $s$ ، از مقدار منفی به

مقدار مثبت تغییر می یابد. منحنی، در صورتی که  $|s|$  به قدر کافی کوچک بماند، صفحه<sup>۷</sup> اصلاحی را قطع نخواهد کرد، زیرا  $y \geq 0$  از علامت  $s$  مستقل است. منحنی پس از تماس با صفحه<sup>۷</sup> اصلاحی بازگشته و در طرفی از آن که بردار قائم  $n$  به آن اشاره دارد قرار می گیرد فقط وقتی که  $\kappa_0 \neq 0$ . منحنی، به شرط آنکه  $\tau_0 \neq 0 \neq \kappa_0$ ، از صفحه<sup>۷</sup> بوسان می گذرد، زیرا  $z$  با تغییر علامت  $s$  تغییر علامت می دهد. اگر تاب مثبت باشد، منحنی، وقتی  $s$  افزایش یابد، از پایین صفحه<sup>۷</sup> بوسان به بالای آن می رود، زیرا علامت  $z$  با علامت  $s$  یکی می باشد. چنانچه  $\tau_0 < 0$ ، منحنی از بالای صفحه<sup>۷</sup> بوسان به پایین آن خواهد رفت. تصاویر منحنی در همسایگی نقطه<sup>۷</sup>  $P$  روی صفحات سه وجهی فرنه در این نقطه با منحنیهای زیر تقریب می شوند:

( $\bar{A}$ ) تصویر روی صفحه<sup>۷</sup> بوسان با سهمی

$$x = s, \quad y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \quad z = 0;$$

( $\bar{B}$ ) تصویر روی صفحه<sup>۷</sup> قائم با سهمی نیمه مکعبی

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \quad z = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3,$$

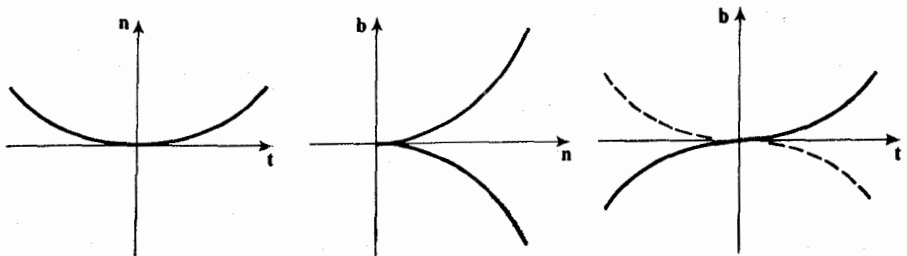
که مبدأ<sup>۷</sup> دستگاه مختصات نقطه<sup>۷</sup> بازگشت آن است؛

( $\bar{C}$ ) تصویر روی صفحه<sup>۷</sup> اصلاحی با سهمی مکعبی

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3,$$

که مبدأ<sup>۷</sup> نقطه<sup>۷</sup> عطف آن است.

هر قدر بخش کوچکتری از منحنی را در نظر بگیریم، این تقریبها بهتر خواهند بود. تصاویر منحنی در شکل ۳.۶ نشان داده شده اند. خط منقطع نظیر حالت  $\tau_0 < 0$  می باشد.



شکل ۳.۶

۷. گسترده و گسترده

۱۰.۷ گسترده<sup>۷</sup> یک منحنی

یک منحنی در فضا در هر نقطه بی نهایت قائم دارد. اینها خطوط مستقیمی هستند که از آن

نقطه گذشته و برخط مماس بر منحنی در همان نقطه عمودند. بنابراین، این خطوط در صفحه قائمی که به وسیله بردارهای  $\mathbf{n}$  و  $\mathbf{b}$  تولید می شود قرار دارند. حال خانواده های یک پارامتری مشتق پذیر از خطوط قائم به یک منحنی با معادله پارامتری  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  را در نظر می گیریم، به طوری که هر  $s$  نظیر به یک قائم در نقطه نظیر به  $s$  بوده، و بردارهای قائم تابع مشتق پذیر از پارامتر باشد.

منحنی  $\mathcal{K}_1$  ی که مماسهایش چنین خانواده یک پارامتری از قائمهای منحنی  $\mathcal{K}$  را تشکیل دهند یک گسترده منحنی  $\mathcal{K}$  نامیده می شود. حال گسترده های یک منحنی منتظم از کلاس  $C_3$  را پیدا می کنیم. فرض کنیم معادله منحنی  $\mathcal{K}$  به صورت

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

باشد، که در آن  $s$  طول قوس روی  $\mathcal{K}$  است. اگر گسترده وجود داشته باشد، بردار موضع  $\mathbf{R}$  یک نقطه از گسترده که بر قائم به  $\mathcal{K}$  در نقطه  $s$  قرار دارد عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \alpha(s)\mathbf{n}(s) + \beta(s)\mathbf{b}(s),$$

که در آن  $\alpha, \beta$  توابعی از پارامتر  $s$ ، و  $\mathbf{n}(s)$  و  $\mathbf{b}(s)$  بردار قائم اصلی و بردار قائم دوم  $\mathcal{K}$  در  $s$  می باشند. این رابطه را می توان به عنوان معادله پارامتری گسترده در نظر گرفت. با اینحال، توجه کنید که پارامتر  $s$  لزوماً "پارامتر طبیعی گسترده"  $\mathcal{K}_1$  نیست. با این فرض که  $\alpha$  و  $\beta$  توابعی مشتق پذیر هستند، آنها را معین می کنیم. بردار مماس بر منحنی  $\mathcal{K}_1$  عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{r}'(s) + \alpha'(s)\mathbf{n}(s) + \alpha(s)\mathbf{n}'(s) + \beta'(s)\mathbf{b}(s) + \beta(s)\mathbf{b}'(s).$$

با استفاده از فرمولهای (۱۰۵) و (۱۳۰۵) خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t} + \alpha \mathbf{n} + \alpha(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) + \beta' \mathbf{b} - \beta \tau \mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = (1 - \alpha \kappa) \mathbf{t} + (\alpha' - \beta \tau) \mathbf{n} + (\alpha \tau + \beta') \mathbf{b}.$$

اما این بردار مماس باید موازی بردار  $\alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{b}$ ، که بردار هادی قائم نظیر به  $\mathcal{K}$  است، باشد.

بنابراین،  $d\mathbf{R}/ds \times (\alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{b}) = 0$ ، که نتیجه می دهد

$$1 - \alpha \kappa = 0, \quad \beta(\alpha' - \beta \tau) - \alpha(\alpha \tau + \beta') = 0.$$

معادله اول ایجاب می کند که  $\alpha = 1/\kappa$ ؛ یعنی، برابر است با شعاع انحنا منحنی

$\mathcal{K}$ ، مشروط براینکه  $\kappa \neq 0$ ، بنابراین، نقطه با بردار موضع  $\mathbf{r} + \alpha \mathbf{n}$  مرکز انحنا است، و نقطه گسترده با بردار موضع  $\mathbf{r} + \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{b}$  برخط قطبی منحنی  $\mathcal{K}$  در  $s$  قرار دارد. هیچ نقطه‌ای برگسترده وجود ندارد که متناظر یک نقطه اصلاح منحنی باشد. معادله دوم یک معادله دیفرانسیل است، که می‌توان آن را به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}\beta \alpha' - \beta^2 \tau &= \alpha^2 \tau + \alpha \beta', \\ \beta \alpha' - \alpha \beta' &= (\alpha^2 + \beta^2) \tau, \\ \frac{\beta \alpha' - \alpha \beta'}{\alpha^2} &= \left[ 1 + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right] \tau, \\ -\frac{d}{ds} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) &= \left[ 1 + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right] \tau, \\ -\frac{d/ds(\beta/\alpha)}{1 + (\beta/\alpha)^2} &= \tau, \\ \frac{d}{ds} \left( \operatorname{arccot} \frac{\beta}{\alpha} \right) &= \tau.\end{aligned}$$

انتگرالگیری نتیجه می‌دهد که

$$\operatorname{arccot} \frac{\beta}{\alpha} = \int \tau(s) ds + \text{ثابت};$$

و، بالاخره،

$$\beta = \alpha \cot \left( \int \tau(s) ds + \text{ثابت} \right).$$

بنابراین، معادله گسترده، در صورت وجود، برابر است با

$$(1.7) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cot \left( \int \tau(s) ds + \text{ثابت} \right) \mathbf{b}(s).$$

به آسانی معلوم می‌شود که، به ازای هر مقدار از ثابت مورد بحث، منحنی داده شده با معادله (1.7) یک گسترده منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  است. بنابراین، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه. هر منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  از کلاس  $C_3$  بی‌نهایت گسترده دارد. معادله گسترده‌ها به شکل (1.7) است؛ بخصوص، گسترده‌هایی که با مقادیر ثابت از هم تمیز داده می‌شوند.

تبصره. هرگاه منحنی در یک صفحه باشد، آنگاه  $\tau = 0$ ، و در بین گسترده‌های منحنی یکی

هست که در همان صفحه قرار دارد. معادله این گسترده عبارت است از

$$(2.7) \quad R = r(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s).$$

بنابراین، این گسترده مکان هندسی مراکز انحای منحنی داده شده است.

در حالت کلی ( $\tau \neq 0$ )، مکان هندسی مراکز انحای یک گسترده نیست، زیرا ممکن است

مماس برای این مکان هندسی اصلاً "منحنی را قطع نکند".

حال به اختصار توضیح می‌دهیم که چگونه گسترده‌های مختلف یک منحنی در رابطه با

یکدیگر قرار دارند. همانطور که دیدیم، نقطه‌ای از یک گسترده که نظیر نقطه معلومی از

منحنی  $\mathcal{H}$  است بر خط قطبی منحنی در این نقطه واقع است. نقطه  $P$  را بر منحنی ثابت

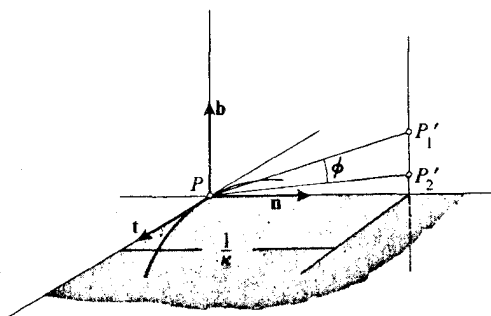
گرفته، و نقاط  $P'_1$  و  $P'_2$  را روی دو گسترده مختلف در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۷). همچنین

زاویه بین قائمهای  $PP'_1$  و  $PP'_2$  به منحنی  $\mathcal{H}$  در  $P$  را با  $\phi$  نشان می‌دهیم. این زاویه

برابر است با تفاضل بین زوایای  $\phi_1$  حادث از قائم اصلی و  $PP'_1$  و  $\phi_2$  حادث از قائم اصلی و

$PP'_2$ . چون تانژانت زوایای اخیر مساوی  $\cot(f\tau ds + C_1)$  و  $\cot(f\tau ds + C_2)$  با ثابتهای

$C_1$  و  $C_2$  است، این تفاضل باید ثابت باشد؛ یعنی، ثابت  $\phi$ .



شکل ۱.۷

### امثله و تمرین

۱. گسترده‌های مارپیچ را پیدا کنید.

۲. تمام گسترده‌های منحنیهای زیر را پیدا کنید:

(آ) چرخزاد؛

(ب) بیضی  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = 0$ ؛

(پ) کشاننده.

۳. ثابت کنید گسترده‌ای از چرخزاد که در صفحه منحنی قرار دارد خودش یک چرخزاد است.

۴. ثابت کنید گسترده‌ای از کشاننده که در صفحه منحنی قرار دارد یک منحنی زنجیری است.  
 ۵. فرمولی بیابید که زاویه  $\theta$  بین قائم به منحنی در نقطه  $P$  که برگسترده معلومی مماس است و قائم اصلی منحنی در  $P$  را به صورت تابعی از پارامتر  $s$  بیان نماید.

### ۲.۷ گسترده یک منحنی

هر منحنی مانند  $\mathcal{K}_1$  که خطوط مماس بر منحنی  $\mathcal{K}$  را در زاویه قائمه قطع کند یک گسترده  $\mathcal{K}$  نامیده می‌شود.  
 با توجه به این تعریف، بدیهی است که  $\mathcal{K}$  یک گسترده  $\mathcal{K}$  است اگر و فقط اگر  $\mathcal{K}$  یک گسترده  $\mathcal{K}_1$  باشد.

فرض کنیم  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  معادله یک منحنی از کلاس  $C_2$  بوده، و  $s$  پارامتر طبیعی باشد. پس معادله یک گسترده، در صورت وجود، به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\mathbf{t}(s),$$

که در آن  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s)$  بردار یک مماس منحنی  $\mathcal{K}$  است. این رابطه معادله پارامتری یک گسترده است اگر و فقط اگر بردار مماس  $d\mathbf{R}/ds$  به بردار مماس  $\mathbf{t}$  منحنی اصلی  $\mathcal{K}$  متعامد باشد. این شرط به ما اجازه تعیین تابع  $\lambda(s)$  را می‌دهد؛ یعنی، داریم

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{r}' + \lambda'\mathbf{t} + \lambda\mathbf{t}' = (1 + \lambda')\mathbf{t} + \lambda\kappa\mathbf{n}.$$

شرط  $d\mathbf{R}/ds \perp \mathbf{t}$  نتیجه می‌دهد که

$$1 + \lambda' = 0, \quad \lambda' = -1, \quad \lambda = s_0 - s,$$

که  $s_0$  یک ثابت دلخواه است. از اینرو، معادله گسترده عبارت است از

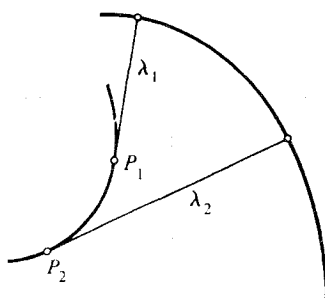
$$(۳.۷) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + (s_0 - s)\mathbf{t}(s),$$

بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه. منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  از کلاس  $C_2$  بی‌نهایت گسترده دارد، که اینها با معادله‌ای به شکل (۳.۷) نمایش داده می‌شوند؛ گسترده‌های خاص به وسیله مقدار ثابت  $s_0$  از هم تمیز داده می‌شوند.

دو نقطه  $P_1$  و  $P_2$  از منحنی  $\mathcal{K}$  را که نظیر به مقادیر  $s_1$  و  $s_2$  از پارامترند، در نظر می‌گیریم (شکل ۲.۷). قطعاتی از خطوط مماس در این نقاط که بین نقاط و یک گسترده ثابت منحنی قرار دارند به ترتیب دارای طولهای  $\lambda_1 = |s_0 - s_1|$  و  $\lambda_2 = |s_0 - s_2|$  می‌باشند.

تفاضل این طولها برابر است با  $|s_1 - s_2|$ ، که طول قوس منحنی بین نقاط  $P_1$  و  $P_2$  است. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که اگر یک نخ را از روی منحنی باز کنیم و مواظب باشیم که در همه حال کشیده بماند، هر نقطه از نخ یک گسترنده از منحنی را رسم خواهد کرد.



شکل ۲۰۷

با اینکه فرمول (۳۰۷) بسیار ساده است، اما استفادهٔ عملی از آن نیاز به معرفی صریح پارامتر طبیعی دارد. به جای این کار، اغلب راحتتر آن است که فرمول (۳۰۷) را به کار نبرده، بلکه گسترنده را مستقیماً از تعریف به دست آوریم. یعنی، اگر معادلهٔ منحنی به صورت  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  باشد، با یک پارامتر دلخواه، داریم

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \mu(t)\dot{\mathbf{r}}(t).$$

در اینجا

$$\dot{\mathbf{R}} = [1 + \dot{\mu}(t)]\dot{\mathbf{r}}(t) + \mu(t)\ddot{\mathbf{r}}(t),$$

و  $\mu$  باید از معادلهٔ دیفرانسیل

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{r}} = [1 + \dot{\mu}(t)][\dot{\mathbf{r}}(t)]^2 + \mu(t)\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$$

معین شود.

### تمرین

گسترنده‌های مارپیچ را پیدا و ثابت کنید که تمام گسترنده‌های مارپیچ باهم و با گسترنده‌های یک دایره به شعاع مساوی شعاع استوانهٔ حامل مارپیچ هم‌نهشت هستند.

۸ معادلهٔ طبیعی یک منحنی. انواع خاص منحنیها

۱۰.۸ معادلهٔ طبیعی یک منحنی

قضیه. اگر دو تابع پیوسته

$$\kappa = \kappa(s) > 0, \quad \tau = \tau(s)$$

دربازه  $(a, b)$ ، متناهی یا نامتناهی، مفروض باشند، یک منحنی پارامتری وجود دارد به طوری که  $s$  پارامتر طبیعی آن بوده و توابع  $\kappa(s)$  و  $\tau(s)$  انحنا و تاب منحنی را به صورت توابعی از پارامتر نمایش می‌دهند. دو منحنی که دارای یک انحنا و تاب باشند را می‌توان با یک حرکت جسم صلب برهم منطبق کرد.

برهان. اگر یک منحنی با این خاصیت وجود داشته باشد، معادله پارامتری آن به صورت  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  خواهد بود، که  $\mathbf{r}(s)$  در دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t},$$

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n},$$

(۱۰۸)

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b},$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n},$$

و شرایط اضافی

$$(2.8) \quad \mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1, \quad \mathbf{tn} = \mathbf{nb} = \mathbf{bt} = 0$$

(یعنی بردارهای  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  یک سه‌تایی متعامد یک‌ای از بردارها را تشکیل می‌دهند) صدق می‌کند.

از طرف دیگر، هر جواب (۱۰۸) که در (۲۰۸) نیز صدق کند و به ازای آن سه تایی  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  جهت‌دار با جهت مثبت باشد یک منحنی با خواص مطلوب را نمایش خواهد داد. بنابراین، اثبات قضیه را می‌توان به اثبات وجود و یکتایی جواب (۱۰۸) و (۲۰۸) با مقادیر اولیه داده شده تحویل کرد. مقادیر اولیه موضع نقطه به ازای مقدار اولیه  $s_0$  از پارامتر و مواضع بردارهای سه‌وجهی فرنه به ازای این مقدار  $s_0$  می‌باشند.

برای آنکه از نتایج نظریه معادلات دیفرانسیل استفاده کنیم، دستگاه (۱۰۸) را با یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل اسکالر عوض می‌کنیم. فرض کنیم مولفه‌های بردارهای مورد نظر نسبت به دستگاه مختصات ثابتی در فضا به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{t} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \mathbf{n} = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad \mathbf{b} = \{w_1, w_2, w_3\}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

در این صورت، دستگاه (۱۰۸) معادل دستگاهی مرکب از سه معادله

$$(3.8) \quad \frac{dx}{ds} = u_1, \quad \frac{dy}{ds} = u_2, \quad \frac{dz}{ds} = u_3,$$

و نه معادله

$$\frac{du_i}{ds} = \kappa v_i,$$

$$(۴۰۸) \quad \frac{dv_i}{ds} = -\kappa u_i + \tau w_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{dw_i}{ds} = -\tau v_i,$$

است، و شرایط (۲۰۸) معادل این است که ماتریس

$$(۵۰۸) \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متعامد باشد.

دستگاه (۴۰۸) دستگاهی است مرکب از نه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با نه مجهول و ضرایب پیوسته. قضیه وجودی و یکتایی نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی ایجاب می کند که این دستگاه جوابی دارد که با مقادیر اولیه  $\{u_1^0, u_2^0, u_3^0\}, \{v_1^0, v_2^0, v_3^0\}, \{w_1^0, w_2^0, w_3^0\}$  به طور منحصر بفرد مشخص می شود.

حال ثابت می کنیم که اگر ماتریس مقادیر اولیه یک ماتریس متعامد باشد، ماتریس برای جواب کامل نیز متعامد می ماند. چون درمیان این ماتریس تابع پیوسته ای از پارامتر است، و مقدارش فقط می تواند ۱ یا -۱ باشد، این درمیان ثابت است. در نتیجه، بردارهای  $t, n, b$  یک سه تایی جهتدار با جهت مثبت می سازند، مشروط بر اینکه مقادیر اولیه نیز چنین کنند. حال تابع

$$u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j$$

را، که در آن  $u_k, v_k, w_k$  جوابهای دستگاه (۴۰۸) اند، در نظر می گیریم. مشتق این تابع برابر است با

$$\frac{d}{ds}(u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j)$$

$$= \frac{du_i}{ds} u_j + u_i \frac{du_j}{ds} + \frac{dv_i}{ds} v_j + v_i \frac{dv_j}{ds} + \frac{dw_i}{ds} w_j + w_i \frac{dw_j}{ds}$$

$$= \kappa v_i u_j + \kappa u_i v_j - \kappa u_i v_j + \tau w_i v_j - \kappa v_i u_j + \tau v_i w_j - \tau v_i w_j - \tau w_i v_j = 0,$$

و این بدان معناست که  $u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j$  ثابت است. اما ماتریس (۵۰۸) متعامد است اگر فقط اگر

$$u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

در نتیجه، اگر ماتریس به ازای یک مقدار از  $s$  متعامد باشد، به ازای تمام مقادیر متعامد خواهد

بود. با استفاده از جواب (۴۰۸)، که به وسیله مقادیر اولیه‌ای از  $t, n, b$  معین می‌شوند، می‌توان جوابی از (۳۰۸) را یافت که به وسیله مقادیر اولیه  $x_0, y_0, z_0$  از توابع  $x, y, z$  به طور منحصر بفرد معین می‌شود. بنابراین، ملاحظه می‌شود که، با معلوم بودن نقطه اولیه و مقادیر اولیه سمبردار سه‌وجهی فرنه، می‌توان یک و فقط یک منحنی یافت که دارای توابع انحنای و تاب داده شده بوده و سه‌وجهی فرنه داده شده را در نقطه اولیه دارا باشد. اما هر دو جواب متمایز از (۴۰۸) یا، معادلا"، (۱۰۸) که در شرایط (۲۰۸) صدق کنند، نظیر به سه‌وجهی‌های فرنه مختلفی هستند. چون هر دو سه‌وجهی فرنه را می‌توان با یک حرکت جسم صلب برهم منطبق کرد، این امر در مورد خود جوابها نیز درست است، که بدین ترتیب قسمت دوم قضیه ثابت می‌شود.

معادلات  $\kappa = \kappa(s)$  و  $\tau = \tau(s)$ ، که بستگی انحنای و تاب را به طول قوس نشان می‌دهند و منحنی را با تقریب موضعی در فضا معین می‌کنند، معادلات طبیعی منحنی نامیده می‌شوند. معادلات طبیعی می‌توانند به شکل ضمنی  $F(\kappa, \tau, s) = 0$  و  $G(\kappa, \tau, s) = 0$  نیز داده شوند. بزودی در بخشهای زیر خواهیم دید که اگر فقط یکی از دو معادله معلوم باشد، این معادله اغلب خانواده کاملی از منحنیها را نمایش خواهد داد.

### امثله و تمرین

۱. همانطور که قبلا" دیدیم (تمرین ۱ در ۱۰۵)، معادلات طبیعی مارپیچ عبارتند از

$$\kappa = a(a^2 + b^2)^{-1}, \tau = b(a^2 + b^2)^{-1}$$

۲. با حل معادلات دیفرانسیل (۳۰۸) و (۴۰۸) در این حالت خاص، تحقیق کنید که این معادلات واقعا" یک مارپیچ را نمایش می‌دهند.

۳. معادلات طبیعی منحنی را بیابید که روی مخروط

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

قرار گرفته و مولدهای مستقیم الخط مخروط را در زاویه ثابتی قطع می‌کند (ر.ک. تمرین ۸ در ۲۰۴).

۴. اگر معادلات طبیعی یک منحنی

$$\kappa = \kappa(s), \quad \tau = \tau(s)$$

باشند، معادلات طبیعی منحنی که با آن نسبت به

(آ) یک نقطه،

(ب) یک خط راست،

(پ) یک صفحه

متقارن است چیست؟

۵. منحنی بیابید که معادلات طبیعی اش

$$\kappa = a \cos s, \quad \tau = a \sin s$$

باشند.

۶. به فرض آنکه بردار قائم اصلی یک منحنی تابعی از قوس یعنی  $n = n(s)$  باشد، منحنی را پیدا نمایید.

۷. همین مسئله را در صورتی که بردار قائم دوم داده شده باشد حل کنید.

## ۲۰۸ مارپیچهای تعمیم یافته

یک مارپیچ تعمیم یافته منحنی است که با راستای ثابتی در فضا زاویه ثابتی می سازد. خطوط مستقیمی که در این راستا منحنی را قطع می کنند یک سطح استوانه ای خواهند ساخت. منحنی برای سطح استوانه ای واقع بوده و مولدهای سطح را در زاویه ثابتی قطع می کند. مارپیچی که قبلاً در نظر گرفته شد حالت خاص بوده و وقتی است که استوانه یک استوانه مستدیر است.

قضیه. یک منحنی پارامتری از کلاس  $C_3$  بدون نقاط اصلاح یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر و فقط اگر ثابت  $\tau/\kappa$ ؛ بعلاوه،  $\tau/\kappa = \cot \theta$ ، که در آن  $\theta$  زاویه ثابت بین منحنی و راستای ثابت در فضا است.

برهان. فرض کنیم  $a$  یک بردار یکه با راستای ثابت باشد. در این صورت، داریم

$$ta = \cos \theta = \text{ثابت};$$

در نتیجه،

$$at' = 0, \text{ که از اینجا } \kappa an = 0$$

طبق فرض  $\kappa \neq 0$ . بنابراین،  $an = 0$ ، و بردار  $a$  در صفحه اصلاحی قرار دارد. با مشتقگیری از این معادله داریم

$$- \kappa at + \tau ab = 0 \text{ یا } an' = 0$$

چون  $a$  یک بردار یکه در صفحه  $(t, b)$  بوده و  $at = \cos \theta$ ، داریم  $ab = \sin \theta$  یا  $ab = -\sin \theta$ . بی آنکه به کلیت خللی وارد شود، می توان حالت اخیر را به وسیله تعویض بردار  $a$  با بردار  $-a$  که همان راستای خطوط را در فضا معین می کند حذف کرد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$-\kappa \cos \theta + \tau \sin \theta = 0,$$

که از آنجا

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta = \text{ثابت}.$$

بعکس، اگر انحنا و تاب در معادله

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{ثابت}$$

صدق کنند، بردار  $\mathbf{a} = (\tau/\kappa)\mathbf{t} + \mathbf{b}$ ، که موازی بردار داربو است، ثابت می باشد. درواقع داریم

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \mathbf{t} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{t}' + \mathbf{b}' = \frac{\tau}{\kappa} \kappa \mathbf{n} - \tau \mathbf{n} = 0.$$

از سوی دیگر، زاویه بین  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{t}$  ثابت است، زیرا

$$\cot \theta = \frac{\tau/\kappa}{1} = \frac{\tau}{\kappa} = \text{ثابت}.$$

معادله ثابت  $\tau/\kappa$  معادله طبیعی کلاس مارپیچهای تعمیم یافته است.

### امثله و تمرین

۱. تحقیق کنید که منحنی تمرین ۳ در بخش قبل یک مارپیچ تعمیم یافته است، و زاویه‌ای

که این منحنی مولدهای مستقیم الخط استوانه‌اش را قطع می کند پیدا کنید.

۲. ثابت کنید منحنی  $x = at, y = bt^2, z = t^3$  یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر فقط اگر

$$2b^2 = 3a$$

موازی صفحه  $(xy)$  اند و با محور  $x$  زاویه  $45^\circ$  می سازند. معادله این سطح استوانه‌ای

را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  از کلاس  $C_4$  یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر و فقط اگر در

$$\text{اتحاد } \mathbf{r}''\mathbf{r}'''\mathbf{r}^{iv} = 0 \text{ صدق کند.}$$

راهنمایی:  $\tau/\kappa$  را برحسب  $\mathbf{r}$  و مشتقات آن بیان کرده، و از معادله ثابت  $\tau/\kappa$

مشتق بگیرید.

### ۳.۸ منحنیهای برتران<sup>۱</sup>

می‌گوییم دو منحنی مزدوج به مفهوم برتران هستند اگر تناظری یک به یک بین نقاط آنها

وجود داشته باشد به طوری که هر دو منحنی در نقاط نظیر دارای یک قائم اصلی مشترک باشند. هر منحنی که با این مفهوم مزدوج داشته باشد یک منحنی برتران نامیده می شود.

قضیه. یک منحنی پیچ خورده از کلاس  $C_4$ ، یعنی منحنیی که حتی قسمتی از آن، در یک صفحه قرار ندارد ( $\tau \neq 0$ ) یک منحنی برتران است اگر و فقط اگر در شرط

$$(6.8) \quad \alpha\kappa + \beta\tau = 1$$

صدق کند، که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت هستند. بخصوص، هر منحنی با انحنا ی ثابت یک منحنی برتران است. در این حالت، هرگاه ثابت  $\tau \neq 0$ ، آنگاه  $\beta = 0$ ،  $\alpha = 1/\kappa$  و منحنی مزدوج مکان هندسی مراکز انحنا ی منحنی اصلی بوده و همان انحنا را دارا خواهد بود. در مورد مارپیچ مستدیر ( $\kappa = \text{ثابت}$ ،  $\tau = \text{ثابت}$ )، بی نهایت منحنی مزدوج وجود دارد، که همه آنها مارپیجهایی هستند با یک محور و یک پای پیچ.

برهان. فرض کنیم  $r = r(s)$  معادله پارامتری منحنی برتران  $\mathcal{K}$  بوده، و  $s$  پارامتر قوس بر  $\mathcal{K}$  باشد. نقطه ای از منحنی مزدوج  $\mathcal{K}_1$  نظیر به نقطه  $s$  از  $\mathcal{K}$  باید بردار موضعی به شکل

$$(7.8) \quad R = r(s) + \alpha(s)n(s)$$

داشته باشد، که در آن  $t, n, b$  بردارهای سموجهی فرعه  $\mathcal{K}$  هستند. با متغیر  $s$ ، این معادله را می توان معادله پارامتری  $\mathcal{K}_1$  در نظر گرفت. اما پارامتر  $s$  لزوماً "پارامتر قوس بر  $\mathcal{K}_1$  نیست. بنابراین مزدوج به مفهوم برتران، قائم اصلی  $\mathcal{K}_1$  در  $s$  باید بر قائم اصلی  $\mathcal{K}$  منطبق باشد، و این رخ می دهد اگر و فقط اگر بردار قائم اصلی  $\mathcal{K}_1$  موازی  $n$  باشد. داریم

$$\frac{dR}{ds} = t + \alpha'n + \alpha(-\kappa t + \tau b) = (1 - \kappa\alpha)t + \alpha'n + \alpha\tau b.$$

چون  $dR/ds$  بر  $\mathcal{K}_1$  مماس و، در نتیجه، بر  $n$  عمود است، داریم  $\alpha' = 0$ ، ثابت  $\alpha$ ، و

$$\frac{dR}{ds} = (1 - \kappa\alpha)t + \alpha\tau b.$$

بامشتگیری از این معادله، ضمن ثابت گرفتن  $\alpha$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{ds^2} &= (1 - \kappa\alpha)'t + (1 - \kappa\alpha)\kappa n + \alpha\tau'b - \alpha\tau^2n \\ &= (1 - \kappa\alpha)'t + [\kappa(1 - \kappa\alpha) - \alpha\tau^2]n + \alpha\tau'b. \end{aligned}$$

بردار  $d^2R/ds^2$  در صفحه هوسان منحنی  $\mathcal{K}_1$  قرار دارد. لذا، این بردار باید ترکیبی

خطی از بردارهای  $d\mathbf{R}/ds$  و  $\mathbf{n}$  باشد. پس بردار  $(1 - \kappa\alpha)\mathbf{t} + \alpha\tau'\mathbf{b}$ ، که بر  $\mathbf{n}$  عمود است، و بردار  $d\mathbf{R}/ds = (1 - \kappa\alpha)\mathbf{t} + \alpha\tau'\mathbf{b}$  باید همخط باشند. این، در صورتی که  $\kappa\alpha \neq 1$  و  $\tau \neq 0$ ، یعنی

$$\frac{(1 - \kappa\alpha)'}{1 - \kappa\alpha} = \frac{\tau'}{\tau}.$$

این معادله با

$$\ln |1 - \kappa\alpha| = \ln |\tau| + \ln |\beta|,$$

که در آن  $\beta$  ثابت انتگرالگیری است، یا با

$$\alpha\kappa + \beta\tau = 1 \quad \text{یا} \quad 1 - \kappa\alpha = \beta\tau$$

معادل است، مؤید آنکه یک منحنی برتران در (۶.۸) صدق می‌نماید. در حالت استثنایی  $\alpha\kappa = 1$  داریم ثابت  $\kappa = 1/\alpha$ ؛ لذا، دارای انحنای ثابت بوده، و معادله (۷.۸) به صورت

$$(۸.۸) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$$

درمی‌آید، که این معادله مکان هندسی مراکز انحنای  $\mathcal{K}$  می‌باشد. برای اثبات آنکه این یک مزدوج برتران  $\mathcal{K}$  است، بردارهای سه‌وجهی فرنه  $\mathcal{K}_1$  را پیدا می‌کنیم. بردار مماس دارای راستای

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{b}$$

است (به یاد بیاورید که ثابت  $\kappa$ ). لذا، این بردار با بردار قائم دوم  $\mathbf{b}$  منحنی  $\mathcal{K}$  موازی است، زیرا فرض کرده‌ایم که  $\tau \neq 0$ . بعلاوه، داریم

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} = \frac{\tau'}{\kappa}\mathbf{b} + \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{b}' = \frac{\tau'}{\kappa}\mathbf{b} - \frac{\tau^2}{\kappa}\mathbf{n}$$

و

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} = -\frac{\tau^3}{\kappa^2}\mathbf{b} \times \mathbf{n} = \frac{\tau^3}{\kappa^2}\mathbf{t},$$

بدین معنا که بردار قائم دوم  $\mathcal{K}_1$  موازی بردار مماس  $\mathcal{K}$  است. بنابراین، صفحات اصلاحی موازی بوده، که در نتیجه بردارهای قائم اصلی موازی‌اند، و  $\mathcal{K}_1$  مزدوج برتران  $\mathcal{K}$  می‌باشد. واضح است که (۶.۸) نیز در این حالت به ازای  $\alpha = 1/\kappa$  و  $\beta = 0$  برقرار است. در مورد منحنی  $\mathcal{K}$  با انحنای ثابت و مکان هندسی مراکز انحنای آن  $\mathcal{K}_1$ ، می‌توان انحنای  $\mathcal{K}_1$  را با

استفاده از فرمول (۳.۶) به دست آورد؛ یعنی،

$$\kappa_1 = \left| \frac{d\mathbf{R}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} \right| \left| \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right|^{-3} = \frac{|\tau|^3}{\kappa^2} \left( \frac{|\tau|}{\kappa} \right)^{-3} = \kappa.$$

در نتیجه،  $\mathcal{K}_1$  منحنی است با همان انحناى ثابت و، چون مزدوج بودن به مفهوم برتران یک رابطه متقارن است،  $\mathcal{K}$  باید مکان هندسی مراکز انحناى  $\mathcal{K}_1$  باشد.

شرط (۶.۸) ثابتهای  $\alpha$  و  $\beta$  را معین می کند مگر آنکه  $\kappa$  و  $\tau$  هر دو ثابت باشند. در حالت اخیر، منحنی یک مارپیچ مستدیر است،  $\alpha$  را می توان دلخواه گرفت، و  $\beta$  را متعاقباً مشخص کرد. بنابراین، در این حالت، بی نهایت مزدوج وجود خواهد داشت. به آسانی معلوم می شود که همه آنها مارپیچهایی مستدیر هستند با یک پای پیچ.

حالت  $\tau = 0$  در بحث ما مستثنی شده است. مسلماً، درحالتی که منحنی در یک صفحه است، شرط (۶.۸) برای وجود مزدوج لازم نیست. لذا، مزدوجهای یک منحنی مسطح با انحناى نا ثابت همواره وجود خواهند داشت.

#### تمرین

۱. ثابت کنید که صفحات بوسان در نقاط نظیر دو منحنی مزدوج برتران دارای یک زاویه میل ثابت هستند.

راهنمایی. چون قائمهای اصلی دو منحنی برهم منطبق می شوند، پس میل صفحات به وسیله زاویه بین مماسهای  $t$  و  $d\mathbf{R}/ds$  سنجیده می شود.

۲. ثابت کنید که، در نقاط نظیر دو نقطه مزدوج برتران، تابها یک علامت را دارند.

۳. چه موقع ممکن است تناظری یک به یک بین نقاط دو منحنی برقرار کرد که خطوطاصل بین نقاط نظیر قائم دوم مشترک دو منحنی باشد؟

۴. چه موقع می توان تناظری یک به یک بین نقاط منحنی  $\mathcal{K}_1$  و منحنی  $\mathcal{K}_2$  برقرار کرد که، در هر نقطه، قائم اصلی  $\mathcal{K}_1$  قائم دوم  $\mathcal{K}_2$  در نقطه نظیر باشد؟

#### ۴.۸ گره بوسان

گره ای که با یک منحنی در نقطه ای مانند  $P$  دارای تماس از مرتبه بالاتر از دو باشد (ر.ک. زیربخش ۳.۴) گره بوسان منحنی در  $P$  نامیده می شود.

قضیه. یک منحنی از کلاس  $C_4$  در هر نقطه منتظمی که در آن  $\kappa \neq 0 \neq \tau$  یک و فقط یک گره بوسان دارد. مرکز  $C$  گره بوسان بر خط قطبی واقع است، و بردار  $\overrightarrow{KC}$  به مبدأ مرکز

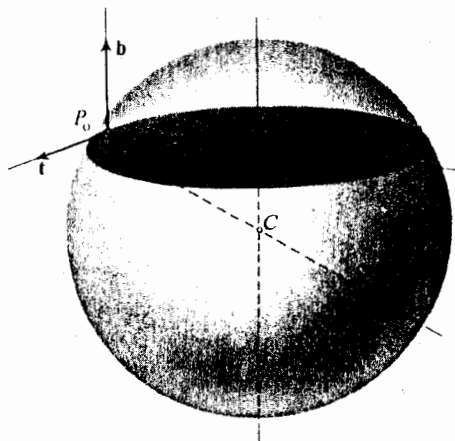
انحنای  $K$  و انتهای مرکز  $C$  کره بوسان برابر است با  $-K'b/K^2\tau$ . شعاع کره بوسان مساوی است با

$$(9.8) \quad R_K = \sqrt{\frac{1}{K^2} + \frac{K'^2}{K^4\tau^2}}.$$

کره بوسان دارای تماس از مرتبه لا اقل 3 با منحنی می باشد.

توجه کنید که در نقاط تخت، که  $\tau = 0$ ، کره بوسان وجود ندارد. در این حالت، صفحه بوسان دارای تماس از مرتبه 3 یا بیشتر است؛ صفحه بوسان را می توان حد کره های مماس وقتی شعاع آنها به بی نهایت میل می کند در نظر گرفت.

برهان. فرض کنیم  $C$  مرکز کره ای باشد که از نقطه  $P_0$  منحنی می گذرد، و  $Q$  را یک نقطه متغیر منحنی می گیریم.  $S$  و  $S'$  را نقاطی می گیریم که خط  $CQ$  کره را در آن نقاط قطع می کند (شکل ۱۰۸). برای تخمین مرتبه تماس کره و منحنی در  $P_0$ ، باید فاصله  $d = QS$  از نقطه  $Q$  تا سطح کره را تخمین بزنیم.



شکل ۱۰۸

به جای آن می توانیم کمیت  $\delta = QSQS'$  را تخمین بزنیم. در واقع، وقتی  $Q \rightarrow P_0$  داریم  $QS \rightarrow 0, QS' \rightarrow D$ ، که  $D$  قطر کره می باشد. بنابراین،  $|\delta/d| \rightarrow D$  بدین معنا که  $\delta = O(d)$ ، یا اینکه  $\delta$  و  $d$  از یک مرتبه هستند. حال فرض کنیم معادله منحنی به صورت  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  بوده، و نقطه  $P_0$  نظیر به مقدار  $s = 0$  از پارامتر طبیعی  $s$  باشد. مقادیر توابع نظیر در نقطه  $s = 0$  را با  $\mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \tau_0, \kappa_0$  نشان می دهیم، و  $\mathbf{r}_C$  را بردار موضع

مرکز کره و  $R$  را شعاع کره می‌انگاریم. در این صورت، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\delta &= QS QS' = (QC - CS)(QC + CS') = (QC - R)(QC + R) \\ &= QC^2 - R^2 = (r(s) - r_C)^2 - R^2.\end{aligned}$$

فرمول تیلور در  $s = 0$  نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\delta &= (r_0 - r_C)^2 - R^2 + 2s(r_0 - r_C)t_0 + s^2[1 + (r_0 - r_C)\kappa_0 n_0] \\ (10.8) \quad &+ \frac{2}{3}s^3(r_0 - r_C)(-\kappa_0^2 t_0 + \kappa_0' n_0 + \kappa_0 \tau_0 b_0) + o(s^3).\end{aligned}$$

از اینکه نقطه  $P_0$  روی کره است، باید داشته باشیم

$$(11.8) \quad (r_0 - r_C)^2 - R^2 = 0.$$

لازمه اینکه تماس باید از مرتبه لااقل 3 باشد شرایط

$$(12.8) \quad (r_0 - r_C)t_0 = 0$$

را حاصل می‌کند، و این بدان معناست که منحنی بر کره مماس است. بعلاوه،

$$1 + (r_0 - r_C)\kappa_0 n_0 = 0$$

یا

$$(13.8) \quad (r_0 - r_C)n_0 = -\frac{1}{\kappa_0};$$

در نتیجه، تصویر مرکز روی صفحه بوسان بر مرکز انحنا منطبق است یا، به عبارت دیگر، مرکز بر خط قطبی قرار دارد. بالاخره،

$$(r_0 - r_C)(-\kappa_0^2 t_0 + \kappa_0' n_0 + \kappa_0 \tau_0 b_0) = 0$$

یا، باتوجه به (12.8) و (13.8)،

$$(14.8) \quad -\frac{\kappa_0'}{\kappa_0} + \kappa_0 \tau_0 (r_0 - r_C) b_0 = 0.$$

معادلات (12.8)، (13.8)، و (14.8) بردار موضع مرکز را کاملاً "معین می‌کنند. درواقع، از ضرب اسکالر

$$r_C - r_0 = \alpha t_0 + \beta n_0 + \gamma b_0$$

در  $t_0$ ، بنابر (12.8)، نتیجه می‌شود که  $\alpha = 0$ ؛ همچنین، با ضرب در  $n_0$ ، باتوجه به (13.8)، داریم  $\beta = 1/\kappa_0$ ؛ و بالاخره، با ضرب در  $b_0$  و استفاده از (14.8) خواهیم داشت

$$\frac{\kappa_0'}{\kappa_0} + \kappa_0 \tau_0 \gamma = 0,$$

که از آنجا

$$\gamma' = -\frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0}.$$

در نتیجه،

$$(15.8) \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\kappa_0} \mathbf{n}_0 - \frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0} \mathbf{b}_0.$$

این بردار بردار موضع مرکز کره بوسان در نقطه  $P_0$  است. چون بردار موضع مرکز انحنا  $K$  مساوی  $\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_0 + (1/\kappa_0) \mathbf{n}_0$  است، در واقع خواهیم داشت

$$\overrightarrow{KC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_K = -\frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0} \mathbf{b}_0.$$

همچنین، به آسانی می توان شعاع کره بوسان را پیدا کرد؛ یعنی، داریم

$$R_K^2 = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_0)^2 = \frac{1}{\kappa_0^2} + \frac{\kappa_0'^2}{\kappa_0^4 \tau_0^2}.$$

که با (۹.۸) مطابقت دارد.

نتیجه، صفحه بوسان کره بوسان را در امتداد دایره بوسان قطع می کند.

برهان. فصل مشترک کره بوسان در  $P_0$  با صفحه بوسان در  $P_0$  مسلمان دایره ای است مماس بر منحنی در  $P_0$ . مرکز این دایره تصویر مرکز کره روی صفحه است، و نتیجتاً، مرکز انحنا است. اما این یعنی دایره دایره انحنا می باشد.

### تمرین

- محاسباتی را که به فرمول (۱۰.۸) ختم می شوند کامل کنید.
- کره بوسان مارپیچ مستدیر را در یک نقطه دلخواه بیاورید.
- ثابت کنید که مراکز کرات بوسان منحنی  $\mathcal{K}$  یک منحنی مانند  $\mathcal{K}_1$  را تشکیل می دهند به طوری که، اگر منحنی  $\mathcal{K}_1$  یک نقطه نباشد، خطوط مماس بر  $\mathcal{K}_1$  خطوط قطبی  $\mathcal{K}$  در نقاط متناظر می باشند.
- فرض کنید  $K$  و  $C$  مرکز انحنا و مرکز کره بوسان یک منحنی از کلاس  $C_4$  در نقطه  $P$  باشند. ثابت کنید زاویه بین خط  $PK$  و مکان هندسی مراکز انحنا همان زاویه بین  $PC$  و مکان هندسی مراکز کرات بوسان است.
- ثابت کنید هر کره با یک منحنی در نقطه منتظم  $P$  تماس از مرتبه ۲ لاقط ۲ دارد، به

طوری که در این نقطه  $\kappa \neq 0 \neq \tau$ ، اگر و فقط اگر دایره انحناى منحنی در  $P$  بر کره واقع باشد.

### ۵.۸ منحنیهای کروی

اگر یک منحنی کاملاً "بر یک کره واقع باشد، این کره کره بوسان منحنی در هر نقطه از آن است. در نتیجه، شعاع کره بوسان به عنوان تابعی از پارامتر ثابت است؛ ولذا، بردار موضع مرکز کره بوسان نیز چنین است.

بعکس، اگر تمام کرات بوسان در نقاط مختلف منحنی یکی باشند، منحنی بر آن کره ثابت قرار خواهد داشت.

حال شرط لازم و کافی برای ثابت بودن مرکز و شعاع کره بوسان را پیدا می‌کنیم. در واقع، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_C &= \mathbf{r}' + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{n} - \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' \mathbf{b} - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{n} - \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' \mathbf{b} + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \tau \mathbf{n} = \left[ \frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' \right] \mathbf{b}. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که مرکز کره بوسان ثابت است اگر و فقط اگر

$$(16.8) \quad \frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' = 0.$$

از طرف دیگر، داریم

$$\frac{dR_K^2}{ds} = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \left[ \frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' \right].$$

بنابراین، با مفروضات  $\kappa \neq 0 \neq \tau$ ، این مشتق در صورتی صفر است که (16.8) برقرار باشد. در نتیجه، در این حالت، شعاع و مرکز کره بوسان ثابت هستند. پس، قضیه زیر برقرار خواهد بود.

قضیه. شرط (16.8) شرط لازم و کافی برای آن است که یک منحنی از کلاس  $C_4$ ، بدون نقاط اصلاح یا نقاط تخت، بر یک کره واقع باشد.

همچنین، توجه کنید که، در صورت  $\kappa' \neq 0$ ، شرط ثابت  $\mathbf{r}_C =$  به تنهایی برای واقع بودن منحنی بر یک کره کافی است.

معادله (۱۶۰۸) را می‌توان به عنوان معادله طبیعی کلاس تمام منحنیهای کروی در نظر گرفت.

### تمرین

ثابت کنید که منحنی  $x = a \sin^2 t, y = a \sin t \cos t, z = a \cos t$  یک منحنی کروی است.

## ۹ منحنیهای پارامتری مسطح

## ۱۰۹ فرمولهای فرنه برای یک منحنی مسطح

یک منحنی مسطح دارای تاب  $\tau = 0$  است و، بالفکس، اتحاد  $\tau = 0$  ایجاب می‌کند که منحنی در یک صفحه قرار گیرد. اگر دستگاه مختصات طوری اختیار شود که محورهای  $x$  و  $y$  در صفحهٔ منحنی باشند، مؤلفهٔ سوم بردار موضع هر نقطه از منحنی 0 بوده و همهٔ فرمولها ساده‌تر خواهند شد.

با انتخاب جهت برای صفحهٔ مورد بحث، می‌توان جهت مثبت دوران را در صفحه تشخیص داد. بالنتیجه، اندازهٔ زاویهٔ بین یک جفت مرتب از بردارها را می‌توان با اعداد مثبت یا منفی بیان کرد که هم جهت و هم زاویهٔ دوران برای انطباق بردار اول جفت بر بردار دوم آن را نشان می‌دهد. بردار مماس و بردار قائم اصلی هر دو در صفحهٔ منحنی واقعند. بردار قائم دوم ثابت بوده و براین صفحه عمود است؛ و لذا، در اغلب حالات می‌توان به آن توجهی نکرد. از اینرو، کنج مورد نظر ما، به جای کنج کامل فرنه، کنج مسطحی است که از بردار مماس و قائم در صفحهٔ منحنی تشکیل شده است. با استفاده از جهت صفحه، بردار قائم اصلی  $n$  را با برداریکه همخطی مانند  $n_*$  عوض می‌کنیم که این بردار طوری جهتدار شده که جفت  $t, n_*$  یک کنج جهتدار با همان جهت صفحه باشد. به عبارت دیگر،  $n_*$  حاصل دوران  $t$  در جهت مثبت به اندازهٔ یک زاویهٔ قائمه است. واضح است که داریم

$$n_* = \varepsilon n, \quad (109)$$

که در آن  $\varepsilon$ ، با توجه به پارامتری سازی منحنی،  $+1$  یا  $-1$  است. ما بردارهای قائمی را که در صفحهٔ منحنی قرار ندارند در نظر نمی‌گیریم.

چنانچه پارامتری سازی را به معادله تغییر دهیم، بردارهای  $t$  و  $n_*$  حفظ می‌شوند، و تغییر به یک پارامتری سازی قرینه سبب تغییر هردو بردار  $t$  و  $n_*$  به قرینه‌هایشان می‌شود (یادآور می‌شویم که در مورد کنج فرنه در فضا، بردارهای  $t$  و  $b$  تغییر کردند اما  $n$  تغییر نکرد).

هرگاه منحنی با معادلات  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  در پارامتری سازی طبیعی تعریف شده باشد، آنگاه بردار مماس دارای مؤلفه‌های  $\{x', y'\}$  و بردار  $\mathbf{n}_*$  دارای مؤلفه‌های  $\{-y', x'\}$  است. در مورد یک پارامتری سازی دلخواه داریم

$$(2.9) \quad \mathbf{t} = \left\{ \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad \mathbf{n}_* = \left\{ -\frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

در اینجا فرمولهایی که همان نقش فرمولهای فزنه در فضای سمبیدی را دارند عبارتند از

$$(3.9) \quad \mathbf{t}' = k\mathbf{n}_*, \quad \mathbf{n}_*' = -k\mathbf{t}.$$

ضریب  $k$  انحنای یک منحنی سطح نامیده می شود؛ فرق آن با انحنای  $\kappa$  فقط می تواند در علامت باشد:

$$(4.9) \quad k = \varepsilon \kappa,$$

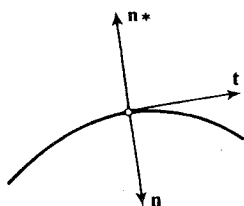
که در آن  $\varepsilon$  همان  $\varepsilon$  فرمول (۱.۹) است. توجه کنید که  $k$  (برخلاف  $\kappa$ ) وقتی پارامتری سازی به قرینماش تغییر یابد تغییر علامت می دهد.

## ۲.۹ انحنای یک منحنی سطح

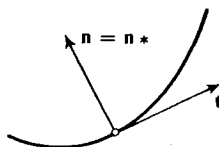
انحنای  $k$  را می توان، شبیه  $\kappa$ ، به صورت حد نسبت زاویه بین  $\mathbf{t}(s_0)$  و  $\mathbf{t}(s_0 + h)$  به  $h$ ، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، تعریف کرد. منتها فرقی این است که در اینجا هم  $\phi$  و هم  $h$  با علامتشان گرفته می شوند:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi}{h}.$$

هرگاه انحراف منحنی از مماس چنان باشد که، برای  $h$  به قدر کافی کوچک و مثبت، زاویه بین  $\mathbf{t}(s_0)$  و  $\mathbf{t}(s_0 + h)$  مثبت باشد، آنگاه  $\varepsilon = 1$ ،  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_*$ ،  $k$  مثبت است، و  $k = \kappa$  (شکل ۱.۹). چنانچه این زاویه منفی باشد،  $k = -\kappa$ ،  $\mathbf{n}_* = -\mathbf{n}$  (شکل ۲.۹).



شکل ۲.۹



شکل ۱.۹

با استفاده از فرمولهای (۲.۶) و (۳.۶)، فرمول زیر را برای انحنای منحنی سطح

$x = x(t), y = y(t)$  به دست می‌آوریم:

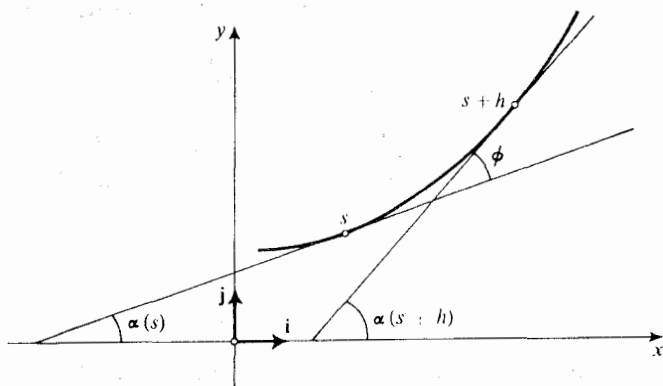
$$k = \pm \frac{|C|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \pm \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

زیرا در این حالت

$$\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}} = 0, \quad A = B = 0.$$

به جای آنکه سعی کنیم علامت صحیح را از توضیحاتی اضافی تعیین کنیم، فرمول انحنا یک منحنی مسطح را مستقلاً "به دست می‌آوریم".

زاویهٔ جهتدار  $\angle(\mathbf{i}, \mathbf{t}(s))$  از برداریکه محور  $x$  به بردار مماس در نقطهٔ  $s$  را با  $\alpha(s)$  نشان می‌دهیم (شکل ۳.۹). در این صورت، زاویهٔ جهتدار  $\angle(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s+h))$  از  $\phi$  از



شکل ۳.۹

بردار مماس در  $s$  به بردار مماس در  $s+h$  مساوی است با

$$\phi = \alpha(s+h) - \alpha(s).$$

بنابراین، اگر  $s$  پارامتر طبیعی باشد، خواهیم داشت

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(s+h) - \alpha(s)}{h} = \alpha'(s).$$

یا

$$(۵.۹) \quad k = \alpha'.$$

برای منحنی

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

در پارامتری‌سازی طبیعی، داریم

$$(۶.۹) \quad \cos \alpha = x', \quad \sin \alpha = y'.$$

که از آنجا

$$-(\sin z)z = x'', \quad (\cos z)x' = y''$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \cos z \quad \sin z \quad x' \quad y' \\ -(\sin z)x' \quad (\cos z)x' = x'' \quad y'' \end{aligned}$$

یا

$$\alpha' = x'y'' - x''y'$$

که، با توجه به (۵.۹)، فرمول زیر را برای پارامتری‌سازی‌های طبیعی نتیجه می‌دهد:

$$(۷.۹) \quad k = x'y'' - x''y'.$$

در یک پارامتری‌سازی دلخواه، داریم

$$\begin{aligned} x' &= \dot{x} \frac{dt}{ds}, & y' &= \dot{y} \frac{dt}{ds}, \\ x'' &= \ddot{x} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \dot{x} \frac{d^2t}{ds^2}, & y'' &= \ddot{y} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \dot{y} \frac{d^2t}{ds^2}. \end{aligned}$$

که از آنجا

$$x'y'' - x''y' = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) \left( \frac{dt}{ds} \right)^3.$$

و چون  $dt/ds = (ds/dt)^{-1} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}$ ، فرمول زیر نتیجه خواهد شد:

$$(۸.۹) \quad k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

### ۳.۹ دایره بوسان یا دایره انحنا یک منحنی مسطح

شکی نیست که دایره بوسان یک منحنی مسطح در صفحه منحنی قرار دارد. همانند حالت کلی، بردار موضع مرکز انحنا عبارت است از (قس. (۴.۶))

$$(۹.۹) \quad \mathbf{R}_C = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} = \mathbf{r} + \frac{1}{k} \mathbf{n}_*,$$

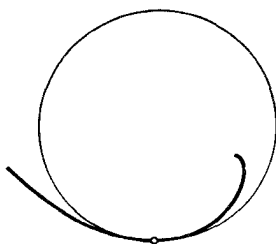
و شعاع انحنا مساوی است با  $\rho = 1/\kappa = 1/|k|$  اما در مورد منحنی مسطح ممکن و جالب است که وضع منحنی و دایره بوسان را نسبت بهم در مجاورت یک نقطه بررسی کنیم.

قضیه. هرگاه انحنا  $k$  یک منحنی مسطح مانند  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  از کلاس  $C_3$  و مشتقش  $k'$  در یک

نقطه مانند  $s_0$  مخالف صفر باشند، آنگاه، وقتی  $s$  افزایش یابد، منحنی از برون دایرهٔ انحنا به درون آن می‌رود اگر  $kk' > 0$ ، یا از درون به برون خواهد رفت اگر  $kk' < 0$  (شکل ۴۰.۹).

برهان. دایرهٔ بوسان در نقطهٔ  $s_0$  را در نظر گرفته، فاصلهٔ  $d$  از مرکز این دایره تا نقطهٔ متغیر از منحنی با بردار موضع  $\mathbf{r}(s)$  را تخمین می‌زنیم:

$$d = \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{k_0} \mathbf{n}_{*0} \right|,$$



شکل ۴۰.۹

که در آن  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ ،  $\mathbf{n}_{*0} = \mathbf{n}_*(s_0)$  داریم

$$\begin{aligned} d^2 - \rho_0^2 &= \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{k_0} \mathbf{n}_{*0} \right)^2 - \frac{1}{k_0^2} \\ &= \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{k_0} \mathbf{n}_{*0} \right)^2 - \left( \frac{1}{k_0} \mathbf{n}_{*0} \right)^2 = \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{2}{k_0} \mathbf{n}_{*0} \right) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

بنابراین تیلور داریم

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (s - s_0) \mathbf{r}'_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2} \mathbf{r}''_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6} \mathbf{r}'''_0 + o((s - s_0)^3),$$

اما

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{r}''_0 = \mathbf{t}'_0 = k_0 \mathbf{n}_{*0}, \quad \mathbf{r}'''_0 = k'_0 \mathbf{n}_{*0} + k_0 \mathbf{n}'_{*0} = k'_0 \mathbf{n}_{*0} - k_0^2 \mathbf{t}_0.$$

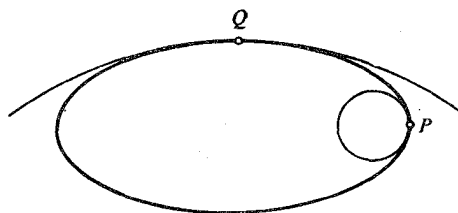
پس از جایگزینی به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} d^2 - \rho_0^2 &= \left[ (s - s_0) \mathbf{t}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2} k_0 \mathbf{n}_{*0} + \frac{(s - s_0)^3}{6} (k'_0 \mathbf{n}_{*0} - k_0^2 \mathbf{t}_0) - \frac{1}{k_0} \mathbf{n}_{*0} \right. \\ &\quad \left. + o((s - s_0)^3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ (s - s_0)t_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}k_0\mathbf{n}_{*0} + \frac{(s - s_0)^3}{6}(k'_0\mathbf{n}_{*0} - k_0^2t_0) \right. \\
& \quad \left. + o((s - s_0)^3) \right] \\
& - (s - s_0)\frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}t_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}\left(t_0^2 - \frac{1}{k_0}k_0\mathbf{n}_{*0}^2\right) \\
& + \frac{(s - s_0)^3}{6}\left[3k_0\mathbf{n}_{*0}t_0 + 3k_0\mathbf{n}_{*0}t_0 - \frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}(k'_0\mathbf{n}_{*0} - k_0^2t_0)\right] \\
& + o((s - s_0)^3) = +\frac{k'_0}{k_0}\cdot\frac{(s - s_0)^3}{6} + o((s - s_0)^3).
\end{aligned}$$

در نتیجه، اگر  $k'$  در  $s_0$  مخالف 0 باشد، تفاضل  $\rho_0^2 - d^2$ ، وقتی  $s$  از مقادیر  $s < s_0$  به مقادیر  $s > s_0$  تغییر کند، تغییر علامت می‌دهد. اگر  $kk' < 0$ ، این تغییر از مثبت به منفی است، که این معنی را می‌دهد که نقطه از برون دایره به درون آن می‌رود. اگر  $kk' > 0$ ، مقادیر  $\rho_0^2 - d^2$  از منفی به مثبت تغییر می‌کنند، نظیر به‌اینکه نقطه از درون دایره آنجا به برون آن خواهد رفت.

یک منحنی فقط وقتی می‌تواند کاملاً "داخل یا کاملاً" خارج دایره بوسان خود در نقطه‌ای چون  $P_0$  قرار گیرد که مشتق آنجا نسبت به طول قوس در این نقطه صفر باشد ( $k'_0 = 0$ ). چنین نقاطی رئوس منحنی نامیده می‌شوند. رئوس یک بیضی نمونه‌هایی از این نقاط هستند (شکل ۵.۹).



شکل ۵.۹

با استفاده از فرمولهای (۸.۹)، (۹.۹)، و (۲.۷) می‌توان فرمولهای مختصات  $(x_C, y_C)$  مرکز انحنای منحنی  $x = x(t), y = y(t)$  را به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned}
x_C &= x + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \left( -\frac{y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} \right), \\
y_C &= y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \frac{x}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

یا، بالاخره،

$$(10.9) \quad x_C = x - y \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \quad y_C = y + x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}.$$

این فرمولها را می توان برای پارامتری سازی طبیعی خلاصه تر کرد.

### امثله و تمرین

- نمایش یک منحنی به صورت نمودار یک تابع مانند  $y = f(x)$  ساده ترین نمایش یک منحنی مسطح است. این نمایش حالت خاصی از نمایش پارامتری است ( $x = t, y = f(t)$ ). بسیاری از فرمولها برای این پارامتری سازی ساده تر هستند:

$$t = \left( \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}, \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right), \quad n = \left( -\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \right), \quad s = \int \sqrt{1+f'^2} dx, \\ k = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad x_C = x - f' \frac{1+f'^2}{f''}, \quad y_C = y + \frac{1+f'^2}{f''}.$$

توجه کنید که در اینجا از نماد  $f'$  برای مشتق  $df/dx$  استفاده شده است. این امر با نمادگذاری ما ناسازگار است، چرا که  $x$  یک پارامتر طبیعی نیست. برقراری این فرمولها را تحقیق کنید.

- انحنای چرخزاد (شکل ۵.۳)، کشاننده (شکل ۴.۴)، و منحنی زنجیری

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

را حساب کنید.

- معادله طبیعی یک منحنی مسطح عبارت است از بستگی انحنای  $k$  به طول قوس  $s$ :  $k = k(s)$ . در مورد منحنی مسطح می توان معادله پارامتری یک منحنی را از معادله طبیعی مفروض آن با انتگرالگیری به دست آورد. در واقع، برای این کار باید دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{ds} = k(s), \quad x' = \cos \alpha, \quad y' = \sin \alpha$$

را حل کنیم. داریم

$$\alpha = \int_{s_0}^s k(u) du + \alpha_0$$

$$x = \int_{s_0}^s \cos \left( \int_{s_0}^u k(u) du + \alpha_0 \right) dv + x_0,$$

$$y = \int_{s_0}^s \sin \left( \int_{s_0}^v k(u) du + \alpha_0 \right) dv + y_0.$$

هرگاه، مثلاً،  $k = a/(a^2 + s^2)$  و دستگاه مختصات را طوری اختیار کنیم که داشته باشیم  $\alpha_0 = x_0 = y_0 = 0$ ، آنگاه

$$\alpha(s) = \int_0^s \frac{a}{a^2 + u^2} du = \arctan \frac{s}{a},$$

و

$$x = a \ln(s + \sqrt{s^2 + a^2}) - 2a \ln a, \quad y = \sqrt{s^2 + a^2} - a.$$

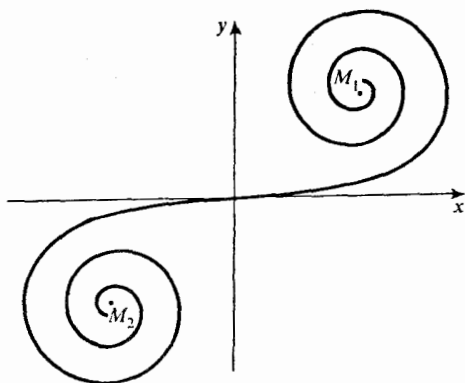
۴. نمونه جالب دیگر منحنی است که در آن انحنا با طول قوس متناسب است:  $k = as$ . با مقادیر اولیه  $x_0 = x_0 = y_0 = 0$  داریم

$$\alpha = \frac{as^2}{2}, \quad x = \int_0^s \cos \frac{au^2}{2} du, \quad y = \int_0^s \sin \frac{au^2}{2} du.$$

در اینجا انتگرالها را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد، و برای تعیین مختصات نقطه نظیر به مقدار معلومی از پارامتر  $s$ ، مجبور به استفاده از روشهای عددی یا جداول مخصوص خواهیم بود. بهر حال، به آسانی می‌توان از رفتار منحنی یک تصویر کیفی به دست آورد. توجه کنید که

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} x = \lim_{s \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} x = \lim_{s \rightarrow -\infty} y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$



شکل ۶.۹

و نیز  $y' = y'' = 0$  در  $s = 0$ . لذا، منحنی در مبدأ مختصات دارای نقطه عطف است.

منحنی حول نقطه  $M_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a})$  پیچیده و، وقتی  $s \rightarrow \infty$ ، به طور مجانبی به این نقطه نزدیک می شود؛ همین مطلب در مورد نقطه  $M_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}, -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a})$ ، وقتی  $s \rightarrow -\infty$ ، نیز صادق است (شکل ۶۰۹).

#### ۹۰۴ گسترده و گسترده یک منحنی مسطح

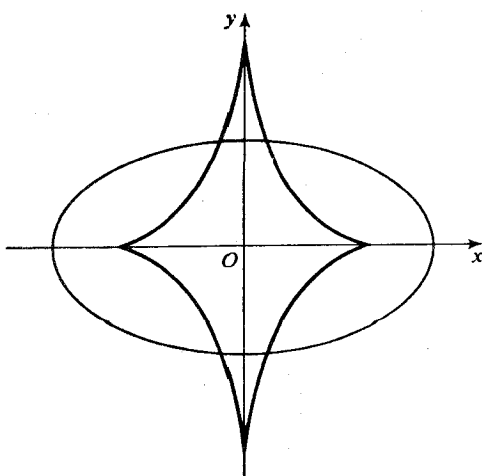
همانطور که در زیر بخش ۱۰۷ دیدیم، یک منحنی مسطح دقیقاً یک گسترده دارد که در همان صفحه منحنی واقع است. این گسترده مکان هندسی مراکز انحنای منحنی است؛ بنابراین، معادلات (۱۰۰۹) با پارامتر متغیر  $t$  را می توان به عنوان یک نمایش پارامتری گسترده در نظر گرفت.

همه گسترده های یک منحنی مسطح در صفحه منحنی واقعند؛ لذا، فرمول (۳۰۷) برقرار است. همچنین، در اینجا راحتتر است که معادلات گسترده ها را مستقیماً "و به عنوان مسیرهای قائم خانواده مماسها، یعنی منحنیهایی که همه مماسها را در زاویه قائمه قطع می کنند، به دست آورد تا وارد کردن پارامتر طبیعی و به کار بردن فرمولهای (۳۰۷).

#### تمرین

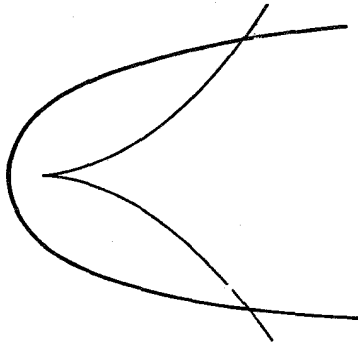
۱. گسترده منحنیهای زیر را بیابید:

(آ) بیضی (شکل ۷۰۹)؛



شکل ۷۰۹

(ب) سهمی (شکل ۸۰۹)؛

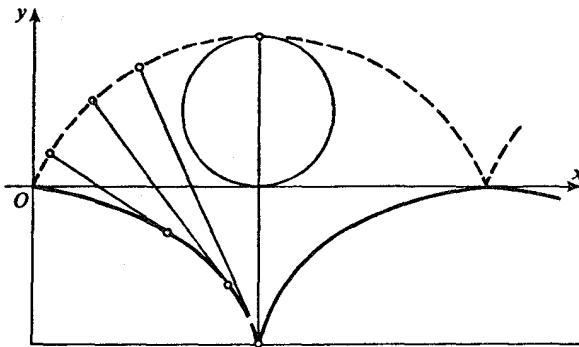


شکل ۸۰۹

(پ) هذلولی؛

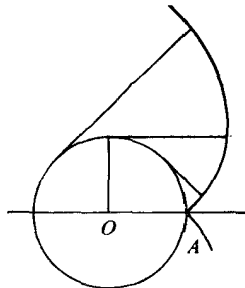
(ت) منحنی زنجیری.

۲. ثابت کنید گسترده یک چرخزاد چرخزادی است همنهشت با آن (شکل ۹۰۹).



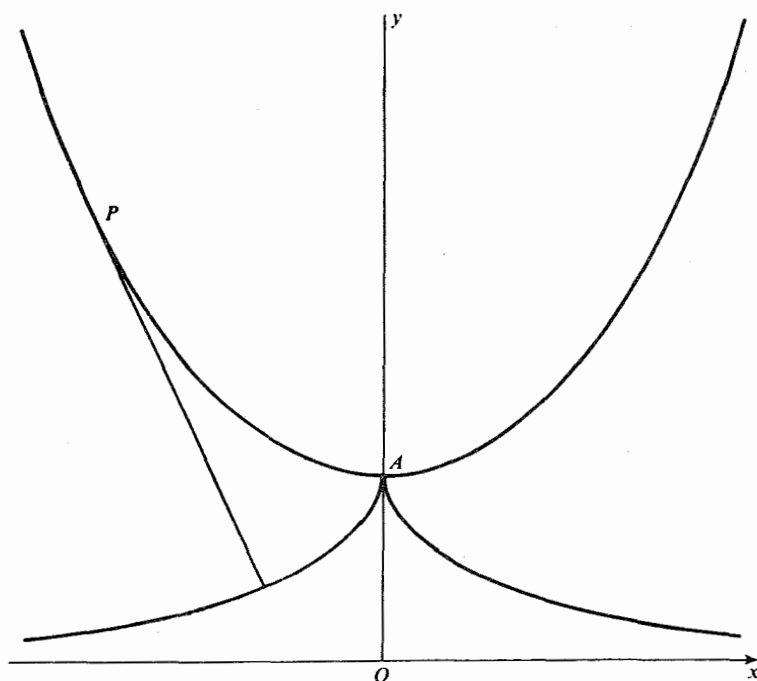
شکل ۹۰۹

۳. معادله گسترده یک دایره را بیابید (شکل ۱۰۰۹).



شکل ۱۰۰۹

۴. ثابت کنید گسترده کشاننده یک منحنی زنجیری است ( شکل ۱۱۰۹ ).



شکل ۱۱۰۹

### ۵.۹ مجانبهای یک منحنی مسطح

درحالتی که منحنی در صفحه است، می توان از نظریه های که در زیر بخش ۵.۴ ذکر شد استفاده کرد. اما بعضی از فرمولها را می توان خلاصه تر کرد.

در اینجا راستای مجانبی با شیب  $m$  تعریف می شود. چون بردار هادی راستای

مجانبی منحنی

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0$$

مساوی

$$a = \left( \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

است، شیب راستای مجانبی عبارت خواهد بود از

$$(11.9) \quad m = \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{y(t)}{x(t)}.$$

اگر این نسبت به  $\infty$  یا  $-\infty$  میل کند، راستای مجانبی بر راستای محور  $y$  منطبق می‌شود. مناسبترین کار در این حالت این است که یک نقطهٔ مجانب را نقطهٔ برخوردش  $(0, b)$  با محور  $y$  بگیریم، البته مشروط بر اینکه محور  $y$  راستای مجانبی نداشته باشد. در این صورت، معادلهٔ مجانب به شکل

$$y = mx + b$$

خواهد بود.

هر خط با این معادله یک مجانب است اگر و فقط اگر فاصلهٔ یک نقطه از منحنی تا یک نقطه از خط با همان طول به صفر میل کند:

$$\lim_{t \rightarrow b-0} [y(t) - mx(t) - b] = 0.$$

این امر معادل وجود حد

$$b = \lim_{t \rightarrow b-0} [y(t) - mx(t)] \quad (12.9)$$

است، که در آن  $m$  از فرمول (۱۱.۹) تعیین می‌شود.

برای یافتن مجانبهای موازی محور  $y$ ، باید مقادیر  $x_0$  را طوری بیابیم که  $x_0 = \lim x(t)$  در حالی که  $\lim y(t) = \pm \infty$ .

## ۱۰. نمایشهای دیگر یک منحنی مسطح

### ۱۰.۱ معادلهٔ ضمنی یک منحنی

یک منحنی در صفحه اغلب با یک معادلهٔ ضمنی به صورت

$$F(x, y) = 0 \quad (10.10)$$

بیان می‌شود. این معادله به شکل معادلات خطوط، دایره، و مقاطع مخروطی است که در هندسهٔ تحلیلی به کار می‌روند.

بدون فرضهایی علاوه بر پیوستگی دربارهٔ  $F(x, y)$ ، مجموعهٔ تمام نقاط  $(x, y)$  صادق در این معادله می‌تواند مجموعهٔ بستهٔ کامل "دلخواهی" باشد. از اینرو، باید در مورد  $F$  فرضهای دیگری نیز منظور شود.

قضیه. هرگاه تابع دو متغیرهٔ  $F(x, y)$  در همسایگی نقطهٔ  $(x_0, y_0)$ ، که در معادلهٔ  $F(x_0, y_0) = 0$  صدق کند، از کلاس  $C_1$  بوده، و دست کم یکی از مشتقات جزئی آن  $F_x(x_0, y_0)$ ،  $F_y(x_0, y_0)$  در این نقطه مخالف صفر باشد، آنگاه معادلهٔ  $F(x, y) = 0$  در یکی

از همسایگیهای این نقطه یک قوس ساده در صفحه را نمایش داده، و مماس بر این قوس در نقطه  $(x_0, y_0)$  دارای معادله

$$(X - x_0)F_x(x_0, y_0) + (Y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0 \quad (2.10)$$

است.

برهان. فرض کنیم  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ . پس، طبق قضیه تابع ضمنی، یک همسایگی از  $(x_0, y_0)$  وجود دارد که در آن  $F(x, y) = 0$  معادل  $y = f(x)$  است، که  $f(x)$  تابعی است از کلاس  $C_1$  و

$$\frac{df(x_0)}{dx} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

معادله  $y = f(x)$  در این همسایگی یک قوس ساده را نمایش می دهد. نقطه  $(x_0, y_0)$  یک نقطه منتظم این قوس بوده و  $\{1, df(x_0)/dx\}$  بردار مماس آن است. لذا، معادله مماس به شکل

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 \\ 1 & \frac{df}{dx}(x_0) \end{vmatrix} = 0,$$

یا

$$(X - x_0)F_x + (Y - y_0)F_y = 0,$$

می باشد، و برهان تمام می شود.

هرگاه  $F_y(x_0, y_0) = 0$  ولی  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ، با تعویض نقش متغیرها به همین نحو عمل می شود.

### تمرین

۱. کل برهان را در این حالت تکرار کنید.

۲. انحناى یک منحنی که با معادله ضمنی  $F(x, y) = 0$  داده شده است، که در آن  $F$  یک تابع از کلاس  $C_2$  است، را در یک نقطه منتظم بیابید.

۳. معادله قائم به منحنی  $F(x, y) = 0$  را در یک نقطه منتظم بیابید.

۴. ثابت کنید مسیرهای قائم یک خانواده یک پارامتری از دواير به شعاع ثابت و مرکز واقع بر یک خط مستقیم گشاننده هستند.

مسیر قائم یک خانواده از منحنیها منحنی است که منحنیهای خانواده را در زاویه قائمه قطع می کند.

۵. معادله ضمنی برگ شبدر (زیر بخش ۲.۳، مثال ۲)

$$x = \cos 3t \cos t, \quad y = \cos 3t \sin t$$

را با حذف پارامتر  $t$  بیابید.

$$[x^3 - 3xy^2 = (x^2 + y^2)^3] \text{ جواب}$$

### ۲.۱۰ نقاط منفرد یک منحنی که با معادله ضمني داده شده است

اگر  $F_x = 0$  و  $F_y = 0$  را مجاز بدانیم، معادله  $F(x, y) = 0$  نه فقط ممکن است نمایش منحنیها باشد بلکه قلمروها، نقاط منفرد، و غیره را نیز نشان می‌دهد. نقاطی چون  $(x, y)$  که در هر سه معادله  $F(x, y) = 0$ ،  $F_x(x, y) = 0$ ،  $F_y(x, y) = 0$  صدق کنند نقاط منفرد منحنی نام دارند. حال یک نقطه منفرد از یک منحنی را در نظر می‌گیریم به طوری که در یک همسایگی از آن هیچ نقطه منفرد دیگری وجود نداشته باشد.

قضیه. هرگاه نقطه  $(x_0, y_0)$  یک نقطه منفرد منحنی  $F(x, y) = 0$  باشد، که در آن  $F$  تابعی از کلاس  $C_2$  بوده، و منحنی در یکی از همسایگیهای  $(x_0, y_0)$  نقطه منفرد دیگری نداشته باشد، و دست کم یکی از مشتقات مرتبه دوم  $F$  در  $(x_0, y_0)$  مخالف ۰ باشد، آنگاه رفتار منحنی در مجاورت  $(x_0, y_0)$  به صورت زیر خواهد بود:

۱. هرگاه در نقطه  $(x_0, y_0)$  داشته باشیم  $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 > 0$ ، آنگاه یک همسایگی از  $(x_0, y_0)$

وجود دارد که هیچ نقطه از منحنی را در بر نمی‌گیرد. نقطه  $(x_0, y_0)$  نقطه منفرد منحنی نام دارد؛

۲. هرگاه در نقطه  $(x_0, y_0)$  داشته باشیم  $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 < 0$ ، آنگاه دو شاخه از منحنی

مار بر  $(x_0, y_0)$  وجود دارد، هر یک در  $(x_0, y_0)$  دارای مماس است، و این مماسها از هم

متمايز می‌باشند. این نقطه، گره یا نقطه خودقطعی است؛

۳. هرگاه در نقطه  $(x_0, y_0)$  داشته باشیم  $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0$ ، آنگاه دو شاخه از منحنی

مار بر  $(x_0, y_0)$  وجود دارد که در  $(x_0, y_0)$  دارای یک مماس مشترک هستند. لذا، این

نقطه یا یک نقطه بازگشت است یا یک نقطه تماس دو شاخه منحنی.

برای اثبات کامل این قضیه، خواننده را به حساب دیفرانسیل و انتگرال ارجاع می‌دهیم.

مادر اینجا فقط شرح مختصری می‌آوریم که شهود هندسی واقع در ورای برهان را توضیح می‌دهد.

می‌توان فرض کرد که نقطه منفرد در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد. با استفاده از

فرمول تیلور داریم

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[F_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2F_{xy}(x_0, y_0)xy + F_{yy}(x_0, y_0)y^2] + o(x^2 + y^2).$$

منحنی را در یک همسایگی به قدر کافی کوچک مبدأ با یک منحنی مرتبه دوم که از حذف

جملات مراتب بالاتر به دست می آید تقریب می کنیم ( این قسمتی از برهان است که بایستی توجیه شود ). لذا ، معادله زیر را خواهیم داشت :

$$F_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2F_{xy}(x_0, y_0)xy + F_{yy}(x_0, y_0)y^2 = 0.$$

بحث در این معادله درجه دوم به سه حالت مذکور در قضیه منجر می شود . در حالت اول یک جفت خط موهومی داریم با یک نقطه حقیقی ؛ یعنی ، مبدأ . در حالت دوم دو خط متقاطع داریم ، که مماسهای دو شاخه منحنی اند ، و در حالت سوم یک خط مضاعف داریم ، که مماس بر هر دو شاخه منحنی است .

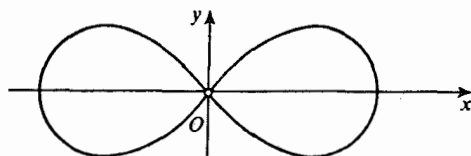
اگر هر سه مشتق جزئی مرتبه دوم  $F$  در نقطه منفرد صفر باشند ، رفتار منحنی با آنچه در قضیه توصیف شده فرق خواهد داشت . این رفتار را می توان با استفاده از مشتقات مراتب بالاتر مورد مطالعه قرار داد .

### امثله و تمرین

۱ . لمنیسکات برنولی<sup>۱</sup> ( شکل ۱۰۱۰ )

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

در مبدأ دارای گره است .



شکل ۱۰۱۰

۲ . سهمی نیمه مکعبی ( شکل ۳۰۳ )

$$y^2 = ax^3$$

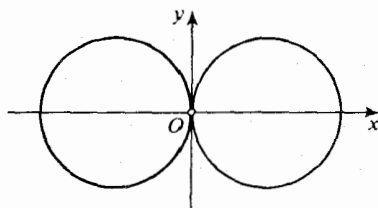
در ۰ دارای یک نقطه بازگشت است .

۳ . منحنی

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$$

در ۰ انفراد دارد . در این نقطه داریم  $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0$  ، اما این نقطه یک نقطه بازگشت نیست بلکه نقطه تماس دو شاخه منحنی است . برای اثبات آن توجه می کنیم که طرف چپ معادله حاصل ضرب  $(x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x)$  است ؛ و لذا ، منحنی

از دو دایره  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  و  $x^2 + y^2 + 2x = 0$  تشکیل شده است که بر محور  $y$  در مبدأ مماسند (شکل ۲۰۱۰).

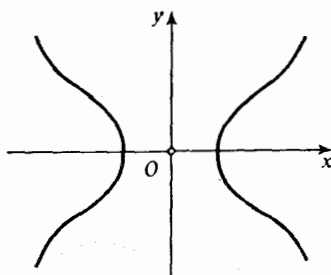


شکل ۲۰۱۰

۴. مبدأ  $(0,0)$  یک نقطه منفرد منحنی (شکل ۳۰۱۰)

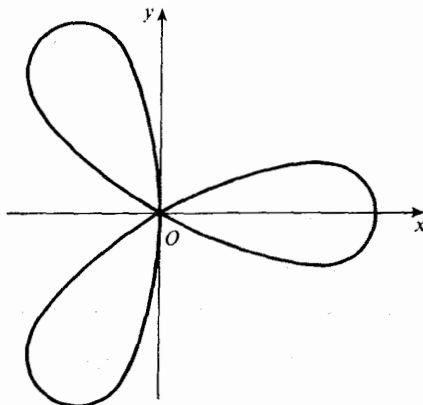
$$y^2 + x^4 - x^6 = 0$$

است.



شکل ۳۰۱۰

۵. برگ شبدر  $x^3 - 3xy^2 - (x^2 + y^2)^3 = 0$  (شکل ۴۰۱۰) در مبدأ مختصات دارای یک نقطه منفرد است. در اینجا داریم  $F_{xx}(0,0) = F_{xy}(0,0) = F_{yy}(0,0) = 0$ ؛ بنابراین،



شکل ۴۰۱۰

قضیه قابل اجرا نیست. بررسی قسمتی از معادله که از پایین‌ترین درجه است  
 $(x^3 - 3xy^2 = 0)$  نشان می‌دهد که سه شاخه ماربر می‌آید وجود دارند که به ترتیب دارای  
 خطوط مماس  $x = -\sqrt{3}y$ ،  $x = \sqrt{3}y$ ،  $x = 0$  می‌باشند.

### ۳.۱۰ مختصات قطبی

یک منحنی مسطح را می‌توان در مختصات قطبی با یک معادله مانند  $\rho = \rho(\phi)$  نمایش داد،  
 که در آن  $\rho$  بردار شعاعی و  $\phi$  زاویه قطبی است. این معادله را می‌توان فوراً "به معادلات  
 پارامتری در مختصات دکارتی متعامد تغییر داد، در صورتی که مبدأ مختصات در قطب قرار  
 گرفته و محور  $x$  بر محور قطبی منطبق شود. با استفاده از  $\phi$  به عنوان یک پارامتر، داریم  
 $(3.10) \quad x = \rho(\phi) \cos \phi, \quad y = \rho(\phi) \sin \phi.$

بنابراین، طول قوس از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(4.10) \quad s = \int_{\phi_0}^{\phi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\phi.$$

زاویه  $\mu$  بین خط واصل از قطب به یک نقطه منحنی و مماس بر منحنی در این نقطه از رابطه  
 زیر به دست می‌آید:

$$(5.10) \quad \cot \mu = \frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

همچنین، انحنا برابر است با

$$(6.10) \quad k = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2}}.$$

### امثله و تمرین

۱. فرمولهای (۴.۱۰)، (۵.۱۰)، و (۶.۱۰) را، یا از فرمولهای نظیر برای نمایشهای  
 پارامتری و یا از طریق دیگر، به دست آورید.

۲. معادله طبیعی مارپیچ لگاریتمی که معادله‌اش در مختصات قطبی

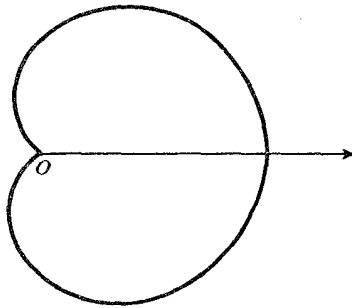
$$\rho = ce^{k\phi}$$

است و در آن  $c$  و  $k$  ثابت اند، را پیدا کنید، و منحنی آن را رسم نمایید.

۳. ثابت کنید مارپیچ لگاریتمی شعاعهای خارج شده از مبدأ را در یک زاویه ثابت قطع  
 می‌کند. این زاویه را برحسب ثابتهای  $c$  و  $k$  بیان نمایید.

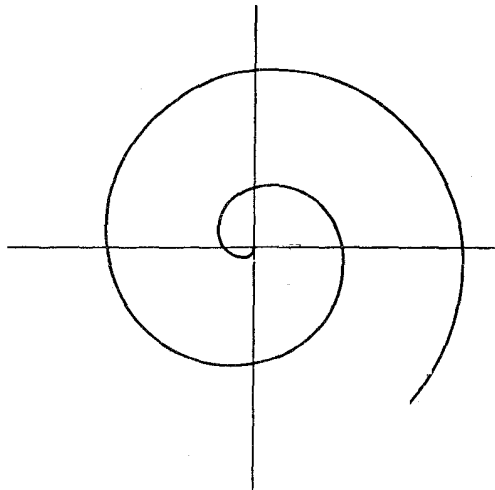
۴. گسترده منحنیهای زیر را بیابید:

- (آ) لمنیسکات  $\rho = a\sqrt{2\cos 2\phi}$  : تحقیق کنید که معادلهٔ ضمنی با معادلهٔ ضمنی اولین مثال از بخش پیش یکی است؛
- (ب) دلگون  $\rho = a(1 - \cos \phi)$  (شکل ۵۰۱۰).



شکل ۵۰۱۰

۵. گستردهٔ منحنیهای زیر را بیابید:
- (آ) مارپیچ ارشمیدسی  $\rho = a\phi$  (شکل ۶۰۱۰)؛



شکل ۶۰۱۰

- (ب) دلگون تمرین پیش.

۴۰۱۰ پوش خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای مسطح  
معادله

(۷۰۱۰)

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن  $F$  دارای مشتقات جزئی پیوسته  $F_x, F_y, F_\alpha$  است. اگر  $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$  (جز در نقاط منفرد)، این معادله، به ازای مقدار ثابتی از  $\alpha$ ، یک منحنی، و با تغییر  $\alpha$ ، یک خانواده از منحنیها را نمایش می‌دهد. فرض کنیم (برای بازه‌های به قدر کافی کوچک، لااقل موضعی) منحنیهای مختلف نظیر به مقادیر مختلف  $\alpha$  باشند. منحنی  $\mathcal{C}$  پوش این خانواده از منحنیها نامیده می‌شود اگر که در هر نقطه‌اش بر یکی از منحنیهای خانواده مماس بوده و، در همسایگی به قدر کافی کوچکی از نقطهٔ تماس، به منحنیهای مختلف در نقاط متمایز مماس باشد.

فرض کنیم پوش دارای نمایش پارامتری

$$(۸.۱۰) \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

باشد. با تحدید به یک همسایگی که در آن پوش بر منحنیهای مختلف خانواده در نقاط متمایز مماس است، تابع معکوسپذیری مانند  $\alpha(t)$  حاصل می‌شود که مقدارش همان مقدار پارامتر  $\alpha$  از منحنی است که به پوش در  $(x(t), y(t))$  مماس است. با این فرض که نمایش پارامتری (۸.۱۰) یک پوش از کلاس  $C_1$  (لااقل قطعه قطعه) بوده و تابع  $\alpha(t)$  نیز دارای مشتق ناصفر باشد، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیه. نقاط پوش خانواده  $F(x, y, \alpha) = 0$  از منحنیها در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$(۹.۱۰) \quad F(x, y, \alpha) = 0, \quad F_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

این معادلات می‌توانند به وسیلهٔ نقاط منفرد منحنیهای خانواده، حتی اگر متعلق به پوش هم نباشند، نیز برقرار شوند. نقاطی که نقاط منتظم منحنیهای خانواده بوده و در (۹.۱۰) صادق باشند روی پوش قرار می‌گیرند.

برهان. چون فرض می‌کنیم در همسایگی مورد نظر  $\alpha'(t) \neq 0$ ، لذا  $\alpha$  را می‌توان پارامتر پوش گرفت. فرض کنیم  $x(\alpha), y(\alpha)$  مختصات نقطهٔ تماس منحنی  $F(x, y, \alpha)$  و پوش باشد. چون این نقطه بر منحنی نظیر از خانواده قرار دارد، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$(۱۰.۱۰) \quad F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0.$$

با مشتقگیری از این اتحاد نسبت به  $\alpha$  داریم

$$(۱۱.۱۰) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_\alpha \frac{dx}{d\alpha} + \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_\alpha \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

که در آن اندیس  $\alpha$  مقدار تابع در نقطهٔ  $(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)$  را نشان می‌دهد. از آن سو، چون منحنی  $x = x(\alpha), y = y(\alpha)$  بر  $F(x, y, \alpha) = 0$  در  $(x(\alpha), y(\alpha))$  مماس است، خواهیم داشت

$$(۱۲.۱۰) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{\alpha} \frac{dx}{d\alpha} + \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{\alpha} \frac{dy}{d\alpha} = 0$$

فرمولهای (۱۰.۱۰) تا (۱۲.۱۰) باهم ایجاب می‌کنند که نقاط پوش باید در معادله (۹.۱۰) صدق کنند.

برای یافتن معادلات مجموعه نقاط صادق در (۹.۱۰)، می‌توان یا  $x, y$  را به عنوان تابعی از پارامتر  $\alpha$  بیان کرد و یا  $x, y$  و  $\alpha$  را به عنوان تابعی از یک پارامتر کمکی مانند  $t$ ، و سپس، با حذف  $\alpha$ ، معادله ضمنی منحنی را به دست آورد.

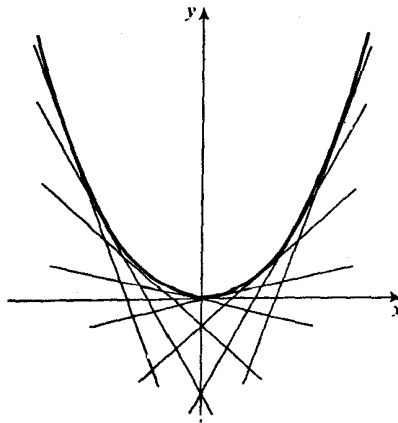
بهرحال، معادلات (۱۱.۱۰) و (۱۲.۱۰) در صورتی که منحنی  $x = x(\alpha), y = y(\alpha)$  نقاط منفرد منحنیهای خانواده را دربرگیرد نیز برقرار است، زیرا، در این حالت،  $[\partial F / \partial x]_{\alpha} = [\partial F / \partial y]_{\alpha} = 0$ ، و (۱۲.۱۰) تماس منحنیها را ایجاب نمی‌کند. هرگاه نقطه  $(x(\alpha), y(\alpha))$  یک نقطه منتظم  $F(x, y, \alpha) = 0$  باشد، آنگاه (۹.۱۰) رابطه (۱۲.۱۰) را ایجاب می‌کند و (۱۲.۱۰) نتیجه می‌دهد که منحنیهای  $x = x(\alpha), y = y(\alpha)$  و  $F(x, y, \alpha) = 0$  در نقطه  $(x(\alpha), y(\alpha))$  برهم می‌مانند.

امثله و تمرین

۱. خانواده

$$x^2 - py = \frac{\alpha^2}{2}$$

از خطوط مستقیم، که در آن  $p$  ثابت بوده و  $\alpha$  پارامتر خانواده است (شکل ۷.۱۰).



شکل ۷.۱۰

برای یافتن پوش باید معادلات

$$\alpha x - py = \frac{\alpha^2}{2}, \quad x = \alpha$$

را حل کنیم. با حذف  $\alpha$  داریم  $y = x^2/2p$ . چون منحنیهای خانواده ما، که خطوطی مستقیم اند، نقطه منفرد ندارند، این معادله معادله پوش خواهد بود. در اینجا پوش یک سهمی است که بر تمام خطوط خانواده مماس است.

۲. خانواده

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - 2p\alpha = 0$$

از دایر ( شکل ۸۰۱۰ ) با مشتقگیری نسبت به  $\alpha$  داریم

$$-2(x - \alpha) - 2p = 0,$$

که از آنجا

$$\alpha = p + x.$$

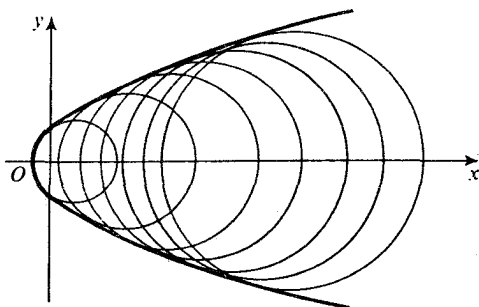
با جایگزینی در معادله خانواده به دست می آوریم

$$p^2 + y^2 - 2p^2 - 2px = 0,$$

یا

$$y^2 = 2p(x + p/2),$$

که معادله یک سهمی است. در اینجا پوش باهمه دایر خانواده تماس ندارد، و فقط برآنهایی مماس است که نظیر  $\alpha > p/2$  می باشند.



شکل ۸۰۱۰

۳. خانواده

$$(y + \alpha)^2 - (x + \alpha)^3 = 0$$

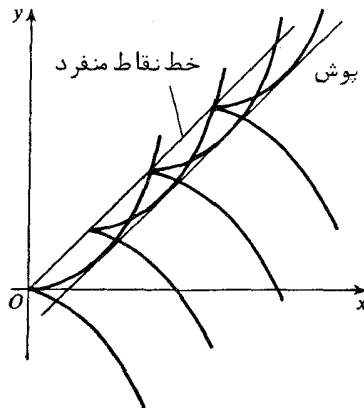
از سهمیهای نیمه مکعبی ( شکل ۹۰۱۰ ) با پارامتر  $\alpha$  با مشتقگیری داریم

$$2(y + \alpha) - 3(x + \alpha)^2 = 0.$$

و از حذف  $(y + \alpha)$  خواهیم داشت

$$4(x + \alpha)^3 = 9(x + \alpha)^4,$$

که  $x + \alpha = 0$  یا  $4 = 9(x + \alpha)$  را ایجاب می‌کند، که از اینجا  $x = -\alpha$  یا  $x = \frac{4}{9} - \alpha$  .  
 در حالت اول، با حذف  $\alpha$  داریم  $2(y - x) = 0$  یا  $y = x$  و ، در حالت دوم،  
 $2(y - x + \frac{4}{9}) = 3(\frac{4}{9})^2$  یا  $x - y = \frac{8}{27}$  . خط اول خط نقاط بازگشت خانواده است، و خط  
 دوم پوش می‌باشد .



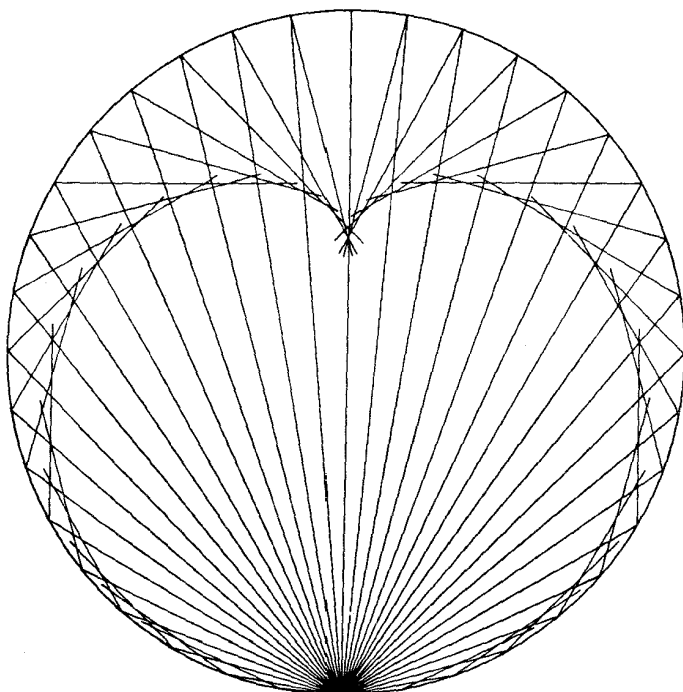
شکل ۹.۱۰

۴. گسترده یک منحنی مسطح را می‌توان به عنوان پوش خانواده خطوط قائم به منحنی در نظر گرفت . معادله گسترده را از این راه دست آورید .

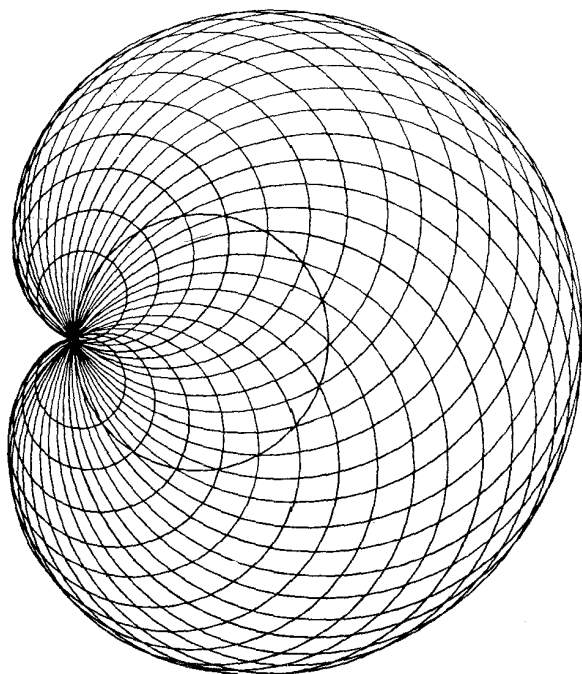
۵. منحنی  $x = x(t), y = y(t)$  از کلاس  $C_2$  داده شده است . خانواده خطوط مستقیمی را در نظر می‌گیریم که از دوران خطوط مماس بر منحنی به قدر زاویه ثابت  $\alpha$  حول نقطه تماس حاصل می‌شوند . خانواده خطوط مستقیمی که به این طریق تعریف می‌شود به پارامتر  $t$  بستگی دارد . در حالت خاصی که  $\alpha = \pi/2$  ، این خانواده خانواده قائمها است . پوش این خانواده از خطوط را پیدا کنید . ثابت کنید نقطه تماس پوش و خط نظیر به مقدار  $t$  از پارامتر تصویر متعامد مرکز انحنا منحنی روی این خط است .

۶. منحنی  $\mathcal{C}$  در صفحه و نقطه  $F$  مفروضند . پوش منعکس شعاعهای خارج شده از  $F$  نسبت به منحنی را شعاع پوش  $\mathcal{C}$  نسبت به  $F$  می‌نامند . ثابت کنید شعاع پوش یک دایره نسبت به یک نقطه از محیطش یک دایره است ( شکل ۱۰.۱۰ ) .

۷. پوش خانواده‌ای از دایره‌ها را بیابید که مراکزشان بر دایره  $x^2 - 2ax + y^2 = 0$  قرار داشته و از نقطه  $(0, 0)$  می‌گذرند . تحقیق کنید که این پوش یک دایره است ( شکل ۱۱.۱۰ ) .  
 راهنمایی . معادله دایره مراکز را به شکل  $x = a(1 + \cos \theta), y = a \sin \theta$  نوشته و  $\theta$  را به عنوان پارامتر خانواده به کار ببرید .



شکل ۱۰.۱۰



شکل ۱۱.۱۰

## سطوح در فضای سه بعدی

### ۱۱ نمایش تحلیلی سطوح

#### ۱.۱۱ سطح معمولی

مجموعه  $\mathcal{S}$  از نقاط یک فضای سه بعدی که با یک مستطیل بسته از صفحه در یک تناظر یک به یک پیوسته باشد یک پارچه ساده از یک سطح نامیده می شود.

به عبارت دیگر، پارچه ساده از یک سطح مجموعه نقاطی است که بردارهای موضع آنها مقادیر یک تابع برداری پیوسته و یک به یک مانند

$$(1.11) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

است، که در مستطیل بسته‌ای چون  $a \leq u^1 \leq b, c \leq u^2 \leq d$  از صفحه به پارامترهای  $u^1, u^2$  تعریف شده است.

در هماهنگی با نمادگذاری که در حساب تانسورها معمول شده است، ماهر دو پارامتر را با یک حرف دارای بالانویس نشان می دهیم. لذا، بالانویسها در  $u^1, u^2$  صرفاً "اندیسهایی هستند برای تمایز دو پارامتر؛ مثلاً"،  $u^2$  پارامتر دوم است، نه مربع  $u$ . اگر ملزم به استفاده از توانهای این حروف اندیسدار باشیم، آنها را داخل پرانتز گذاشته و سپس توان را می نویسیم؛ مثلاً، "مربعهای  $u^1$  و  $u^2$  با  $(u^1)^2, (u^2)^2$  نشان داده می شوند، و غیره. مجموعه نقاطی که در معادله

$$z = f(x, y)$$

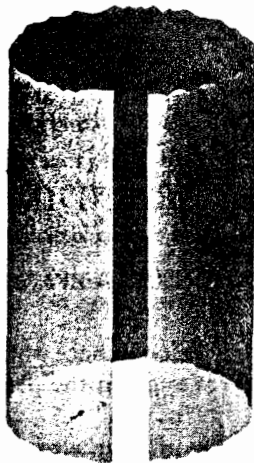
صدق می کنند، که در آن  $f$  تابع دو متغیره پیوسته‌ای است که در مستطیل  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  تعریف شده است، نمونه‌ای است از یک پارچه ساده از یک سطح. در واقع، در این حالت،

$x$  و  $y$  نقش پارامترها را بازی می کنند، و تابع برداری پیوسته عبارت است از  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$ . واضح است که این تابع یک به یک است، زیرا مقادیر تابع به ازای دو نقطه متمایز از صفحه  $xy$  باید دست کم در یک مؤلفه متفاوت باشند.

شهوداً می توان گفت که یک پارچه ساده از یک سطح با کشیدن، منقبض کردن، و خم کردن یک مستطیل ولی بدون پاره کردن یا چسباندن بهم به دست می آید. به جای آنکه

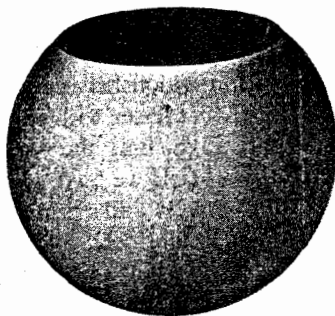
در این تعریف از مستطیل استفاده کنیم، می توانستیم هر قلمرو همبند ساده بسته و کراندار در صفحه، بخصوص، یک قرص بسته، را به کار ببریم.

سطح استوانه یک پارچه ساده نیست، زیرا نمی توان آن را از یک مستطیل بدون چسباندن بهم به دست آورد. به همین ترتیب، کره و طوق تخت نیز یک پارچه ساده نیستند. اما، استوانه که از آن یک نوار باز بین دو مولد برداشته شده (شکل ۱۰۱۱)، کره



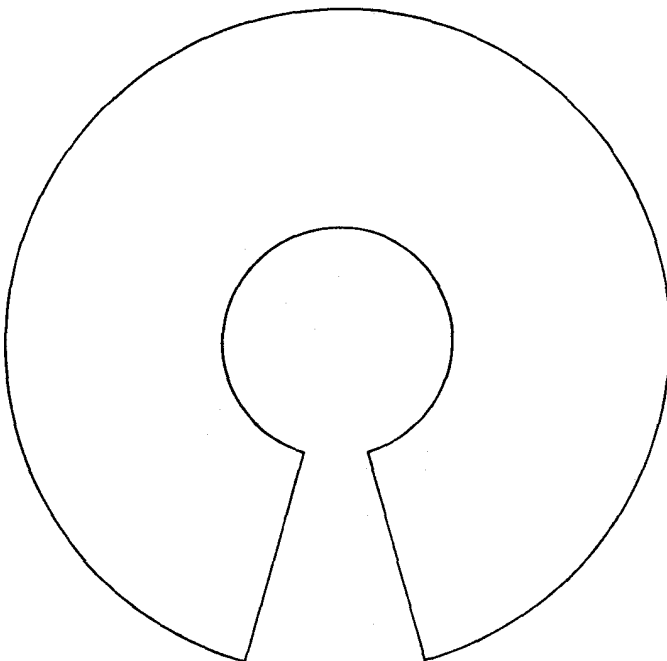
شکل ۱۰۱۱

بدون یک کلاه باز (شکل ۲۰۱۱)، یا طوقی که از آن یک قطاع باز برداشته شده (شکل



شکل ۲۰۱۱

۳۰۱۱) پارچه های ساده ای از یک سطح هستند. بنابراین، استوانه، کره، و طوق را می توان با دو پارچه ساده پوشاند. از آن سو، دو پارچه ساده برای پوشاندن یک چنبره کافی نیست، ولی چهار پارچه این عمل را انجام خواهد داد.



شکل ۳.۱۱

این مثالها نشان می‌دهند که مفهوم پارچهء ساده از یک سطح برای بررسی سطوح خیلی محدودکننده است، ولی راه را برای یک تعمیم مناسب نشان می‌دهد.

می‌گوییم مجموعهء همبند  $\mathcal{F}$  از نقاط یک فضای اقلیدسی سه بعدی یک سطح معمولی است اگر هر نقطهء  $P$  این مجموعه همسایگی مانند  $U$  در  $\mathcal{F}$  داشته باشد که بست آن یک پارچهء ساده باشد. در اینجا همسایگی  $P$  در  $\mathcal{F}$  یعنی مؤلفهء همبند  $P$  در اشتراک  $\mathcal{F}$  و یک مجموعهء باز در فضا که شامل  $P$  است.

با بیان شهودی، این تعریف می‌گوید که، به ازای هر نقطه از یک سطح معمولی، می‌توان بخشی از سطح را از آن جدا کرد به طوری که شامل  $P$  بوده و یک پارچهء ساده باشد.

تعریف همسایگی  $P$  در  $\mathcal{F}$  با تعریف معمولی همسایگی در توپولوژی القایی زیر فضای  $\mathcal{F}$  فرق دارد. این تعریف توپولوژی در  $\mathcal{F}$  تعریف می‌کند که ما آن را توپولوژی ذاتی  $\mathcal{F}$  می‌نامیم. با آنکه این توپولوژی با توپولوژی القایی معمولی در بسیاری از حالات یکی است، مثلاً "در مورد کره، چنبره، و غیره، اما، در حالت کلی، همانطور که از مثال ۴ زیر می‌توان دید، دو توپولوژی باهم متفاوت می‌باشند.

اگر در تعریف بالا از توپولوژی القایی در  $\mathcal{F}$  استفاده می‌شد، کلاس سطوح معمولی

خیلی بیشتر از منحنیهای معمولی محدود می‌شد. حتی تعریف فعلی ما نیز در مقایسه با تعریف منحنیها محدود کننده‌تر است، زیرا به سطوحی که خود را قطع می‌کنند اجازه وجود نمی‌دهد، درحالی که تعریف منحنیها این کار را خواهد کرد.

متأسفانه، یک سطح را نمی‌توان همانند منحنیها تعریف کرد به این صورت که آن را نقش موضعا "یک به یک و دو پیوسته" یک صفحه گرفت، زیرا یک کره، که حتماً جزو سطوحی است که باید بررسی شود، دارای این خاصیت نیست. لذا، این امر ما را به تعریفی مقیدتر وادار می‌سازد.

با استفاده از مفهوم چندگونای دو بعدی مجرد، می‌توان یک سطح را نقش پیوسته و یک به یک یک چندگونای مجرد تعریف کرد، و با توجه به نقشهای موضعا "یک به یک چند-گوناها، تعمیمی به دست آورد که اجازه خود قطعی بدهد (قس. زیربخش ۴۰۱۱).

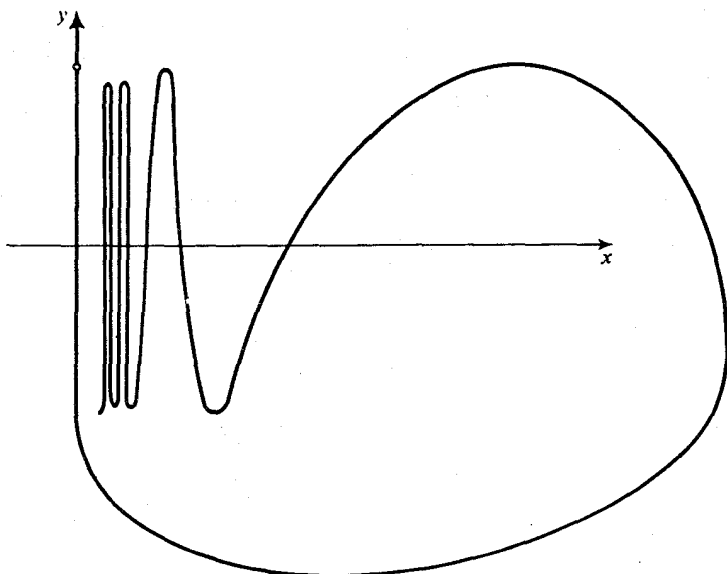
### امثله و تمرین

۱. با نشان دادن یک نگاشت پیوسته یک به یک که یک مربع را به قرص تبدیل می‌کند، ثابت کنید یک قرص مستدیر بسته یک پارچه ساده است.

۲. کره  $S^2$  یک سطح معمولی است، زیرا، به ازای هر نقطه آن مانند  $P$ ، نیمکره باز شامل  $P$  یک همسایگی  $P$  در  $S^2$  است که بست آن یک پارچه ساده است.

۳. به همین ترتیب، استوانه، چنبره، بیضی گون، هذلولی گون، و سهمی گون سطوح معمولی می‌باشند.

۴. یک منحنی در نظرمی گیریم مرکب از پاره خط  $(-1, 1)$  از محور  $y$ ، نمودار تابع  $y = \sin(1/x)$  به ازای  $x > 2/\pi$ ، و قوس واصل بین نقطه  $(0, -1)$  و نقطه  $(2/\pi, 1)$  (شکل ۴۰۱۱). واضح است که این منحنی را می‌توان با طول قوس پارامتریزه کرد به این ترتیب که از نقطه  $(0, 1)$  اندازه گیری شود در امتداد پاره خط، قوس واصل، و سپس در امتداد نمودار. در نتیجه، این منحنی نقش پیوسته موضعا "یک به یک نیمخط  $(0, \infty)$  است؛ و لذا، یک منحنی معمولی می‌باشد. سطح استوانه‌ای متشکل از عمودهای وارد به صفحه  $xy$  و ماربر نقاط این منحنی یک سطح معمولی است. یک همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه روی سطح که تصویرش بر پاره خط قرار داشته باشد یک قرص مستدیر است. لیکن، هر همسایگی این نقطه در توپولوژی القایی نیز شامل نقاطی است که تصاویرشان بر نمودار تابع قرار دارند. این مثالی است از دو توپولوژی، توپولوژی ذاتی سطح و توپولوژی القایی، که باهم یکی نیستند. سطح با توپولوژی ذاتی با صفحه همانریخت است، درحالی که با توپولوژی القایی، بدلیل موضعا "همبند نبودن، نمی‌تواند با صفحه همانریخت باشد.



شکل ۴.۱۱

### ۲.۱۱ سطوح منتظم. نقاط منفرد

حال لازم است که کلاس سطوح را با اعمال چند شرط انتظام، به همان نحو که در مورد منحنیها گفته شد، محدود کنیم.

می‌گوییم سطح معمولی  $\mathcal{F}$  از کلاس  $C_n$  است اگر هر نقطه  $P$  از  $\mathcal{F}$  همسایگی در  $\mathcal{F}$  داشته باشد یا نمایش پارامتری  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ ، که در آن  $\mathbf{r}$  تابعی از کلاس  $C_n$  است. نقطه  $P$  از سطح نظیر به مقادیر  $(u_0^1, u_0^2)$  از پارامترها را یک نقطه منتظم پارامتری-سازی گویند اگر

$$\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) \neq 0, \quad (2.11)$$

که در آن از نمادهای

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

استفاده شده است. نقطه‌ای که به ازای آن در یک پارامتری‌سازی معلوم  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$ ، یک نقطه منفرد پارامتری‌سازی نامیده می‌شود.

نقطه  $P$  از سطح را منفرد گویند اگر در هر پارامتری‌سازی منفرد باشد. در مورد منحنیهای از کلاس  $C_n$  ( $n \geq 1$ )، پارامتری‌سازی خاصی (پارامتری‌سازی طول قوس) وجود

داشت با این خاصیت که فقط نقاط منفرد اساسی در این پارامتری‌سازی نقاط منفرد بودند. در مورد سطوح، چنین پارامتری‌سازیی در حالت کلی وجود ندارد. حتی کره را نیز نمی‌توان طوری پارامتریزه کرد که افراد نداشته باشد، اگرچه تمام نقاط آن از نظر هندسی غیرقابل تمیزند.

مثلاً "در مورد منحنیها، ابزار اصلی بررسی ما نمایش پارامتری سطوح است. چون یک سطح پارامتری‌سازیهای زیادی را می‌پذیرد و نیز چون یک نمایش پارامتری اصولاً "خاصیت موضعی دارد، یعنی فقط در همسایگی روی سطح معتبر است، باید پایایی نتایج را تحت تغییر پارامتری‌سازی بررسی کرد. این امر در زیر بخش بعد به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

این زیربخش را با تنظیم شرایط برحسب مختصات به پایان می‌بریم. معادله پارامتری  $r = r(u^1, u^2)$  را می‌توان با سه معادله زیر عوض کرد:

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2).$$

در این صورت، شرط (۲.۱۱) معادل است با

$$\text{rank} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 2, \quad (3.11)$$

که در آن از نمادهای  $x_1 = \partial x / \partial u^1$ ,  $x_2 = \partial x / \partial u^2$  و مشابه آنها برای  $y$  و  $z$  استفاده شده است. به عبارت دیگر، لااقل باید یکی از ژاکوبیه‌های زیر مخالف صفر باشد:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}.$$

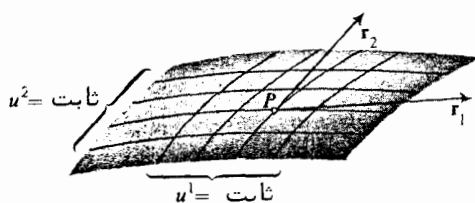
بی‌آنکه در خواص نقاط منفرد یک سطح معمولی وارد شویم، فقط ذکر می‌کنیم که این نقاط می‌توانند نقاط تیز تنهایی باشند مثل رأس یک مخروط، یا ممکن است از آنها بی‌نهایت تا موجود باشد که خطوطی را تشکیل می‌دهند که در امتداد آنها سطح تابی شود، مثل یالهای یک مکعب. در اغلب بررسیهای ما نقاط منفرد مستثنی خواهند شد.

### ۳.۱۱ مختصات منحنی الخط

به فرض معلوم بودن نمایش پارامتری  $r = r(u^1, u^2)$ ، مقادیر پارامترهای  $u^1$  و  $u^2$  موضع یک نقطه را روی سطح معین می‌کنند. بنابراین، این پارامترها مختصات منحنی الخط یا مختصات گاوسی روی سطح نیز نامیده می‌شوند.

اگر مقدار یکی از مختصات، مثلاً " $u^2$ "، ثابت بوده و دیگری، یعنی  $u^1$ ، تغییر کند، نقاط نظیر روی سطح بر یک منحنی به معادله ثابت  $u^2 =$  قرار می‌گیرند. این منحنی خط

مختص  $u^1$  یا، به طور خلاصه،  $u^1$  - خط یا  $u^1$  - منحنی نامیده می شود.  $u^1$  - خطوط در یک همسایگی که پارامتری سازی معتبر است یک خانواده یک پارامتری تشکیل می دهند. به طریق مشابه، خطوط ثابت  $u^1 = u^1$  با متغیر  $u^2$  خانواده یک پارامتری دیگری تشکیل می دهد از  $u^2$  - خطوط. هر دو خانواده با هم یک تور از خطوط مختص یا منحنیهای مختص روی سطح تشکیل می دهند. (از هر نقطه منتظم پارامتری سازی دقیقاً یک خط از هر خانواده می گذرد (شکل ۵.۱۱)).



شکل ۵.۱۱

یک سطح را می توان به طرق مختلف پارامتریزه کرد. اگر مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  را با مختصات جدید  $(u^{1'}, u^{2'})$  که با  $(u^1, u^2)$  به وسیله

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(u^{1'}, u^{2'}), \\ u^2 &= u^2(u^{1'}, u^{2'}) \end{aligned} \quad (۴.۱۱)$$

به هم مربوطند عوض کنیم، برای سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

معادله پارامتری جدیدی به شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_*(u^{1'}, u^{2'}) = \mathbf{r}(u^1(u^{1'}, u^{2'}), u^2(u^{1'}, u^{2'})) \quad (۵.۱۱)$$

حاصل می شود. توجه کنید که در اینجا ما علامت  $'$  را به اندیس متغیر مربوط کردیم تا خود حرف. این در دستگاه نمادگذاری ما چند مزیت صوری دارد.

قضیه اگر ژاکوبی تبدیل  $(۴.۱۱)$  در قلمروی مخالف صفر باشد، برای نمایش جدید در این قلمرو نقاط منفرد جدید ظاهر نمی شوند. کلاس نمایش جدید  $(۵.۱۱)$  لا اقل برابر است با مینیمم دو عدد: کلاس تبدیل  $(۴.۱۱)$  و کلاس معادله اصلی  $(۱.۱۱)$ .

برهان. به شرط مشتق پذیری تبدیل داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1'} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{1'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} = \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} \mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_{2'} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{2'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} = \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} \mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (۶.۱۱)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} &= \left( \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} \mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} \mathbf{r}_2 \right) \times \left( \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} \mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \mathbf{r}_2 \right) \\ &= \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1 \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} \\ \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

یا

$$(۷۰۱۱) \quad \mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

چون، طبق فرض، در قلمرو مورد نظر داریم  $\hat{c}(u^1, u^2) \cdot \hat{c}(u^1, u^2) \neq 0$ ، یک نقطه در پارامتری سازی جدید می تواند منفرد باشد ( $\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = 0$ ) اگر و فقط اگر در پارامتری سازی قدیم منفرد باشد ( $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$ ). نقاط منفرد جدید فقط می توانند در نقاطی که ژاکوبی صفر است ظاهر شوند.

### امثله و تمرین

به پیروی از نمادگذاری رسمی، ما اغلب مختصات منحنی الخط را روی سطوح با دو حرف متمایز، مثلاً " $(u, v)$ "، به جای  $(u^1, u^2)$  نشان می دهیم.

۱. صفحه. با استفاده از دستگاه مختصات مناسب در فضا، یعنی محور  $z$  عمود بر صفحه و

مبداء روی صفحه، می توان صفحه را با معادلات پارامتری

$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = 0$$

نمایش داد.

نمایشی دیگر عبارت است از

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = 0,$$

که در آن  $\rho, \theta$  مختصات قطبی در صفحه می باشد.

این نمایش در مبداء، که متناظر  $\rho = 0$  و هر  $\theta$  است، منتظم نیست. همچنین، اگر

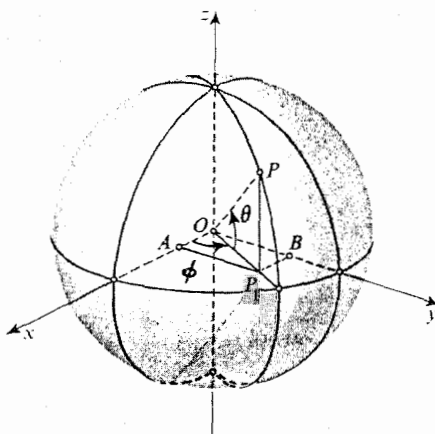
$\theta$  تمام مقادیر خط حقیقی را بگیرد، صفحه بی نهایت بار پوشانده می شود. برای به دست

آوردن صفحه های که مبداء پوشانده نشود، باید  $\theta$  را به بازه های به طول  $2\pi$ ، مثلاً " $[0, 2\pi)$ "،

مقید کرد، اما، در این صورت، نگاشت همانریختی نیست، زیرا دنباله  $(1, 2\pi - 1/n)$

همگرا به نقطه (1,0) است در حالی که مختصات این نقاط چنین نیستند. اما در این همسایگی، هر نقطه که  $\theta$  درون بازه‌ای به طول  $2\pi$  است یک همان‌ریختی موضعی می‌باشد.

۲. مختصات گروی روی یک کره (شکل ۶.۱۱). موضع نقطه  $P$  روی کره  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  را می‌توان با دو مختص به نام طول جغرافیایی  $\phi$  و عرض جغرافیایی  $\theta$  معین کرد. طول جغرافیایی زاویه دو وجهی جهت‌دار  $\phi$  است از صفحه  $xz$  به صفحه  $OP$  و  $xy$ ، با علامت مثبت برای نقاطی که  $z > 0$  جغرافیایی زاویه  $\theta$  است بین خط  $OP$  و صفحه  $xy$ ، با علامت مثبت برای نقاطی که  $z > 0$



شکل ۶.۱۱

و منفی برای نقاطی که  $z < 0$ . دو مختص مواضع تمام نقاط کره را مشخص می‌کنند جز دو نقطه  $(0, 0, a)$  و  $(0, 0, -a)$ ، به نام قطبها، که به ترتیب نظیر به مقادیر  $\theta = \pi/2$ ،  $\theta = -\pi/2$  و هر  $\phi$  می‌باشند. برای به دست آوردن نمایش پارامتری کره باید تصاویر بردار  $\vec{OP}$  را روی محورهای مختصات بر حسب مختصات گروی  $\theta$  و  $\phi$  بیان کنیم. ابتدا نقطه  $P$  را روی صفحه  $xy$  تصویر کرده با  $P_1$  نشان می‌دهیم. در این صورت، داریم  $OP_1 = a \cos \theta$ . حال تصاویر  $\vec{OP_1}$  را روی محورهای  $x$  و  $y$  در نظر گرفته، خواهیم داشت  $OA = a \cos \theta \cos \phi$ ،  $OB = a \cos \theta \sin \phi$ . از تصویر مستقیم  $\vec{OP}$  روی محور  $z$  حاصل می‌شود  $OC = a \sin \theta$ . لذا، معادلات پارامتری عبارت خواهند بود از

$$(۸.۱۱) \quad x = a \cos \theta \cos \phi, \quad y = a \cos \theta \sin \phi, \quad z = a \sin \theta.$$

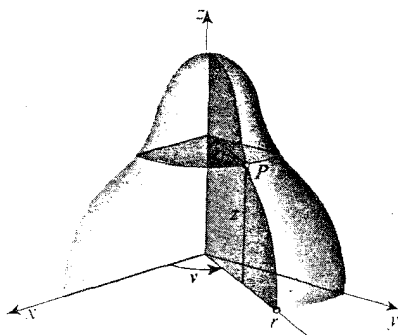
مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  (در این حالت  $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_\phi$ ) مینورهای علامت‌دار ماتریس

$$\begin{pmatrix} -a \sin \theta \cos \phi & -a \sin \theta \sin \phi & a \cos \theta \\ -a \cos \theta \sin \phi & a \cos \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

هستند، که همه‌جا از رتبه ۲ است جز در قطبها ( $\theta = \pm \pi/2$ ). لذا، نمایش پارامتری (۸.۱۱)

منتظم است. اما، وقتی  $\theta$  در بازه  $(-\pi/2, \pi/2)$  و  $\phi$  در بازه  $(-\infty, \infty)$  تغییر کند، نقش نقاط این نوار کره سورخ شده (یعنی، کره‌ای که قطبهایش حذف شده‌اند) بی‌نهایت بار پوشانده می‌شود، و نگاشت مورد نظر فقط یک همانریختی موضعی می‌باشد. تحدید  $\phi$  به بازه  $[0, 2\pi]$ ، این نگاشت را یک به یک می‌سازد، اما نگاشت معکوس از پیوسته بودن باز می‌ماند. خطوط ثابت  $\phi = \text{نصف النهارات}$ ، و خطوط ثابت  $\theta = \text{دوایر عرض جغرافیایی}$  نامیده می‌شوند. دایره  $\theta = 0$  (ستوا) نیز نام دارد. فقط این دایره در میان تمام دواایر عرض جغرافیایی است که دایره‌های عظیمه می‌باشد. همه نصف النهارات نیز دوایری عظیمه می‌باشند.

۳. سطوح دوار. یک سطح دوار از دوران یک منحنی مسطح حول یک محور دوران، که در صفحه واقع بوده و به منحنی محکم شده است، به اندازه یک دوران کامل به دست می‌آید (شکل ۷.۱۱). محور دوران را محور  $z$  دستگاه مختصات اختیار می‌کنیم. فصل مشترک سطح دوار با صفحات ماربر محور نصف النهارات نامیده می‌شوند. اینها منحنیهایی هستند



شکل ۷.۱۱

که با منحنی مولد سطح دوار همبسته‌اند. هر یک از آنها را می‌توان با معادلات پارامتری

$$r = f(u), \quad z = h(u)$$

نمایش داد، که فاصله  $r$  یک نقطه واقع بر نصف النهار را از محور دوران و مختص  $z$  این نقطه را به عنوان توابعی از پارامتر  $u$  مشخص می‌کنند. به ازای یک  $u$  ثابت، تمام آنها بر دایره‌ای به نام دایره عرض جغرافیایی سطح قرار دارند. برای آنکه موضع نقطه  $P$  روی سطح را به طور کامل مشخص کنیم، به پارامتر دیگری که نصف النهار ماربر  $P$  را نشان دهد نیاز داریم. بدین منظور، می‌توانیم از زاویه دو وجهی جهتدار  $\theta$  از صفحه  $xz$  به صفحه نصف النهار استفاده کنیم. در این صورت، مختصات نقطه  $P$  واقع بر سطح به شکل زیر خواهند بود:

$$(۹.۱۱) \quad x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = h(u).$$

اینها معادلات پارامتری سطح دوار هستند. خطوط ثابت  $v =$  نصف‌النهارات، و خطوط ثابت  $u =$  دوائر عرض جغرافیایی هستند.

هرگاه نصف‌النهار را بتوان در صفحهاش با معادله  $z = F(r)$  نشان داد، معادلات ساده‌تر خواهند شد. در این صورت، با پارامترهای  $r$  و  $v$ ، خواهیم داشت

$$(۱۰.۱۱) \quad x = r \cos v, \quad y = r \sin v, \quad z = F(r).$$

مجدداً در اینجا، وقتی  $v$  در بازه  $(-\pi, \pi)$  تغییر کند، سطح بی‌نهایت بار پوشانده می‌شود، منتها تحدید  $v$  به  $[0, 2\pi]$  برپیوستگی تبدیل معکوس اثر خواهد گذاشت.

۴. کره حالت خاصی است از یک سطح دوار، که منحنی مولدش یک نیم‌دایره است. معادلات پارامتری کره را با استفاده از نتایج مثال پیش پیدا کنید.

۵. زنجیرگون (شکل ۸.۱۱). سطح دوار حاصل از دوران یک منحنی زنجیری حول هادی‌اش (هادی منحنی زنجیری  $y = a \cosh(x/a)$  محور  $x$  است) یک زنجیرگون نامیده می‌شود. با این فرض که هادی محور  $z$  باشد، داریم

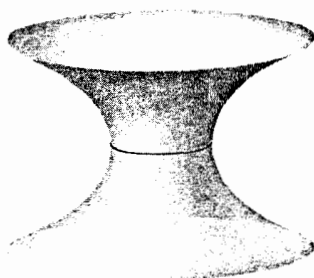
$$r = a \cosh(z/a).$$

با استفاده از نمادگذاری  $z = u^1$  و  $v = u^2$ ، از (۹.۱۱) نمایش پارامتری زنجیرگون به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$x = a \cosh \frac{u^1}{a} \cos u^2,$$

$$(۱۱.۱۱) \quad y = a \cosh \frac{u^1}{a} \sin u^2,$$

$$z = u^1$$



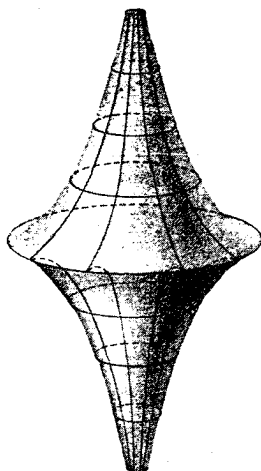
شکل ۸.۱۱

در اینجا  $u^1$  و  $u^2$  جای حروف  $u$  و  $v$  را گرفته‌اند.

۶. کره‌نما (شکل ۹.۱۱). یک کره‌نما سطح دواری است که از دوران یک کشاننده (۱۰.۴)

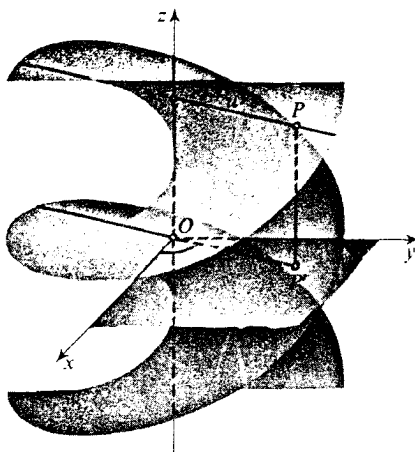
حول مجانبش به دست می آید. تحقیق کنید که معادلات پارامتری کره نما عبارتند از:

$$\begin{aligned} x &= a \sin u^1 \cos u^2, \\ y &= a \sin u^1 \sin u^2, \\ z &= a \left( \cos u^1 + \ln \tan \frac{u^1}{2} \right). \end{aligned} \quad (12.11)$$



شکل ۹.۱۱

۷. مارپیچ گون (شکل ۱۰.۱۱). مارپیچ گون سطحی است که از خطوط قائم به محور یک مارپیچ مستدیر که از نقاط مارپیچ می گذرند تشکیل شده است. موضع نقطه  $P$  روی مارپیچ گون



شکل ۱۰.۱۱

با دو پارامتر مشخص می شود، یکی از آنها، یعنی  $u^2$ ، مبین نقطه‌ای است روی مارپیچ که خط عمود حامل  $P$  از آن می‌گذرد، و دیگری نشانگر موضع  $P$  روی عمود است. لذا، معادلات پارامتری مارپیچ‌گون عبارتند از

$$(13.11) \quad x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = au^2.$$

در اینجا تناظر بین صفحه  $(u^1, u^2)$  و مارپیچ‌گون یک به یک است، اما نقاط  $u^1 = 0$  نقاط منفرد می‌باشند. این مطلب را ثابت کنید.  $u^1$  - خطوط و  $u^2$  - خطوط چیستند؟

۸. مخروط‌گون. مخروط‌گون سطحی است که از خطوط قائم به یک خط معلوم (محور مخروط-گون) که از تمام نقاط یک منحنی به نام هادی مخروط‌گون می‌گذرند تشکیل شده است. یک مارپیچ‌گون حالت خاصی است از یک مخروط‌گون، هادی آن یک مارپیچ بوده و محورش بر محور مارپیچ منطبق است. معادلات یک مخروط‌گون که محورش محور  $z$  بوده و هادی‌اش  $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$  باشد عبارتند از

$$x = u^1 f(u^2), \quad y = u^1 g(u^2), \quad z = u^1 h(u^2).$$

۹. پارامتری‌سازی دیگری از یک کره. تحقیق کنید که معادلات

$$(14.11) \quad x = \frac{4a^2 u}{4a^2 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{4a^2 v}{4a^2 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{4a^2 - u^2 - v^2}{4a^2 + u^2 + v^2}$$

یک کره فاقد نقطه  $(0, 0, 1)$  را نمایش می‌دهند. تمام نقاط دیگر این کره نقاط منتظم این پارامتری‌سازی هستند.

رابطه بین این مختصات و مختصات کروی عبارت است از

$$u = 2a \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \phi,$$

(15.11)

$$v = 2a \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \phi.$$

۱۰. اگر معادله نیم‌دایره را به شکل  $r = \sqrt{a^2 - z^2}$  بنویسیم، می‌توان نمایش دیگری از کره را به وسیله (۹.۱۱) به دست آورد:

$$(16.11) \quad x = \sqrt{a^2 - (u^1)^2} \cos u^2, \quad y = \sqrt{a^2 - (u^1)^2} \sin u^2, \quad z = u^1,$$

که در آنها  $u^1$  به جای  $u$  و  $u^2$  به جای  $v$  قرار گرفته است. رابطه بین این پارامترها و مختصات کروی را بیابید.

#### ۴.۱۱\* چندگونه‌های دیفرانسیل

ایده معرفی مختصات به‌طور موضعی، در همسایگی‌های به‌قدر کافی کوچک، تجزید کامل خود را در مفهوم چندگونه‌ای دیفرانسیل می‌یابد. ما در اینجا چندگونه‌ای دیفرانسیل دو بعدی را

تعریف کرده، نحوه تعمیم این مفهوم را به بعدهای دلخواه نشان می‌دهیم.

فرض کنیم  $M$  یک فضای توپولوژیک هاسدورف<sup>۱</sup> همبند بوده،  $U_\kappa$  ( $\kappa \in K$ ) یک دستگاه از همسایگی‌هایی باشد که  $M$  را می‌پوشانند، و، به ازای هر  $\kappa$ ،  $\psi_\kappa$  یک نگاشت همانریختی از همسایگی  $U_\kappa$  بتوی فضای عددی دوبعدی  $R^2$  باشد. این نگاشت  $\psi_\kappa$  به هر نقطه  $P \in U_\kappa$  یک جفت مرتب از مختصات را نسبت می‌دهد: مختصات  $\psi_\kappa(P)$  در  $R^2$ . ما آنها را مختصات موضعی  $P$  در دستگاه مختصات موضعی  $(U_\kappa, \psi_\kappa)$  می‌نامیم. هرگاه نقطه  $P$  متعلق به اشتراک دو همسایگی مختصات، یعنی  $U_\kappa \cap U_\lambda$  باشد، این نقطه در دو دستگاه مختصات  $(U_\kappa, \psi_\kappa), (U_\lambda, \psi_\lambda)$  مختصات متفاوتی خواهد داشت. فرض کنیم  $(u^1, u^2)$  مختصات  $P$  در  $(U_\kappa, \psi_\kappa)$  و  $(u'^1, u'^2)$  مختصات  $P$  در  $(U_\lambda, \psi_\lambda)$  باشد؛ یعنی،

$$(u^1, u^2) = \psi_\kappa(P) \quad \text{و} \quad (u'^1, u'^2) = \psi_\lambda(P)$$

در این صورت، داریم

$$(u'^1, u'^2) = \psi_\lambda \psi_\kappa^{-1}((u^1, u^2))$$

یا

$$u'^1 = \phi^1(u^1, u^2), \quad u'^2 = \phi^2(u^1, u^2).$$

که در آنها  $\phi^1$  و  $\phi^2$  توابع پیوسته‌ای هستند که در  $\psi_\kappa(U_\kappa \cap U_\lambda)$  تعریف شده‌اند. هرگاه برای هر اشتراک ناتهی  $U_\kappa \cap U_\lambda$ ، توابع نظیر  $\phi^1$ ،  $\phi^2$  از کلاس  $C_r$  بوده و نیز در  $\psi_\kappa(U_\kappa \cap U_\lambda)$  دارای ژاکوبی ناصفر باشند:

$$\frac{\partial(u'^1, u'^2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0$$

کلاس دستگاههای مختصات موضعی  $\{(U_\kappa, \psi_\kappa) | \kappa \in K\}$  یک ساختمان دیفرانسیل از کلاس  $C_r$  در  $M$  نامیده می‌شود.

حال فرض کنیم  $U$  یک همسایگی در  $M$  بوده و  $\psi$  یک همانریختی از  $U$  بتوی  $R^2$  باشد. در این صورت،  $(U, \psi)$  یک دستگاه مختصات موضعی مجاز برای ساختمان دیفرانسیل داده شده از کلاس  $C_r$  است اگر که ساختمان پس از الحاق آن به دستگاه مختصات موضعی  $(U, \psi)$  یک ساختمان دیفرانسیل از همان کلاس باقی بماند. مجموعه تمام دستگاههای مختصات موضعی مجاز برای یک ساختمان دیفرانسیل معلوم نیز یک ساختمان دیفرانسیل از همان کلاس تشکیل می‌دهد. این ساختمان یک ساختمان دیفرانسیل اشباع شده یا ماکزیمال است، که همه دستگاههای مختصات مجاز خود را در برمی‌گیرد.

فضای توپولوژیک  $M$  همراه با یک ساختمان دیفرانسیل ماکزیمال از کلاس  $C_r$ ، به‌طوری

که در بالا شرح داده شد، یک چندگونای دایره‌ای از کلاس  $C_r$  نامیده می‌شود. چون ساختمان دایره‌ای ماکزیمال به‌وسیله هر ساختمان دایره‌ای، نه الزاماً "ماکزیمال"، مشخص شده، و می‌تواند از آن با اشباع به دست آید، لذا چندگونای دایره‌ای به‌وسیله هر ساختمان دایره‌ای مشخص خواهد شد، و این یک راه عملی برای توصیف یک چندگونای دایره‌ای است. به‌رحال، اگر دو ساختمان دایره‌ای متمایز دارای یک اشباع باشند، دو ساختمان یک چندگونای دایره‌ای را معین خواهند کرد.

صفحه اقلیدسی نمونه‌ای است از یک چندگونای دایره‌ای تحلیلی (یا از کلاس  $C^3$ ). ساده‌ترین ساختمان دایره‌ای مرکب است از یک همسایگی منطبق بر صفحه و نگاشت  $\psi$  که به هر نقطه  $P$  مختصات دکارتی آن را نسبت می‌دهد.

کره نیز یک چندگونای تحلیلی است. یک ساختمان دایره‌ای ممکن برای آن به صورت زیر است: دو همسایگی عبارتند از  $U_1$  - کره سورخ شده  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  بدون نقطه  $(0, 0, a)$ ،  $U_2$  - همان کره بدون نقطه  $(0, 0, -a)$ . نگاشت  $\psi^{-1}$  با فرمولهای (۱۴.۱۱) داده می‌شود، و  $u$  و  $v$  نقشهای  $u^1$  و  $u^2$  را خواهند داشت. نگاشت  $\psi_2^{-1}$  از فرمولهایی مشابه با تغییر علامت  $z$  به دست می‌آید. تبدیل مختصات موضعی عبارت خواهد بود از

$$u^1' = \frac{4a^2 u^1}{(u^1)^2 + (u^2)^2} \quad u^2' = \frac{4a^2 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2},$$

که توابعی تحلیلی‌اند با ژاکوبی ناصفر به ازای  $(u^1)^2 + (u^2)^2 > 0$ .

مفهوم چندگونای دایره‌ای تعمیم روشنی به ابعاد  $n$  دارد؛ در اینجا نگاشت  $\psi_\kappa$  ساختمان دایره‌ای یک هماریختی بتوی فضای  $n$  بعدی  $R^n$  است؛ و در نتیجه، به هر نقطه در  $U_\kappa$ ،  $n$  مختص را اختصاص خواهد داد.

#### ۵.۱۱ نگاشت چندگونا‌های دایره‌ای؛ جاده‌دهنده و نشاننده

فرض کنیم  $M$  و  $M'$  چندگونا‌هایی دایره‌ای از کلاس  $C_r$  و به ترتیب از بعدهای  $n$  و  $n'$  باشند. نگاشت  $f: M \rightarrow M'$  در یک نقطه  $P \in M$  مشتق‌پذیر از کلاس  $C_s$  ( $s \leq r$ ) نامیده می‌شود اگر دستگاههای مختصات موضعی مجاز  $(U, \psi)$  در  $M$  و  $(V, \psi')$  در  $M'$  وجود داشته باشند به طوری که  $P \in U$ ،  $V = f(U)$ ، و مختصات موضعی نقاط  $f(Q) \in V$  توابعی از کلاس  $C_s$  از مختصات موضعی نقطه  $Q \in U$  باشند.

فرض کنیم  $(v^1, v^2, \dots, v^{n'})$  مختصات  $f(Q)$  در  $(V, \psi')$ ، و  $(u^1, u^2, \dots, u^m)$  مختصات  $Q$  در  $(U, \psi)$  باشند. در این صورت،

$$(v^1, v^2, \dots, v^{n'}) = \psi' \circ f \circ \psi^{-1}(u^1, u^2, \dots, u^m),$$

که  $n'$  تابع  $m$  متغیره به شکل

$$v^j = f^j(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad j = 1, 2, \dots, n'$$

را حاصل می کند. اینها توابعی هستند که تعریف می خواهد که از کلاس  $C_s$  باشند. نگاشت از کلاس  $C_s$  نامیده می شود اگر در هر نقطه دلخواه از این کلاس باشد. نگاشت  $f$  منتظم یا یک جادهنده نامیده می شود اگر ماتریس ژاکوبی

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} & & \frac{\partial v^2}{\partial u^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v^{n'}}{\partial u^1} & \frac{\partial v^{n'}}{\partial u^2} & & \frac{\partial v^{n'}}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

از رتبه  $m$  باشد. البته، این فقط وقتی می تواند روی دهد که  $n' \geq m$ .

یک جادهنده ممکن است یک همانریختی از چند گونای  $M$  بروی نقش خود نباشد. اما، بنابر قضیه تابع ضمنی، یک جادهنده همیشه یک نگاشت موضعا "همانریخت" است. هر جادهنده ای که یک به یک باشد نشاننده نامیده می شود.

یک سطح منتظم، به صورتی که در زیر بخش ۲۰.۱۱ تعریف شد، حالت خاصی است از یک چندگونای دوبعدی که به عنوان یک زیر مجموعه از فضای اقلیدسی سه بعدی گرفته شده است، نگاشت شمول یک نشاننده از چندگونای دوبعدی در یک فضای سه بعدی خواهد بود. نمایش پارامتری موضعی معکوس نگاشت مختصات  $\psi$  بوده، و به شکل مختصات چنین است:  $x = x(u^1, u^2)$ ,  $y = y(u^1, u^2)$ ,  $z = z(u^1, u^2)$ ؛ اینها نقش توابع  $f^1, f^2, f^3$  که معرف نشاننده اند را نیز بازی می کنند. فرمول (۳۰.۱۱) شرط انتظام نشاننده می باشد.

برای آنکه به تعریف کلیتری از سطح برسیم، که خود قطعی و پوششهای مکرر را مجاز بدانند، باید نشاننده را با یک جادهنده یک چندگونای دوبعدی عوض کنیم. این کار به قدر حالت منحنیها دارای عمومیت است.

سادگی نسبی حالت منحنیها به این خاطر است که هر چندگونای یک بعدی نقش یک جادهنده از خط حقیقی است، حال آنکه تمام سطوح نقش یک جادهنده از صفحه نیستند. ★

## ۶.۱۱ معادله ضمنی سطح

با اینکه ابزار اصلی ما در بررسی سطوح نمایش پارامتری است، نمی توان از ذکر شیوه دیگر

نمایش سطوح، که خواننده در هندسه تحلیلی با آن آشنا شده، صرف نظر کرد. این نمایش معادله ضمنی به شکل

$$(17.11) \quad F(x, y, z) = 0$$

است. مثلاً، معادله صفحه و کره به ترتیب  $Ax + By + Cz + D = 0$  و  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$  است، و غیره.

بدون فرضیهایی دیگر در مورد تابع  $F$ ، مجموعه نقاط صادق در (17.11) می تواند خیلی عجیب باشد، بدین معنی که از مجموعه تهی تا تمام فضا تغییر کند. این مجموعه تحت شرایطی یک سطح است، و، در این صورت، (17.11) معادله ضمنی سطح نامیده می شود.

قضیه. هرگاه تابع  $F(x, y, z)$  در همسایگی نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  که در (17.11) صادق است از کلاس  $C_n$  ( $n \geq 1$ ) بوده، و یکی از مشتقات جزئی  $F_x, F_y, F_z$  در این نقطه مخالف صفر باشد، آنگاه این نقطه دارای یک همسایگی مانند  $U$  در فضا است به طوری که نقاط  $\bar{U}$  صادق در (17.11) یک پارچه ساده از سطحی که مجاز به پارامتری سازی منتظم از کلاس  $C_n$  است تشکیل می دهند.

برهان. فرض کنیم  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . طبق قضیه تابع ضمنی، یک همسایگی مانند  $U$  از  $(x_0, y_0, z_0)$  هست که در آن مختص  $z$  نقاط صادق در معادله  $F(x, y, z) = 0$  تابعی از  $x$  و  $y$  است:

$$(18.11) \quad z = f(x, y).$$

که در آن  $f$  تابعی از کلاس  $C_n$  بوده و دارای مشتقات جزئی زیر است:

$$(19.11) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

معادله (18.11) نمایش پارامتری

$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = f(u^1, u^2)$$

را به دست می دهد. بردارهای  $r_1$ ،  $r_2$ ، و  $r_1 \times r_2$  به ترتیب دارای مؤلفه های

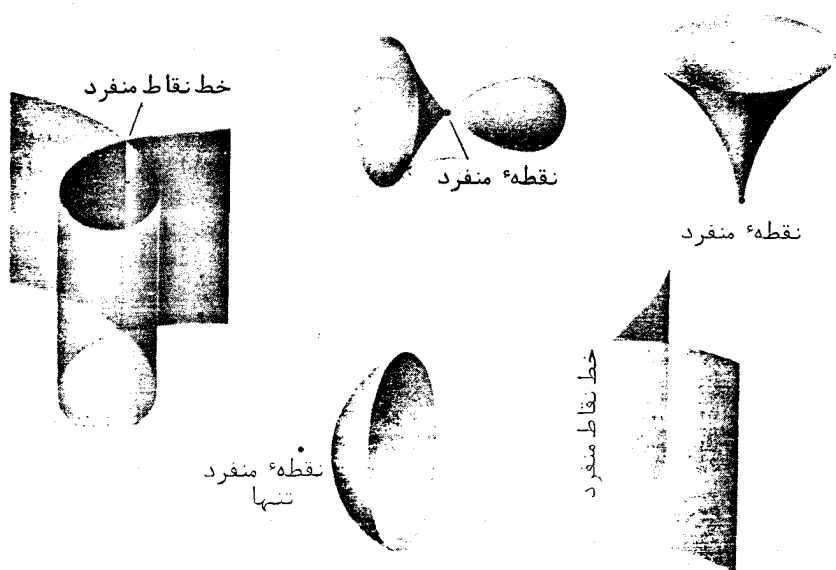
$$\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

هستند. بنابراین،  $r_1 \times r_2 \neq 0$ ، و، در نتیجه، پارامتری سازی منتظم است. با انتخاب یک همسایگی مناسب مانند  $V$ ، به طوری که  $\bar{V} \subset U$ ، می توان، به خاطر قضیه زیر بخش ۳.۱۱،

حکم کرد که مجموعه نقاط  $\bar{V}$  صادق در معادله یک پارچه ساده از یک سطح را تشکیل می‌دهد.

### ۷.۱۱ نقاط منفرد یک سطح که با معادله ضمنی داده شده است

هرگاه در قلمرو بازی  $F_x = F_y = F_z = 0$ ، آنگاه  $F(x, y, z)$  ثابت است، و معادله (۱۷.۱۱) یا نمایش یک مجموعه تهی است یا، درحالتی که مقدار ثابت  $F(x, y, z)$  صفر باشد، نمایش تمام قلمرو می‌باشد. حالت جالبتر وقتی است که سه مشتق جزئی در نقاط تنها یا در نقاط یک منحنی در فضا صفر باشند. در این صورت، این نقاط نقاط منفرد سطح نامیده می‌شوند.



شکل ۱۱.۱۱

بررسی یک سطح در مجاورت یک نقطه منفرد را می‌توان، همچون حالت منحنیها، با صفرگرفتن آن قسمت از بسط تیلور تابع  $F(x, y, z)$  در  $(x_0, y_0, z_0)$  که از پایین‌ترین مرتبه است و در نظر گرفتن سطح نموده شده با معادله حاصل به عنوان تقریبی از سطح انجام داد. بدون وارد شدن در جزئیات، در شکل ۱۱.۱۱ فقط چند نوع نقطه منفرد را نشان داده‌ایم.

### امثله و تمرین

۱. با حذف  $u^1, u^2$  از معادلات (۱۱.۱۱) زنجیرگون، معادله ضمنی زنجیرگون به دست

می‌آید. داریم  $z = u^1$ ،  $x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(u^1/a)$  که از اینجا معادلهٔ ضمنی خواهد بود

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(z/a).$$

۲. معادلات ضمنی (آ) مارپیچ‌گون؛ (ب) کره‌ما؛ (پ) چنبره را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ ضمنی سطح

$$x = \frac{a(u^1 u^2 + 1)}{u^1 + u^2}, \quad y = \frac{b(u^1 - u^2)}{u^1 + u^2}, \quad z = \frac{c(u^1 u^2 - 1)}{u^1 + u^2}$$

را پیدا کنید.

## ۱۲ صفحهٔ مماس

۱۰۱۲ صفحهٔ مماس و بردار قائم به سطحی که با نمایش پارامتری داده شده است

فرض کنیم  $P_0$  یک نقطهٔ منتظم سطح و  $P$  یک نقطهٔ متغیر آن باشد. دستهٔ صفحات ماربر  $P_0$  و فاصلهٔ  $P$  از آن صفحات را در نظر می‌گیریم. برای هر صفحهٔ ثابت، این فاصله، وقتی روی صفحهٔ  $P_0 \rightarrow P$ ، به صفر میل می‌کند. صفحه‌ای که به ازای آن این فاصله، وقتی  $P$  روی سطح به  $P_0$  میل کند، از بالاترین مرتبهٔ کوچکی نسبت به فاصلهٔ  $P_0 P$  است صفحهٔ مماس بر سطح در  $P_0$  نامیده می‌شود.

خط ماربر  $P_0$  که عمود بر صفحهٔ مماس در  $P_0$  باشد قائم به سطح در  $P_0$  نامیده می‌شود، و هر بردار واقع بر این خط یک بردار قائم در  $P_0$  نام دارد. ما اغلب، بی‌آنکه هر بار قید کنیم، از بردارهای یک‌هٔ قائم استفاده خواهیم کرد.

چون در تعریف صفحهٔ مماس از یک‌حد، وقتی  $P_0 \rightarrow P$ ، استفاده شده است، تعریف فقط به رفتار سطح در همسایگی کوچکی از  $P_0$  بستگی دارد. در چنین حالات، یعنی وقتی مفهوم یا خاصیتی با همسایگی به قدر کافی کوچکی از یک نقطهٔ معین می‌شود، می‌گوییم این یک مفهوم یا خاصیت موضعی است.

به خاطر خصلت موضعی صفحهٔ مماس، می‌توان خود را به یک همسایگی مختصات روی سطح که پارامتری‌سازی منتظم می‌پذیرد معید کرد.

قضیه. در هر نقطهٔ منتظم  $P_0 = (u_0^1, u_0^2)$  واقع بر یک سطح از کلاس  $C_1$  که با معادلهٔ پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

نموده شده یک صفحهٔ مماس منحصر بفرد وجود دارد. این صفحه با بردارهای  $\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2)$  و  $\mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2)$  مشخص می‌شود. بنابراین، بردار

$$(1.12) \quad \mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2)$$

یکی از بردارهای قائم بوده، و معادله صفحه مماس عبارت است از

$$(2.12) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)) \mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) = 0.$$

توجه کنید که شرط از کلاس  $C_1$  بودن فقط یک شرط کافی است، و تحت شرط ضعیفتر نیز صفحه مماس منحصر بفرد وجود دارد؛ مثلاً، سطح  $z = f(x, y)$  در  $(x_0, y_0)$  صفحه مماس دارد اگر و فقط اگر تابع  $f$  در این نقطه دیفرانسیل کامل داشته باشد.

برهان. معادله یک صفحه ماربر  $P_0$  عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N} = 0,$$

که در آن  $\mathbf{R}$  بردار موضع یک نقطه دلخواه صفحه است، و  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)$  فاصله نقطه دلخواه سطح با بردار موضع  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  از صفحه مساوی است با

$$d = \frac{|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|},$$

و فاصله  $P_0P$  برابر است با

$$\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

با استفاده از فرمول تیلور و معرفی نماد  $h^i = u^i - u_0^i$  و داریم  $\mathbf{r}_{i,0} = \mathbf{r}_i(u_0^1, u_0^2)$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{1,0}h^1 + \mathbf{r}_{2,0}h^2 + o(\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}),$$

که نشان می دهد که  $\rho$  از همان مرتبه  $\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}$  است. بعلاوه،

$$d = \frac{[\mathbf{r}_{1,0}h^1 + \mathbf{r}_{2,0}h^2 + o(\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2})]\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

$$= \frac{\mathbf{r}_{1,0}\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}h^1 + \frac{\mathbf{r}_{2,0}\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}h^2 + o(\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}).$$

از اینرو، وقتی  $\rho \rightarrow 0$ ،  $d/\rho$  به صفر میل می کند اگر و فقط اگر

$$\mathbf{r}_{1,0}\mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{r}_{2,0}\mathbf{N} = 0.$$

اما، در مورد یک نقطه منتظم، بردارهای  $\mathbf{r}_{1,0}$  و  $\mathbf{r}_{2,0}$  مستقل اند، و بردار قائم  $\mathbf{N}$  به وسیله معادلاتی با تقریب عامل اسکالری چون  $\lambda \neq 0$  مشخص می شود:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{r}_{1,0} \times \mathbf{r}_{2,0}.$$

بنابراین، صفحه مماس وجود داشته و بر بردار  $\mathbf{r}_{1,0} \times \mathbf{r}_{2,0}$  عمود است. معادله صفحه

عبارت است از (۲۰.۱۲)، که برهان را تمام خواهد کرد.

هرگاه معادله سطح، به جای شکل برداری، با مختصات داده شده باشد:

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2),$$

آنگاه معادله صفحه مماس عبارت خواهد بود از

$$(۳۰.۱۲) \quad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

که در آن  $X, Y, Z$  مختصات یک نقطه دلخواه از صفحه بوده و  $x, y, z, x_i, y_i, z_i$  مقادیر توابع  $x, y, z$  و مشتقات آنها در نقطه تماس می باشند.

### تمرین

۱. معادله صفحات مماس و مؤلفه‌های بردارهای قائم سطوح زیربخش ۳۰.۱۱ را بیابید.

۲. نقاط برخورد مارپیچ گون  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$  را با خط مستقیم  $x = 1, y = 0$

پیدا کرده، زوایای بین این خط و سطح نقاط برخورد را تعیین کنید. زاویه بین یک

منحنی و یک سطح زاویه بین مماس بر منحنی و صفحه مماس بر سطح تعریف می شود.

۳. همان مسئله را در مورد مارپیچ گون تمرین پیش و مارپیچ  $x = \cos t, y = \sin t, z = -t$

حل کنید.

۴. صفحه مماس و بردار قائم سطح تمرین ۳ از زیربخش ۳۰.۱۱ را بیابید.

۵. در حالت کلی، زاویه  $\phi$  بین سطح  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  و منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$  در نقطه مشترک  $P$

که نظیر به مقادیر  $t_0, u_0^1, u_0^2$  از پارامترهاست از فرمول

$$(۴۰.۱۲) \quad \sin \phi = \frac{|\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dot{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| |\dot{\mathbf{p}}|}$$

به دست می آید، که در آن مقادیر توابع  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  در  $(u_0^1, u_0^2)$  و مقدار  $\dot{\mathbf{p}}$  در  $t_0$  گرفته

شده‌اند. این مطلب را ثابت کنید!

۶. اگر تمام خطوط قائم به سطحی هم‌رس باشند، این سطح یک کره یا قسمتی از آن است.

در واقع، با انتخاب نقطه تقاطع به عنوان مبدا در فضا، بردار موضع  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$  و بردار

قائم  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  هم‌خط خواهند بود و

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r} = 0.$$

اما این یعنی که  $\mathbf{r}_i \mathbf{r} = 0$ ، و در نتیجه،  $\partial(\mathbf{r}^2)/\partial u^i = 0$  یا ثابت  $\mathbf{r}^2 =$ ، و مطلب ثابت

می شود.

۷. ثابت کنید هرگاه تمام صفحات مماس بر یک سطح از یک نقطه بگذرند، آنگاه این سطح یک سطح مخروطی است.

راهنمایی. نقطه مشترک تمام صفحات را مبداء گرفته، ثابت کنید هر وقت یک نقطه با بردار موضع  $p$  روی سطح واقع باشد، نقطه با بردار موضع  $p$  نیز چنین است. ۸. ثابت کنید سطحی که تمام صفحات مماسش موازی یک خط ثابت باشد یک سطح استوانه‌ای است.

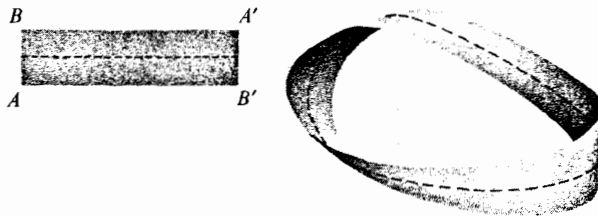
۹. ثابت کنید سطحی که تمام قائمهایش خط مستقیم معلومی را قطع کنند یک سطح دوار است. تحقیق کنید که تمام سطوح دوار از این خاصیت برخوردارند.

## ۲۰۱۲ جهت یک سطح

در بین تمام بردارهای قائم به یک سطح در نقطه معلوم  $P$  دقیقاً " دو بردار یکه با جهت‌های مخالف وجود دارد. اگر یکی از آنها را  $m$  بگیریم، می‌توان طرف مثبت و منفی سطح را در  $P$  تعریف کرد. در این موقع، برای صفحه مماس در  $P$  یک جهت مقرر می‌کنیم. بدین معنی که، می‌گوییم یک جفت مرتب از بردارهای  $a_1, a_2$  در صفحه مماس در  $P$  جهتدار با جهت مثبت است اگر سه تایی  $a_1, a_2, m$  جهتدار با جهت مثبت در فضا باشد. این کار جهت مثبت دوران در صفحه مماس از  $a_1$  به  $a_2$  به اندازه زاویه حاده بین آنها را نیز مشخص می‌کند. هرگاه جهت فضا راست‌گرد باشد، آنگاه دوران مثبت در صفحه برای ناظری روی صفحه مماس که سرش در جهت نیم فضایی است که بردار  $m$  به آن اشاره دارد خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

می‌گوییم انتخاب بردار یکه قائم  $m$  در نقطه  $P$  یک جهت برای سطح در  $P$  را مقرر می‌کند. انتخاب جهت را می‌توان در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه منتظم به طور پیوسته ادامه داد. اما این کار همیشه برای کل سطح ممکن نیست. ولی بعضی از سطوح مجاز به انتخاب بردارهای یکه قائم در هر نقطه هستند. مثلاً، " بردارهای قائم به یک کره اشاره به برون کره دارند. در مورد سطوح دیگر این کار عملی نیست. چنین سطوح جهت ناپذیر نامیده می‌شوند. نمونه بسیار مشهور از یک سطح جهت ناپذیر نوار موبیوس<sup>۱</sup> است ( شکل ۱۰۱۲)، که می‌توان آن را از یک نوار کاغذی به شکل مستطیل  $ABA'B'$  تهیه کرد. بدین ترتیب که ابتدا یک برنوار را چرخانده و سپس دو انتهای نوار را طوری بهم می‌چسبانیم که نقاط  $A'$  و  $B'$  به ترتیب بر نقاط  $A$  و  $B$  منطبق شوند. اگر با انتخاب یک بردار قائم خاص

در یک نقطه، به طور پیوسته در امتداد خط نقطه چین روی نوار حرکت کنیم، به نقطه شروع خواهیم رسید منتها با جهت مخالف. این نشان می دهد که روی نوار موبیوس نمی توان هیچ جهت پیوسته به دست آورد. هر سطح جهت ناپذیر یک سطح یکطرفه نیز نامیده می شود، زیرا، بدون برگرداندن ضلع نوار، می توان با حرکت روی سطح، از یک طرف سطح در نقطه  $P$  به طرف دیگر آن رسید.



شکل ۱.۱۲

میان پارامتری سازی و جهت ها یک رابطه طبیعی وجود دارد؛ یعنی، هر پارامتری سازی منتظم یک جهت را القا می کند که با انتخاب

$$(۵.۱۲) \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$$

داده می شود. تابع  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$  در یک قلمرو فاقد نقاط منفرد یک تابع پیوسته است؛ در واقع، اگر نمایش پارامتری از کلاس  $C_n$  باشد، تابعی است از کلاس  $C_{n-1}$ ، و لذا، جهت در کل قلمرو موجودیت دارد. اگر مختصات را با فرمولهای

$$(۶.۱۲) \quad u^1 = u^1(u^{1'}, u^{2'}), \quad u^2 = u^2(u^{1'}, u^{2'})$$

به مختصات منحنی الخط  $u^{1'}, u^{2'}$  تغییر دهیم، بنابر (۷.۱۱) داریم

$$\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

و، برای بردار یکه نظیر، خواهیم داشت

$$\mathbf{m}' = \varepsilon \mathbf{m},$$

که در آن

$$\varepsilon = \text{sgn} \left( \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})} \right)$$

بنابراین، در پارامتری سازی جدید، جهت القاشده تغییر نمی کند اگر ژاکوبی تبدیل مختصات مثبت باشد، و به قرینه خود تغییر می کند اگر ژاکوبی منفی باشد. تبدیلات مختصات با ژاکوبی مثبت تبدیلات جهت نگهدار نامیده می شوند.

★ رابطه بین جهت و مختصات موضعی تعمیمی برای مفهوم جهت به چندگونا‌های دیفرانسیل مجرد را پیشنهاد می‌کند. گوییم بر یک چندگونا یک جهت مقرر است اگر یک ساختمان دیفرانسیل طوری مفروض باشد که توابع گذار  $\phi$ ، که معرف تغییر مختصات موضعی در همسایگیهای مختصات رویهم افتاده‌اند، دارای ژاکوبی همه جا مثبت باشند. اگر چنین ساختمان دیفرانسیل مجازی وجود داشته باشد، چندگونا را جهت‌پذیر می‌نامند، و در این صورت دو جهت متمایز را می‌توان تعریف کرد؛ در غیر این صورت، چندگونا جهت ناپذیر خواهد بود. ★

### ۳.۱۲ صفحه مماس در مورد معادله ضمنی

قضیه. هر سطح  $F(x, y, z) = 0$  از کلاس  $C_1$  در هر نقطه نامنفرد  $(x, y, z)$  صفحه مماس دارد. این صفحه (دایره مماس) معادله‌ای به شکل

$$(۷.۱۲) \quad F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0$$

است، که در آن  $X, Y, Z$  مختصات هر نقطه از صفحه بوده، و مشتقات  $F_x, F_y, F_z$  در نقطه تماس  $(x, y, z)$  حساب می‌شوند.

برهان. هرگاه در نقطه تماس  $(x, y, z)$  داشته باشیم  $F_z \neq 0$ ، آنگاه سطح را می‌توان موضعا با معادله  $z = f(x, y)$  نمایش داد، که حالت خاصی از یک معادله پارامتری است با پارامترهای  $x, y$ . در این صورت، بردارهای  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  عبارتند از

$$\mathbf{r}_1 = \left\{ 1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right\}, \quad \mathbf{r}_2 = \left\{ 0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right\},$$

که در آنها

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

در نتیجه،

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right\} = \left\{ \frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1 \right\}.$$

اما این یعنی بردار

$$\mathbf{M} = \{F_x, F_y, F_z\}$$

نیز یک بردار قائم است. بنابراین، (۷.۱۲) معادله یک صفحه مایلر  $(x, y, z)$  و قائم به  $\mathbf{M}$  است.

## امثله و تمرین

۱. صفحه مماس بر کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  را در نقاط  $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ ,  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  پیدا کنید.

۲. ثابت کنید سطوح  $F(x, y, z) = 0$  و  $x = x(u^1, u^2)$ ,  $y = y(u^1, u^2)$ ,  $z = z(u^1, u^2)$  در نقطه مشترک  $(x_0, y_0, z_0)$  که نظیر به مقادیر پارامترهای  $(u_0^1, u_0^2)$  است مماسند (یعنی، دارای صفحه مماس مشترک هستند) اگر و فقط اگر معادلات زیر در این نقطه برقرار باشند:

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 = 0,$$

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 = 0.$$

۳. ثابت کنید زاویه  $\phi$  بین منحنی  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  و سطح  $F(x, y, z) = 0$  (ر. ک. زیربخش ۱۰۱۲، تمرینهای ۲-۷) در نقطه مشترک  $(x_0, y_0, z_0)$  که نظیر به مقدار  $t_0$  از پارامتر  $t$  است با فرمول زیر بیان می شود:

$$(۱۰.۱۲) \quad \sin \phi = \frac{(F_x)_0 \dot{x}(t_0) + (F_y)_0 \dot{y}(t_0) + (F_z)_0 \dot{z}(t_0)}{\sqrt{(F_x)_0^2 + (F_y)_0^2 + (F_z)_0^2} \cdot \sqrt{[\dot{x}(t_0)]^2 + [\dot{y}(t_0)]^2 + [\dot{z}(t_0)]^2}},$$

که در آن

$$(F_x)_0 = F_x(x_0, y_0, z_0), \quad (F_y)_0 = F_y(x_0, y_0, z_0), \quad (F_z)_0 = F_z(x_0, y_0, z_0).$$

۴. زاویه بین خط  $x = a/2$ ,  $y = 0$  و کره  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  را در نقاط مشترک کره و خط پیدا کنید.

۵. زاویه بین سطوح  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  را بیابید. زاویه بین دو سطح در نقطه مشترک  $P$  مساوی زاویه دو وجهی بین صفحات مماس بر سطوح در  $P$  تعریف می شود.

۶. مارپیچ  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$  کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  را کجا قطع می کند، و زوایای بین مارپیچ و کره در نقاط برخورد چقدراند؟

۷. تمرینهای ۱، ۲، ۳، ۷، و ۸ زیربخش قبل را با استفاده از معادلات ضمنی حل کنید.

## ۱۳ پوش خانواده‌هایی از سطوح

## ۱۰۱۳ پوش یک خانواده یک پارامتری از سطوح

خانواده یک پارامتری از سطوح

$$(۱۰.۱۳) \quad F(x, y, z, \alpha) = 0$$

از کلاس  $C_1$  را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم تابع  $F$  نسبت به  $\alpha$  نیز مشتق پیوسته داشته باشد.

فرض کنیم معادله<sup>۱</sup> (۱۰۱۳) به ازای هر  $\alpha$  سطحی را نمایش دهد. هرگاه روی سطحی از خانواده نظیر به مقدار  $\alpha_0$  از پارامتر داشته باشیم  $F_\alpha \neq 0$ ، آنگاه (۱۰۱۳)، به ازای مقادیر مختلفی از  $\alpha$  در همسایگی از  $\alpha_0$ ، سطوح مختلفی را نمایش خواهند داد. پوش خانواده<sup>۲</sup> یک پارامتری از سطوح (۱۰۱۳) سطحی است مانند  $\mathcal{F}$  که در هر نقطه بریک سطح از خانواده مماس باشد و، بعلاوه، در هر همسایگی نقطه<sup>۳</sup> تماس با یک سطح، نقاط تماس با سطوح دیگر خانواده نیز وجود داشته باشند (لذا، پوش نمی‌تواند در تمام نقاط یک همسایگی باز بریکی از سطوح خانواده منطبق شود). فرض کنیم خانواده<sup>۴</sup> داده شده از سطوح یک‌پوش دارد که سطح منظمی است که موضعا<sup>۵</sup> "با معادله<sup>۶</sup> پارامتری  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  نموده می‌شود. به هر نقطه<sup>۷</sup>  $(u^1, u^2)$  از پوش سطحی از خانواده نظیر است که بر پوش در این نقطه مماس است. با این تناظر،  $\alpha$  تابعی از  $u^1, u^2$  می‌شود:  $\alpha = \alpha(u^1, u^2)$ . همچنین، فرض کنیم یک نمایش پارامتری برای پوش وجود دارد، به طوری که  $\alpha(u^1, u^2)$  تابعی از کلاس  $C_1$  است. با این مفروضات قوی و نسبتا<sup>۸</sup> "ساختگی، قضیه<sup>۹</sup> زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. نقاط پوش خانواده<sup>۱۰</sup> (۱۰۱۳) از سطوح در معادلات

$$(2.13) \quad F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

صدق می‌کنند. این معادلات به ازای نقاط منفرد سطوح خانواده نیز برقرارند، حتی اگر این نقاط متعلق به پوش هم نباشند.

برهان. فرض کنیم  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  نمایش پارامتری پوش باشد. چون نقطه<sup>۱۱</sup>  $(u^1, u^2)$  پوش نقطه<sup>۱۲</sup> تماس با سطحی از خانواده<sup>۱۳</sup> (۱۰۱۳) نظیر به مقدار  $\alpha(u^1, u^2)$  از پارامتر است، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$F(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2), \alpha(u^1, u^2)) = 0.$$

با مشتق‌گیری از این اتحاد نسبت به متغیرهای  $u^1, u^2$  داریم

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 + F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} = 0,$$

(3.13)

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 + F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = 0.$$

چون پوش و سطح مماسند، پس دارای صفحه<sup>۱۴</sup> مماس مشترک می‌باشند. بنابراین، بردار  $\{F_x, F_y, F_z\}$ ، که قائم به سطح خانواده<sup>۱۵</sup> است، باید بر بردارهای  $\{x_1, y_1, z_1\}$  و  $\{x_2, y_2, z_2\}$  که بر پوش مماسند، عمود باشد. بنابراین،

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 = 0,$$

(4.13)

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 = 0.$$

(قس. زیربخش ۳۰.۱۲، تمرین ۲). از این معادلات و معادلات (۳۰.۱۳) نتیجه می شود که شرایط

$$F_{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = 0 \quad \text{و} \quad F_{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} = 0$$

باید برقرار باشند. اما، بنا به فرض ما، مشتقات  $\partial \alpha / \partial u^1$  و  $\partial \alpha / \partial u^2$  نمی توانند با هم صفر باشند. بنابراین، باید در نقاط پوش داشته باشیم  $F_{\alpha}(x, y, z, \alpha) = 0$  که، همراه با معادله خانواده، (۲۰.۱۳) را نتیجه می دهد.

واضح است که نقاط منفرد سطوح خانواده، یعنی نقاطی که در آنها  $F_x = F_y = F_z = 0$  نیز در (۴۰.۱۳) و، در نتیجه، در (۲۰.۱۳) صدق می کنند. اگر نقاط صادق در (۲۰.۱۳) که نقاط منفرد خانواده نیستند یک سطح تشکیل دهند، روابط (۲۰.۱۳) روابط (۴۰.۱۳) را ایجاب می کنند و این، به نوبه خود، یعنی این سطح بر سطح نظیر از خانواده مماس است؛ به عبارت دیگر، این یک پوش می باشد.

تابع  $\alpha(u^1, u^2)$  به پارامتری سازی انتخاب شده برای پوش بستگی دارد و از پیش معلوم نیست. برای آنکه پوش یک خانواده یک پارامتری را بیابیم به صورت زیر عمل می کنیم. پس از یافتن معادلات (۲۰.۱۳)، یا  $\alpha$  را حذف کرده یک معادله ضمنی به دست می آوریم، یا اینکه  $x, y, z, \alpha$  را به عنوان توابعی از دو پارامتر کمکی گرفته معادلات پارامتری را به دست می آوریم. بالاخص،  $\alpha$  می تواند یکی از آنها باشد. معادله حاصل اجتماع پوش و مجموعه نقاط منفرد را نمایش می دهد. بنابراین، تحقیق اینکه کدام قسمت آن پوش است ضرورت دارد.

به ازای مقدار ثابتی از  $\alpha$ ، معادلات (۲۰.۱۳) در حالت کلی یک منحنی روی سطح را نمایش می دهد که نظیر این مقدار از پارامتر است. اگر این یک خط از نقاط منفرد نباشد، این منحنی نیز روی پوش قرار می گیرد. سطح و پوش در امتداد این منحنی بر یکدیگر مماسند. چنین منحنیهایی خطوط مشخص خانواده نامیده می شوند.

### امثله و تمرین

۱. پوش یک خانواده یک پارامتری از کرات یک سطح گانال نامیده می شود. هرگاه مراکز کرات روی منحنی  $r = p(t)$  قرار داشته و شعاع کره به مرکز نقطه  $t$  مساوی  $a(t)$  باشد، آنگاه معادله خانواده کرات عبارت است از

$$[R - p(t)]^2 - [a(t)]^2 = 0,$$

که در آن  $t$  پارامتر خانواده بوده و نقش  $\alpha$  را در توضیحات نظری ما دارد. معادله

پوش را می توان از دستگاه معادلات

$$(R - p)^2 - a^2 = 0, \quad (R - p)\dot{p} + a\dot{a} = 0$$

معین کرد. در این حالت، هیچ نقطه منفردی روی سطوح وجود ندارد.

۲. در حالت خاص، پوش خانواده‌ای از کرات به شعاع ثابت  $b$  که مراکزشان روی دایره‌ای به شعاع  $a > b$  واقعند یک چنبره است؛ یعنی، سطحی است دوار که به وسیله دایره‌ای به شعاع  $b$  که مرکزش در فاصله  $a$  از محور است تولید می شود. در واقع، با نوشتن معادله دایره به شکل

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0,$$

معادله خانواده کرات به صورت

$$(x - a \cos t)^2 + (y - a \sin t)^2 + z^2 = b^2$$

به دست می آید. با مشتقگیری نسبت به  $t$  داریم

$$2a(x - a \cos t) \sin t - 2a(y - a \sin t) \cos t = 0$$

یا

$$x \sin t - y \cos t = 0,$$

که نتیجه می دهد

$$x = w \cos t, \quad y = w \sin t,$$

که در آنها باید  $w$  معین شود. با جایگزینی این در معادله خانواده داریم

$$(w - a)^2 \cos^2 t + (w - a)^2 \sin^2 t + z^2 = b^2$$

یا

$$(w - a)^2 + z^2 = b^2.$$

حال پارامتر جدید  $u$  را معرفی می کنیم به این ترتیب که

$$w - a = b \cos u, \quad z = b \sin u.$$

در این صورت، با فرض  $u^1 = u$  و  $u^2 = t$ ، معادله پارامتری پوش به صورت زیر به دست می آید

$$x = (a + b \cos u^1) \cos u^2,$$

$$y = (a + b \cos u^1) \sin u^2,$$

$$z = b \sin u^1,$$

که معادله سطحی است که از دوران منحنی  $x = a + b \cos u^1, y = 0, z = b \sin u^1$  یعنی

دایره‌ای به شعاع  $b$  و مرکز  $(a, 0, 0)$ ، حول محور  $z$  به دست می آید.

۳. پوش خانواده‌های زیر از کرات را بیابید:

(آ) کراتی به شعاع  $c$  و مرکز واقع بر مارپیچ  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  چه نامساوی باید بین  $a, b, c$  برقرار باشد تا سطحی بدون خود قطعی به دست آید؟  
 (ب)  $x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 = 2\alpha$   
 ۴. ثابت کنید هرگاه خانواده سطوح به شکل پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, \alpha)$$

باشد، که در آن  $\alpha$  پارامتر خانواده بوده و  $u^1, u^2$  پارامترهای سطوح خاص خانواده اند، آنگاه پوش در معادلات

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, \alpha)$$

صدق می کند.

### ۲.۱۳ پوش خانواده یک پارامتری از صفحات

یک خانواده یک پارامتری از صفحات با معادله‌ای به شکل

$$(5.13) \quad N(u)\mathbf{R} = \delta(u)$$

نموده می شود، که در آن  $N(u)$  یک بردار قائم به صفحه نظیر به مقدار  $u$  از پارامتر است. چون سطوح خانواده صفحه‌اند، نقطه منفرد ندارند. خطوط مشخص خانواده در معادلات زیر صدق می کنند:

$$(6.13) \quad \begin{aligned} N(u)\mathbf{R} &= \delta(u), \\ \frac{dN(u)}{du}\mathbf{R} &= \frac{d\delta}{du}. \end{aligned}$$

بردارهای  $N(u)$  و  $dN(u)/du$ ، جز در حالتی که خانواده از صفحات موازی تشکیل شده، همخط نیستند (مگر در مورد مقادیر استثنایی از  $u$ )؛ و لذا، خطوط مشخص خانواده خطوط مستقیمی هستند که با دو معادله خطی (۶.۱۳) تعریف می شوند. بردار هادی خط مشخص  $N \times \dot{N}$  است؛ بنابراین، خط مشخص واقع بر صفحه نظیر به مقدار  $u$  از پارامتر خانواده دارای معادله پارامتری به شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(u) + vN(u) \times \dot{N}(u)$$

است، که در آن  $v$  پارامتر خط بوده و  $\mathbf{r}_0(u)$  نقطه دلخواهی از خط مشخص  $u$  است. هرگاه  $\mathbf{r}_0(u)$  را جواب مشتق‌پذیر معادلات (۶.۱۳) و دو پارامتر  $u$  و  $v$  را پارامترهای مستقل یک نمایش پارامتری سطح بگیریم، آنگاه معادله

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(u) + vN(u) \times \dot{N}(u)$$

معادله پارامتری پوش خواهد بود. این پوش با خطوطی مستقیم که کاملاً "بر صفحه واقعند

جارو می شود. سطحی که دارای این خاصیت باشد را یک سطح خط دار، و خطوط مستقیم را مولدهای مستقیم الخط یا خطوط جاری سطح می نامند. در مورد پوش خانواده های از صفحات، خطوط جاری خطوط مشخص خانواده می باشند.

قضیه. هرگاه توابع  $N(u)$  و  $\delta(u)$  از کلاس  $C_2$  بوده و  $NN\dot{N} \neq 0$ ، آنگاه پوش این خانواده از صفحات یا (۱) سطحی است که با مماسهای یک منحنی پیچ خورده در فضا جارو می شود یا (۲) یک سطح مخروطی است؛ یعنی، سطحی است که با خطوط مستقیم ماربر یک نقطه ثابت در فضا به نام رأس مخروط و ماربر نقاط منحنی به نام هادی سطح مخروطی جارو می گردد.

هرگاه  $NN\dot{N} = 0$  ولی خانواده  $(\delta(u), N(u))$  از صفحاتی موازی تشکیل نشده باشد، آنگاه پوش یک سطح استوانه ای است؛ یعنی، سطحی است که تمام خطوط جاری آن موازی یکدیگرند.

برهان. سعی می کنیم منحنی بیابیم که تمام خطوط مشخص بر آن مماس باشند. این منحنی، در صورت وجود، یال بازگشت پوش نام دارد. ما از پارامتر  $u$  خانواده به عنوان پارامتر یال بازگشت استفاده کرده، به هر مقدار  $u$  نقطه تماس یال بازگشت با خط مشخص نظیر  $u$  را نسبت می دهیم. فرض کنیم معادله پارامتری حاصل از این طریق  $R = p(u)$  بوده و  $p$  تابعی از کلاس  $C_1$  باشد. چون به ازای هر  $u$  این نقطه بر خط مشخص نظیر واقع است، پس معادلات  $(\delta(u), N(u))$  متحداً برقرار می باشند:

$$N(u)p(u) = \delta(u),$$

$$\dot{N}(u)p(u) = \dot{\delta}(u).$$

با مشتقگیری از این اتحادها نتیجه می گیریم که

$$\dot{N}(u)p(u) + N(u)\dot{p}(u) = \dot{\delta}(u),$$

(۷۰.۱۳)

$$\dot{N}(u)p(u) + \dot{N}(u)\dot{p}(u) = \ddot{\delta}(u).$$

چون خط مشخص باید بر یال بازگشت مماس باشد، بردار مماس  $\dot{p}(u)$  باید موازی  $N(u) \times \dot{N}(u)$  باشد. لذا، این بردار بر  $N(u)$  و  $\dot{N}(u)$  عمود است، به این معنی که

$$N\dot{p} = 0, \quad \dot{N}\dot{p} = 0.$$

بنابراین، معادله دوم (۷۰.۱۳) نتیجه می دهد که

$$\dot{N}(u)p(u) = \ddot{\delta}(u).$$

در نتیجه، یال بازگشت در دستگاه مرکب از سه معادله

$$N(u)p = \delta(u),$$

$$\dot{N}(u)p = \delta(u),$$

$$\dot{N}(u)p = \delta(u)$$

صدق می‌کند. هرگاه  $NN\dot{N} \neq 0$ ، این معادلات  $p$  را به عنوان تابعی از  $u$  معین می‌کنند. درواقع، این دستگاه معادل دستگاه معادلات زیر است که به شکل مختصات بیان شده است:

$$Ax + By + Cz = \delta,$$

$$\dot{A}x + \dot{B}y + \dot{C}z = \dot{\delta},$$

$$\ddot{A}x + \ddot{B}y + \ddot{C}z = \ddot{\delta},$$

که در اینجا  $N = \{A, B, C\}$ ,  $p = \{x, y, z\}$ .

شرط  $NN\dot{N} \neq 0$  یعنی دستگاه دارای درمینیان ناصفر است. هرگاه جواب  $p(u)$  این دستگاه معادلات ثابت باشد، خطوط مشخص از یک نقطه فضا با این بردار موضع ثابت می‌گذرند؛ در نتیجه، پوش یک سطح مخروطی می‌باشد. هرگاه جواب در هیچ بازه‌ای ثابت نباشد، آنگاه  $p(u) \neq 0$  جز در بعضی نقاط تنها، و در این صورت، با استدلال کردن در جهت عکس، به آسانی ثابت می‌شود که خطوط مشخص بر منحنی  $r = p(u)$  مماسند.

بالاخره، هرگاه  $NN\dot{N} = 0$  ولی  $N \times \dot{N} \neq 0$ ، آنگاه تمام بردارهای  $N \times \dot{N}$  موازی هستند (ر.ک. زیربخش ۳.۲، تمرین ۱)، که بدین معنی است که تمام خطوط مشخص موازی بوده و پوش یک سطح استوانه‌ای می‌باشد.

### امثله و تمرین

۱. پوش یک خانواده یک پارامتری از صفحات می‌تواند یک خط باشد. مثلاً، پوش خانواده

$$x \cos u + y \sin u = 0$$

از صفحات خط  $x = y = 0$  است.

۲. پوش خانواده صفحات بوسان منحنی  $r = p(t)$  از کلاس  $C_3$  با انحنای ناصفر با سطح متشکل از خطوط مماس بر این منحنی یکی است. به عبارت دیگر، منحنی  $یا$  بازگشت پوش صفحات بوسان خود می‌باشد.

۳. پوش صفحات قائم به یک منحنی. فرض کنیم یک منحنی از کلاس  $C_2$ ، که دارای انحنای ناصفر است، با پارامتری سازی طبیعی  $r = p(s)$  مفروض باشد. معادله خانواده قائمها عبارت است از

$$(R - p(s))t(s) = 0,$$

که در آن  $t(s)$  بردار مماس بر منحنی است. معادله پارامتری پوش جواب معادلات

$$(R - p)t = 0, \quad -t^2 + (R - p) \cdot n = 0$$

است، که  $n$  بردار قائم اصلی منحنی و  $\kappa$  انحنا است، یا

$$(R - p)t = 0, \quad (R - p)n = 1/\kappa.$$

به ازای مقدار ثابتی از پارامتر  $s$ ، اینها معادلات خط مشخص هستند. این خط مشخص دارای راستای  $t \times n = b$  بوده و از مرکز انحنای منحنی می‌گذرد؛ بنابراین، هر خط قطبی منحنی منطبق است. در واقع، تصویر بردار  $R - p$  روی صفحه بوسان برداری است به طول  $\rho = 1/\kappa$  و همجهت بردار قائم اصلی  $n$ . معادله سطح عبارت است از

$$r = p(u^1) + \frac{1}{\kappa(u^1)}n(u^1) + u^2b(u^1).$$

۴. یال بازگشت پوش خانواده صفحات قائم را پیدا کرده، نتیجه را با نتایج زیر بخش ۴۰۸، بخصوص (۱۵۰۸)، مقایسه نمایید.

۵. پوش خانواده صفحات اصلاحی منحنی  $r = r(s)$  از کلاس  $C_3$  با انحنای ناصفر را بیابید. نشان دهید که خطوط مشخص دارای راستای بردارهای داریو در نقاط نظیر می‌باشند. آیا منحنی برپوش واقع است؟

۶. سه پوش تمرینات ۲، ۳، و ۵ را برای مارپیچ به دست آورید.

۷. همچنین، پوش یک خانواده یک پارامتری از سطوح دیگر ممکن است یال بازگشتی باشد که تمام خطوط (در حالت کلی منحنیها) مشخص بر آن مماس باشند. یال بازگشت پوش خانواده  $F(x, y, z, \alpha) = 0$  در معادلات

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_{\alpha\alpha}(x, y, z, \alpha) = 0$$

صدق می‌کنند. یال بازگشت ممکن است یک نقطه نیز باشد، مثل حالت مخروط، یا از چند نقطه تنها تشکیل شده باشد.

### ★ ۳۰۱۳ پوش یک خانواده دوپارامتری از سطوح

پوش خانواده

$$(۸۰۱۳) \quad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

از سطوح، که در آن  $F$  تابعی است از کلاس  $C_1$  و  $F_\alpha, F_\beta$  در هیچ مجموعه بازی متحد صفر نیستند، سطحی است که در هر نقطه‌اش بر یکی از سطوح خانواده مماس است و، بعلاوه، در هر همسایگی یک نقطه تماس با یک سطح از خانواده، نقاط تماس با سطوح دیگر نیز وجود دارند.

فرض کنیم پوش را بتوان با یک معادله پارامتری از کلاس  $C_1$  به صورت

$$r = r(u^1, u^2)$$

نمایش داد، به طوری که پارامترهای  $\alpha(u^1, u^2)$ ,  $\beta(u^1, u^2)$  سطحی که در نقطه  $(u^1, u^2)$  برپوش مماس است توابعی از کلاس  $C_1$  بوده و ژاکوبی  $\partial(\alpha, \beta)/\partial(u^1, u^2)$  مخالف 0 باشد. با این مفروضات، قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

**قضیه.** مختصات نقاط پوش خانواده<sup>۱</sup> (۸.۱۳) در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$(9.13) \quad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad F_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad F_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

این دستگاه معادلات به وسیله نقاط منفرد سطوح خانواده نیز برقرار است.

برهان. فرض کنیم معادلات پوش عبارت باشند از

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2).$$

چون  $(u^1, u^2)$  نقطه تماس پوش و سطح نظیر به مقادیر  $\alpha(u^1, u^2)$ ,  $\beta(u^1, u^2)$  از پارامترهاست، لذا اتحاد زیر را داریم:

$$F(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2), \alpha(u^1, u^2), \beta(u^1, u^2)) = 0.$$

با مشتقگیری نسبت به  $u^1$  و  $u^2$ ، خواهیم داشت

$$(10.13) \quad \begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 + F_\alpha \alpha_1 + F_\beta \beta_1 &= 0 \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 + F_\alpha \alpha_2 + F_\beta \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

که در آنها

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}, \quad \alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}, \quad \text{و غیره.}$$

پوش و سطح نظیر از خانواده در نقطه مشترک دارای صفحه مماس مشترک هستند.

بردارهای  $\{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $\{x_2, y_2, z_2\}$  برپوش مماسند، حال آنکه بردار  $\{F_x, F_y, F_z\}$  بر سطح خانواده عمود می‌باشد. لذا، داریم

$$(11.13) \quad \begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 &= 0, \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 &= 0. \end{aligned}$$

این روابط، همراه با (۱۰.۱۳)، نتیجه می‌دهد که

$$(12.13) \quad \begin{aligned} F_\alpha \alpha_1 + F_\beta \beta_1 &= 0, \\ F_\alpha \alpha_2 + F_\beta \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

چون، طبق فرض، دترمینان  $\partial(\alpha, \beta)/\partial(u^1, u^2) \neq 0$  مخالف صفر است، لذا نتیجه می‌شود که  $F_\alpha = 0$ ,  $F_\beta = 0$ ، و پوش در معادلات (۹.۱۳) صدق خواهد کرد. در مورد نقاط منفرد سطح، داریم  $F_x = F_y = F_z = 0$ ، و معادله (۱۱.۱۳)، و در نتیجه

(۱۲۰۱۳) و (۹۰۱۳) ، نیز برقرار می باشند .

اگر بخواهیم پوش خانوادهء معلومی را بیابیم ، می توانیم از پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به عنوان پارامترهای پوش استفاده کرده و  $x, y, z$  را از معادلات (۹۰۱۳) به صورت تابعی از  $\alpha$  و  $\beta$  پیدا کنیم . همچنین ، می توان  $\alpha$  و  $\beta$  را حذف کرده یک معادلهء ضمنی به دست آورد . در هر دو حالت ، به خاطر نقاط منفرد سطوح خانواده ، امتحان لازم است .

### امثله و تمرین

۱ . هر سطح پوش خانوادهء تمام صفحات مماس بر خود است . در حالت کلی ، این خانواده یک خانوادهء دو پارامتری می باشد .

۲ . پوش خانواده های زیر از سطوح را بیابید :

$$(T) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(B) : 2\alpha x + 2\beta y + z = \alpha^2 + \beta^2 \quad *$$

### ۱۴ سطوح خط دار و گسترده

#### ۱۰۱۴ سطوح گسترده

صفحه و سطوحی که پوش خانواده های یک پارامتری از صفحات هستند سطوح گسترده نامیده می شوند . بعدها خواهیم دید (در زیر بخش ۳۰۲) که این نام از آنجا ناشی شده که این سطوح را می توان به طور ایزومتریک بروی صفحه نگاشت - گسترش داد .

همانطور که در زیر بخش ۲۰۱۳ دیدیم ، سطوح گسترده غیر تخت یا سطوحی هستند که از خطوط مماس یک منحنی پیچ خورده تشکیل شده اند یا سطوح مخروطی یا استوانه ای می باشند . بعکس ، نشان می دهیم که هر سطح از انواع فوق پوش یک خانوادهء یک پارامتری از صفحات است ؛ به عبارت دیگر ، خانوادهء صفحات مماس آن به یک پارامتر بستگی دارد . بعلاوه ، هر صفحهء مماس با سطح در امتداد یک خط مستقیم - خط مشخص این خانواده - تماس دارد . در نتیجه ، یک سطح گسترده به وسیلهء خانواده ای از مولدهای مستقیم الخط جارو می شود ، و همهء صفحات مماس در نقاط یک مولد خاص بر هم منطبق هستند .

#### ۲۰۱۴ سطح تشکیل شده به وسیلهء مماسهای یک منحنی در فضا

فرض کنیم

$$(۱۰۱۴) \quad r = p(u^1)$$

یک منحنی از کلاس  $C_3$  بوده و، برای سادگی،  $u^1$  پارامتر طبیعی آن باشد. در این صورت، معادله خط مماس در یک نقطه نظیر به مقدار  $u^1$  از پارامتر عبارت است از

$$(۲۰۱۴) \quad r = p(u^1) + u^2 p'(u^1),$$

که در آن  $u^2$  پارامتر نمایش پارامتری منحنی می باشد.

هرگاه  $u^1$  و  $u^2$  را دو پارامتر مستقل بگیریم، (۲۰۱۴) معادله پارامتری سطح متشکل از مماسهای منحنی (۱۰۱۴) خواهد بود. خطوط  $u^2$  (یعنی، ثابت  $u^1$ ) مولدهای مستقیم الخط خطوط جاری سطح می باشند.

حال می پردازیم به یافتن بردار قائم این سطح. اگر  $t(u^1)$ ،  $n(u^1)$  و  $b(u^1)$  بردارهای مماس، قائم اصلی، و قائم دوم منحنی (۱۰۱۴) باشند، می توان معادله این سطح را به شکل زیر نوشت:

$$(۲۰۱۴)' \quad r = p(u^1) + u^2 t(u^1),$$

که از آن، طبق فرمولهای فرنه،

$$r_1 = t(u^1) + u^2 \kappa(u^1) n(u^1), \quad r_2 = t(u^1),$$

و

$$(۳۰۱۴) \quad r_1 \times r_2 = -u^2 \kappa(u^1) b(u^1),$$

که در آنها  $\kappa(u^1)$  انحنای منحنی در نقطه  $u^1$  است. این نشان می دهد که نمایش پارامتری (۲۰۱۴) همه جاز در نقاط خود منحنی ( $u^2 = 0$ ) و نقاط آن خطوط جاری که در نقاط اصلاحی ( $\kappa(u^1) = 0$ ) بر منحنی مماسند منتظم است. در سایر نقاط، داریم

$$(۴۰۱۴) \quad m = -\operatorname{sgn}(u^2) b(u^1),$$

که در آن

$$\operatorname{sgn}(u^2) = \begin{cases} 1, & u^2 > 0 \\ -1, & u^2 < 0 \end{cases} \text{ اگر}$$

صفحه مماس بر سطح در نقطه  $(u^1, u^2)$  دارای معادله

$$[R - p(u^1) - u^2 t(u^1)] b(u^1) = 0$$

یا

$$(R - p(u^1)) b(u^1) = 0$$

است، زیرا  $t(u^1) b(u^1) = 0$ . این معادله فقط به پارامتر  $u^1$  بستگی داشته و معادله صفحه بوسان منحنی در  $u^1$  است. از اینرو، صفحه مماس بر سطح در هر نقطه مولد مستقیم الخط نظیر، بر این صفحه بوسان منطبق است. در نتیجه، این سطح پوش خانواده صفحات

بوسان منحنی می باشد.

درحالتی که منحنی در صفحه واقع است، همه خطوط مماس نیز در صفحه واقع شده و قسمتی از صفحه را می پوشانند. معادله (۲۰۱۴) را می توان، در یک قلمرو به قدر کافی کوچک، به عنوان نمایش پارامتری بخشی از صفحه گرفت. اگر منحنی یک منحنی پیچ خورده باشد، سطح به دو پارچه  $u^2 < 0$  و  $u^2 > 0$  تقسیم می شود. همانطور که از (۲۰۱۴) می بینیم، جهت صفحه مماس که به وسیله پارامتری سازی (۲۰۱۴) القا می شود در مورد دو پارچه مخالف یکدیگر است.

برای اطلاع از شکل این سطوح و نقش خود منحنی، سطح را با یک صفحه قائم به منحنی برش داده، ثابت می کنیم این مقطع در آن نقطه از منحنی دارای نقطه بازگشت است. برای این منظور، فرض کنیم نقطه  $P_0$  از منحنی نظیر به مقدار  $u_0^1$  از پارامتر باشد. در این صورت، معادله صفحه قائم عبارت است از

$$(R - p(u_0^1))t(u_0^1) = 0.$$

با گذاردن طرف راست معادله (۲۰۱۴) در آن، داریم

$$(p(u^1) - p(u_0^1))t(u_0^1) + u^2 t(u^1)t(u_0^1) = 0,$$

که از آنجا

$$u^2 = -\frac{(p(u^1) - p(u_0^1))t(u_0^1)}{t(u^1)t(u_0^1)},$$

که این، در صورتی که  $u^1 - u_0^1$  به قدر کافی کوچک باشد، دارای معنی است. با جایگزینی این مقدار از  $u^2$  در معادله (۲۰۱۴) سطح، معادله پارامتری (با پارامتر  $u^1$ ) مقطع مورد بحث به دست می آید:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) - \lambda(u^1)t(u^1),$$

که در آن

$$\lambda(u^1) = \frac{(p(u^1) - p(u_0^1))t(u_0^1)}{t(u^1)t(u_0^1)}.$$

درحالت کلی، پارامتر  $u^1$  طول قوس این منحنی نیست. با استفاده از فرمول فرنه برای منحنی اولیه، درمی یابیم که

$$\mathbf{r}' = (1 - \lambda')\mathbf{t} - \kappa\lambda\mathbf{n},$$

$$\mathbf{r}'' = (-\lambda'' + \kappa^2\lambda)\mathbf{t} + (\kappa - \kappa'\lambda - 2\kappa\lambda')\mathbf{n} - \kappa\lambda\tau\mathbf{b}.$$

با محاسبه مشتقات  $\lambda$ ، پس از چند عمل، بالاخره درمی یابیم که

$$\lambda' = 1 - \kappa\lambda\frac{nt_0}{tt_0}, \quad \lambda'' = -(\kappa\lambda)'\frac{nt_0}{tt_0} - \kappa\lambda\left(\frac{nt_0}{tt_0}\right)',$$

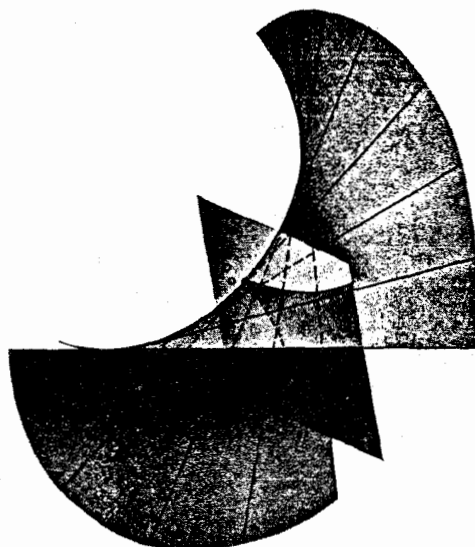
که در آنها زیرنویس ۰ مقدار تابع نظیر را در  $u_0^1$  نشان می‌دهد. بنابراین، در  $u_0^1$  داریم

$$\lambda(u_0^1) = 0, \quad \lambda'(u_0^1) = 1, \quad \lambda''(u_0^1) = 0,$$

زیرا  $n_0 t_0 = 0$ . این ایجاب می‌کند که

$$r''(u_0^1) = -\kappa_0 n_0 \quad \text{و} \quad r'(u_0^1) = 0$$

مشتق دوم مخالف صفر است جز آنکه  $P_0$  یک نقطهٔ اصلاح منحنی اصلی باشد. این یعنی  $P_0$  یک نقطهٔ بازگشت فصل مشترک سطح با صفحهٔ قائم به یال بازگشت در  $P_0$  است. دو شاخه از طرف منفی قائم اصلی منحنی اولیه یعنی از طرف تحدب منحنی، به نقطهٔ  $P_0$  نزدیک می‌شوند (شکل ۱۰۱۴).



شکل ۱۰۱۴

### ۳.۱۴ سطوح مخروطی و استوانه‌ای

هرگاه راس مخروط بر مبدأ مختصات منطبق بوده و هادی آن به معادلهٔ

$$r = q(t) \quad (۵.۱۴)$$

باشد، آنگاه

$$r = u^2 q(u^1) \quad (۶.۱۴)$$

معادلهٔ پارامتری مخروط است. فرض کنیم (۵.۱۴) از کلاس  $C_2$  باشد. در این صورت،

$$r_1 = u^2 \dot{q}(u^1), \quad r_2 = q(u^1),$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = u^2 \dot{\mathbf{q}}(u^1) \times \mathbf{q}(u^1).$$

هرگاه بردارهای  $\mathbf{q}(u^1)$  و  $\dot{\mathbf{q}}(u^1)$  همخط نبوده (این بردارها فقط وقتی می‌توانند به‌ازای  $u^1$  در بازه‌ای همخط باشند که معادله در این بازه نمایش پاره خطی ماربر راس باشد)، و  $u^2 \neq 0$ ، بدین معنی که نقطه مورد نظر راس نیست، آنگاه نقطه  $(u^1, u^2)$  یک نقطه منتظم بوده و صفحه مماس دارای معادله‌ای به شکل

$$(\mathbf{R} - u^2 \mathbf{q}(u^1)) \dot{\mathbf{q}}(u^1) \mathbf{q}(u^1) = 0,$$

یا

$$\mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}(u^1) \mathbf{q}(u^1) = 0$$

است، زیرا  $\mathbf{q} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{q} = 0$ . لذا، معادله فقط به  $u^1$  بستگی دارد، و خانواده صفحات مماس یک خانواده یک پارامتری می‌باشد.

یک استوانه با هادی  $(5.14)$  و یالهای موازی بردار ثابت  $\mathbf{a}$ ، دارای معادله‌ای

به شکل

$$(7.14) \quad \mathbf{r} = \mathbf{q}(u^1) + u^2 \mathbf{a}$$

است، که از آنجا

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{q}}(u^1) \mathbf{a}.$$

لذا، معادله صفحات مماس، یعنی

$$(\mathbf{R} - \mathbf{q}(u^1) - u^2 \mathbf{a}) \dot{\mathbf{q}}(u^1) \mathbf{a} = 0$$

یا

$$\mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}(u^1) \mathbf{a} = \mathbf{q}(u^1) \dot{\mathbf{q}}(u^1) \mathbf{a}.$$

باز فقط به پارامتر  $u^1$  بستگی دارد.

#### ۴.۱۴ سطوح خط‌دار

سطوح گسترده‌ی حالات خاصی هستند از کلاس عمومی‌تری از سطوح به نام سطوح خط‌دار. یک سطح خط‌دار سطحی است با این خاصیت که از هر نقطه آن خط مستقیمی می‌گذرد که کاملاً "روی سطح قرار دارد". بنابراین، سطح با خطوط مستقیمی، به نام خطوط جاری یا مولدهای مستقیم الخط، پوشیده می‌شود، که یک خانواده یک پارامتری وابسته به یک پارامتر را تشکیل می‌دهند.

برای یافتن معادله پارامتری یک سطح خط‌دار، منحنی  $\mathcal{C}$  را روی سطح طوری اختیار می‌کنیم که خطوط جاری را قطع کند. فرض کنیم معادله پارامتری این منحنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$$

باشد. ما این منحنی را هادی سطح می‌نامیم. در هر نقطه از این منحنی، بردار یکه خط جاری ماربر این نقطه را اختیار می‌کنیم. این بردار یکه به  $t$  بستگی دارد؛ در نتیجه، تابع دیگر

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}(t)$$

را نیز خواهیم داشت.

حال می‌توان معادله سطح را به شکل

$$(۸.۱۴) \quad \mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2 \mathbf{l}(u^1)$$

نوشت. پارامتر  $u^1$  خطوط جاری را روی سطح مشخص می‌کند که نقطه‌ای به مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  بر آن واقع است، و پارامتر  $u^2$  موضع این نقطه را روی خط جاری نشان می‌دهد.

در بررسی بیشتر خود، فرض می‌کنیم هر دو تابع  $\mathbf{p}(t)$  و  $\mathbf{l}(t)$  از کلاس  $C_1$  باشند. در این صورت، چون مقادیر  $\mathbf{l}(t)$  بردارهای یکه‌اند، خواهیم داشت

$$\mathbf{l} d\mathbf{l} = 0, \quad \dot{\mathbf{l}} = 0, \quad \mathbf{l}^2 = 1$$

قضیه. یک سطح خط دار منتظم (۸.۱۴) از کلاس  $C_1$  گستردنی است اگر و فقط اگر

$$(۹.۱۴) \quad d\mathbf{p} d\mathbf{l} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{p} \dot{\mathbf{l}} = 0$$

برهان. از رابطه (۸.۱۴) داریم

$$\mathbf{r}_1 = \dot{\mathbf{p}}(u^1) + u^2 \dot{\mathbf{l}}(u^1), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{l}(u^1),$$

که از آنجا

$$(۱۰.۱۴) \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{p}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1) + u^2 \dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1).$$

لذا، سطح گستردنی است اگر و فقط اگر صفحات مماس در تمام نقاط یک خط جاری برهم منطبق باشند، و این برقرار است اگر و فقط اگر راستای بردار قائم (۱۰.۱۴) به  $u^2$  بستگی نداشته باشد. این، به نوبه خود، امکان پذیر است اگر و فقط اگر دو بردار  $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$  و  $\mathbf{l} \times \dot{\mathbf{l}}$  به‌ازای هر  $u^1$  هم‌خط باشند یا

$$(\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}) \times (\mathbf{l} \times \dot{\mathbf{l}}) = 0,$$

ولی

$$(\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}) \times (\mathbf{l} \times \dot{\mathbf{l}}) = (\dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{l}}) \mathbf{l} - (\dot{\mathbf{l}} \dot{\mathbf{p}}) \mathbf{l} = (\dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{l}}) \mathbf{l},$$

که شرط (۹.۱۴) را تامین می‌کند.

در حالت کلی، وقتی سطح گسترده‌نی نباشد، بردارهای  $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$  و  $\mathbf{l} \times \mathbf{l}$  مستقل خطی‌اند و بردار قائم  $(10.14)$  راستایش را با تغییر  $u^2$  در امتداد خط جاری تغییر می‌دهد. خط جاری روی صفحه مماس در هر نقطه از آن قرار دارد ولی صفحه مماس از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. به عبارت دیگر، صفحه مماس حول خط جاری، وقتی نقطه مماس در امتداد آن حرکت کند، می‌چرخد. صفحه مماس در  $P_0$  سطح را در امتداد خط جاری ماربر  $P_0$  قطع می‌نماید.

حال به بررسی رفتار بردار قائم، وقتی  $u^2 \rightarrow \infty$ ، می‌پردازیم. برای این کار، بردار  $(10.14)$  را با بردار

$$\mathbf{M}^* = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|u^2|} = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}}{|u^2|} + \operatorname{sgn}(u^2) \mathbf{l} \times \mathbf{l},$$

که به ازای  $u^2 \neq 0$  تعریف شده و با  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  همجهت است، عوض می‌کنیم. بردار بکه قائم  $\mathbf{m}$  نظیر همان جهت را داشته، و به ازای هر  $u^2$  تعریف شده است، و این بردار بشرطی که  $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$  و  $\mathbf{l} \times \mathbf{l}$  مستقل خطی باشند، به طور پیوسته تابع  $u^2$  است، چرا که در این حالت  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  به ازای هر  $u^2$  مخالف صفر است.

وقتی  $u^2 \rightarrow -\infty$ ،  $\mathbf{M}^* \rightarrow -\mathbf{l} \times \mathbf{l}$ ، و وقتی  $u^2 \rightarrow \infty$ ،  $\mathbf{M}^* \rightarrow \mathbf{l} \times \mathbf{l}$ . این یعنی، وقتی نقطه مماس در امتداد خط جاری حرکت کند، صفحه مماس به اندازه  $\pi$  حول خط جاری می‌چرخد، و موضع حدی صفحه مماس قائم به  $\mathbf{l} \times \mathbf{l}$  می‌باشد.

#### ۵.۱۴ خط محض یک سطح خطدار

نقطه‌ای از خط جاری یک سطح خطدار که در آن صفحه مماس به موضع حدی صفحه عمود باشد نقطه محض خط جاری نامیده می‌شود. مجموعه تمام نقاط محض یک منحنی تشکیل می‌دهند به نام خط محض سطح. فرض کنیم  $(u^1, u^2)$  نقطه محض خط جاری  $u^1$  باشد. در این صورت، بردار قائم سطح در این نقطه باید بر  $\mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)$  عمود باشد یا اینکه

$$[\dot{\mathbf{p}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1) + u^2 \mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)][\mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)] = 0,$$

که نتیجه می‌دهد

$$[\dot{\mathbf{p}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)][\mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)] + u^2 [\mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)]^2 = 0$$

یا

$$\dot{\mathbf{p}}\mathbf{l} + u^2 \mathbf{l}^2 = 0,$$

که در آن مقادیر توابع  $\dot{\mathbf{p}}$ ،  $\mathbf{l}$ ، و  $\mathbf{l}$  در  $u^1$  گرفته شده‌اند.

هرگاه  $\mathbf{l}^2 = 0$ ، نقطه محض وجود نخواهد داشت. این به ازای  $u^1$  در یک بازه فقط

وقتی می‌تواند رخ دهد که قسمت نظیر از سطح یک سطح استوانه‌ای باشد، چرا که، در این صورت،  $l$  در آن بازه ثابت می‌باشد. معادله، جز برای این نقاط،  $u^2$  را به صورت زیر معین می‌کند:

$$u^2 = -\frac{\dot{p}l}{\dot{l}^2} = -\frac{dp}{(dl)^2}.$$

با گذاردن این مقدار در معادله سطح، بردار موضع نقطه محض از خط جاری  $u^1$  به دست می‌آید:

$$(11.14) \quad r = p - \frac{\dot{p}l}{(\dot{l})^2}l = p - \frac{dp}{dl^2}l.$$

معادله (۱۱.۱۴)، وقتی طرف راست آن تابعی از متغیر  $u^1$  گرفته شود، معادله خط محض می‌باشد.

هرگاه  $\dot{p} \times l$  و  $\dot{l} \times l$  مستقل خطی باشند یا  $\dot{p}l \neq 0$ ، می‌توان به آسانی از آخر امتحان کرد و دید که نقطه با بردار موضع (۱۱.۱۴) واقعا "نقطه محض خط جاری نظیر است؛ و در نتیجه، (۱۱.۱۴) معادله خط محض می‌باشد.

اما، در حالتی که دو بردار وابسته خطی باشند و  $\dot{p}l = 0$ ، نیز این معادله، به شرط  $\dot{l} \times l \neq 0$ ، معنی دارد. در واقع، در این حالت،  $\dot{p}, \dot{l}, l$  بردارهایی هم‌صفحه هستند و داریم

$$\dot{p} = \alpha l + \beta \dot{l},$$

که از آن

$$\dot{p} \times l = \beta \dot{l} \times l.$$

معادله (۱۱.۱۴) به شکل

$$r = p - \beta l$$

است، که در آن  $\beta = \beta(u^1)$  به  $u^1$  بستگی دارد. با مشتق‌گیری نسبت به  $u^1$ ، داریم

$$\dot{r} = \dot{p} - \beta \dot{l} - \dot{\beta}l = \alpha l + \beta \dot{l} - \beta \dot{l} - \dot{\beta}l = (\alpha - \dot{\beta})l,$$

که نشان می‌دهد که، جز در حالت  $\alpha - \dot{\beta} = 0$ ، خط جاری بر منحنی (۱۱.۱۴) مماس است. لذا، به زبان کلسی، این سطح سطح مماسهای بر (۱۱.۱۴) است، و (۱۱.۱۴) معادله یال بازگشت سطح می‌باشد. اگر  $\alpha - \dot{\beta} = 0$  در یک بازه برقرار باشد، تابع (۱۱.۱۴) در این بازه ثابت بوده، و قسمت نظیر از منحنی به یک نقطه تقلیل می‌یابد. در این صورت، قسمت نظیر از سطح یک مخروط بوده و (۱۱.۱۴) راس را نمایش می‌دهد. حال نتایج را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه. معادله<sup>۱</sup> (۱۱.۱۴) نمایش خط محض یک سطح خط دار ناگسترده است. اگر سطح گسترده باشد، معادله<sup>۲</sup> (۱۱.۱۴) نمایش یال بازگشت سطح است، که در این حالت یک مخروط به راس خود تقلیل می یابد.

بردار قائم یک سطح خط دار در نقطه<sup>۳</sup> محض خط جاری بر  $\mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)$  عمود است. در همین حال، مثل تمام بردارهای قائم دیگر در نقاط این خط جاری، بر  $\mathbf{l}(u)$  عمود بوده، و لذا، با

$$\mathbf{l}(u^1) \times [\mathbf{l}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)] = [\mathbf{l}(u^1)]^2 \mathbf{l}(u^1) - [\mathbf{l}(u^1)\mathbf{l}(u^1)]\mathbf{l}(u^1) = \mathbf{l}(u^1)$$

همخط است. به عبارت دیگر، در نقطه<sup>۴</sup> محض خط جاری داریم

$$\mathbf{m} \times d\mathbf{l} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{m} \times \mathbf{l} = 0 \quad (12.14)$$

★ برای ارائه<sup>۵</sup> مفهوم نقطه<sup>۶</sup> محض خط جاری یک سطح خط دار راه دیگری نیز وجود دارد. دو خط جاری نظیر به مقادیر  $u^1 + h$  و  $u^1$  از پارامتر را در نظر گرفته، روی خط جاری نظیر به  $u^1$  نزدیکترین نقطه به خط جاری دیگر را پیدا می کنیم خطی که نزدیکترین نقاط دو خط را بهم وصل می کند عمود مشترک آنها است. ثابت می کنیم حد این نزدیکترین نقطه، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، نقطه<sup>۷</sup> محض خط جاری  $u^1$  است.

در واقع، فرض کنیم نقطه<sup>۸</sup>  $P$  از خط جاری  $u^1$  نزدیکترین نقطه به خط جاری  $u^1 + h$  بوده و دارای بردار موضع

$$\mathbf{p}(u^1) + \lambda \mathbf{l}(u^1) = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{l}$$

باشد و، بعلاوه، بردار موضع نزدیکترین نقطه<sup>۹</sup>  $P^*$  از خط جاری  $u^1 + h$  به صورت

$$\mathbf{p}(u^1 + h) + \mu \mathbf{l}(u^1 + h) = \mathbf{p}^* + \mu \mathbf{l}^*$$

باشد، که در آن  $\mathbf{p}^*$  و  $\mathbf{l}^*$  اختصارهایی برای  $\mathbf{p}(u^1 + h)$  و  $\mathbf{l}(u^1 + h)$  هستند. خط  $PP^*$  بر  $\mathbf{l}$  و  $\mathbf{l}^*$  عمود است. چون  $\overrightarrow{PP^*} = \mathbf{p}^* - \mathbf{p} + \mu \mathbf{l}^* - \lambda \mathbf{l}$  داریم

$$(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l} + \mu(\mathbf{l}^*\mathbf{l}) - \lambda \mathbf{l}^2 = 0,$$

$$(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}^* + \mu \mathbf{l}^{*2} - \lambda(\mathbf{l}\mathbf{l}^*) = 0.$$

هرگاه  $\mathbf{l} \neq 0$ ، آنگاه، به ازای هر  $h$  به قدر کافی کوچک، بردارهای  $\mathbf{l}$  و  $\mathbf{l}^*$  یک زاویه<sup>۱۰</sup> حاده<sup>۱۱</sup> ناصفر تشکیل می دهند و  $0 < \mathbf{l}\mathbf{l}^* < 1$ . بنابراین، می توان این دستگاه معادلات را نسبت به  $\lambda$  حل کرد. با توجه به اینکه  $\mathbf{l}^2 = \mathbf{l}^{*2} = 1$ ، خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})[(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}^*] + (\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}}{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[(l^*) - 1][(p^* - p)l^*] + (p^* - p)(l^* - l)}{(l^*)^2 - 1} \\
 &= \frac{(p^* - p)l^*}{l^* + 1} + \frac{(p^* - p)(l^* - l)}{(l^*)^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

وقتی  $h \rightarrow 0$ ،  $p^* \rightarrow p$  و  $l^* \rightarrow l$  حد اولین جمعوند صفر است. برای محاسبه حد جمعوند دوم، توجه می‌کنیم که  $(l^* - l)^2 = 2 - 2l^*l$ ، که از آن  $l^*l - 1 = -\frac{1}{2}(l^* - l)^2$  در نتیجه،

$$\frac{(p^* - p)(l^* - l)}{(l^*)^2 - 1} = -2 \frac{(p^* - p)(l^* - l)}{(l^* - l)^2(l^* + 1)} = -\frac{2}{l^* + 1} \frac{\frac{p^* - p}{h} \frac{l^* - l}{h}}{\left(\frac{l^* - l}{h}\right)^2}.$$

حال، وقتی  $h \rightarrow 0$ ،  $l^*l + 1 \rightarrow 2$ ،  $(p^* - p)/h \rightarrow \dot{p}$ ، و  $(l^* - l)/h \rightarrow \dot{l}$ . بنابراین، کل عبارت، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، به  $-\dot{p}\dot{l}/\dot{l}^2$  میل می‌کند، یا اینکه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda = -\frac{\dot{p}\dot{l}}{\dot{l}^2},$$

و حد نقطه مورد نظر بر نقطه محض خط جاری  $u^1$  منطبق شده، و مطلب به اثبات می‌رسد. \*

### امثله و تمرین

۱. سهمی گون هذلولوی و هذلولی گون یک پارچه سطوحی خط دار هستند. هریک از آنها دارای دو خانواده از خطوط جاری می‌باشند. خطوط محض آنها را پیدا کنید.
۲. مخروط گون (مثال ۸ از ۳.۱۱) یک سطح خط دار است. معادله مخروط گونی را بیابید که محورش محور  $z$  بوده و هادی‌اش خط  $x = at + 1$ ،  $y = bt$ ،  $z = ct$  باشد. خط محض این سطح را پیدا کنید. ثابت کنید خط محض در یک صفحه قرار دارد.
۳. خط محض مارپیچ گون را پیدا نمایید.
۴. سطح

$$x = (u^1)^2 + 2u^1u^2, \quad y = u^1 + u^2, \quad z = (u^1)^3 + 3(u^1)^2u^2$$

یک سطح خط دار است، زیرا  $v^2$  - خطوط (ثابت  $u^1$ ) خطوطی مستقیم هستند. آیا این سطح گستردنی است؟

۵. با استفاده از معادله (۱۱.۱۴)، یالهای بازگشت سطوح گستردنی مثالهای ۲ و ۳

در ۲۰۱۳، یعنی پوش خانواده صفحات قائم یک منحنی معلوم و خانواده صفحات  
اصلاحی آن، را پیدا کنید.

## فرمهای درجه دوم اساسی یک سطح

### ۱۵ چند نکته در باب نمادگذاری

#### ۱.۱۵ نماد جمعبندی

در نظریه سطوح از نماد فشردۀ خاصی استفاده می‌شود مناسب هندسه دیفرانسیل، که در ارتباط با حساب تانسورها وضع شده است. اغلب، یک شیء هندسی، مثلاً "یک بردار، یک نقطه، و غیره، با یک دستگاه از اعداد - یعنی مختصات آن - بیان می‌شود. در این حالات، این اعداد با یک حرف به انضمام یک یا چند اندیس، به صورت بالانویس یا زیرنویس، نشان داده می‌شوند. در بخش ۱۱، از این نوع نماد برای نمایش مختصات منحنی الخط یک نقطه به وسیله حرف  $u$  با بالانویس:  $u^1, u^2$ ، و مشتقات جزئی  $\mathbf{r}$  را به وسیله حرف  $\mathbf{r}$  با زیرنویس:  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  استفاده کردیم. به کمک اندیس متغیری مانند  $i$ ، دو معادله (۴.۱۱) را می‌توان با یک عبارت

$$u^i = u^i(u^1, u^2), \quad i = 1, 2$$

عوض کرد. با استفاده از علامت جمعبندی، می‌توان (۶.۱۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}_{i'} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_k.$$

چون برد جمعبندی در بسیاری از فرمولهای ما یکی است، یعنی  $i = 1, 2$ ، در ساده‌سازی قدمی فراتر نهاده، علامت جمعبندی را در این حالات حذف کرده، می‌نویسیم

$$(۱.۱۵) \quad \mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_k.$$

به بیان دقیقتر، قرار می‌گذاریم هر وقت یک اندیس در یک تکجمله‌ای یکبار به صورت زیرنویس و یکبار به صورت بالانویس تکرار شود، این عبارت را مجموع تکجمله‌ای با ۱ به جای اندیس مشترک و همان تکجمله‌ای با ۲ به جای اندیس مشترک بگیریم؛ مثلاً،

$$\begin{aligned} a_i b^i &= a_1 b^1 + a_2 b^2, \\ a_j b^{jk} &= a_1 b^{1k} + a_2 b^{2k}, \end{aligned}$$

$$g^{ij}g_{jk} = g^{i1}g_{1k} + g^{i2}g_{2k}.$$

اگر یک تکجمله‌ای صوری بیش از یک جفت اندیس داشته باشد، جمعبندی برای هر جفت جداگانه صورت خواهد گرفت؛ مثلاً،

$$a_{ij}b^{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}b^{ij} = a_{11}b^{11} + a_{21}b^{21} + a_{12}b^{12} + a_{22}b^{22},$$

$$a_{ijk}b^{ijk} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ijk}b^{ijk} = a_{111}b^{111} + a_{112}b^{112} + a_{121}b^{121} + a_{122}b^{122} + a_{211}b^{211} + a_{212}b^{212} + a_{221}b^{221} + a_{222}b^{222}.$$

ترتیب جمعبندیها، بدلیل تعویضپذیری جمع، اهمیتی ندارد. اندیسهایی که یکبار به صورت زیرنویس و یکبار به صورت بالانویس می‌آیند اندیسهای ظاهری یا اندیسهای جمعبندی نام دارند. همیشه دو اندیس جمعبندی در یک تکجمله‌ای صوری را می‌توان، بدون تغییر در معنی عبارت، با حرف دیگر عوض کرد؛ مثلاً،

$$a^ib_i = a^ib_j = a^kb_k = a^1b_1 + a^2b_2.$$

همچنین، هر اندیسی که در یک حرف به صورت بالانویس و زیرنویس ظاهر شود یک اندیس جمعبندی خواهیم گرفت؛ مثلاً،

$$a_{ij}^j = a_{i1}^1 + a_{i2}^2.$$

اندیسهای دیگر اندیسهای آزاد نام دارند، و می‌توان مستقلاً به جای آنها مقدار گذاشت. در معدودی حالت که نمی‌خواهیم یک اندیس تکراری اندیس جمعبندی باشد، این امر را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$a_i b^i (i!) \text{ یا } a_i b^i \text{ (بدون جمعبندی)!}$$

با این قرار، لازم است در نوشتن فرمولهایی که بیش از یک جمعبندی دارند احتیاط شود. یعنی، برای احتراز از ابهام، باید اندیس جمعبندیهای مختلف را با حروف متمایز نشان داد. مثلاً، مربع مجموع  $a^1b_1 + a^2b_2$  را به شکل

$$(a^ib_i)^2 = a^ib_ia^ib_j$$

نوشت، نه به شکل  $a^ib_ia^ib_i$ .

با این احتیاط، برای احتراز از تکرار اندیسهای جمعبندی، می‌توان، طبق معمول، تکجمله‌ایها را به طور صوری درهم ضرب کرد. اما، قانون شرکتپذیری صوری نتیجه‌ای است از قوانین شرکتپذیری، تعویضپذیری، و بخشپذیری با هم؛ مثلاً، داریم

$$(*) \quad (a_{ij}b^i)c^j = a_{ij}b^ib^jc^j.$$

در واقع،

$$\begin{aligned}(a_{ij}b^i) &= a_{1j}b^1 + a_{2j}b^2, \\ (a_{ij}b^i)c^j &= (a_{1j}b^1 + a_{2j}b^2)c^j \\ &= (a_{11}b^1 + a_{21}b^2)c^1 + (a_{12}b^1 + a_{22}b^2)c^2 \\ &= a_{11}b^1c^1 + a_{12}b^1c^2 + a_{21}b^2c^1 + a_{22}b^2c^2 = a_{ij}b^ic^j.\end{aligned}$$

همچنین، می‌توان تکجمله‌ایهایی که دارای بالانویس و زیرنویس آزاد یکسان هستند را با هم جمع کرد. این مجموعه‌ها، وقتی در تکجمله‌ای دیگر، چه دارای اندیس جمع‌بندی باشد یا نه، ضرب شود، به‌طور صوری در قانون پخش‌پذیری صدق می‌کند.

مثلاً، با یک اندیس آزاد  $i$ ، داریم

$$(**) \quad (a_{ijk} + b_{ijk})c^{jk} = a_{ijk}c^{jk} + b_{ijk}c^{jk}.$$

این رابطه درواقع نمایش دو اتحاد است، یکی به‌ازای  $i = 1$ ، و دیگری به‌ازای  $i = 2$ . مثالی دیگر عبارت است از

$$\begin{aligned}(***) \quad [(a_i + b_i)c^{ik}](a_k^jb_j) &= (a_i + b_i)c^{ik}(a_k^jb_j) \\ &= (a_ic^{ik} + b_ic^{ik})a_k^jb_j = a_ic^{ik}a_k^jb_j + b_ic^{ik}a_k^jb_j.\end{aligned}$$

در اینجا همه اندیس‌ها، اندیس‌های جمع‌بندی می‌باشند.

اگر یک حرف اندیس‌دار نمایش یک تابع از یک یا چند متغیر باشد، می‌توان قواعد مشتق‌گیری را برای مجموعه‌ها و حاصل‌ضرب‌ها به‌طور صوری به‌کار برد؛ مثلاً،

$$\begin{aligned}d(a_{ij}b^{jk}) &= (da_{ij})b^{jk} + a_{ij}db^{jk}, \\ \frac{d}{dt}(a_{ij}b^{ij}) &= \left(\frac{d}{dt}a_{ij}\right)b^{ij} + a_{ij}\frac{d}{dt}b^{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial u^k}a_{ij}b^{jl} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}b^{jl} + a_{ij}\frac{\partial b^{jl}}{\partial u^k}.\end{aligned}$$

### امثله و تمرین

۱. عبارت زیر را با فرض  $g_{ij} = g_{ji}$  به‌شکل گسترده بنویسید:

$$: a_{ij}x^ix^j \quad (T)$$

$$: g_{ij}x^ix^j \quad (B)$$

$$: g_{ij}x^ix^j \quad (P)$$

۲. ثابت کنید که

$$(a^{ij} + a^{ji})(b_{ij} - b_{ji}) = 0.$$

\* برهان. اگر اندیس‌های جمع‌بندی  $i$  و  $j$  با هم عوض شوند، مقدار عبارت سمت

چپ تغییر نمی‌کند. بنابراین،

$$(a^{ij} + a^{ji})(b_{ij} - b_{ji}) = (a^{ji} + a^{ij})(b_{ji} - b_{ij}).$$

اما، از آن سو، طبق قانون تعویضپذیری، داریم

$$(a^{ij} + a^{ji})(b_{ij} - b_{ji}) = -(a^{ji} + a^{ij})(b_{ji} - b_{ij}).$$

این ایجاب می‌کند که عبارت مورد نظر مساوی صفر باشد. \*

۳. فرض کنید  $a_1^1 = 1, a_2^1 = a_1^2 = 2, a_2^2 = 0; b_1^1 = b_2^2 = 1, b_2^1 = 2, b_1^2 = 0$  و مقدار عبارات زیر را بیابید:

(آ)  $a_i^i$ ؛

(ب)  $a_i^i$  (بدون جمع‌بندی)؛

(پ)  $a_i^i b_j^j$ ؛

(ت)  $a_j^i b_i^j$ ؛

(ث)  $a_j^i a_i^j$ ؛

(ج)  $b_i^j b_j^i$ .

## ۲۰۱۵ مشتق و دیفرانسیل یک تابع دومتغیره

فرض کنیم  $f(u^1, u^2)$  یک تابع مشتقپذیر از دو متغیر  $u^1, u^2$  بوده، و این متغیرها خود توابعی از متغیر  $t$  باشند. مشتقات جزئی را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$f_{u^1 u^1} = f_{11}, f_{u^1 u^2} = f_{12}, f_{u^2 u^1} = f_{21}, f_{u^2 u^2} = f_{22}, \text{ و غیره.}$$

در این صورت، مشتقات ترکیب نسبت به  $t$  با فرمولهای زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{df}{dt} = f_i \frac{du^i}{dt},$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = f_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + f_i \frac{d^2 u^i}{dt^2},$$

$$\frac{d^3 f}{dt^3} = f_{ijk} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} + 3f_{ij} \frac{d^2 u^i}{dt^2} \frac{du^j}{dt} + f_i \frac{d^3 u^i}{dt^3}.$$

تحقیق کنید!

دیفرانسیل این تابع مساوی است با  $df = f_i du^i$ .

هرگاه متغیرهای  $u^1, u^2$  توابعی از دو متغیر جدید  $u^{1'}, u^{2'}$  باشند، آنگاه، بعد از گذاردن این تابعها به جای  $u^1, u^2$ ، برای مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای  $u^{1'}, u^{2'}$  داریم

$$f_i = f_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

که در آن  $i$  و  $i'$  اندیسهای متفاوتی هستند که مقادیر 1 و 2 را مستقلاً می‌گیرند؛  $i'$  در اینجا اندیس آزاد و  $i$  اندیس جمع‌بندی است.

همچنین،

$$\begin{aligned} f_{i'j'} &= \frac{\partial}{\partial u^{j'}} f_{i'} = \frac{\partial}{\partial u^{j'}} \left( f_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u^{j'}} f_i \right) \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} + f_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \\ &= f_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}} + f_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} = f_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} + f_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{i'j'k'} &= f_{ijk} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \\ &+ f_{ij} \left[ \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{k'}} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{j'} \partial u^{k'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{k'} \partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \right] + f_i \frac{\partial^3 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'} \partial u^{k'}}. \end{aligned}$$

### ۵.۱۳. علایم کرونگر<sup>۱</sup>

ما اغلب در محاسبات از علایم کرونگر  $\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_i^j$  استفاده خواهیم کرد. این علایم با فرمول زیر تعریف می‌شوند:

$$(2.15) \quad \delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

علایم کرونگر در اتحادهای زیر صدق می‌کنند:

$$(3.15) \quad \delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k, \quad \delta_{ij} \delta^{jk} = \delta_i^k,$$

$$(4.15) \quad a_i \delta_j^i = a_j,$$

$$(5.15) \quad b^k \delta_k^i = b^i.$$

مثلاً، "اتحاد آخر را ثابت می‌کنیم و اثبات دوتای دیگر را برای خواننده می‌گذاریم.

طرف چپ این اتحاد، به‌ازای مقدار ثابتی از  $i$ ، مجموع دو جمله است، یعنی

$b^1 \delta_1^i + b^2 \delta_2^i$ . در این دو جمله، جمله‌ای که در آن اندیس پایینی در  $\delta$  مخالف  $i$  است

مساوی صفر است، و دیگری دارای مقدار  $b^i = b^1$  می‌باشد، و بدین ترتیب اتحاد ثابت

می‌شود.

به بیان کلی، ضرب صوری یک تکجمله‌ای صوری دارای یک زیرنویس (یا بالانویس)

آزادمانند  $i$  در  $\delta_k^i$  (یا  $\delta_i^k$ ) یعنی همان تکمله‌ای که در آن اندیس  $i$  با  $k$  عوض شده است؛ مثلاً،

$$\begin{aligned}a_{ij}\delta_k^i &= a_{kj}, \\ \delta_k^i b^{ks} &= b^{is}, \\ a_{ij}^k \delta_i^s \delta_k^s &= a_{rj}^s.\end{aligned}$$

### تمرین

۱. اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$a_i^k b_j c_k + a_i^m b_l c_m + \delta_i^l a_l^k b_k c_s - a_m^l \delta_j^k \delta_l^s b_k \delta_i^m c_s = 2a_i^k b_j c_k.$$

راهنمایی. ابتدا خود را از علائم کرونکر خلاص کرده، سپس اندیسهای جمع‌بندی را طوری تغییر دهید که همه جمعوندها به یک شکل درآیند.  
۲. با این فرض که

$$\begin{aligned}g_{11} &= 1, & g_{12} &= g_{21} = 0, & g_{22} &= \cos^2(u^1), \\ g^{11} &= 1, & g^{12} &= g^{21} = 0, & g^{22} &= \frac{1}{\cos^2(u^1)},\end{aligned}$$

عبارت زیر را محاسبه نمایید:

$$g_{ij}g^{jk}, \quad g_{ij}g^{ij}, \quad g_{ij}\delta_1^i\delta_2^j, \quad \left(\frac{\partial}{\partial u^i}g_{kl}\right)g^{jk}.$$

باید مقادیر ۱ و ۲ را جداگانه به جای اندیسهای آزاد قرار داده، مقادیر تمام ترکیبات را پیدا کنیم (مثلاً، چهارتا برای  $g_{ij}g^{jk}$ ، یعنی  $g_{1j}g^{j1}, g_{1j}g^{j2}, g_{2j}g^{j1}, g_{2j}g^{j2}$ ).  
۳.  $\delta_i^i$  را پیدا کنید.

### ۴.۱۵ \* تعمیم به ابعاد بالاتر

نمادهای به کار رفته در اینجا را می‌توان به آسانی برای هندسه ابعاد بالاتر مناسب ساخت. اگر بعد به جای ۲ مساوی  $n$  باشد، همه اندیسها مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را خواهند گرفت. تکرار یک اندیس به صورت زیرنویس و بالانویس در یک تکمله‌ای بدین معنی است که جمع‌بندی روی اندیسی که تمام مقادیر را می‌گیرد انجام می‌شود؛ مثلاً،

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n.$$

علائم کرونکر به همان صورت قبل تعریف می‌شوند، جز آنکه در اینجا اندیسها اعداد  $1, 2, \dots, n$  را اختیار می‌کنند.

تمام فرمولهای زیر بخش پیش با این تغییر برد اندیسها برقرارند جز یکی، و آن در تمرین ۳ از ۳.۱۵ است، که دراین وضع خواهیم داشت

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^n = n \quad \star$$

## ۱۶ اولین فرم اساسی

### ۱.۱۶ منحنیهای واقع بر یک سطح و بردارهای مماس

اگر یک منحنی پارامتری روی سطح  $r = r(u^1, u^2)$  به مختصات منحنی الخط  $u^1, u^2$  واقع باشد، مختصات منحنی الخط نقاط منحنی توابعی از پارامتر منحنی می شوند، و می توان مسیر، و یا بخشی از آن که در قلمرو اعتبار دستگاه مختصات موضعی سطح قرار دارد، را با معادلات

$$(1.16) \quad u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t)$$

تعریف کرد.

معادله پارامتری منحنی در فضا با گذاردن این توابع در معادله سطح به جای  $u^1$  و  $u^2$  به دست می آید:

$$r = r(u^1(t), u^2(t)).$$

اگر نمایش پارامتری سطح و منحنی هر دو از کلاس  $C_r$  باشند، معادله اخیر نیز از کلاس  $C_r$  است. اگر، علاوه بر این، نقطه  $P_0$  نظیر به مقدار  $t_0$  از پارامتر، یک نقطه منتظم پارامتری سازی سطح بوده و

$$[\dot{u}^1(t_0)]^2 + [\dot{u}^2(t_0)]^2 > 0,$$

$P_0$  یک نقطه منتظم مسیر می باشد. درواقع، بردار مماس بر منحنی در  $P_0$  خواهد بود:

$$(2.16) \quad \frac{dr}{dt}(t_0) = \frac{du^i}{dt}(t_0) r_i(u^1(t_0), u^2(t_0)).$$

چون این نقطه یک نقطه منتظم سطح است، دو بردار  $r_1$  و  $r_2$  در آن مستقل هستند. ضرایب  $du^1/dt, du^2/dt$  همزمان صفر نیستند. بنابراین،  $dr(t_0)/dt \neq 0$ . از تعویض مشتق با دیفرانسیل، که معادل ضرب در اسکالر دلخواه است، بردار مماس دیگری بر منحنی به دست می آید:

$$(3.16) \quad dr = du^i r_i.$$

همانطور که دیدیم، بردارهای  $r_1$  و  $r_2$  صفحه مماس بر سطح را در  $(u^1(t_0), u^2(t_0))$  معین می کنند. لذا، بردار مماس بر منحنی (۳.۱۶) که ترکیبی خطی از  $r_1$  و  $r_2$  است، در صفحه مماس قرار می گیرد. این بردار را یک بردار مماس بر سطح در نقطه  $P_0$  می نامیم.

حال می‌توان بردارهای  $r_1$  و  $r_2$  را در یک نقطه از سطح، به عنوان پایه یک فضای برداری از تمام بردارهای مماس بر سطح مزبور در این نقطه به کار برد. بنابراین، هر بردار مماس  $a$  بر این سطح را می‌توان به طور منحصر بفرد به شکل

$$a = a^i r_i$$

نمایش داد. واضح است که این پایه به وسیله مختصات منحنی الخط موضعی روی سطح مشخص می‌شود. از اینرو، اعداد  $a^1, a^2$  را مولفه‌های بردار  $a$  نسبت به دستگاه مختصات منحنی الخط یا، اگر از قراین روشن باشد، فقط مولفه‌های بردار می‌گوییم.

لذا، می‌توان گفت که مولفه‌های بردار مماس بر منحنی (۱۰۱۶) عبارتند از

$$(du^1/dt, du^2/dt)$$

دومسیر  $u^i = \phi^i(t)$ ,  $u^i = \psi^i(\tau)$  واقع بر یک سطح، که در نقطه‌ای مانند  $P_0 = (u_0^1, u_0^2)$  نظیر به مقادیر  $t_0$  و  $\tau_0$  از پارامتر مشترکند (یعنی،  $(\phi^i(t_0) = \psi^i(\tau_0))$ )، دارای یک بردار مماس مشترک در  $P_0$  هستند اگر و فقط اگر  $\dot{\phi}^i(t_0) = \dot{\psi}^i(\tau_0)$ .

از طرفی، هر بردار که بر صفحه مماس در  $(u_0^1, u_0^2)$  واقع باشد به شکل  $a = a^i r_i$  است؛ و در نتیجه، بر مسیری واقع روی سطح مماس می‌باشد؛ مثلاً، مسیر  $u^i = u_0^i + a^i t$  در  $t = 0$ .

اگر مختصات منحنی الخط را طبق فرمول (۴۰۱۱) تغییر دهیم، پایه صفحه مماس نیز تغییر می‌کند، و این به نوبه خود موجب تغییر مختصات بردار مماس مفروض می‌شود. در مورد بردارهای پایه داریم

$$r_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} r_i, \quad r_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} r_{i'},$$

که از آنجا

$$a = a^{i'} r_{i'} = a^i r_i = a^i \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} r_{i'}.$$

این رابطه، بجهت استقلال بردارهای  $r_1, r_2$ ، ایجاب می‌کند که

$$(4.16) \quad a^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} a^i,$$

که مولفه‌های بردار  $a$  را در دستگاه جدید بر حسب مولفه‌های مختصات قدیم بیان می‌کند. این کار را می‌توان به صورت دیگر نیز انجام داد؛ یعنی، به صورت

$$(5.16) \quad a^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} a^{i'}.$$

توجه کنید که بردار مماس در یک نقطه از سطح ممکن است مساوی هیچ بردار مماس در نقطه دیگر نباشد. لذا، برای بررسی بردارهای مماس بر یک سطح، باید تصریح شود که این بردارها در چه نقطه‌ای مماسند. به عبارت دیگر، ما آنها را بردارهای وابسته به یک نقطه در نظر می‌گیریم نه به صورت بردارهای آزاد.

### امثله و تمرین

۱. بردار مماس بر دایره عرض جغرافیایی ثابت  $\theta = \theta_0$  روی کره

در نقطه  $(\theta_0, \phi_0)$  به شکل زیر است:

$$\lambda \mathbf{r}_\phi(\theta_0, \phi_0) = \lambda \{-a \cos \theta_0 \sin \phi_0, a \cos \theta_0 \cos \phi_0, 0\}.$$

مولفه‌های آن در مختصات منحنی الخط موضعی عبارتند از  $\{0, \lambda\}$ . به همین ترتیب، بردار مماس بر نصف النهار در این نقطه مساوی

$$\mu \{-a \sin \theta_0 \cos \phi_0, -a \sin \theta_0 \sin \phi_0, a \cos \theta_0\}$$

بوده، و مولفه‌های آن در مختصات منحنی الخط عبارتند از  $\{\mu, 0\}$ .

۲. همان دایره عرض جغرافیایی دارای معادله

$$u = a \tan \left( \frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2} \right) \cos t, \quad v = a \tan \left( \frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2} \right) \sin t$$

در مختصات ذکر شده در تمرین ۹ از ۳۰۱۱ است. لذا، مولفه‌های بردار مماس در این مختصات عبارتند از

$$\left\{ -a \tan \left( \frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2} \right) \sin t_0, a \tan \left( \frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2} \right) \cos t_0 \right\}.$$

این مطلب را ثابت کنید!

۳. ثابت کنید که نصف النهار ثابت  $\phi = \phi_0$  دارای معادلات  $u = t \cos \phi_0, v = t \sin \phi_0$

در مختصات  $u, v$  تمرین ۹ از ۳۰۱۱ روی کره است.

۴. راستای منحنی  $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$  در یک نقطه با نسبت  $du^1:du^2$  مشتقات یا

دیفرانسیلها معین می‌شود تا خود مشتقات  $u^1, u^2$ ، زیرا ضرب هر دوی آنها در یک عدد طول و، احتمالاً، جهت بردار مورد نمایش آنها را تغییر می‌دهد اما راستای خطی را که بردار بر آن واقع است تغییر نمی‌دهد.

۵. تابع حقیقی  $f(P)$  تعریف شده در تمام نقاط یک همسایگی نقطه  $P_0$  واقع بر یک

سطح از کلاس  $C_k$  ( $k \geq 1$ ) را در نظر می‌گیریم. این تابع در یک دستگاه مختصات موضعی مانند  $(u^1, u^2)$  با یک تابع حقیقی دو متغیره، که آن را با همان حرف ولی به

صورت  $f(u^1, u^2)$  نشان می دهیم ، نموده می شود . روی سطح مزبور ، یک منحنی با بردار مماس  $a$  در  $P_0$  در نظر می گیریم . نقطه ای مانند  $P$  از این سطح به پارامتر  $t$  منحنی بستگی دارد ؛ یعنی ،  $P = P(t)$  . بنابراین ،  $\phi(t) = f(P(t))$  یک تابع حقیقی از  $t$  است . نشان دهید که اگر تابع  $f(u^1, u^2)$  در  $P_0 = P(t_0)$  مشتق پذیر بوده ، و بردار  $a$  در دستگاه مختصات موضعی دارای مولفه های  $\{a^1, a^2\}$  باشد ، مشتق  $\phi$  در  $t_0$  مساوی است با

$$\frac{d\phi}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0^1, u_0^2)a^i.$$

در نتیجه ، این مشتق به منحنی بستگی ندارد بلکه فقط تابع بردار مماس  $a$  است . همچنین ، ثابت کنید این مشتق به دستگاه مختصات موضعی نیز بستگی ندارد .

۶ . با بردار ثابت  $a$  و تابع متغیر  $f$  ، در تمرین پیش به هر تابع مشتق پذیر  $f$  یک عدد حقیقی مربوط می شود . این نگاشت از مجموعه توابع مشتق پذیر بتوی مجموعه اعداد حقیقی یک تابعی نامیده می شود . مقدار نظیر به تابع  $f$  را با  $X_a f$  نشان می دهیم . خواص تابعی  $X_a$  مذکور در زیر را ثابت کنید :

$$X_a(f + g) = X_a f + X_a g ,$$

$$X_a(\alpha f) = \alpha X_a f, \quad \alpha = \text{ثابت} ,$$

$$X_a(f \cdot g) = (X_a f) \cdot g(P_0) + f(P_0)X_a g.$$

تابعیهای برخورداری از این خواص اشتقاق نامیده می شوند . ثابت کنید که اشتقاق  $X_a$  ، به ازای  $a = r_i$  ، با مشتق جزئی نسبت به  $u^i$  یکی است ؛ یعنی ،

$$X_{r_i} f = (\partial f / \partial u^i)(u_0^1, u_0^2)$$

۷ . اگر  $X$  و  $Y$  دو اشتقاق در  $P_0$  بوده و  $\alpha$  یک عدد حقیقی باشد ، مجموع  $X + Y$  و

حاصل ضرب  $\alpha X$  را به صورت زیر تعریف می کنیم : به ازای هر  $f$  ،

$$(X + Y)f = Xf + Yf, \quad (\alpha X)f = \alpha Xf.$$

ثابت کنید که اشتقاقها یک فضای خطی تشکیل می دهند . ثابت کنید نگاشت

$$a \rightarrow X_a$$

از فضای مماس در  $P_0$  بتوی فضای اشتقاقها در  $P_0$  یک تبدیل خطی است که بردارهای مستقل را به بردارهای مستقل می برد .

★ تبصره . این نگاشت ، در صورتی که سطح و توابع از کلاس  $C_\infty$  باشند ، یک ایزومرفیسم

فضاهای خطی است. این امر تعریف بردارهای مماس در  $P_0$  را به عنوان اشتقاقها در  $P_0$  ممکن می سازد. این روش، با آنکه کمتر شهودی است، ولی دارای محسنت فنی بوده و در حال حاضر در هندسه دیفرانسیل از آن خیلی استفاده می شود. ★

### ★ ۲.۱۶ بردارهای مماس در چندگونا‌های دیفرانسیل

این امر که هر بردار مماس بر یک سطح را می توان به عنوان یک بردار مماس بر یک مسیر روی سطح، یا خانواده‌ای از مسیرها با یک نقطه مشترک و مشتقات مساوی در این نقطه، مشخص کرد، به ما اجازه تعمیم مفهوم بردار مماس به چندگونا‌های دیفرانسیل مجرد را می دهد.

چون تحدید به ابعاد دو تعمیم را ساده تر نمی کند، تعمیم را برای حالت کلی چند-گونا‌ی  $n$  بعدی بیان می کنیم. بنابراین، اندیسهای ما در این بخش مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را اختیار خواهند کرد.

نگاشت پیوسته  $\phi$  از بازه  $[0, x]$  بتوی چندگونا‌ی  $M$  یک مسیر در  $M$  نامیده می شود. نقشها، به ازای یک همسایگی به قدر کافی کوچک از  $t_0 \in [0, x]$ ، در یک همسایگی مختصات نقطه  $\phi(t_0)$  قرار می گیرند؛ در نتیجه، نگاشت را در این همسایگی می توان در مختصات موضعی با معادله‌ای به شکل

$$u^i = \phi^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

نشان داد. اگر این توابع در  $t_0$  مشتق پیوسته داشته باشند، می گوئیم مسیر از کلاس  $C_1$  است. به ازای  $t_0 = 0$  و  $t_0 = 1$ ، به ترتیب از مشتقات راست و چپ استفاده خواهیم کرد. دو مسیر  $\phi$  و  $\psi$  از کلاس  $C_1$  را که از نقطه  $P_0$  می گذرند (یعنی،  $\phi(0) = \psi(0) = P_0$ ) هم ارز گوئیم اگر  $\phi^i(0) = \psi^i(0)$ . کلاس هم ارزی تحت این رابطه هم ارزی یک بردار مماس چند-گونا در  $P_0$  نامیده می شود. همچنین، می گوئیم این بردار بر هر یک از مسیرهای کلاس هم ارزی در مبداء مسیر مماس است. برای توجیه این تعریف، باید استقلال رابطه هم ارزی را از دستگاه مختصات موضعی مجاز در  $P_0$ ، که با کاربرد ساده‌ای از قاعده زنجیره‌ای برای مشتقگیری از ترکیب توابع صورت می گیرد، اثبات کرد.

جمع بردارهای مماس در  $P_0$  را به صورت زیر تعریف می کنیم. فرض کنیم بردار  $v$  با مسیر  $\phi$  و  $w$  با  $\psi$  نموده شده باشند،  $u^i = \phi^i(t)$ ،  $u^i = \psi^i(t)$  ( $0 \leq t \leq \beta$ ) نمایشهای موضعی این مسیرها در مختصات موضعی ثابتی در یکی از همسایگیهای نقطه  $P_0$  به مختصات  $u_0^i = \phi^i(0) = \psi^i(0)$  باشند.  $v + w$  را کلاس هم ارزی مسیری تعریف می کنیم که نمایشش در همان مختصات موضعی  $u_0^i$ ،  $t \in [0, \beta]$   $\phi^i(t) + \psi^i(t) - u_0^i$  است. باید اعتبار این تعریف

را با اثبات استقلالش از نماینده‌های  $\phi$  و  $\psi$  و دستگاه مختصات موضعی ثابت کنیم. همچنین، بردار  $\lambda v$ ، که  $v$  با معادلات  $u^i = \phi^i(t)$  نموده شده، را کلاس هم‌ارزی مسیری به معادلات  $u^i = \phi^i(\lambda t)$  تعریف می‌کنیم. با اعمالی که اینگونه تعریف شدند، بردارهای مماس در  $P_0$  یک فضای برداری  $n$  بعدی به نام فضای مماس برچندگونا در  $P_0$  را تشکیل می‌دهند. هر دستگاه مختصات موضعی در همسایگی  $P_0$  یک پایه طبیعی از فضای مماس در  $P_0$  را القا می‌کند. این پایه از بردارهای  $e_1, e_2, \dots, e_n$  تشکیل شده، که  $e_j$  بردار مماس بر مسیر نموده شده با معادله

$$u^i = \delta_j^i t + u_0^i$$

است، که در این معادله  $u_0^i$  مختصات نقطه  $P_0$  می‌باشند.

اگر مختصات موضعی به صورت زیر تغییر کنند:

(۶.۱۶)

$$u^i = u^i(u^{1'}, \dots, u^{n'}),$$

بردارهای پایه طبیعی طبق فرمولهای

(۷.۱۶)

$$e_{k'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} e_k,$$

و مولفه‌های بردار مماس طبق فرمولهای زیر تغییر خواهند کرد:

(۸.۱۶)

$$a^{k'} = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k} a^k.$$

در واقع، معادله مسیر  $u^{i'} = \delta_{k'}^{i'} t + u_0^{i'}$  در مختصات قدیم مساوی است با

$$u^k = u^k(\delta_{k'}^{i'} t + u_0^{i'}, \dots, \delta_{k'}^{n'} t + u_0^{n'}).$$

بنابراین، مولفه‌های بردار مماس  $e_{k'}$  این مسیر در مختصات قدیم برابر می‌شود با

$$\frac{du^k}{dt} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}} \delta_{k'}^{j'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}.$$

و (۷.۱۶) فوراً نتیجه خواهد شد. اثبات فرمولهای (۸.۱۶) به خواننده محول می‌شود.

همچنین، می‌توان تعریف بردار مماس در یک نقطه را برحسب اشتقاقها، به صورتی که در تمرینات ۵، ۶، و ۷ بخش پیش توصیف شده، به چندگونا‌های دیفرانسیل تعمیم داد. ★

۳.۱۶ طول قوس یک منحنی واقع بر یک سطح

روی سطح  $r = r(u^1, u^2)$  یک منحنی به معادلات پارامتری

$$(۹۰۱۶) \quad u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t), \quad a \leq t \leq b$$

را در نظر می گیریم. معادله این منحنی در فضا به شکل  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$  می باشد.

قضیه. طول قوس منحنی (۹۰۱۶) بین  $t = a$  و  $t = b$  برابر است با

$$(۱۰۰۱۶) \quad s = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j},$$

که در آن  $du^i, du^j$  دیفرانسیلهای تابع (۹۰۱۶) بوده، و

$$(۱۱۰۱۶) \quad g_{ij}(u^1, u^2) = \mathbf{r}_i(u^1, u^2) \mathbf{r}_j(u^1, u^2).$$

برهان. طبق قضیه ۵.۳، داریم

$$s = \int_a^b |d\mathbf{r}| \quad \text{یا} \quad s = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| ds$$

حال می پردازیم به محاسبه مربع  $d\mathbf{r}$ . داریم

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 du^1 + \mathbf{r}_2 du^2 = \mathbf{r}_i du^i,$$

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{r}_i du^i)^2 = \mathbf{r}_i du^i \mathbf{r}_j du^j = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j du^i du^j,$$

که در آن مشتقات جزئی  $\mathbf{r}_i$  و  $\mathbf{r}_j$  فقط به متغیرهای  $u^1, u^2$  وابسته اند ولی از دیفرانسیلهای  $du^1, du^2$  مستقل می باشند. علاوه بر این، با معرفی نماد (۱۱۰۱۶)، داریم

$$(۱۲۰۱۶) \quad ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = g_{ij} du^i du^j$$

یا

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2,$$

که فوراً (۱۰۰۱۶) را نتیجه خواهد داد.

#### ۴.۱۶ اولین فرم اساسی یک سطح

طرف راست فرمول (۱۲۰۱۶) یک فرم درجه دوم از دیفرانسیلهای  $du^1, du^2$  است. این فرم را اولین فرم اساسی یا فرم متری سطح می نامیم. اگر  $du^1$  و  $du^2$  با هم صفر نباشند، و نقطه  $(u^1, u^2)$  از سطح نقطه منتظم باشد، فرم درجه دوم (۱۲۰۱۶) دارای مقدار مثبت است، زیرا این فرم درجه دوم مساوی مربع طول بردار ناصفر  $\mathbf{r}_i du^i$  است. در نتیجه، اولین فرم اساسی در یک نقطه منتظم سطح یک فرم درجه دوم معین مثبت می باشد. ضرایب  $g_{ij}$  موجود در فرم متری توابعی هستند از کلاسی که از کلاس سطح یکی کمتر است. از فرمولهای (۱۱۰۱۶) نتیجه می شود که این ضرایب نسبت به اندیسها متقارن

هستند؛ یعنی،

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

این ضرایب ماتریس  $2 \times 2$  متقارن زیر را می سازند:

$$(13.16) \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

که دترمینان آن، به نام مبین / اولین فرم اساسی، با  $g$  نموده می شود؛ یعنی،

$$(14.16) \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

در نقاط منتظم پارامتری سازی سطح، همواره داریم  $g_{11} > 0$ ،  $g_{22} > 0$ ، و  $g > 0$ . عناصر ماتریس معکوس  $(13.16)$  به وسیله  $g^{ij}$  با بالانویس نموده می شوند؛ یعنی،

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

این ماتریس متقارن نیز هست:

$$g^{ij} = g^{ji}.$$

چون

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

داریم

$$(15.16) \quad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j.$$

همچنین، می توان مستقیماً "حساب کرد که

$$(16.16) \quad g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}.$$

و نیز، برای کاربردهای آتی، ملاحظه می کنیم که

$$(17.16) \quad (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = g.$$

در واقع،

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

این برهان دیگری است از اینکه در نقاط منتظم  $g > 0$ .

امثله و تمرین

در مثالهای زیر، محاسبات را کامل کنید.

۱. صفحه در مختصات دکارتی متعامد یک‌ه  $x, y$  دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

است، که از آنجا  $g_{11} = g_{22} = 1$  ،  $g_{12} = 0$  ، و  $g^{11} = g^{22} = 1$  ،  $g^{12} = 0$  .

۲. اولین فرم اساسی صفحه در مختصات قطبی  $\rho, \phi$  عبارت است از

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2.$$

در نتیجه ،

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \rho^2, \quad g = \rho^2,$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \rho^{-2}.$$

۳. کره در مختصات کروی  $\theta, \phi$  دارای معادلات پارامتری زیر است (مثال ۲، زیربخش

: (۳.۱۱)

$$x = a \cos \theta \cos \phi, \quad y = a \cos \theta \sin \phi, \quad z = a \sin \theta,$$

که از آنجا

$$x_\theta = -a \sin \theta \cos \phi, \quad y_\theta = -a \sin \theta \sin \phi, \quad z_\theta = a \cos \theta,$$

$$x_\phi = -a \cos \theta \sin \phi, \quad y_\phi = a \cos \theta \cos \phi, \quad z_\phi = 0,$$

$$g_{11} = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = a^2, \quad g_{12} = g_{21} = x_\theta x_\phi + y_\theta y_\phi + z_\theta z_\phi = 0,$$

$$g_{22} = x_\phi^2 + y_\phi^2 + z_\phi^2 = a^2 \cos^2 \theta,$$

لذا، اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2)$$

و

$$g_{11} = a^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 \cos^2 \theta,$$

$$g = a^4 \cos^2 \theta, \quad g^{11} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta}.$$

۴. در مورد پارامتری سازی  $u, v$  مثال ۹، زیربخش ۳.۱۱، داریم

$$g_{11} = g_{22} = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}, \quad g_{12} = 0, \quad g = \frac{256a^8}{(4a^2 + u^2 + v^2)^4},$$

$$g^{11} = g^{22} = \frac{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}{16a^4}, \quad g^{12} = 0,$$

لذا، اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2).$$

۵. اولین فرم اساسی سطح دوار (۹.۱۱)

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = h(u)$$

مساوی است با

$$ds^2 = (f'^2 + h'^2) du^2 + f^2 dv^2,$$

و

$$g_{11} = f'^2 + h'^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = f^2, \quad g = f^2(f'^2 + h'^2),$$

$$g^{11} = \frac{1}{f'^2 + h'^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{f^2}.$$

۶. بالاخص، اولین فرم اساسی زنجیرگون  $(11.011)$

$$x = a \cosh \frac{u^1}{a} \cos u^2, \quad y = a \cosh \frac{u^1}{a} \sin u^2, \quad z = u^1$$

برابر است با

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{u^1}{a} [(du^1)^2 + a^2 (du^2)^2].$$

بنابراین،

$$g_{11} = \cosh^2 \frac{u^1}{a}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 \cosh^2 \frac{u^1}{a},$$

$$g = a^2 \cosh^4 \frac{u^1}{a}, \quad g^{11} = \frac{1}{\cosh^2 (u^1/a)}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 \cosh^2 (u^1/a)}.$$

۷. اولین فرم اساسی کره‌نمای  $(12.011)$

$$x = a \sin u^1 \cos u^2, \quad y = a \sin u^1 \sin u^2, \quad z = a \left( \cos u^1 + \ln \tan \frac{u^1}{2} \right)$$

مساوی است با

$$ds^2 = a^2 [\cot^2 u^1 (du^1)^2 + \sin^2 u^1 (du^2)^2].$$

بنابراین،

$$g_{11} = a^2 \cot^2 u^1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 u^1,$$

$$g = a^4 \cos^2 u^1, \quad g^{11} = \frac{\tan^2 u^1}{a^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 \sin^2 u^1}.$$

۸. اولین فرم اساسی مارپیچ گون  $(13.011)$

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

برابر است با

$$ds^2 = du^2 + [u^2 + a^2] dv^2.$$

بنابراین،

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = u^2 + a^2, \quad g = u^2 + a^2.$$

$g^{ij}$  را پیدا نمایید .

۹ . یک سطح گسترده‌ی یال بازگشت  $r = p(u^1)$  ، که  $u^1$  پارامتر قوس یال بازگشت  $r = p(u^1)$  است ، دارای معادله پارامتری

$$r = p(u^1) + u^2 p'(u^1) = p(u^1) + u^2 t(u^1)$$

است ، که در آن  $t(u^1)$  بردار یکه مماس یال می باشد . در نتیجه ،

$$r_1 = t(u^1) + u^2 \kappa(u^1) n(u^1), \quad r_2 = t(u^1)$$

(  $\kappa(u^1)$  انحنا و  $n(u^1)$  بردار قائم اصلی یال است ) . بنابراین ، داریم

$$g_{11} = 1 + (u^2)^2 \kappa^2, \quad g_{12} = g_{21} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g = (u^2)^2 \kappa^2,$$

$$g^{11} = \frac{1}{(u^2)^2 \kappa^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{(u^2) \kappa^2}, \quad g^{22} = 1 + \frac{1}{(u^2)^2 \kappa^2}.$$

و اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = (1 + (u^2)^2 \kappa^2)(du^1)^2 + 2 du^1 du^2 + (du^2)^2.$$

توجه کنید که ضرایب این فرم فقط به انحای یال بازگشت بستگی دارند ، و از تاب مستقل می باشند .

۱۰ . چنبره<sup>\*</sup>

$$x = (b + a \cos u^1) \cos u^2, \quad y = (b + a \cos u^1) \sin u^2, \quad z = a \sin u^1$$

دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = a^2 (du^1)^2 + (b + a \cos u^1)^2 (du^2)^2$$

است ؛ پس

$$g_{11} = a^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = (b + a \cos u^1)^2,$$

$$g = a^2 (b + a \cos u^1)^2, \quad g^{11} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{(b + a \cos u^1)^2}.$$

۱۱ . اولین فرم اساسی سطوح زیر را بیابید :

( آ ) بیضی گون

$$x = a \cos u^1 \cos u^2, \quad y = b \cos u^1 \sin u^2, \quad z = c \sin u^1;$$

( ب ) سهمی گون هذلولوی

$$x = a(u^1 + u^2), \quad y = b(u^1 - u^2), \quad z = u^1 u^2;$$

( پ ) سطح

$$x = u^1 e^{u^2} \cos u^2, \quad y = u^1 e^{u^2} \sin u^2, \quad z = f(u^1) e^{u^2},$$

که در آن  $f(u^1)$  تابعی از کلاس  $C_1$  است .

۵.۱۶ طول بردار مماس. زاویه بین بردارها و بین منحنیهای روی یک سطح همانطور که در ۱.۱۶ دیدیم، بردار مماس  $a$  در نقطه  $(u^1, u^2)$  از یک سطح را می توان به وسیله مولفه های  $(a^1, a^2)$  نسبت به دستگاه مختصات منحنی الخط مشخص کرد؛ یعنی،

$$a = a^i r_i.$$

مربع طول این بردار برابر است با

$$|a|^2 = a^2 = (a^i r_i)^2 = a^i r_i a^j r_j = a^i a^j (r_i r_j) = g_{ij} a^i a^j$$

یا

$$(18.16) \quad |a|^2 = g_{ij} a^i a^j.$$

حاصل ضرب اسکالر دو بردار مماس  $a = a^i r_i$ ،  $b = b^j r_j$  در یک نقطه مساوی است با

$$ab = (a^i r_i)(b^j r_j) = a^i b^j r_i r_j = g_{ij} a^i b^j$$

یا، بالاخره،

$$(19.16) \quad ab = g_{ij} a^i b^j.$$

اگر زاویه بین بردارهای  $a = a^i r_i$  و  $b = b^j r_j$  مساوی  $\phi$  باشد، برای  $\cos \phi = ab/(|a| |b|)$  فرمولهای زیر را خواهیم داشت:

$$(20.16) \quad \cos \phi = \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j} \sqrt{g_{ij} b^i b^j}}.$$

دو منحنی

$$(21.16) \quad u^1 = \psi^1(\tau), \quad u^2 = \psi^2(\tau) \quad \text{و} \quad u^1 = \phi^1(t), \quad u^2 = \phi^2(t)$$

از کلاس  $C_1$  را روی سطح در نظر می گیریم که از نقطه مشترک  $P_0$  به مختصات  $u_0^i = \phi^i(t_0) = \psi^i(\tau_0)$  می گذرند. فرض کنیم  $du^i$  و  $\delta u^i$  دیفرانسیلها در راستای این منحنیها باشند؛ یعنی، در این نقطه مشترک،

$$(21.16) \quad du^i = \frac{d\phi^i}{dt} dt, \quad \delta u^i = \frac{d\psi^i}{d\tau} d\tau.$$

در این صورت، بردارهای

$$\delta r = r_i \delta u^i \quad \text{و} \quad dr = r_i du^i$$

به ترتیب بر دو منحنی در نقطه  $P_0$  مماسند، و، با استفاده از (۲۰.۱۶)، قضیه زیر به دست می آید.

قضیه. زاویه  $\phi$  بین مسیرهای (۲۱.۱۶) روی یک سطح در معادله

$$(22.16) \quad \cos \phi = \frac{g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}$$

صدق می‌کند.

اگر زاویه بین منحنیهای بی‌جهت به‌جای مسیرهای جهتدار مورد نظر باشد، باید طرف راست (۲۲.۱۶) را با قدر مطلقش عوض کرد، و، در این صورت،  $\phi$  زاویه حاده بین منحنیها می‌باشد. در این حالت، می‌توان دیفرانسیلهای  $\delta u^1, \delta u^2$  را  $du^1, du^2$  دلخواه گرفت جز اینکه باید در معادلات منحنی نظیر صدق کنند؛ به عبارت دیگر، می‌توان به  $dt$  و  $d\tau$  در (۲۱.۱۶) مقادیر ناصغر کاملاً دلخواه داد. اگر بخواهیم  $\phi$  زاویه بین منحنیهای جهتدار (در نتیجه، یک زاویه حاده یا منفرجه، بسته به جهت) باشد، باید (۲۲.۱۶) را همانطور که هست به‌کار ببریم و  $dt$  و  $d\tau$  در (۲۱.۱۶) را فقط به‌مقادیر مثبت محدود کنیم.

بالاخص، اگر منحنی اول  $u^1$  - خط و منحنی دوم  $u^2$  - خط باشد، می‌توان هر مقدار مثبت را برای  $du^1$  اختیار کرد در حالی که  $du^2 = 0$ ، و، به همین ترتیب، هر مقدار مثبت برای  $\delta u^2$  برگزید در حالی که  $\delta u^1 = 0$ ؛ مثلاً،

$$du^1 = 1, \quad du^2 = 0, \quad \delta u^1 = 0, \quad \delta u^2 = 1.$$

فرمول (۲۲.۱۶) عبارت زیر را برای زاویه  $\omega$  بین خطوط مختصات به دست می‌دهد:

$$\cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \quad (23.16)$$

از این فرمول معلوم می‌شود که خطوط مختص در هر نقطه  $(u^1, u^2)$  دو بدو متعامدند اگر و فقط اگر در آن نقطه

$$g_{12} = 0. \quad (24.16)$$

اگر خطوط مختص در هر نقطه متعامد باشند، می‌گوییم مختصات منحنی الخط متعام هستند. در مورد مختصات منحنی الخط متعام، (۲۴.۱۶) یک اتحاد است و اولین فرم اساسی شکل زیر را خواهد داشت:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

امثله و تمرین

۱. مختصات دکارتی متعامد در صفحه و نیز مختصات قطبی نمونه‌هایی از مختصات متعامد هستند. همچنین است هر سه پارامتری سازی کره که در ۳.۱۱ در نظر گرفته شد (مثالهای ۲، ۴، ۹، ۱۰). این مطلب، در حالت کلی، برای مختصات منحنی الخط روی سطوح دوار مذکور در همان زیر بخش (مثال ۳) نیز درست است. این

امر را می توان فوراً از اولین فرمهای اساسی نظیر در ۴۰۱۶ دریافت.

## ۲. مسیره های همزاویه یک خانواده از منحنیها روی سطح

یک خانواده یک پارامتری از منحنیها را روی سطح در نظر می گیریم. یک مسیر همزاویه این خانواده منحنیی است که تمام منحنیهای این خانواده را در زاویه ثابت  $\alpha \neq 0$  قطع می کند. در حالت خاص  $\alpha = \pi/2$ ، منحنی یک مسیر قائم نامیده می شود.

دیفرانسیل هادراستای منحنیهای خانواده را با  $du^i$ ، و دیفرانسیل هادراستای مسیر همزاویه که باید پیدا شوند را با  $du^i$  نشان می دهیم. در این صورت، معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{|g_{ij} \delta u^i du^j|}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{g_{ij} \delta u^i \delta u^j}} = \cos \alpha;$$

یا، معادلاً،

$$(g_{ij} \delta u^i du^j)^2 = g_{ij} du^i du^j g_{kl} \delta u^k \delta u^l \cos^2 \alpha,$$

که در آن  $\alpha$  زاویه ثابت بوده، و  $\delta u^1, \delta u^2$  به وسیله معادلات خانواده با تقریب یک ضریب ثابت تعیین می شوند. لذا، این معادله یک معادله دیفرانسیل است که بر حسب دیفرانسیلهای  $du^1, du^2$  بیان شده است. جواب را می توان به شکل یک بستگی تابعی یکی از متغیرهای  $u^i$  به دیگری، یا یک بستگی ضمنی بین آنها، و یا به شکل پارامتری که در آن هر دو متغیر  $u^i$  تابعی از یک پارامتر کمکی هستند، جستجو کرد. معادله نسبت به دیفرانسیلها از درجه دوم است؛ از اینرو، با دو معادله درجه اول معادل می باشد. جواب هریک از آنها شامل یک ثابت انتگرالگیری است. بنابراین، در حالت کلی، دو خانواده یک پارامتری از مسیره های همزاویه خواهیم داشت.

در حالت خاص که مسیر قائم است، معادله دیفرانسیل ساده تر می شود،

$$g_{ij} du^i \delta u^j = 0,$$

و فقط یک خانواده از مسیره های قائم به دست می آید.

## ۳. مسیره های همزاویه خانواده خطوط جاری استوانه مستدیر

$$x = a \cos u^1, \quad y = a \sin u^1, \quad z = u^2$$

را پیدا کنید.

★ حل. خطوط جاری عبارتند از  $u^2$  — منحنیها (ثابت  $u^1$ ) لذا، می توان قرار

داد  $\delta u^1 = 0, \delta u^2 = 1$  اولین فرم اساسی استوانه مساوی است با

$$ds^2 = a^2(du^1)^2 + (du^2)^2 = 0,$$

و معادله دیفرانسیل مسیرهای همزاویه برابر است با

$$\frac{|du^2|}{\sqrt{a^2(du^1)^2 + (du^2)^2}} = \cos \alpha$$

یا

$$du^2 = \pm \cos^2 \alpha \sqrt{a^2(du^1)^2 + (du^2)^2}$$

همچنین، داریم

$$\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 = a^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 \cos^2 \alpha,$$

$$(1 - \cos^2 \alpha) \left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 = a^2 \cos^2 \alpha, \quad \frac{du^2}{du^1} = \pm a \cot \alpha,$$

که از آنجا

$$u^2 = \pm a u^1 \cot \alpha + C.$$

بنابراین، معادلات مسیرها در فضا برابرند با

$$x = a \cos u^1, \quad y = a \sin u^1, \quad z = \pm (a \cot \alpha) u^1 + C.$$

بدیهی است که این مسیرها مارپیچ هستند. یک خانواده (+) از مارپیچهای راست گرد، و دیگری (-) از مارپیچهای چپ گرد تشکیل شده است.

در حالت خاص مسیرهای قائم  $\alpha = \pi/2$ ,  $\cot \alpha = 0$ ، دو خانواده برهم منطبق می شوند،

و مسیرها دوایر  $c = z$  می باشند. ★

۴. مسیرهای همزاویه نصف النهارات یک کره را بیابید (آنها را خطوط مایل یا خطوط

اُریب می نامند).

۵. ثابت کنید که روی یک سطح با اولین فرم اساسی  $ds^2 = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2$ ، دو

خانواده یک پارامتری (از منحنیها) تعریف شده با معادلات دیفرانسیل

$$du^1 + \sqrt{G} du^2 = 0 \quad \text{و} \quad du^1 - \sqrt{G} du^2 = 0$$

یکدیگر را در زوایای قائمه قطع می کنند.

۶. به ازای چه تابع  $f$  خطوط مختص سطح زیر بخش ۴.۱۶، تمرین ۱۱ پ، متعامدند؟

۷. برای زاویه بین دو منحنی ثابت  $\phi(u^1, u^2)$  و ثابت  $\psi(u^1, u^2)$  یک فرمول بیابید.

۸. مسیرهای همزاویه نصف النهارات یک چنبره را بیابید. به ازای چه زوایایی این

مسیرها منحنیهایی بسته هستند؟

## ۶.۱۶ تغییر مختصات منحنی الخط

واضح است که ضرایب  $g_{ij}$  اولین فرم اساسی یک سطح به مختصات منحنی الخط بستگی

دارند. اگر مختصات  $u^1, u^2$  با مختصات جدید  $u^{1'}, u^{2'}$  عوض شوند، بردارهای پایه طبیعی صفحه مماس طبق فرمولهای

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_j$$

تغییر می کنند. بنابراین، ضرایب اولین فرم اساسی به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$g_{i'j'} = \mathbf{r}_{i'} \cdot \mathbf{r}_{j'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_k \cdot \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} \mathbf{r}_l = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_l = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} g_{kl},$$

یا، بالاخره،

$$(25.16) \quad g_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} g_{ij},$$

یا

$$(26.16) \quad g_{ij} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} g_{i'j'}.$$

لازم به یادآوری است که در این فرمولها  $i$  و  $i'$  و  $j$  و  $j'$  اندیسهای مستقلی هستند، و یک حرف  $i$  یا  $j$  با پریم یا بی پریم به کار رفته تا حفظ فرمولهای نظیر را ساده تر سازد. با استفاده از فرمولهای (25.16)، می توان  $g^{i'j'}$  را در مختصات جدید حساب کرد.

داریم

$$g^{i'k'} g_{j'k'} = \delta_{j'}^{i'},$$

که از آنجا، طبق (25.16)،

$$g^{i'k'} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} g_{jk} = \delta_{j'}^{i'}.$$

با ضرب دو طرف این رابطه در  $(\partial u^i / \partial u^{i'}) / (\partial u^{j'} / \partial u^j)$ ، داریم

$$g^{i'k'} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} g_{jk} = \delta_{j'}^{i'} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^j}.$$

اما

$$\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} = \delta_i^{j'}, \quad \delta_{j'}^{i'} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}} = \delta_i^{j'}.$$

بنابراین، داریم

$$g^{i'k'} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \delta_i^{j'} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} g_{jk} = \delta_i^{j'},$$

و نیز،

$$g^{i'k'} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} g_{lk} = \delta_l^i.$$

حال، با ضرب دوطرف در  $g^{lj}$ ، به دست می آوریم که

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} g^{i'k'} g_{lk} g^{lj} = \delta_l^i g^{lj},$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} g^{i'k'} \delta_k^j = g^{ij}.$$

پس، با اعمال اتحاد  $\delta_k^j = \partial u^j / \partial u^k$  و تغییر اندیس جمع بندی از  $k'$  به  $j'$ ، بالاخره خواهیم داشت

$$(27.16) \quad g^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} g^{i'j'},$$

یا

$$(28.16) \quad g^{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} g^{ij}.$$

البته، حاصل ضرب اسکالر دو بردار مماس  $a$  و  $b$  به مختصات منحنی الخط سطح بستگی ندارد. در واقع،

$$\begin{aligned} ab &= g_{ij} a^i b^j = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} g_{i'j'} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}} a^k \frac{\partial u^j}{\partial u^{l'}} b^{l'} \\ &= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u^{l'}} g_{i'j'} a^k b^{l'} = \delta_k^{i'} \delta_{l'}^{j'} g_{i'j'} a^k b^{l'} = g_{ij} a^i b^j. \end{aligned}$$

همچنین، فرمولهای طول قوس یک منحنی روی سطح و زاویه بین دو منحنی یا دو بردار نیز از مختصات مستقل هستند.

## ۷.۱۶ شکلهای خاص اولین فرم اساسی

اولین فرم اساسی را می توان با انتخاب مختصات منحنی الخط خاص به شکل خاص ساده تری تبدیل کرد.

هرگاه تور مختص متعامد باشد، آنگاه، همانطور که دیده شد،  $g_{12} = g_{21} = 0$  و  $g^{12} = g^{21} = 0$ . البته، همیشه می توان مختصات منحنی الخط را موضعا "طوری اختیار کرد که وضع به این صورت باشد. حتی این را می شود طوری انجام داد که  $g_{11} = 1$ ؛ در

نتیجه، اولین فرم اساسی خواهد شد

$$ds^2 = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2. \quad (29.16)$$

مختصاتی که به ازای آن اولین فرم اساسی به شکل (۲۹.۱۶) باشد مختصات نیمه ژئودزیک نامیده می شود. بعدها، در زیر بخش ۵.۲۱، ثابت می کنیم که مختصات نیمه ژئودزیک همیشه وجود دارند، و معنی هندسی مختصات نیمه ژئودزیک را نیز توضیح می دهیم.

امکان دیگر انتخاب مختصات منحنی الخط است بنحوی که  $g_{11} = g_{22} = [\rho(u^1, u^2)]^2, g_{12} = 0$ ؛ و لذا، اولین فرم اساسی شکل زیر را خواهد گرفت:

$$ds^2 = [\rho(u^1, u^2)]^2 [(du^1)^2 + (du^2)^2]. \quad (30.16)$$

این نوع مختصات را مختصات همگرایی می نامند.

★ با این فرض که سطح تحلیلی است، وجود موضعی مختصات همگرایی را ثابت می کنیم. برهان نسبتاً "کوتاه" است ولی در آن از یک عامل انتگرالگیری فرمهای دیفرانسیل خطی مختلط استفاده می شود. برهانهای مشهوری تحت فقط این فرض که سطح از کلاس  $C_3$  (یا حتی کمتر) است نیز وجود دارند.<sup>۱</sup>

یک فرم درجه دوم معین مثبت مانند  $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$  را می توان به صورت حاصل ضرب دو فرم خطی با ضرایب مزدوج مختلط نمایش داد:

$$ds^2 = \lambda_i du^i \bar{\lambda}_j du^j,$$

که در آن  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  توابع مختلطی از متغیرهای حقیقی  $u^1, u^2$  اند. توابع  $\lambda_i$  لزوماً مختلط اند زیرا، در غیر این صورت، اگر حقیقی باشند، فرم درجه دوم مربع یک فرم خطی بوده و نمی تواند معین مثبت باشد. فرض کنیم  $\mu$  یک عامل انتگرالگیری مختلط ناصفر معادله  $\lambda_i du^i = 0$  بوده؛ یعنی، یک تابع مختلط از  $u^1, u^2$  به طوری که  $\mu \lambda_i du^i$  دیفرانسیل تابع مختلط  $z$  از دو متغیر حقیقی  $u^1, u^2$  باشد. در این صورت، داریم

$$dz = \mu \lambda_i du^i;$$

و، در نتیجه،

$$d\bar{z} = \bar{\mu} \bar{\lambda}_i du^i.$$

بنابراین،

1. S. S. CHERN, P. HARTMAN and A. WINTER, "On isothermic coordinates," *Commentarii Mathematici Helvetici* **28**, 301–309 (1954); S. S. CHERN, "An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface," *Proceedings of the American Mathematical Society* **6**, 771–782 (1955).

$$dz d\bar{z} = \mu\bar{\mu}\lambda_i du^i \bar{\lambda}_j d\bar{u}^j = \mu\bar{\mu} ds^2$$

$$ds^2 = \frac{1}{\mu\bar{\mu}} dz d\bar{z}.$$

فرض کنیم  $v^1(u^1, u^2)$  و  $v^2(u^1, u^2)$  به ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی تابع  $z$  باشند. در این صورت، داریم

$$dz d\bar{z} = (dv^1)^2 + (dv^2)^2,$$

و

$$ds^2 = \frac{1'}{\mu\bar{\mu}} [(dv^1)^2 + (dv^2)^2].$$

تابع  $\mu\bar{\mu}$  حقیقی و مثبت است؛ و در نتیجه، می توان قرار داد  $\rho^2 = 1/\mu\bar{\mu}$  و مشاهده کرد که  $v^1$  و  $v^2$  مختصات همگرایی می باشند.

برای اثبات وجود یک عامل انتگرالگیری، خواننده را به درس مشروحی از معادلات

دیفرانسیل ارجاع می دهیم ★

### ۸.۱۶ مساحت یک سطح

برای تعیین مساحت ناحیه  $S$  روی سطحی به معادله

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

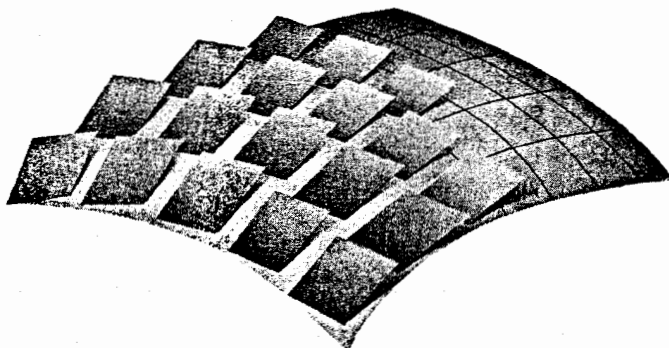
که نظیر است به مستطیل  $\Omega$  از صفحه با پارامترهای  $u^1, u^2$ ، این ناحیه را با خطوط

$$u^1 = u_0^1, u^1 = u_1^1, \dots, u^1 = u_n^1$$

و

$$u^2 = u_0^2, u^2 = u_1^2, \dots, u^2 = u_m^2$$

به تعدادی متناهی چهارضلعی منحنی الخط تقسیم می کنیم (شکل ۱۰۱۶). بعد، هر چهار

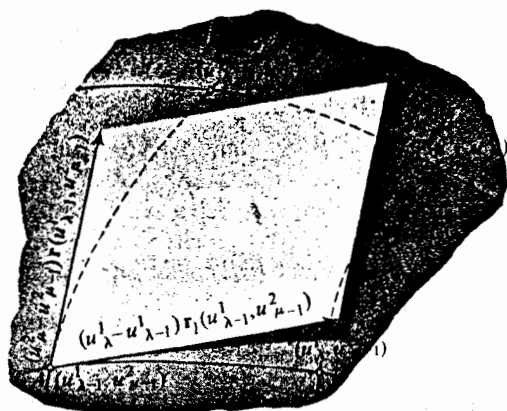


شکل ۱۰۱۶

ضلعی مانند  $ABCD$  را که به خطوط  $u^1 = u_{\lambda-1}^1, u^1 = u_{\lambda}^1, u^2 = u_{\mu-1}^2, u^2 = u_{\mu}^2$  محدود شده است با متوازی الاضلاع مستقیم الخط در صفحه مماس بر سطح در  $A = (u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2)$  تولید شده به وسیله بردارهای

$$(u_{\mu}^2 - u_{\mu-1}^2)r_2(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2) \quad \text{و} \quad (u_{\lambda}^1 - u_{\lambda-1}^1)r_1(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2)$$

که بر اضلاع چهار ضلعی منحنی الخط مماسند عوض کرده و آنها را هم از حیث طول و هم از لحاظ راستا تقریب می کنیم.



شکل ۱۰۱۶ ب

بدین ترتیب، قلمرو روی سطح با مقیاسهایی به شکل متوازی الاضلاعهای مماس پوشیده می شود که حجره های اصلی افراز را تقریب می کنند.  
مساحت یک متوازی الاضلاع مساوی است با

$$\begin{aligned} & |(u_{\lambda}^1 - u_{\lambda-1}^1)r_1(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2) \times (u_{\mu}^2 - u_{\mu-1}^2)r_2(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2)| \\ &= (u_{\lambda}^1 - u_{\lambda-1}^1)(u_{\mu}^2 - u_{\mu-1}^2)|r_1(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2) \times r_2(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2)|. \end{aligned}$$

بنابر (۱۷۰۱۶)،  $|r_1 \times r_2| = \sqrt{g}$ ؛ و در نتیجه، این مساحت برابر است با

$$\sqrt{g(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2)}(u_{\lambda}^1 - u_{\lambda-1}^1)(u_{\mu}^2 - u_{\mu-1}^2).$$

حال مجموع مساحت تمام مقیاسهای پوششی  $S$ ، یعنی

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^m \sqrt{g(u_{\lambda-1}^1, u_{\mu-1}^2)}(u_{\lambda}^1 - u_{\lambda-1}^1)(u_{\mu}^2 - u_{\mu-1}^2),$$

را یک تقریب برای مساحت قلمرو  $S$  می گیریم، که هرچه افراز ظریفتر باشد بهتر است. خود مساحت  $S$  حد این مجموعه است وقتی تنیده افراز (یعنی، قطر بزرگترین مقیاس) به صفر میل کند. هرگاه تابع  $\sqrt{g(u^1, u^2)}$  در ناحیه  $\Omega$  انتگرالپذیر باشد، که حالتی است که اگر  $\Omega$  در همسایگی مختصات برای مختصات  $u^1, u^2$  قرار داشته و پارامتری سازی از

کلاس  $C_1$  باشد، آنگاه مجموعه‌های مورد نظر حدی مساوی انتگرال تابع  $\sqrt{g}$  روی  $\Omega$  خواهند داشت؛ یعنی،

$$(31.16) \quad S = \int_{\Omega} \int \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2.$$

این فرمول برای قلمرو کلیتر  $S$  که نقش یک قلمرو اندازه پذیر ژردان  $\Omega$  در صفحه  $(u^1, u^2)$  باشد نیز برقرار است. بویژه، فرمول برای قلمروهایی که به منحنیهای ژردان بسته قطعه قطعه مشتقپذیر (از کلاس  $C_1$ ) محدودند نیز معتبر است.

فرمول (31.16) مساحتی را تعریف می‌کند که جمعی است؛ یعنی، هرگاه  $S$  اجتماع دو قلمرو مجزای  $S_1$  و  $S_2$  باشد، آنگاه مساحت  $S$  مساوی است با مجموع مساحت  $S_1$  و  $S_2$ . بعلاوه، هرگاه سطح صفحه باشد، این مساحت همان مساحت معمولی خواهد بود. (تحقیق کنید!)

در اثبات فرمول (31.16) از یک دستگاه مختصات گاوسی ثابت استفاده شد. لذا، برای اطمینان از اینکه مساحت (31.16) دارای معنی هندسی مستقل است، باید ثابت کرد که فرمول (31.16) با تغییر مختصات منحنی الخط شکلش را حفظ می‌کند. با اعمال فرمول (31.16) بر مختصات جدید، باید از آن روی قلمرو  $\Omega'$  نظیر به همان قلمرو  $S$  روی سطح انتگرال بگیریم؛ بنابراین، چون نقش  $\Omega'$  در تبدیل مختصات  $(u^1, u^2) \rightarrow (u'^1, u'^2)$  است، خواهیم داشت

$$\int_{\Omega'} \int \sqrt{g'(u'^1, u'^2)} du'^1 du'^2,$$

که در آن

$$g' = g_{1'1'} g_{2'2'} - g_{1'2'}^2.$$

اما

$$g' = (\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'})^2 = \left[ \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} \right]^2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = \left[ \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} \right]^2 g.$$

در نتیجه، طبق قضیه تغییر متغیر در انتگرال مضاعف،

$$\int_{\Omega'} \int \sqrt{g'} du'^1 du'^2 = \int_{\Omega'} \int \sqrt{g} \left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} \right| du'^1 du'^2 = \int_{\Omega} \int \sqrt{g} du^1 du^2,$$

و این همان مطلوب می‌باشد.

امثلة و تمرین

۱. مساحت کره. وقتی مختصات کروی روی یک کره در قلمرو  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$

تغییر کنند، نقاط نظیر نیمی از کره را می پوشانند. از اینرو، مساحت نیمکره مساوی است با

$$\iint a^2 \cos \theta \, d\theta \, d\phi = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi a^2 [\sin \theta]_0^{\pi/2} = 2\pi a^2,$$

و مساحت تمام کره مساوی  $4\pi a^2$  است، که در آن  $a$  شعاع کره می باشد. به همین نحو، در مختصات  $(u, v)$  مثال ۹، زیر بخش ۳.۱۱، تمام کره بدون یک نقطه نقش تمام صفحه می باشد. می توان مساحت کره را از انتگرال مجازی

$$16a^4 \iint \frac{du \, dv}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}$$

روی تمام صفحه به دست آورد.

۲. مساحت چنبره حاصل از دوران یک دایره به شعاع  $a$  حول یک محور واقع در صفحه دایره به فاصله  $b$  از مرکز آن ( $b > a$ ) را پیدا کنید.

۳. مساحت قطعه ای از مارپیچ گون

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = bu^2$$

نظیر به یک پای پیچ که داخل استوانه بوده و مارپیچ

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

را حمل می کند را پیدا کنید.

۴. تحقیق کنید که معادله پارامتری

$$x = a \cos u^1 \cos u^2, \quad y = b \cos u^1 \sin u^2, \quad z = c \sin u^1$$

نمایش بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

است. اولین فرم اساسی بیضی گون را در این مختصات بیابید. نقاط منفرد این نمایش کدامند؟ مساحت یک بیضی گون دوار ( $a = b$ ) را پیدا کنید.

۵. برای مساحت سطح یک مخروط مستدیر به ارتفاع  $h$  و قاعده به شعاع  $r$  فرمولهایی بیابید.

۱۲ دومین فرم اساسی

۱۰.۱۲ انحراف سطح از صفحه مماس

معرض کنیم سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

از کلاس  $C_2$  باشد، و انحراف آن را از صفحه مماس در نقطه  $P$  به مختصات گاوسی  $(u^1, u^2)$  تخمین می‌زنیم. نقطه دیگر  $Q$  از سطح به مختصات  $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$  را اختیار می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم، صفحه مماس بر سطح در  $P$  به معادله

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u^1, u^2))\mathbf{m}(u^1, u^2) = 0$$

است. بنابراین، چون  $\mathbf{m}$  بردار یکه‌قائم است، قدر مطلق فاصله  $Q$  از صفحه مماس مساوی است با

$$d = [\mathbf{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2)]\mathbf{m}(u^1, u^2).$$

علامت  $d$  نشان می‌دهد که نقطه  $Q$  کدام طرف صفحه مماس است. مثبت است وقتی  $Q$  در نیم فضایی باشد که بردار  $\mathbf{m}$  در  $Q$  به آن اشاره دارد.

با اعمال فرمول تیلور در مورد تفاضل  $\mathbf{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2)$  داریم

$$d = [\mathbf{r}_i h^i + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij} h^i h^j + o((h^1)^2 + (h^2)^2)]\mathbf{m}$$

یا

$$d = \mathbf{r}_{ij} \mathbf{m} h^i h^j + o((h^1)^2 + (h^2)^2),$$

زیرا  $\mathbf{r}_i \mathbf{m} = 0$ . در اینجا مقادیر توابع  $\mathbf{r}_i, \mathbf{m}$  در نقطه  $P = (u^1, u^2)$  گرفته شده‌اند. با معرفی نماد

$$b_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}}, \quad (1.17)$$

قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه. فاصله علامتدار نقطه  $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$  واقع بر سطحی از کلاس  $C_2$  از صفحه مماس در  $(u^1, u^2)$  مساوی است با

$$\delta = \frac{1}{2} b_{ij} h^i h^j \quad (2.17)$$

با خطایی از مرتبه بالاتر از ۲ نسبت به  $\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}$ .

ضرایب  $b_{ij}$  از فرمولهای (۱.۱۷) به دست می‌آیند و فقط به نقطه تماس بستگی دارند. به ازای  $h^1$  و  $h^2$  به قدر کافی کوچک،  $\delta$  مثبت است اگر نقطه  $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$  آن طرف صفحه مماس باشد که بردار  $\mathbf{m}$  در  $(u^1, u^2)$  به آن اشاره دارد، و منفی است اگر در طرف دیگر باشد.

## ۲.۱۷ دومین فرم اساسی یک سطح

فرم دیفرانسیل درجه دوم

$$II = b_{ij} du^i du^j,$$

که ضرایب آن با فرمولهای (۱.۱۷) تعریف شده‌اند، دومین فرم اساسی سطح نامیده می‌شود. نتایج بخش پیش معنی هندسی دومین فرم اساسی را نشان می‌دهند. بنابر (۱.۱۷)، داریم

$$b_{ij} = b_{ji};$$

در نتیجه، این فرم دارای سه ضریب اصلی است:

$$II = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2.$$

برای ضرایب دومین فرم اساسی فرمول دیگری نیز به دست می‌آوریم. با مشتگیری از اتحاد

$$r_i m = 0$$

نسبت به  $u^j$ ، داریم

$$r_{ij} m + r_i m_j = 0,$$

که در آن  $m_j = \partial m / \partial u^j$ . در نتیجه،

(۳.۱۷)

$$b_{ij} = r_{ij} m = -r_i m_j.$$

مبنی دومین فرم اساسی مختصراً "با  $b$  نموده می‌شود:

(۴.۱۷)

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

هرگاه معادله سطح، به جای برداری، به شکل مختصات باشد:

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2),$$

آنگاه فرمول برای  $b_{ij}$  عبارت است از

(۵.۱۷)

$$b_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

که در آن  $A = y_1 z_2 - y_2 z_1$ ,  $B = z_1 x_2 - z_2 x_1$ ,  $C = x_1 y_2 - x_2 y_1$  مولفه‌های بردار  $r_1 \times r_2$  می‌باشند.

امثله و تمرین

در مثالهای زیر، محاسبات را هر جا لازم بود کامل کنید:

۱. دومین فرم اساسی صفحه متحد صفر است. این مطلب از معنی هندسی دومین فرم که در ۱۰.۱۷ توضیح شده واضح است. همچنین، به آسانی می توان آن را با محاسبه تحقیق کرد. این مطلب را در مختصات دکارتی و مختصات قطبی در صفحه تحقیق کنید.

بعکس، اگر برای سطحی داشته باشیم  $b_{ij} = 0$ ، سطح یک صفحه و یا قسمتی از آن است. در واقع، در این حالت داریم  $r_i m_j = 0$  و نیز  $mm_j = 0$ ، زیرا  $m$  یک بردار یکه می باشد. چون بردار  $m_j$  در هر نقطه بر سه بردار مستقل خطی  $r_1, r_2, m$  متعامد است، باید متحد صفر باشد:  $m_j = 0$ . از اینرو،  $m$  یک تابع ثابت می باشد: ثابت  $m$ . بنابراین،  $r_i m = \partial(rm)/\partial u^i$ ، و چون  $r_i m = 0$  داریم ثابت  $rm$ ، که این معادله یک صفحه می باشد.

۲. دومین فرم اساسی کره در مختصات کروی (۸.۱۱) عبارت است از

$$II = a(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2),$$

که از آنجا  $b_{11} = a, b_{12} = b_{21} = 0, b_{22} = a \cos^2 \theta$  از مقایسه دومین فرم اساسی با اولین فرم اساسی

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2)$$

درمی یابیم که دو فرم متناسب اند:

$$ds^2 = aII.$$

با مختصات مثال ۹، ۳.۱۱، دومین فرم اساسی برابر است با

$$II = \frac{16a^3}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2),$$

و اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2),$$

و مجدداً خواهیم داشت

$$ds^2 = aII.$$

۳. یک خاصیت مشخص کره را ثابت می کنیم؛ یعنی، ثابت می کنیم هرگاه برای سطح

$r = r(u^1, u^2)$  در قلمروی چون  $\Omega$  در صفحه با پارامترهای  $u^1, u^2$  داشته باشیم  $II = \alpha ds^2$  ( $\alpha \neq 0$ )، آنگاه معادله قسمتی از یک کره به شعاع  $|1/\alpha|$  را نمایش می دهد. در واقع، داریم  $b_{11} = xg_{11}, b_{12} = xg_{12}, b_{22} = xg_{22}$ ؛ بنابراین،  $m_i r_j = -x r_i r_j$  یا  $(m_i + x r_i) r_j = 0$ . از آن سو، نیز داریم  $(m_i + x r_i)m = 0$ ، زیرا  $m$  به  $m_i$  و همچنین

به  $r_i$  متعامد است. لذا،  $m_i + \alpha r_i = 0$ ، برداری متعامد به سه بردار مستقل  $r_1, r_2, m$  می باشد. بنابراین، خواهیم داشت

$$m_i = -\alpha r_i.$$

با مشتقگیری از این نسبت به  $u^j$ ، به دست می آوریم  $m_{ij} = -\alpha_j r_i - \alpha r_{ij}$ ، که در آن  $\alpha_j = \partial \alpha / \partial u^j$  . با قرار دادن  $i = 1, j = 2$  و  $i = 2, j = 1$ ، خواهیم داشت

$$m_{12} = -\alpha_2 r_1 - \alpha r_{12}, \quad m_{21} = -\alpha_1 r_2 - \alpha r_{21}.$$

اگر نمایش از کلاس  $C_3$  باشد،  $m_{12} = m_{21}$  و  $r_{12} = r_{21}$  . در نتیجه،

$$\alpha_1 r_2 - \alpha_2 r_1 = 0.$$

چون بردارهای  $r_1$  و  $r_2$  مستقل اند،  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  و  $\alpha$  ثابت است. فرض کنیم  $r = r(u^1, u^2)$  معادله سطح باشد، و بردار  $R = r + (1/\alpha)m$  را در نظر می گیریم. داریم

$$R_i = r_i + \frac{1}{\alpha} m_i = \frac{1}{\alpha} (\alpha r_i + m_i) = 0.$$

در نتیجه، ثابت  $R$  . نقطه با بردار موضع  $R$  ثابت است. فاصله بین این نقطه و نقاط سطح مساوی است با

$$|R - r(u^1, u^2)| = \left| \frac{1}{\alpha} m \right| = \left| \frac{1}{\alpha} \right|,$$

که برهان را تمام می کند.

دومین فرم اساسی سطح دوار

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = h(u)$$

به شکل

$$\frac{f'h'' - hf''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}} du^2 + \frac{fh'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}} dv^2$$

است. بنابراین،

$$b_{11} = \frac{f'h'' - hf''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = \frac{fh'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}.$$

در پارامتری سازی

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v, \quad z = F(r),$$

دومین فرم اساسی به شکل

$$II = \frac{F''}{\sqrt{1 + F'^2}} dr^2 + \frac{rF'}{\sqrt{1 + F'^2}} dv^2$$

است.

۵. دومین فرم اساسی زنجیرگون (۱۱.۱۱) عبارت است از

$$\Pi = \frac{1}{a} [-(du^1)^2 + a^2(du^2)^2].$$

بنابراین،

$$b = -1, \quad b_{22} = a, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{11} = -1/a.$$

۶. دومین فرم اساسی کره نمای (۱۲.۱۱) عبارت است از

$$\Pi = a[-\cot u^1 (du^1)^2 + \sin u^1 \cos u^1 (du^2)^2],$$

که از آنجا  $b_{11} = -a \cot u^1$ ,  $b_{12} = b_{21} = 0$ ,  $b_{22} = a \sin u^1 \cos u^1$ ,  $b = -a^2 \cos^2 u^1$

نسبت مبنیهای دو فرم اساسی، یعنی

$$\frac{b}{g} = -\frac{1}{a^2},$$

یک ثابت منفی می باشد.

۷. دومین فرم اساسی مارپیچ گون (۱۳.۱۱)

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = au^2$$

عبارت است از

$$\Pi = -\frac{a}{\sqrt{(u^1)^2 + a^2}} du^1 du^2.$$

بنابراین،

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = b_{21} = -\frac{a}{\sqrt{(u^1)^2 + a^2}}, \quad b = -\frac{a^2}{(u^1)^2 + a^2}.$$

۸. دومین فرمهای اساسی چنبره

$$x = (b + a \cos u^1) \cos u^2, \quad y = (b + a \cos u^1) \sin u^2, \quad z = a \sin u^1$$

و بیضی گون

$$x = a \cos u^1 \cos u^2, \quad y = b \cos u^1 \sin u^2, \quad z = c \sin u^1$$

را پیدا کنید.

۹. اولین و دومین فرمهای اساسی نمودار تابع دو متغیره و از کلاس  $C_2$

$$z = f(x, y)$$

به صورت سطح را با استفاده از نمادگذاری کلاسیک

$$p = \partial f / \partial x, q = \partial f / \partial y, r = \partial^2 f / \partial x^2, s = \partial^2 f / \partial x \partial y, t = \partial^2 f / \partial y^2$$

پیدا نمایید.

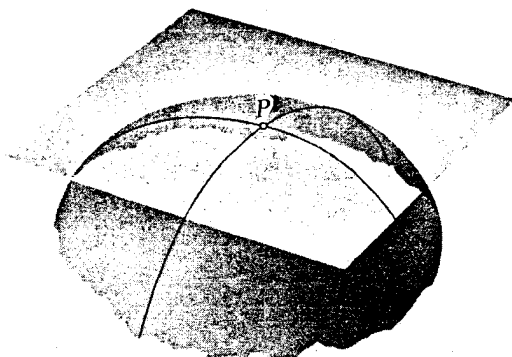
### ۳.۱۷ رده‌بندی نقاط یک سطح

با توجه به علامت ممین دومین فرم اساسی، سه نوع نقطه روی یک سطح تمیز داده می‌شود:

۱. در نقطه  $P$  داریم  $b > 0$ . در این صورت، دومین فرم اساسی

$$b_{ij} du^i du^j = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2$$

معین است؛ یعنی، به ازای تمام مقادیر  $du^1, du^2$  که هر دو با هم صفر نباشند، مقادیر متحدالعلامه (مثبت یا منفی) به خود می‌گیرد. بنابراین، سطح در یک همسایگی به قدر کافی کوچک نقطه  $P$  در یک طرف صفحه مماس در  $P$  قرار دارد. نقطه  $P$  تنها نقطه مشترک صفحه مماس و سطح در مجاورت  $P$  است. این نوع نقطه یک نقطه بیضوی سطح نامیده می‌شود (شکل ۱۰۱۷). همه نقاط یک کره و همه نقاط یک بیضی گون نمونه‌هایی از نقاط بیضوی هستند.



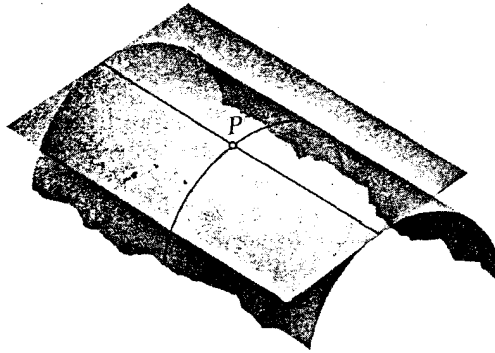
شکل ۱۰۱۷

۲. در نقطه  $P$  داریم  $b = 0$ . در اینجا می‌توان دو حالت زیر را تشخیص داد:

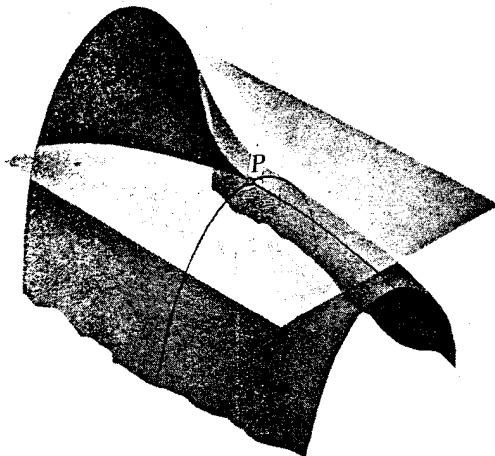
(آ) همه ضرایب  $b_{ij}$  مساوی صفر نیستند. در این حالت، دومین فرم اساسی فقط برای راستای  $du^1:du^2$  مساوی صفر بوده، و برای تمام راستاهای دیگر یک علامت دارد. هر منحنی روی یک سطح و با راستای  $du^1:du^2$ ، که نتیجتاً "دومین فرم اساسی صفر می‌شود، در  $P$  تماسی از مرتبه ۲ با صفحه مماس بر سطح در  $P$  دارد. به عبارت دیگر، هر صفحه مماس بر سطح یک صفحه مماس بوسان این منحنی در  $P$  است. اگر سطح و صفحه مماس در  $P$  دارای یک منحنی مشترک باشند، این راستای منحنی در  $P$  خواهد بود. برای کسب اطلاع بیشتر در مورد رفتار هر سطح در این راستا، باید برای انحراف سطح از صفحه مماس جملات از مرتبه بیشتری از فرمول

تیلور را به کار ببریم. در مجاورت  $P$ ، نقاط سطح ممکن است یک طرف صفحه مماس و یا اینکه هر دو طرف سطح واقع باشند، اما، در این صورت، اشتراک صفحه مماس با سطح در  $P$  دارای یک نقطه بازگشت (یا نقطه بازگشت مضاعف) با یک مماس در راستایی که دومین فرم اساسی در آن جهت صفر است می باشد.

نقاطی از نوع توصیف شده در بالا نقاط سهموی نامیده می شوند (شکل ۲۰۱۷ و ۳۰۱۷). تمام نقاط منتظم یک سطح گسترده نقاط سهموی هستند. روی سطحهای دیگر، نقاط سهموی می توانند منحنیهایی را که منحنیهای سهموی نامیده می شوند تشکیل دهند.



شکل ۲۰۱۷



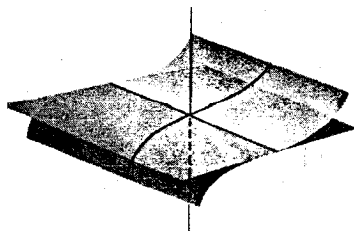
شکل ۳۰۱۷

فلیکس کلاین<sup>۱</sup>، در تلاشی ناموفق برای یافتن یک محک زیبایی هندسی، تمام خطوط سهموی را روی چهره آپولو بلودر<sup>۲</sup> رسم کرده است. شکل ۴.۱۷ نشانگر طرح پیچیده‌ای است که توسط وی داده شده است.



شکل ۴.۱۷

(ب) حالت دیگری که در نقطه  $P$  داریم  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ ، و صفحه مماس دارای تماس از مرتبه بالاتر با سطح است. انحراف با جملات مرتبه بالاتر نسبت به  $du^1, du^2$  معین می‌شود. در این حالت، نقطه یک نقطه تخت سطح نامیده می‌شود. شکل ۵.۱۷ یک نقطه تخت را نشان می‌دهد. این سطح یک استوانه است

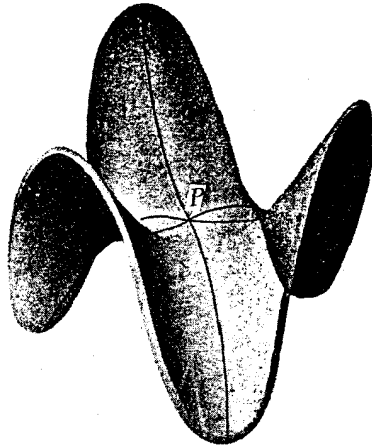


شکل ۵.۱۷

که هادی آن یک نقطه عطف در  $P$  دارد. البته، تمام نقاط خط جاری ماربر  $P$  نقاط تخت هستند. شکل ۶.۱۷ نمونه‌ای از یک نقطه تخت تنها را نشان می‌دهد. این نقطه نقطه  $(0, 0, 0)$  از زین میمون

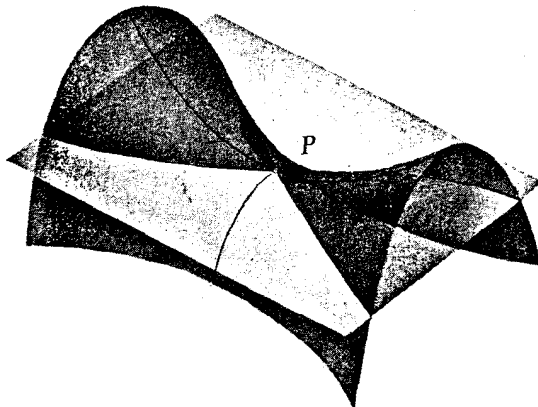
$$z = x(x^2 - 3y^2)$$

است.



شکل ۶.۱۷

۳. در نقطه  $P$  داریم  $b < 0$ . در این حالت، معادله  $b_{ij} du^i du^j = 0$  به ازای نسبت  $du^1:du^2$  دارای دو جواب متمایز است. دومین فرم اساسی به ازای هر دو راستا صفر است. صفحه مماس در مجاورت  $P$  سطح را در امتداد دو منحنی ماربر  $P$  قطع می‌کند که مماسهای آنها در  $P$  این دو راستا را دارند. این منحنیها سطح را در یک



شکل ۷.۱۷

همسایگی به قدر کافی کوچک نقطه  $P$  به دو جفت نواحی قائم الزاویه تجزیه می کنند. یک جفت از این نواحی در یک طرف سطح، و دیگری در طرف دیگر قرار دارد (شکل ۷۰۱۷). این سطح در نزدیکی  $P$  به شکل زین است. این نوع نقطه را یک نقطه هذلولوی سطح می نامند. تمام نقاط سهمی گون هذلولوی و هذلولی گون یکپارچه نقاطی هذلولوی هستند.

### امثله و تمرین

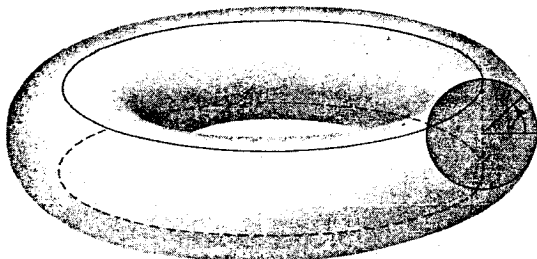
۱. ثابت کنید تمام نقاط بیضی گون، سهمی گون بیضوی، و هذلولی گون دو پارچه نقاط بیضوی هستند؛ در حالت خاص، تمام نقاط یک کره چنین اند.
۲. ثابت کنید تمام نقاط یک سطح گسترده نقاط سهموی یا نقاط تخت هستند. شکل ۲۰۱۷ نقاط سهموی این حالت را نشان می دهد.
۳. نقطه سهموی سطح

$$z = x^3 - y^2$$

- را پیدا کرده، و در انحراف این سطح از صفحه مماس در این نقطه بحث نمایید.
- وضع در شکل ۳۰۱۷ نموده شده است.
۴. رفتار سطح

$$z = y^2 - x^2$$

- در مجاورت نقطه سهموی  $(0,0)$  چگونه است؟
۵. نشان دهید که جمیع نقاط یک سطح خط داری که گسترده نباشد هذلولوی هستند؛ در حالت خاص، تمام نقاط مارپیچ گون و تمام نقاط سهمی گون هذلولوی یا هذلولی گون یک پارچه چنین اند.
  ۶. نشان دهید که تمام نقاط منظم کره نما و تمام نقاط زنجیر گون هذلولوی هستند.
  ۷. نشان دهید که خطوط  $u^1 = \pm \pi/2$  خطوط سهموی چنبره



شکل ۸۰۱۷

$$x = (b + a \cos u^1) \cos u^2, \quad y = (b + a \cos u^1) \sin u^2, \quad z = a \sin u^1 (b > a)$$

بوده و چنبره را به دو ناحیه تقسیم می کنند. ناحیه برونی  $(-\frac{1}{2}\pi < u^1 < \frac{1}{2}\pi)$  از نقاط بیضوی، و ناحیه دیگر  $(\frac{1}{2}\pi < u^1 < \frac{3}{2}\pi)$  از نقاط هذلولوی تشکیل شده است (شکل ۸.۱۷).

۸. سینوس گون  $z = \cos x, 0 \leq x < 2\pi$  حول محور  $z$  دوران می کند. کدام نقاط

سینوس گون بیضوی، کدام سهموی، و کدام هذلولوی هستند؟

۹. در حالت کلی، ثابت کنید نقاط یک سطح دوار که در آنها تحذب نصف النهار به سوی

محور است نقاط هذلولوی هستند، و نقاطی که تحذب در آنها به خارج محور است

نقاط بیضوی می باشند. نقاط سهموی آنها بی هستند که مماس در آنها بر محور عمود

است یا اینکه انحای نصف النهار در آن نقاط صفر می باشد.

۱۰. نقاط سطح

$$z = ax + by + f(cx + dy),$$

که در آن  $a, b, c, d$  ثابت اند، و  $f$  یک تابع دلخواه از کلاس  $C_2$  است، از چه نوع

هستند؟

#### ۴.۱۷ نگاشت کروی یا گاوسی یک سطح و انحای گاوسی

سطح جهت دار  $\mathcal{S}$  از کلاس  $C_2$  را در نظر گرفته، و یک نگاشت از این سطح بتوی کره، بیکه به صورت زیر تعریف می کنیم. این نگاشت به هر نقطه  $P$  از سطح نقطه  $P^*$  را که بردار موضعش بردار بیکه قائم مثبت در  $P$  است نسبت می دهد. این نگاشت را نگاشت کروی یا گاوسی سطح می نامیم. این تعریف نیاز به یک سطح جهتدار دارد؛ بهر حال، توجه دارید که همیشه می توان یک همسایگی به قدر کافی کوچک را جهتدار کرد؛ و لذا، تا وقتی ملاحظات موضعی مد نظرند، لازم نیست در جهت پذیری دقیق، باشیم. فرض کنیم نمایش پارامتری موضعی سطح به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2).$$

در این صورت، نقش نقطه ای به مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  تحت نگاشت گاوسی دارای بردار موضع

$$\mathbf{R} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$$

است. این معادله را می توان معادله پارامتری بخشی از کره که با نقشهای نقاط سطح

پوشانده می شود در نظر گرفت. اگر در یک نقطه  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$ ، این پارامتری سازی کره

در نقاط متناظر کره منتظم است. بردار  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ ، چون بر دو بردار مماس  $\mathcal{S}$  عمود

است، بر سطح عمود بوده، و لذا، با بردار قائم  $m$  همخط است؛ دو بردار  $m$  و  $m_1 \times m_2$  ممکن است همجهت یا مختلفالجهت باشند. صفحات مماس بر  $\mathcal{F}$  در  $P$  و بر کره<sup>\*</sup> یک در  $P^*$  موازی هستند؛ این صفحات دارای جهتهای یکسان القا شده بهوسیله پارامتری سازی در حالت اول و جهتهای مخالف در حالت دوم خواهند بود. از اینرو، اگر بردارهای  $m_1 \times m_2$  و  $m$  همجهت باشند، گوییم نگاشت کروی جهت را حفظ می کند، و اگر مختلفالجهت باشند، گوییم این نگاشت جهت را تغییر می دهد. درحالتی که  $m_1 \times m_2 = 0$ ، جهت صفحه<sup>\*</sup> مماس بر کره نامعین است.

حال قلمرو  $\Omega$  را روی سطح، که شامل نقطه<sup>\*</sup>  $P$  است، و نقش کروی اش  $\Omega^*$  است، در نظر می گیریم، و نسبت مساحت  $\Omega^*$  به مساحت  $\Omega$  را تشکیل می دهیم. حد این نسبت، وقتی قلمرو  $\Omega$  به نقطه<sup>\*</sup>  $P$  منقبض شود، درحالتی که نگاشت گاوسی جهت را حفظ می کند، یا حد قرینه<sup>\*</sup> این نسبت درحالتی که نگاشت گاوسی جهت را تغییر می دهد، انحنا<sup>\*</sup>ی گاوسی سطح در  $P$  نامیده می شود. در نقاطی که جهت نقش نامعین باشد، انحنا<sup>\*</sup>ی گاوسی را صفر می گیریم. انحنا<sup>\*</sup>ی گاوسی با  $K$  نشان داده می شود.

قضیه. انحنا<sup>\*</sup>ی گاوسی در نقاط منتظم یک سطح از کلاس  $C_2$  وجود دارد. انحنا<sup>\*</sup>ی گاوسی در مختصات منحنی الخط برابر است با نسبت مبین دومین فرم اساسی به مبین اولین فرم اساسی؛ یعنی،

$$(۶.۱۷) \quad K = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

برهان. برای سطح یک نمایش پارامتری از کلاس  $C_2$  اختیار می کنیم. چون فقط به قلمروهای کوچک علاقه مندیم، به خاطر فرایند حد، می توان خود را به قلمروهایی که کاملاً "دریک همسایگی مختصات شامل  $P$  قرار دارند محدود کرد. مجموعه<sup>\*</sup> نقاط صفحه<sup>\*</sup>  $u^1, u^2$  که  $\Omega$  را مشخص می کنند را با همان حرف  $\Omega$  نشان خواهیم داد. از اینرو، قلمرو  $\Omega^*$  روی کره نیز نقش  $\Omega$  در صفحه<sup>\*</sup>  $u^1, u^2$  با نمایش پارامتری

$$R = m(u^1, u^2)$$

خواهد بود، که ممکن است نقاط منفرد داشته باشد یا نباشد. مساحت  $\Omega$  برابر است با

$$\int_{\Omega} \int \sqrt{g} du^1 du^2,$$

درحالی که مساحت  $\Omega^*$  مساوی است با

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| du^1 du^2.$$

وقتی  $\Omega$  به نقطه  $P$  به مختصات  $(u^1, u^2)$  منقبض شود، نسبت

$$\frac{\text{مساحت } \Omega^*}{\text{مساحت } \Omega} = \frac{\int_{\Omega} |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| du^1 du^2}{\int_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2}$$

به نسبت انتگرالدهها در این نقطه میل خواهد کرد. اگر در نقطه  $P$ ،  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = 0$  (که حالتی است که جهت نقش تعریف نشده است)، این حد برابر صفر است. اگر  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$ ، طبق تعریف داریم

$$(7.17) \quad K = \varepsilon \frac{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}{\sqrt{g}},$$

که در آن اگر جهت تغییر نکند،  $\varepsilon = 1$  و، اگر جهت تغییر کند،  $\varepsilon = -1$ ؛ به عبارت دیگر،

$$\varepsilon = \text{sgn}(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}).$$

داریم

$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \begin{vmatrix} -\mathbf{r}_1 \mathbf{m}_1 & -\mathbf{r}_1 \mathbf{m}_2 \\ -\mathbf{r}_2 \mathbf{m}_1 & -\mathbf{r}_2 \mathbf{m}_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2).$$

$$\text{اما } \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| \mathbf{m} = \sqrt{g} \mathbf{m}$$

$$b = \sqrt{g} \mathbf{m}(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) = \sqrt{g}(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}).$$

اگر  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = 0$ ، داریم  $b = 0$  و  $K = 0$ ؛ لذا، (۶.۱۷) برقرار است. اگر  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$ ، می توان با استفاده از همخطی  $\mathbf{m}$  و  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  نتیجه گرفت که

$$(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) \mathbf{m} = \varepsilon |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| |\mathbf{m}| = \varepsilon |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|;$$

بنابراین،

$$|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{g}}.$$

از تلفیق این با (۷.۱۷) خواهیم داشت

$$K = \varepsilon \frac{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}{\sqrt{g}} = \varepsilon^2 \frac{b}{g} = \frac{b}{g},$$

و برهان تمام خواهد بود.

نتیجه. انحنا ی گاوسی در نقاط بیضوی مثبت، در نقاط هذلولوی منفی، و در نقاط سهموی

صفر است.

همچنین، توجه کنید که محاسبات ما نشان می‌دهند که

$$(۸.۱۷) \quad \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = K \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

این رابطه را ثابت کنید.

امثله و تمرین

۱. انحناى گاوسى کره به شعاع  $a$  ثابت و برابر است با  $1/a^2$ . تحقیق کنید!
۲. انحناى گاوسى کره‌ما (ر.ک. تمرین ۱۶ از ۲۰۱۷) یک ثابت منفی است؛  $-1/a^2$ .
۳. ثابت کنید که انحناى گاوسى یک سطح خط‌دار نامثبت است، و این انحنا متحد صفر است اگر و فقط اگر سطح گسترده‌نى باشد.
۴. انحناى گاوسى تمام سطوح مورد بحث در امثله و تمرینات بالا را به‌صورت تابعی از پارامترها بنویسید.

## ۵.۱۷ تغییر مختصات منحنی‌الخط

اگر مختصات  $u^1, u^2$  را به  $u^{1'}, u^{2'}$  تغییر دهیم، ضرایب دومین فرم اساسی نیز تغییر می‌کند. این ضرایب را با  $b_{i'j'}$  نشان می‌دهیم. در مختصات جدید داریم

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{m}' = \varepsilon \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}'_j = \varepsilon \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \mathbf{m}_j,$$

که در آن

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}.$$

در نتیجه،

$$b_{i'j'} = -\mathbf{r}_{i'} \mathbf{m}'_{j'} = -\varepsilon \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_i \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \mathbf{m}_j = \varepsilon \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} (-\mathbf{r}_i \mathbf{m}_j),$$

یا

$$(۹.۱۷) \quad b_{i'j'} = \varepsilon \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} b_{ij}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}.$$

ضرایب دومین فرم اساسی طبق فرمولهای (۹.۱۷) تغییر می‌کنند، که به فرمولهای تبدیل ضرایب اولین فرم اساسی شباهت دارند. اختلاف به‌خاطر ضریب  $\varepsilon$  است که، وقتی تبدیل

مختصات جهت را تغییر دهد، موجب تغییر علامت می شود.

با یک محاسبه (که به خواننده محول می شود) می توان نتیجه گرفت که مبین  $b'$  دومین فرم اساسی در مختصات جدید با فرمول زیر بیان می شود:

$$(10.17) \quad b' = \left[ \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})} \right]^2 b,$$

درحالی که برای مبین اولین فرم اساسی داریم

$$(11.17) \quad g' = \left[ \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})} \right]^2 g.$$

درنتیجه،

$$\frac{b'}{g'} = \frac{b}{g};$$

یعنی، انحنای گاوسی به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد. این مطلب از تعریف هندسی انحنای گاوسی که به نمایش پارامتری بستگی ندارد واضح است.

### ۱۸ قضیه اساسی نظریه سطوح

۱۰۱۸ فرمولهای گاوس<sup>۱</sup> و وینگارتن<sup>۲</sup> برای  $r_{ij}$  و  $m_i$

فرض کنیم سطح

$$r = r(u^1, u^2)$$

از کلاس  $C_2$  باشد.

مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع برداری  $r$  در نقطه نامفرد  $(u^1, u^2)$  را می توان، مثل یک بردار در فضای سه بعدی، به صورت ترکیبی خطی از سه بردار مستقل خطی  $r_1, r_2, m$  دراین نقطه نمایش داد.

اگر ضرایب را با  $\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2, \beta_{ij}$  نشان دهیم، داریم

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + \beta_{ij} m = \Gamma_{ij}^k r_k + \beta_{ij} m.$$

از ضرب طرفین این رابطه در  $m$ ، نتیجه می شود  $r_{ij} m = \beta_{ij} m^2$  یا  $\beta_{ij} = r_{ij} m$ .

که نشان می دهد  $\beta_{ij}$  ها همان ضرایب دومین فرم اساسی اند، و داریم

$$(10.18) \quad r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + \beta_{ij} m.$$

بقیه ضرایب  $\Gamma_{ij}^k$  علایم کریستوفل<sup>۳</sup> نوع دوم نامیده می شوند. ما در بخش بعدی به این

علایم باز خواهیم گشت .

فرمولهای (۱۰۱۸) فرمولهای گاوس نامیده می شوند .

همچنین، مشتقات  $m_i$  ترکیباتی خطی از  $r_1$ ،  $r_2$ ، و  $m$  هستند . چون  $m_i$  بر  $m$  عمود است، و لذا با  $r_1$  و  $r_2$  همصفحه است، داریم

$$(2.18) \quad m_i = -b_i^k r_k,$$

که در آن ضرایب تجزیه با  $-b_i^1$ ،  $-b_i^2$  نشان داده شده اند . برای یافتن رابطه بین این ضرایب و ضرایب فرمهای اساسی، طرفین (۲۰۱۸) را در  $-r_j$  ضرب می کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} m_i r_j &= -b_i^k r_k r_j, \\ -b_{ij} &= -b_i^k g_{kj}, \end{aligned}$$

یا

$$(3.18) \quad b_{ij} = b_i^k g_{kj}.$$

اگر طرفین رابطه اخیر را به طور صوری در  $g^{jl}$  ضرب کنیم، داریم

$$b_{ij} g^{jl} = b_i^k g_{kj} g^{jl} = b_i^k \delta_k^l = b_i^l,$$

و با تعویض اندیسهای  $z$  و  $l$ ، بالاخره خواهیم داشت

$$(4.18) \quad b_i^j = b_{il} g^{lj}.$$

فرمولهای (۱۸۰۲) فرمولهای وینگارتن نامیده می شوند .

## ۲۰۱۸ علایم کریستوفل

در این بخش، به علایم کریستوفل  $\Gamma_{ij}^k$  نظر دقیقتری می اندازیم .

از تقارن  $b_{ij}$  و  $r_{ij}$  نسبت به اندیسهای پایینی، بی درنگ نتیجه می شود که  $\Gamma_{ij}^k$  نیز نسبت به زیرنویسهایش متقارن است :

$$(5.18) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

حال هدف ما بیان علایم کریستوفل بر حسب ضرایب اولین فرم اساسی و مشتقاتشان

است .

ابتدا ضرب اسکالر طرفین (۱۰۱۸) را در  $r_l$  تشکیل می دهیم . چون  $r_l m = 0$ ،

داریم

$$r_{ij} r_l = \Gamma_{ij}^k r_k r_l = \Gamma_{ij}^k g_{kl}.$$

حاصل ضرب نقطه ای  $r_{ij} r_l$  را علامت کریستوفل نوع اول نامیده و آن را با  $\Gamma_{ill}$  نشان

$$(۶۰.۱۸) \quad \Gamma_{ijl} = \mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_l = \Gamma_{ij}^s g_{sl}$$

علامه کریستوفل نوع اول نیز نسبت به دو زیرنویس اول متقارن است:

$$(۷۰.۱۸) \quad \Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$$

اگر طرفین (۶۰.۱۸) را به‌طور صوری در  $g^{tk}$  ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\Gamma_{ijl} g^{tk} = \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{tk} = \Gamma_{ij}^s \delta_s^k = \Gamma_{ij}^k$$

یا

$$(۸۰.۱۸) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ijl} g^{lk}$$

فرمولهای (۷۰.۱۸) و (۸۰.۱۸) رابطه بین علامه کریستوفل نوع اول و دوم را بیان کرده، ابزاری برای تبدیل یک نوع علامه کریستوفل به نوع دیگر را فراهم می‌سازند.

قضیه. علامه کریستوفل نوع اول را می‌توان با فرمولهای

$$(۹۰.۱۸) \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

بیان کرد، که فقط مستلزم ضرایب اولین فرم اساسی و مشتقاتشان نسبت به مختصات منحنی الخط اند.

علامه کریستوفل نوع دوم را می‌توان با فرمولهای زیر بیان نمود:

$$(۱۰۰.۱۸) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

برهان. با مشتقگیری از اتحاد

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = g_{ij}$$

نسبت به  $u^k$ ، داریم

$$\mathbf{r}_{ik} \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

یا

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

دو جایگشت دوری متوالی از اندیسها نتیجه می‌دهند که

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}$$

$$\Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

دو معادله اخیر را با هم جمع کرده، سپس معادله قبلی را کم می‌کنیم؛ در نتیجه، با توجه به تقارن علائم کریستوفل نوع اول نسبت به دو اندیس اول، خواهیم داشت

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

یا (۹۰۱۸). فرمولهای (۱۰۰۱۸) از اینها به وسیله (۸۰۱۸) نتیجه می‌شوند.

اگر مختصات منحنی الخط تغییر کنند، علائم کریستوفل نیز تغییر می‌کنند. قانون تبدیل علائم کریستوفل را می‌توان از فرمولهای (۶۰۱۸) و (۸۰۱۸) به دست آورد (ر.ک. تمرین ۳ در این زیربخش).

فرمولهای علائم کریستوفل در حالت دستگاه مختصات متعامد ( $g_{12} = 0$ ) بسیار ساده‌تر می‌شوند. درواقع، در این حالات، داریم

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

$$\Gamma_{221} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}.$$

چون در این حالت، طبق (۱۶۰۱۶)، نیز داریم

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{12} = g^{21} = 0,$$

فرمولهای علائم کریستوفل نوع دوم خواهند بود

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

$$(11.18) \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}.$$

لازم به یادآوری است که فرمولهای (۱۱.۱۸) فقط برای مختصات متعامد برقرارند! مختصات خاصتر علایم کریستوفل ساده‌تری به دست می‌دهند. بالاخص، برای

مختصات نیمه ژئودزیک ( $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = G$ )، داریم

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$(12.18) \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^2}.$$

در مورد مختصات ایزومتریک ( $g_{11} = g_{22} = [\rho(u^1, u^2)]^2, g_{12} = 0$ )، داریم

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial u^2},$$

$$(13.18) \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^2}.$$

### امثله و تمرین

۱. علایم کریستوفل یک کره در مختصات کروی عبارتند از

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \cos u^1 \sin u^1, \quad \Gamma_{12}^2 = -\tan u^1 \quad (u^1 = \theta).$$

۲. علایم کریستوفل صفحه در مختصات دکارتی همه صفرند:

$\Gamma_{ij}^k = 0$  با اینحال، در مختصات قطبی  $(\rho, \phi)$  داریم

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = -\rho, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho}.$$

این مثال نشان می‌دهد که علایم کریستوفل نوع دوم یک سطح ممکن است در یک دستگاه همه صفر و در دستگاهی دیگر مخالف صفر باشند.

۳. فرمولهای تبدیل علایم کریستوفل تحت تبدیل مختصات  $u^i = u^i(u^1, u^2)$  را به دست

آورید .

داریم

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u^i} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^j \partial u^i} \Gamma_{ij}^k, \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \Gamma_{ij}^k,$$

که از آنجا

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^j \partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \Gamma_{ij}^k.$$

طرف راست این فرمول نه فقط شامل علائم کریستوفل در مختصات قدیم و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم مختصات است بلکه شامل ضرایب اولین فرم اساسی نیز می باشد . با ضرب این معادله در (۲۸.۱۶) ، یعنی

$$g^{i'k'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k} g^{ik},$$

پس از چند محاسبه ساده ، معلوم می شود که

$$\Gamma_{ij}^{k'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} \Gamma_{ij}^k. \quad (۱۴.۱۸)$$

فرمولهای تبدیل علائم کریستوفل نوع دوم ، به خلاف نوع اول ، فقط شامل علائم در مختصات قدیم و مشتقات مختصات اند . اما با قوانین تبدیل ضرایب هر دو فرم از دو جهت متفاوت اند . اول اینکه ، شامل مشتقات دوم مختصات قدیم نسبت به مختصات جدید اند . دوم اینکه ، نسبت به علائم کریستوفل قدیم همگن نیستند .

۴ . علائم کریستوفل را برای سطوح زیر حساب کنید :

(آ) زنجیرگون ؛

(ب) کره نما ؛

(پ) مارپیچ گون ؛

(ت) چنبره

در پارامتری سازیهایی که در تمرینات پیشتر داده شده اند .

۵ . علائم کریستوفل یک سطح گسترده را بیابید . آنها را بر حسب طول قوس ، انحنا ، و تاب یا ل بازگشت بیان نمایید .

۶ . علائم کریستوفل سطح

$$z = f(x, y)$$

را ، با استفاده از نمادهای

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

به دست آورید.

۷. ثابت کنید که

$$\frac{\partial(\ln g)}{\partial u^i} = \Gamma_{ik}^k = \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2.$$

۸. ثابت کنید که اگر  $\omega$  زاویه بین منحنیهای مختصات باشد،

$$\sqrt{g} \frac{\partial \omega}{\partial u^1} = -\frac{\Gamma_{11}^2}{g^{22}} - \frac{\Gamma_{12}^1}{g^{11}}, \quad \sqrt{g} \frac{\partial \omega}{\partial u^2} = -\frac{\Gamma_{12}^2}{g^{22}} - \frac{\Gamma_{22}^1}{g^{11}}.$$

### ۳۰۱۸ فرمولهای گاوس و کودازی<sup>۱</sup>

قضیه ۰۱. ضرایب اولین و دومین فرم اساسی یک سطح از کلاس  $C_3$  در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$(15.18)b = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma_{11}^s \Gamma_{22}^s - \Gamma_{12}^s \Gamma_{12}^s) g_{ss};$$

و

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^l b_{l2} = \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^l b_{l1},$$

(16.18)

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma_{21}^l b_{l2} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^l b_{l1}.$$

فرمول (15.18) فرمول گاوس، و فرمولهای (16.18) فرمولهای کودازی نامیده

می‌شوند.

برهان. با مشتقگیری از (10.18) نسبت به  $u^k$ ، داریم

$$r_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} r_l + \Gamma_{ij}^s r_{sk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} m + b_{ij} m_k.$$

با گذاردن عبارات (10.18) و (20.18) به جای  $r_{jk}$  و  $m_k$ ، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} r_{ijk} &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} r_l + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l r_l + \Gamma_{ij}^s b_{sk} m + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} m - b_{ij} b_k^l r_l \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l - b_{ij} b_k^l \right) r_l + \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^s b_{sk} \right) m. \end{aligned}$$

پیوستگی مشتق سوم ایجاب می کند که

$$r_{ijk} = r_{ikj}.$$

با گذاردن عبارت فوق به جای  $r_{ijk}$  و عبارت حاصل شده از قبلی با تعویض اندیسهای  $j$  و  $k$  به جای  $r_{ikj}$ ، یک معادله برداری به دست می آید که با معادلات حاصل از متحد گرفتن ضرایب  $r_1, r_2, m$  در طرفین معادل است. این کار به معادلات زیر منجر می شود:

$$(17.18) \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - b_{ij} b_k^s = \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u^j} + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s - b_{ik} b_j^s$$

(اندیسهای ظاهری  $s$  و  $l$  با  $r$  و  $s$  عوض شده اند)، و

$$(18.18) \quad \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^l b_{lk} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma_{ik}^l b_{jl}$$

(که در آن  $s$  با  $l$  عوض شده است). فرمولهای (17.18) و (18.18) بستگیهای بین ضرایب دو فرم اساسی را نشان می دهند.

برای به دست آوردن (15.18)، طرفین (17.18) را در  $g_{sl}$  ضرب می کنیم. پس از تغییر اندیس جمع بندی در جموند دوم از  $r$  تا  $s$ ، خواهیم داشت

$$(19.18) \quad g_{sl} \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{skl} - b_{ij} b_{kl} = g_{sl} \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u^j} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sjl} - b_{ik} b_{jl}.$$

توجه کنید که یک جایگشت از اندیسهای آزاد  $j$  و  $k$  طرف چپ (19.18) را به طرف راست بدل می کند. لذا، کافی است همه تبدیلات لازم فقط در طرف چپ اعمال شوند و طرف راست تبدیل یافته را با جایگشتی از  $j$  و  $k$  در عبارت حاصل به دست آورد.

مشتقگیری از اتحاد  $\Gamma_{ij}^s g_{sl} = \Gamma_{ijl}$  نسبت به  $u^k$  نتیجه می دهد که

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} g_{sl} + \Gamma_{ij}^s \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k},$$

که از آنجا

$$g_{sl} \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k}.$$

با گذاردن این در طرف چپ (19.18)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{skl} - b_{ij} b_{kl} \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma_{ij}^s \left[ \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{sk}}{\partial u^l} \right) \right] - b_{ij} b_{kl} \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^s \left( \frac{\partial g_{sk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^s} \right) - b_{ij} b_{kl} \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{kls} - b_{ij} b_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - g_{sr} \Gamma_{ij}^s \Gamma_{kl}^r - b_{ij} b_{kl}.
 \end{aligned}$$

لذا، معادله (۱۹۰۱۸) معادل است با

$$\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - g_{sr} \Gamma_{ij}^s \Gamma_{kl}^r - b_{ij} b_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - g_{sr} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{jl}^r - b_{ik} b_{jl},$$

یا

$$(۲۰۰۱۸) \quad b_{ij} b_{kl} - b_{ik} b_{jl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - g_{rs} (\Gamma_{ij}^s \Gamma_{kl}^r - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{jl}^r).$$

با محاسبه‌ای ساده، از (۹۰۱۸) حاصل می‌شود

$$\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial u^i \partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^k} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i \partial u^j} \right),$$

که می‌توان آن را در (۲۰۰۱۸) قرار داد. حال، با جانشانی  $i = j = 1$  و  $k = l = 2$ ، فرمول گاوس (۱۵۰۱۸) به دست می‌آید. جانشانیهای دیگری از اندیسها به اتحادهایی بدیهی و یا معادله‌ای معادل با (۱۵۰۱۸) منجر خواهند شد.

فقط دو فرمول از (۱۸۰۱۸) مستقل اند؛ فرمولهایی که به ازای  $i = 1, j = 1, k = 2$  یا  $i = 2, j = 1, k = 2$  حاصل می‌شوند. اینها با فرمولهای کودازی (۱۶۰۱۸) یکی هستند. ترکیبات دیگری از اندیسها معادلات جدیدی به دست نخواهند داد.

به عنوان نتیجه، قضیه مهم زیر از گاوس را به دست می‌آوریم که وی آن را (theorema egregium) نامیده است.

قضیه ۲ (گاوس). انحنای گاوسی  $K$  یک سطح از کلاس  $C_3$  فقط به ضرایب اولین فرم اساسی و مشتقات مراتب اول و دوم آنها بستگی دارد.

برهان. از (۶۰۱۷) و (۱۵۰۱۸) فوراً نتیجه می‌شود که

$$(۲۰.۱۸) K = \frac{b}{g} = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma_{11}^r \Gamma_{22}^s - \Gamma_{12}^r \Gamma_{12}^s) g_{rs} \right].$$

طرف راست فقط شامل ضرایب  $g_{ij}$  و مشتقات آنها با علائم کریستوفل است که آنها را نیز می‌توان، طبق قضیه ۲۰.۱۸، برحسب ضرایب  $g_{ij}$  بیان کرد.

از زمان کشف این قضیه فرمولهای متعدد معادلی برای بیان  $K$  برحسب ضرایب  $g_{ij}$  به دست آمده‌اند. علاوه بر (۲۱.۱۸)، به دو تا از آنها اشاره می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Gamma_{11}^s}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^s}{\partial u^1} + (\Gamma_{11}^r \Gamma_{r2}^s - \Gamma_{12}^r \Gamma_{r1}^s) \right] g_{s2},$$

۹

$$K = \frac{1}{g^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} & \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & g_{11} & g_{12} & \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} & g_{21} & g_{22} & \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{g^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

فرمول اخیر  $K$  را مستقیماً "برحسب  $g_{ij}$  ها، بدون دخالت علائم کریستوفل، بیان می‌کند. فرمول مربوط به  $K$  در مختصات خاص خیلی ساده‌تر می‌شود. یافتن فرمولی برای مختصات متعامد ( $g_{12} = 0$ ) به عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود (ر.ک. تمرین ۱ در زیر). حال ثابت می‌کنیم، در مختصات نیمه ژئودزیک ( $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = G$ )، که در آن علائم کریستوفل با فرمولهای (۱۲.۱۸) داده می‌شوند، داریم

$$(۲۲.۱۸) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

در واقع، با گذاردن مقادیر

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = G$$

در (۲۱.۱۸)، به دست می آوریم

$$K = \frac{1}{G} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1) - (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2) G \right].$$

بنابر (۱۲.۱۸)، داریم

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^1}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^2}; \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 G}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{1}{4G^2} \left( \frac{\partial G}{\partial u^1} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\sqrt{G} \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial G}{\partial u^1} \right) - \frac{\partial G}{\partial u^1} \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u^1}}{G} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\sqrt{G} \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial G}{\partial u^1} \right) - \frac{\partial G}{\partial u^1} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^1}}{G} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial G}{\partial u^1} \sqrt{G} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^1 \partial u^1}. \end{aligned}$$

امثلة و تمرین

۱. ثابت کنید، در مختصات متعامد ( $g_{12} = 0$ )، فرمول (۲۱.۱۸) برای انحنای گاوسی به صورت زیر درمی آید:

$$(۲۳.۱۸) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} \right) \right].$$

۲. بالاخص، در مختصات ایزومتریک، وقتی  $g_{12} = 0$ ،  $g_{12} = g_{22} = \rho^2$ ، داریم

$$(۲۴.۱۸) \quad K = -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial u^2 \partial u^2} \right)$$

یا، با استفاده از عملگر لاپلاس<sup>۱</sup>

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^2},$$

به دست می آوریم

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \Delta \ln \rho.$$

۳. فرمولهای کودازی را در مختصات نیمه ژئودزیک و مختصات همگرایی بنویسید.
۴. با استفاده از فرمولهای این بخش، مجدداً "انحنای گاوسی سطوح منظور در بخشهای پیش را حساب کنید.
۵. ثابت کنید فرمولهای کودازی (۱۶.۱۸) در تعویض  $b_{ij}$  با  $g_{ij}$  متحداً "برقرارند.
۶. ثابت کنید انحنای گاوسی یک سطح با اولین فرم اساسی

$$ds^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2} [(du^1)^2 + (du^2)^2]$$

مساوی  $1/a^2$  است. به ازای چه  $\lambda$  ای، فرم درجه دوم  $\lambda ds^2$  دومین فرم اساسی این سطح است؟

#### ۴.۱۸ قضیه اساسی نظریه سطوح

در بخش پیش، رابطه بین دو فرم اساسی یک سطح به دست آمد. در این بخش، به این امر که آیا این معادلات برای وجود یک سطح با فرمولهای اساسی مفروض کافی اند می پردازیم. جواب مثبت این سوال موضوع قضیه بونه<sup>۱</sup> است، که قضیه اساسی نظریه سطوح نیز نام دارد. برهان این قضیه بر نظریه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی استوار است، و در اینجا به تفصیل بیان نمی شود. با اینحال، مایلیم ایده اساسی برهان را به طور مختصر شرح دهیم.

همانطور که دیدیم، تابع  $r(u^1, u^2)$ ، که نمایش پارامتری سطح است، در دستگاه معادلات زیر صدق می کند:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} m, \\ m_i &= -b_i^j r_j, \end{aligned} \quad (25.18)$$

که دستگاهی است از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دو، و، علاوه بر این، در شرط  $mr_i = 0$  نیز صدق می نماید. پنج معادله بردازی در (۲۵.۱۸) وجود دارند که با پانزده معادله

اسکالر معادل‌اند. این معادلات را می‌توان به صورت دستگاهی از معادلات جزئی خطی مرتبه اول با مجهولات  $r_1, r_2, m$  در نظر گرفت. همانطور که پیشتر دیدیم، ضرایب این دستگاه به وسیله اولین و دومین فرمهای اساسی سطح معین می‌شوند. به آسانی، با محاسبه، ثابت می‌شود که به ازای جواب  $r = r(u^1, u^2)$  از دستگاه (۲۵.۱۸) به طوری که  $r, m = 0$ ، و ضرایب (۲۵.۱۸) از ضرایب فرمهای مفروض  $I = g_{ij} du^i du^j$  و  $II = b_{ij} du^i du^j$  طبق (۱۵.۱۸) و (۴.۱۸) حساب می‌شوند، معادله  $r = r(u^1, u^2)$  نمایش سطحی است که اولین فرم اساسی‌اش با  $I$  و دومین فرم اساسی‌اش با  $II$  یکی است. کل مسئله وجود (به طور موضعی) سطح مطلوب به مسئله وجود یک جواب (۲۵.۱۸) با خاصیت اضافی  $mr_i = 0$  تحویل می‌گردد.

نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی شرط لازم و کافی برای وجود جواب (۲۵.۱۸) در یک همسایگی به دست می‌دهد، به این صورت که معادلات  $m_{ij} = m_{ji}$ ،  $r_{ijk} = r_{ikj}$  باید از معادلات (۲۵.۱۸) نتیجه شوند. با استفاده از معادله اول، فرمولهای گاوس و کودازی (۱۵.۱۸) و (۱۶.۱۸) به دست می‌آیند. می‌توان نشان داد که این معادلات با  $r_{ijk} = r_{ikj}$  معادل‌اند. معادله دوم  $m_{ij} = m_{ji}$  نیز به معادلاتی معادل فرمولهای گاوس و کودازی منجر می‌شود. از اینرو، برقراری فرمولهای (۱۵.۱۸) و (۱۶.۱۸) وجود جواب را ایجاب می‌کند. جواب باید بیشتر خاص شود تا در شرط اضافی صدق کند، که این نیز عملی است.

این امر مآلاً "قضیه زیر را به دست خواهد داد:

قضیه (بونه). دو فرم دیفرانسیل درجه دوم  $I = g_{ij} du^i du^j$  با ضرایب از کلاس  $C_2$  و  $II = g_{ij} du^i du^j$  با ضرایب از کلاس  $C_1$  که در قلمروی از صفحه  $u^1 u^2$  تعریف شده‌اند، در همسایگی یک نقطه از این قلمرو اولین و دومین فرم اساسی سطح  $r = r(u^1, u^2)$  اند اگر و فقط اگر

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0, g_{11} > 0 \quad ۱.$$

۲. ضرایب  $g_{ij}$  و  $h_{ij}$  در معادلات گاوس (۱۵.۱۸) و کودازی (۱۶.۱۸)، که در آنها ضرایب  $\Gamma_{ij}^k$  با (۱۵.۱۸) برحسب  $g_{ij}$  بیان شده‌اند، صدق نمایند.

سطح کاملاً "با دو فرم اساسی، و با تقریب جایش در فضا، مشخص می‌شود؛ یعنی، دو سطح مختلف با اولین و دومین فرمهای اساسی یکسان را می‌توان با یک حرکت اقلیدسی در فضا برهم منطبق کرد.

### امثله و تمرین

۱. فرمهای  $(du^1)^2 + (du^2)^2$  و  $(du^1)^2 - (du^2)^2$  نمی توانند اولین و دومین فرم اساسی یک سطح باشند، چرا که در فرمولهای گاوس صدق نمی کنند. در واقع، با استفاده از فرم اول و فرمولهای (۲۲.۱۸)، داریم  $K = 0$ . از سوی دیگر،  $b/g = -1$ .
۲. فرمهای  $I = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2$  و  $II = \cos^2 u^1 (du^1)^2 + (du^2)^2$  نمی توانند اولین و دومین فرم اساسی یک سطح باشند. با آنکه در این حالت فرمول گاوس برقرار است (و  $K = 1$ )، فرمولهای کودازی برقرار نیستند. در فرمول

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma_{21}^1 b_{12} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^1 b_{11}$$

- طرف چپ برابر  $-\tan u^1$  است حال آنکه طرف راست مساوی  $u^1 \sin u^1 \cos^3 u^1$  می باشد.
۳. تحقیق کنید که فرمهای  $I = (du^1)^2 + (du^2)^2$  و  $II = (du^1)^2$  می توانند اولین و دومین فرم اساسی یک سطح باشند. توجه کنید که، وقتی فرم اول  $(du^1)^2 + (du^2)^2$  باشد، فرمولهای کودازی خودبخود برقرار می باشند.

### ۵.۱۸ تفهیم اولین فرم اساسی

قضیه زیر را نیز بدون اثبات ذکر می کنیم.

قضیه. هر فرم دیفرانسیل درجه دوم  $g_{ij} du^i du^j$  با ضرایب از کلاس  $C_1$ ، که معین مثبت باشد، موضعا " (یعنی، در همسایگی به قدر کافی کوچک هر نقطه) اولین فرم اساسی سطحی مانند  $r = r(u^1, u^2)$  از کلاس  $C_2$  می باشد. از این سطحهایی نهایت به اشکال مختلف وجود دارند.

طبق قضیه بونه، اگر دومین فرم اساسی رانیز داشته باشیم، شکل سطح مشخص خواهد شد.

### ★ ۱۹ تانسورها و جبر تانسورها

#### ۱۰.۱۹ اشیاء هندسی

گردآیه ضرایب اولین فرم اساسی، گردآیه ضرایب دومین فرم اساسی، و گردآیه علامت کریستوفل یک سطح نمونه هایی هستند از گردآیه هایی از توابع حقیقی یک نقطه از سطح که به انتخاب مختصات منحنی الخط موضع بستگی دارند. همانطور که دیدیم، اگر مقادیر

همه توابع یک گردآیه در یک نقطه به ازای یک دستگاه مختصات و همچنین تبدیلات مختصات را بدانیم، می توانیم مقادیر توابع این گردآیه را در دستگاه مختصات جدید مشخص کنیم. فرمولهای نظیر فقط شامل توابع گردآیه در دستگاه مختصات اولیه و مشتقات تبدیلات مختصات می باشند.

یک گردآیه<sup>۲</sup> مرتب از توابع یک نقطه بر یک سطح که به مختصات موضعی طوری وابسته باشد که عناصر گردآیه<sup>۲</sup> نظیر به یک دستگاه مختصات فقط توابعی از عنصرهای گردآیه نظیر به دستگاه مختصات دیگر و مشتقات (از مراتب مختلف) توابع نمایش تغییر مختصات است شیء هندسی دیفرانسیل نامیده می شود. توابع گردآیه به ازای مختصات مفروض مولفه های شیء هندسی نام دارند. ما با چند نمونه از اشیاء هندسی دیفرانسیل برخورد داریم. قانون تبدیل (۲۸.۱۶) و (۹.۱۷) برای مولفه های اشیاء  $g_{ij}, b_{ij}$  فقط شامل مشتقات مرتبه اولند، حال آنکه قانون تبدیل (۱۴.۱۸) برای مولفه های  $\Gamma_{ij}^k$  شامل مشتقات مرتبه دوم نیز هست. توجه کنید که گردآیه<sup>۲</sup> علامت کریستوفل نوع اول، یعنی  $\Gamma_{ijk}$ ، به هیچوجه یک شیء هندسی نیست، زیرا قانون تبدیل (ر.ک. مثال ۳، ۲۰.۱۸) شامل ضرایب  $g_{ij}$  اولین فرم اساسی نیز می باشد.

در بین اشیاء هندسی روی یک سطح، تانسورها بویژه مفید و ساده اند. جبر تانسورها و حساب تانسورها به صورت ابزارهای مهمی در هندسه و فیزیک درآمده اند. در واقع، در سراسر نظریه سطوح این کتاب، روشهای تانسوری به کار می روند. هدف از بخش ۱۹ آن است که مفهوم تانسور و چند مطلب اساسی درباره آن را بنوعی به خواننده عرضه کنیم، لیکن، خواندن بخش ۱۹ برای فهمیدن کتاب لازم نیست. جز در بخش ۲۴ که مفاهیم اساسی آنالیز تانسورها عرضه میشوند، و ۳۰.۱۳، نتایج بخش ۱۹ مورد مراجعه ما در این کتاب قرار نخواهند گرفت.

## ۲.۱۹ تانسورها در فضای برداری $n$ بعدی

برای حالت کلی  $n$  بعدی تعریفی می آوریم. لذا، اندیسهای ما مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را گرفته و جمع بندیها روی مقادیر  $1, 2, \dots, n$  از اندیس جمع بندی صورت می گیرند. با این پیرایش، توافق جمع بندی زیر بخش ۱۰.۱۵ را در اینجا اعمال می کنیم.

یک فضای برداری  $n$  بعدی روی اعداد حقیقی مانند  $R^n$  را در نظر می گیریم. هر مجموعه از  $n$  بردار مستقل مانند  $e_1, e_2, \dots, e_n$  را می توان به عنوان پایه ای از این فضا به کار برد، و هر بردار مانند  $v$  را می توان به طور منحصر بفرد به شکل

$$v = v^i e_i$$

نمایش داد. اعداد  $v^i$  مولفه های بردار  $v$  نسبت به پایه  $\{e_i\}$  نامیده می شوند.

بردارهای پایه دیگر  $e_1, \dots, e_n$  را همواره می توان به شکل

$$(1.19) \quad e_i = A_i^j e_j$$

بیان نمود.  $n^2$  عدد  $A_i^j$  یک ماتریس نامفرد تشکیل می دهند به نام ماتریس تغییر پایه.

عناصرهای معکوس ماتریس  $(A_i^j)$  را با  $A_j^i$  نشان می دهیم. بنابراین،

$$(2.19) \quad A_i^j A_j^k = \delta_i^k, \quad A_i^j A_j^i = \delta_i^i.$$

$v$  نسبت به این پایه جدید مجموعه دیگری از مولفه ها مانند  $[v^1, v^2, \dots, v^n]$  را

داراست. به آسانی معلوم می شود که

$$(3.19) \quad v^i = A_i^j v^j$$

درواقع،  $v = v^i e_i = v^i A_i^j e_j$ . با گذاردن (۲.۱۹) به جای  $e_j$ ، به دست می آید

$v^i A_i^j e_j = v^i e_i$ . این، به خاطر استقلال بردارهای  $e_i$ ، معادل  $v^i A_i^j = v^i$  است. با ضرب

طرفین در  $A_i^k$ ، خواهیم داشت  $v^i A_i^j A_j^k = v^i A_i^k$ ، و، بنابر (۲.۱۹)،  $v^k = A_i^k v^i$ .

تغییر اندیس  $k'$  به  $i'$  (۳.۱۹) را به دست خواهد داد.

توجه کنید که یک بردار با معلوم بودن مولفه های نسبت به یک پایه معین است.

تغییر مولفه ها، وقتی پایه تغییر کند، با قانون تبدیل (۳.۱۹) معین خواهد شد.

یک تانسور از نوع  $(k, l)$  (که  $k, l \geq 0$ ) اعدادی صحیح اند) یا یک تانسور  $k$  بار

کنتراواریان و  $l$  بار کوواریان که با دستگاهی مرکب از  $(k + l)^n$  مولفه نسبت به پایه ای

مانند  $e_i$  معین می شود، و به وسیله حرفی با  $k$  بالانویس و  $l$  زیرنویس مانند

$$a_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$$

نموده می شود، چنان است که اگر پایه به  $e_i$  تغییر یابد، بنابر فرمول (۱.۱۹)،

مولفه ها نسبت به پایه جدید عبارت خواهند بود از

$$(4.19) \quad a_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_k}^{j_k} A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_l}^{i_l} a_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

در این قانون تبدیل، به ازای هر اندیس بالایی یک ضریب  $A_i^j$ ، و به ازای هر اندیس

پایینی یک ضریب  $A_j^i$  از ماتریس معکوس را داریم.

یک تانسور از نوع  $(0, 0)$ ، به نام اسکالر، فقط مولفه  $a$  را دارد که به انتخاب پایه

بستگی ندارد. آن را می توان با خود  $a$  یکی کرد.

قانون تبدیل تانسورها از نوع  $(1, 0)$  بر (۳.۱۹) منطبق است. از اینرو، می توان

یک بردار را یک تانسور از نوع  $(1, 0)$  در نظر گرفت.

یک تانسور از نوع  $(0, 1)$  یک بردار کوواریان یا یک همبردار نامیده می شود. مولفه های

$v_k$  یک بردار کوواریان دارای قانون تبدیل

$$(5.19) \quad v_i = A_i^j v_j$$

است.

### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید که اگر با مولفه‌های  $a_{ij}^k$  یک تانسور نسبت به پایه  $e_1, e_2, \dots, e_n$  شروع کنیم، بعد تبدیل مولفه‌ها نظیر به تغییر پایه  $e_i = A_i^j e_j$  را اعمال کنیم، و سپس برای مولفه‌ها تبدیل نظیر به تغییر  $e_j = A_j^l e_l$  را اعمال نماییم، مولفه‌های حاصل همان مولفه‌های حاصل از تبدیل نظیر به تغییر مستقیم از پایه  $e_i$  به  $e_j$  خواهند بود.

راهنمایی. توجه کنید که  $A_i^j = A_i^l A_l^j$ ؛ یعنی، ماتریس تغییر  $e_i \rightarrow e_j$  حاصل ضرب ماتریسهای تغییرات  $e_i \rightarrow e_l$  و  $e_l \rightarrow e_j$  است.

۲. اگر همه مولفه‌های یک تانسور نسبت به پایه صفر باشند، نسبت به پایه دیگر نیز صفر خواهند بود.

۳. ثابت کنید که علائم کرونکر  $\delta_{ij}$  مولفه‌های یک تانسور از نوع  $(1,1)$  نسبت به هر پایه‌اند. علائم کرونکر  $\delta_{ij}$  و  $\delta^{ij}$  تانسور تعریف نمی‌کنند.

### ۳.۱۹ تانسورها به عنوان توابع چندخطی

راه دیگری برای تعریف تانسور در فضای برداری  $n$  بعدی وجود دارد که از پایه فضا استفاده نمی‌شود.

فرض کنیم  $V = R^n$  یک فضای  $n$  بعدی و  $\mathcal{V}^*$  دوگان آن باشد؛ یعنی، فضای خطی مرکب از توابع خطی اسکالر بر  $V$  با تعاریف طبیعی مجموع و حاصل ضرب در یک اسکالر. یک تانسور از نوع  $(k, l)$  تابعی تعریف می‌شود که  $\mathcal{V}^k \times \mathcal{V}^l$  را بتوی  $R$  می‌نگارد، بر هر محور خطی است یا، به زبان دیگر، تابعی از  $l + k$  متغیر است،  $l$  متغیر از فضای برداری  $V$  و  $k$  متغیر از فضای دوگان  $\mathcal{V}$  که نسبت به هر متغیر خطی است.

به ازای تانسور  $a(v_1, \dots, v_l, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k)$ ، که در آن  $\hat{v}$  ها در  $\mathcal{V}$  و  $v$  ها در  $V$  تغییر می‌کنند، و پایه  $e_1, \dots, e_n$  از  $V$ ، مولفه‌های  $a_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_k}^k$  را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_k}^k = a(e_{i_1}, \dots, e_{i_l}, \hat{e}^{j_1}, \dots, \hat{e}^{j_k}),$$

که در آن  $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n$  عنصرهای پایه دوگان  $e_1, \dots, e_n$  هستند؛ یعنی، توابع خطی  $\hat{e}^i$  به طوری که

$$\hat{e}^i(e_j) = \delta_j^i.$$

### تمرین

۱. ثابت کنید که، در تحدید به تانسورهای از نوع  $(1, 2)$ ، مولفه‌ها که به صورت فوق تعریف شده اند از قانون تبدیل  $(4.19)$ ، وقتی پایه تغییر می‌کند، تبعیت می‌کنند. راهنمایی. توجه کنید که، وقتی پایه‌ای از  $V$  بر طبق فرمولهای  $(1.19)$  تغییر کند، پایه دوگان نظیر برطبق فرمولهای  $\hat{e}^i = A^i_j e^j$  تغییر خواهد کرد.
۲. برای در نظر گرفتن بردارها به عنوان تانسورهای از نوع  $(1, 0)$ ، باید بردار  $v = v^i e_i$  را با تابع خطی  $v(\hat{e})$  تعریف شده در  $\hat{V}$ ، که  $v^i(\hat{e}^i) = v^i$  و  $\hat{e}^i$  عنصر  $i$  م پایه دوگان  $e_i$  است، یکی کنیم. ثابت کنید این انطباق به انتخاب پایه  $e_i$  بستگی ندارد.

### ۴.۱۹ تانسورها در فضای اقلیدسی

بردارها در فضای اقلیدسی نه فقط یک فضای برداری تشکیل می‌دهند بلکه یک تابع اسکالر دوتایی نیز دارند به نام ضرب نقطه‌ای یا ضرب اسکالر. این ضرب نسبت به هر متغیر خود خطی است، و، وقتی هر دو متغیر یک مقدار ناصفر بگیرند، مثبت می‌باشد. اگر در یک فضای  $n$  بعدی ضرب نقطه‌ای یا ضرب اسکالر را با این خواص تعریف کنیم، چیزی به دست می‌آید که ما فضای برداری اقلیدسی  $n$  بعدی می‌نامیم. با استفاده از ضرب نقطه‌ای، می‌توان طول یک بردار را به عنوان جذر مربع اسکالر بردار تعریف کرد. این طول نامنفی است و فقط به ازای بردار صفر برابر صفر است.

به ازای دو بردار  $u, v$  در یک فضای برداری اقلیدسی و پایه  $e_i$  از فضا، قرار

می‌دهیم

$$u = u^i e_i, \quad v = v^j e_j.$$

حاصل ضرب اسکالر این بردارها مساوی است با

$$(4.19) \quad uv = u^i v^j (e_i e_j) = g_{ij} u^i v^j,$$

که در آن ضرایب  $g_{ij} = e_i e_j$  تابع انتخاب پایه می‌باشند. پس از تغییر پایه به  $(1.19)$ ، ضرایب جدید عبارت خواهند بود از

$$g_{i'j'} = e_{i'} e_{j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} e_i e_j = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}.$$

بنابراین،  $g_{ij}$  مولفه‌های یک تانسور از نوع  $(0, 2)$  می‌باشند. این تانسور در فضای برداری اقلیدسی نقشی بسیار اساسی دارد و تانسور اساسی یا تانسور متری نامیده می‌شود، زیرا برای تعیین طول یک بردار به کار می‌رود:

$$|v| = \sqrt{g_{ij} v^i v^j}.$$

خواص ضرب نقطه‌ای خواص زیر را برای تانسور متری ایجاب می‌کنند:

$$g_{ij} = g_{ji} \quad ۱.$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ۲.$$

۳. فرم درجه دوم  $g_{ij}u^i u^j$  معین مثبت است؛ یعنی، مقدارش مثبت است. مگر آنکه به ازای هر  $u^i = 0, i = 1, 2, \dots, n$  این ایجاب می کند که دترمینان  $g$  مثبت باشد. حال اگر  $g^{ij}$  را عناصر ماتریس معکوس  $(g_{ij})$  تعریف کنیم، یعنی با شرایط

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i, \quad (۷۰۱۹)$$

می توان تحقیق کرد که کمیت های  $g^{ij}$  مولفه های یک تانسور از نوع  $(2, 0)$  می باشند. این تانسور را تانسور متری کنتراواریان می نامیم. این تانسور نیز از خواص ۱، ۲، و ۳ برخوردار است.

در یک فضای اقلیدسی همواره می توان پایه ای چون  $e_1, \dots, e_n$  یافت به طوری که هر بردار به طول یک بوده و هر دو بردار متمایز دارای حاصل ضرب نقطه ای صفر باشند. نسبت به این پایه، که پایه متعامد یکه نام دارد، تانسور متری دارای مولفه های زیر است:

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g^{ij} = \delta^{ij}.$$

وقتی فضا های اقلیدسی را در نظر می گیریم، مناسب تر آن است که اندیس های کوواریان و کنتراواریان را جدا مرتب نکنیم، بلکه همه  $k + l$  اندیس را در یک سطر مرتب کرده و در جای لازم به عنوان زیرنویس یا بالانویس قرار دهیم. برای احتراز از ابهام، جاهای آزاد را با نقطه پر می کنیم. مثلاً،

$$a_{i,j}^{k,l}$$

مولفه های یک تانسور از نوع  $(2, 2)$  را نشان می دهد؛ اندیس اول، یعنی  $i$ ، یک اندیس کوواریان است؛ اندیس های دوم و سوم، یعنی  $j, k$ ، اندیس های کنتراواریان هستند؛ و اندیس آخر، یعنی  $l$ ، باز یک اندیس کوواریان می باشد.

### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید هرگاه مولفه های یک تانسور از نوع  $(0, 2)$  نسبت به یک پایه متقارن باشند، یعنی  $a_{ij} = a_{ji}$ ، آنگاه مولفه های آن نسبت به هر پایه متقارن می باشند. این تانسور متقارن نامیدن خود تانسور را توجیه خواهد کرد.

ثابت کنید  $g^i$  ها مولفه های یک تانسور از نوع  $(2, 0)$  اند.

۳. فضا های اقلیدسی نما نیز وجود دارند با یک ضرب نقطه ای که تانسوری مانند  $g_{ij}$  تولید می کنند که فقط در شرایط ۱ و ۲ صدق می نماید.

## ۵.۱۹ اعمال بر تانسورها

حال بر تانسورها چند عمل تعریف می‌کنیم که حاصل آنها مجدداً تانسور است.

۱. یک جایگشت اندیسها تانسور جدیدی به دست می‌دهد؛ مثلاً،

$$b_{ijk} = a_{jki}$$

مولفه‌های یک تانسور هستند اگر  $a_{ijk}$  ها چنین باشند. در تعریف تانسورهای ۳.۱۹، این عمل نظیر به یک جایگشت از متغیرها می‌باشد.

۲. ضرب در یک اسکالر مولفه‌های یک تانسور مولفه‌های تانسور دیگری از همان نوع به دست می‌دهد. در تعریف ۳.۱۹، این یعنی ضرب تابع در یک ثابت.

۳. جمع مولفه‌های نظیر دو تانسور از یک نوع مولفه‌های تانسور جدیدی از همین نوع، به نام مجموع تانسورهای داده شده، را به دست می‌دهد؛ مثلاً،

$$c_{ij}^k = a_{ij}^k + b_{ij}^k.$$

جمع تانسورها از نوع  $(k, l)$  با جمع و ضرب در اسکالرها یک فضای خطی با بعد  $n^{k+l}$  را تشکیل می‌دهند.

در تعریف ۳.۱۹، جمع تانسورها چیزی جز جمع توابع چند خطی مربوطه نیست.

۴. ضرب تانسورها. حاصل ضربهای مولفه‌های یک تانسور از نوع  $(k_1, l_1)$  در مولفه‌های یک تانسور از نوع  $(k_2, l_2)$  مولفه‌های یک تانسور از نوع  $(k_1 + k_2, l_1 + l_2)$  اند نسبت به همان پایه؛ مثلاً،

$$c_{ij,l}^{k,m} = a_{ij,l}^{k,m} b_{ij,l}^{k,m}.$$

با استفاده از تعریف ۳.۱۹، این عمل یعنی ضرب توابع چند خطی، یکی  $k_1 + l_1$  متغیره و دیگری  $k_2 + l_2$  متغیره، تابعی از  $k_1 + k_2 + l_1 + l_2$  متغیر به دست می‌دهد.

در همه تعاریف فوق از مولفه‌های بردارها نسبت به یک پایه استفاده شده است. در نتیجه، برای آنکه تعریفها معتبر باشند، باید ثابت شود که مولفه‌ها از قانون تبدیل برای تانسورها تبعیت می‌کنند. این اثباتها را به عهده خواننده می‌گذاریم.

ضرب تانسورها شرکتپذیر و نسبت به جمع پخشپذیر است.

توجه کنید که، اگر اسکالر را یک تانسور از نوع  $(0, 0)$  بگیریم، ضرب یک تانسور در

یک اسکالر را می‌توان حالت خاصی از ضرب تانسورها تلقی کرد.

۵. انقباض تانسورها. این عملی است که از یک تانسور از نوع  $(k + 1, l + 1)$  به یک

تانسور از نوع  $(k, l)$  منجر می‌شود. در حالت خاص، وقتی بر یک تانسور از نوع  $(1, 1)$  اعمال می‌شود، به یک اسکالر منتج خواهد شد.

این عمل برحسب مولفه‌ها عبارت است از یک جمع‌بندی نسبت به یک جفت اندیس، یکی کوواریان و دیگری کنتراواریان، که مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را می‌گیرند درحالی که بقیه اندیسها ثابت می‌باشند. به عنوان مثال، اعداد

$$(8.19) \quad b_{ij} = a_{sij}^s = a_{sij}^{s1} + a_{2ij}^{s2} + \dots + a_{nij}^{sn}$$

مولفه‌های انقباض تانسور  $a_{kij}^{kl}$  نسبت به اولین اندیس کوواریان و تنها اندیس کنتراواریان است. این تانسور دو انقباض دیگر نیز می‌پذیرد:

$$a_{kis}^{ks} \quad \text{و} \quad a_{ksj}^{ks}$$

همه آنها تانسورهایی از نوع  $(0, 2)$  اند. البته، این تعریف نیز، با اثبات اینکه نتیجه از قوانین تبدیل  $(4.19)$  برای تانسورها پیروی می‌کند، نیاز به توجیه دارد. این مطلب را در مورد تانسور  $(8.19)$  ثابت خواهیم کرد.

چون  $a_{kij}^{kl}$  مولفه‌های تانسورها هستند، پس از تغییر پایه  $(1.19)$  داریم

$$a_{k'ij'}^{kl'} = A_k^k A_i^i A_j^j A_l^l a_{kij}^{kl}.$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} b_{ij'} &= a_{s'ij'}^{s'} = A_s^k A_i^i A_j^j A_{s'}^{s'} a_{kij}^{s'} \\ &= (A_s^k A_{s'}^{s'}) A_i^i A_j^j a_{kij}^{s'} = A_i^i A_j^j \delta_s^k a_{kij}^{s'} \\ &= A_i^i A_j^j a_{sij}^{s'} = A_i^i A_j^j b_{ij}, \end{aligned}$$

که برهان را تمام خواهد کرد.

در فضای برداری اقلیدسی، که دارای تانسور متری  $g_{ij}$  است، عمل انقباض برای تعریف عملی برای پایین و بالا بردن اندیس‌ها به کار رفته است. بهتر است عمل را با یک مثال توضیح دهیم. فرض کنیم  $a_{ij}^k$  یک تانسور از نوع  $(1, 2)$  باشد. با ضرب این تانسور در تانسور  $g_{ij}$  و انجام انقباض نسبت به اندیس کنتراواریان و اولین اندیس تانسور متری، تانسوری از نوع  $(0, 3)$  به دست می‌آوریم:

$$a_{ijk} = a_{ij}^s g_{sk}.$$

این عمل پایین آوردن اندیس  $k$  نام دارد. به همین ترتیب، می‌توان، با استفاده از تانسور  $g^{ij}$ ، اندیسها را بالا برد. حاصل بالا بردن  $i$  در  $a_{ij}^k$  عبارت است از

$$a_i^{i,k} = g^{is} a_{sj}^k,$$

و حاصل بالا بردن  $j$  یا هر دوی  $i$  و  $j$  عبارت است از

$$a_i^{jk} = g^{jr} a_{ir}^k, \quad a^{ijk} = g^{is} g^{jr} a_{rsk}.$$

توجه کنید که اعمال متوالی بالا بردن و پایین آوردن (یا پایین آوردن و بالا بردن) یک اندیس همدیگر را حذف می‌کنند؛ مثلاً،

$$g^{kr} a_{ijr} = g^{kr} g_{rs} a_{ij}^s = \delta_s^k a_{ij}^s = a_{ij}^k.$$

به خاطر این عمل، یک انعکاس منحصر بفرد از تانسورهای نوع  $(k, l)$  بتوی تانسورهای نوع  $(k_1, l_1)$  که  $k_1 + l_1 = k + l$ ، بخصوص بتوی تانسورهای نوع  $(k_1 + l_1, 0)$  یا  $(0, k_1 + l_1)$ ، تعریف می شود. در حالت خاص بردار، این تناظری یک به یک بین بردارها و همبردارها به دست می دهد. به خاطر این، در فضاها برداری اقلیدسی، به جای تانسورهای از نوع  $(k, l)$  از مولفه های نوع  $(k, l)$  یک تانسور سخن می گوئیم، و دستگاههای نمایشهای متفاوت یک تانسور در نظر می گیریم. توجه کنید که اگر پایه متعامد یک باشد، تمام انواع مولفه های یک تانسور مفروض یکی هستند؛ مثلاً،  $a_{ijk} = a_{ij}^k = a_{jk}^i$ ، و غیره.

## ۶.۱۹ میدانهای تانسوری بر سطوح

بردارهای مماس بر یک سطح از کلاس  $C_2$  در نقطه مفروض  $P$  یک فضای برداری دو بعدی تشکیل می دهند. در ۱۰۱۶، به هر دستگاه موضعی از مختصات منحنی الخط در همسایگی  $P$  یک پایه از این فضای برداری مرکب از دو بردار  $r_1, r_2$  مربوط کردیم. تحت تغییر مختصات موضعی بر طبق فرمولهای

$$u^i = u^i(u^1, u^2),$$

بردارهای پایه به صورت زیر تبدیل می گردند:

$$r_i = \frac{\partial u^i}{\partial u^i} r_i.$$

در فضای برداری مماس بر سطح در نقطه  $P$  نیز می توان تانسور در نظر گرفت. ما از  $r_1, r_2$  به عنوان پایه استفاده می کنیم، و لذا، مشتقات جزئی  $\partial u^i / \partial u^i$  نقش  $A_i^j$  را در قوانین تبدیل دارند.

اگر به هر نقطه  $P$  از قلمرو  $\Omega$  بر سطح یک تانسور از نوع  $(k, l)$  در فضای برداری مماس در  $P$  نسبت دهیم، چیزی به دست می آید که ما آن را یک میدان تانسوری از نوع  $(k, l)$  در  $\Omega$  می نامیم. مولفه ها نسبت به پایه طبیعی تولید شده به وسیله مختصات منحنی الخط تانسورها در نقاط  $\Omega$ ، یعنی

$$a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k},$$

توابعی هستند از نقاط سطح (یا از پارامترهای  $u^1, u^2$ ). ما آنها را مولفه های میدان تانسوری نسبت به مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  می نامیم. تحت تغییر مختصات منحنی-الخط، این مولفه ها طبق قانون زیر تبدیل می شوند:

$$(۹۰۱۹) \quad a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial u^{i_1}}{\partial u^{j_1}} \frac{\partial u^{i_2}}{\partial u^{j_2}} \dots \frac{\partial u^{i_k}}{\partial u^{j_l}} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial u^{i_1}} \frac{\partial u^{j_2}}{\partial u^{i_2}} \dots \frac{\partial u^{j_l}}{\partial u^{i_l}} a_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$$

گوئیم یک میدان تانسوری بر یک سطح از کلاس  $C_n$  از کلاس  $C_r$  ( $r \leq n-1$ ) است اگر مولفه‌های آن تسوابعی از کلاس  $C_r$  باشند. واضح است که فرض کرده‌ایم  $n \geq r+1$ ، زیرا، در غیر این صورت، مولفه‌ها در یک دستگاه مختصات ممکن است از کلاس  $C_r$  و در دیگری از کلاس پایین‌تر از  $(n-1)$  باشد.

چون صفحه مماس بر یک سطح یک صفحه اقلیدسی است و ضرب اسکالر در هر صفحه مماس تعریف شده است، یک میدان از تانسور متری  $g_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j$  خواهیم داشت. این میدان را قبلاً در بخش ۱۶ به کار برده‌ایم، که در آنجا با نشان دادن اینکه این یک میدان تانسوری است، قانون تبدیل (۲۵۰۱۶) را به دست آوردیم.

در نظریه سطوح ما تقریباً "با میدانهای تانسوری کار می‌کنیم، نه با تانسورها در یک نقطه. لذا، بدون ایجاد ابهام، می‌توان میدانهای تانسوری را فقط تانسور نامید.

در نظریه سطوح به چند شیء هندسی برخوردیم که تانسور نیستند. ضرایب دومین فرم اساسی، به عنوان تانسور، از قانون تبدیل مشابه (۷۰۱۷) تبعیت می‌کنند، اما، تحت یک تبدیل مختصات که جهت را تغییر می‌دهد، مولفه‌ها علاوه بر یک تبدیل شبیه به تانسور تغییر علامت نیز می‌دهند. یک شیء هندسی از این نوع یک تانسور نامیده می‌شود. مبنای  $g$  و  $b$  فرمهای اساسی، با آنکه هر کدام فقط یک مولفه دارند، میدانهای اسکالر نیستند، زیرا، تحت تغییر مختصات، تبدیل (۸۰۱۷) یا (۹۰۱۷) را متحمل می‌شوند که عبارت است از ضرب در مربع ژاکوبی تبدیل مختصات. این مثالی از یک چگالی اسکالر است.

علایم کریستوفل نیز مولفه‌های یک تانسور نیستند، زیرا قانون تبدیل (۱۴۰۱۸) آنها شامل مشتقات مرتبه دوم مختصات است.

انحنای گاوسی  $K$  یک میدان اسکالر است (ر.ک. بخش ۵۰۱۷)، زیرا به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد.

## ۷۰۱۹ میدانهای تانسوری بر چندگونا‌های دیفرانسیل

به همین ترتیب، می‌توان یک میدان تانسوری بر یک چندگونای دیفرانسیل را تناظری تعریف کرد که به هر نقطه  $P$  از چندگونا یک تانسور از نوع معلوم در فضای برداری مماس در  $P$  نسبت می‌دهد (ر.ک. ۲۰۱۶). بازای دستگاه مختصات موضعی  $u^i$  در چندگونا، مولفه‌های میدان برداری نسبت به پایه  $e_1, \dots, e_n$  مربوط به مختصات منحنی الخط ( $u^i$ ) مولفه‌های

تانسور نسبت به مختصات موضعی ( $u^i$ ) نام دارند. فرمولهای تبدیل برای پایه‌های طبیعی ۲۰۱۶ ایجاب می‌کنند که مولفه‌های یک میدان تانسوری از نوع  $(k, l)$  طبق فرمولهای (۹۰۱۹) تبدیل می‌شوند، که در آن اندیسها مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را بخود می‌گیرند.

کلاس انتظام یک میدان تانسوری مثل حالت دو بعدی تعریف می‌شود. با معرفی یک میدان از تانسور متری  $g_{ij}$  از کلاس  $C_1$  در یک چندگونا از کلاس  $C_2$  که در شرایط داده شده در ۳۰۱۹ صدق کند، می‌توان حاصل ضرب اسکالر و طول بردارها را در هر فضای برداری مماس تعریف کرد؛ همچنین، طول مسیر  $a \leq t \leq b$  را  $u^i = u^i(t)$  می‌توان با فرمول زیر تعریف نمود:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}.$$

با تعریف فاصله بین دو نقطه از چندگونا به عنوان کوچکترین کران بالایی طول مسیرهای واصل بین دو نقطه، چندگونا به یک فضای متری تبدیل خواهد شد.

با استفاده از تانسورهای  $g_{ij}$  و  $g^{ij}$ ، می‌توان اندیسها را بالا و پایین برد. علائم کریستوفل  $\Gamma_{ij}^k$  را می‌توان با فرمولهای (۱۰۰۱۸) تعریف کرد. قانون تبدیل آنها تحت تبدیلات مختصات موضعی عبارت است از (۱۴۰۱۸)، که در آن اینک اندیسها مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را خواهند گرفت.

چندگوناهای دیفرانسیل با تانسور متری مغروض  $g_{ij}$  بر آنها را چندگوناهای ریمانی یا، بویژه وقتی بررسیها به خواص موضعی محدودند، فضاهای ریمانی می‌نامند. هندسه فضاهای ریمانی تعمیم به ابعاد بالاتر هندسه ذاتی سطوح است که موضوع فصل بعد می‌باشد. در باب نظریه فضاهای ریمانی مطلب زیاد نوشته شده است. خواننده مشتاق به اطلاعات بیشتر در باب فضاهای ریمانی می‌تواند به چند کتاب در سطوح مختلف دست یابد. کتاب هندسه دیفرانسیل و ریمانی لاگویتز<sup>۱</sup> خواننده را با این مبحث مختصراً آشنا خواهد ساخت. ★

## هندسه ذاتی سطوح

۲۰ نگاشتهای سطوح

۱۰۲۰ کلیات

دو سطح  $\mathcal{F}_1$  و  $\mathcal{F}_2$  و نگاشت  $\phi$  از  $\mathcal{F}_1$  بتوی  $\mathcal{F}_2$  را در نظر می گیریم. فرض کنیم این نگاشت نقطه  $P_0$  از  $\mathcal{F}_1$  را به نقطه  $Q_0$  از  $\mathcal{F}_2$  بنگارد. همچنین، سطوح  $\mathcal{F}_1$  و  $\mathcal{F}_2$  در همسایگی نقاط  $P_0$  و  $Q_0$  به ترتیب نمایشهای پارامتری منتظمی به صورت زیر داشته باشند:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}(v^1, v^2),$$

که در آنها  $u^1, u^2$  پارامترهای یکی از سطوح، و  $v^1, v^2$  پارامترهای سطح دیگر هستند. با محدود شدن به همسایگی کوچکتر، در صورت لزوم، می توان این تبدیل را با بیان مختصات  $(v^1, v^2)$  نقش نقطه  $P$  بر  $\mathcal{F}_2$  به صورت تابعی از مختصات  $(u^1, u^2)$  نقطه  $P$  بر  $\mathcal{F}_1$  :

$$(10.20) \quad v^1 = v^1(u^1, u^2), \quad v^2 = v^2(u^1, u^2)$$

توصیف کرد. نگاشت را منتظم از کلاس  $C_n$  گوئیم هرگاه توابع (10.20) از کلاس  $C_n$  بوده و ژاکوبی  $\partial(v^1, v^2)/\partial(u^1, u^2)$  مخالف صفر باشد. در نتیجه، یک نگاشت منتظم، موضعا " (یعنی، وقتی همسایگی به قدر کافی کوچک باشد) یک به یک است.

یک نگاشت از سطح  $\mathcal{F}_1$  بتوی سطح دیگر  $\mathcal{F}_2$  در هر نقطه نگاشتی از بردارهای مماس بر  $\mathcal{F}_1$  در این نقطه بتوی بردارهای مماس بر  $\mathcal{F}_2$  در نقش نقطه القا می کند. یعنی، با معلوم بودن بردار مماس  $\mathbf{w} = w^i \mathbf{r}_i$  بر  $\mathcal{F}_1$  در  $P_0$ ، منحنی  $u^i = u^i(t)$  ماربر  $P_0$  را طوری اختیار می کنیم که بردار مماس آن در  $P_0$  با  $\mathbf{w}$  یکی باشد؛ یعنی، طوری که  $u'_0 = u^i(0)$  ها مختصات  $P_0$  بوده و  $du^i(0)/dt = w^i$ . با نگاشتن این منحنی بتوی سطح دیگر، یک منحنی به معادلات

$$v^i = \phi^i(t) = v^i(u^1(t), u^2(t))$$

به دست می آید، که در آن  $v'_0 = \phi^i(0)$  ها مختصات  $Q_0$  اند. حال نقش  $\mathbf{w}$  را مساوی بردار مماس  $\mathbf{w}^* = w^* \mathbf{r}_i$  بر منحنی  $v_i = \phi^i(t)$  در نقطه  $Q_0$  تعریف می کنیم. واضح است که

$$\mathbf{w}^* = \left[ \frac{dv^i}{dt} \right]_0 \mathbf{R}_{i,0} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u^1_0, u^2_0) \left[ \frac{du^j}{dt} \right]_0 \mathbf{R}_{j,0},$$

که در آن  $R_{i,0} = R_i(v_0^1, v_0^2)$  ، یا

$$A_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u_0^1, u_0^2) \quad \text{که در آن } w^{*i} = A_j^i w^j \quad (20.20)$$

این فرمول فقط به نگاشت سطوح و مولفه‌های بردار بستگی دارد نه به انتخاب منحنی .  
این امر تعریف توسیع نگاشت سطوح به بردارهای مماس را توجیه می‌کند . چون ماتریس  $(A_j^i)$  نامفرد است ، زیرا ژاکوبی تبدیل بنابه فرض مخالف صفر است ،  $(20.20)$  یک نگاشت خطی از فضای برداری مماس در  $P_0$  بروی فضای برداری مماس در  $Q_0$  را نمایش می‌دهد .  
فرمول  $(10.20)$  را می‌توان به عنوان تبدیل مختصات روی سطح دوم نیز در نظر گرفت .  
با گذاردن تابع  $(10.20)$  در معادله سطح دوم ، نمایش پارامتری دیگری از سطح خواهیم داشت :

$$r = R(v^1(u^1, u^2), v^2(u^1, u^2)) = R^*(u^1, u^2).$$

با این پارامتری سازی جدید سطح دوم ، نقاط متناظر از هر دو سطح دارای یک مختصات منحنی الخط بوده ، و بردارهای متناظر دارای مولفه‌های یکسان نسبت به پایه‌های طبیعی روی هر دو سطح می‌باشند . در این حالت ، به طور خلاصه می‌گوییم که پارامتری سازیهای سطوح نسبت به نگاشت سازگار هستند . پارامتری سازیهای سازگار محاسبات را ساده‌تر می‌کنند و ، لذا ، از این به بعد ، وقتی با نگاشتی برخورد کنیم ، فرض است که پارامتری سازیها سازگارند .

## ۲۰۲۰ نگاشتهای ایزومتریک

یک نگاشت از یک سطح بتوی سطح دیگر را یک نگاشت ایزومتریک یا ایزومتري گوییم هرگاه طول منحنیهای روی سطوح به وسیله این نگاشت حفظ شوند ؛ یعنی ، طول نقش یک قوس برابر طول خود قوس باشد .

قضیه . یک نگاشت منتظم از گلاس  $C_1$  بین دو سطح از گلاس  $C_1$  ایزومتري است اگر و فقط اگر ، در پارامتری سازیهای سازگار ، دارای اولین فرمهای اساسی یکسان باشند ؛ یعنی ،

$$g_{ij} = \bar{g}_{ij}, \quad (20.20)$$

که در آن  $g_{ij} du^i du^j$  اولین فرم اساسی سطح اول و  $\bar{g}_{ij} du^i du^j$  اولین فرم اساسی سطح دوم است .

برهان . با توجه به سازگاری پارامتری سازیها ، یک منحنی روی سطح اول و نقش آن تحت

نگاشت مورد بحث دارای معادلات پارامتری یکسان در مختصات منحنی الخط

$$u^i = u^i(t)$$

می باشند. طول قوس از  $t_0$  تا  $t$  روی سطح اول برابر است با

$$\int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt,$$

و روی سطح دوم مساوی است با

$$\int_{t_0}^t \sqrt{\tilde{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

طبق تعریف، نگاشت ایزومتري است اگر و فقط اگر به ازای هر منحنی، متحدان "نسبت

به  $t$  داشته باشیم

$$\int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\tilde{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

اما این رابطه به ازای هر منحنی معادل اتحاد زیر است:

$$g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = \tilde{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}.$$

بخصوص، با اختیار منحنی

$$u^1 = u_0^1 + t, \quad u^2 = u_0^2,$$

در  $t = 0$  داریم

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1, u_0^2);$$

با اختیار منحنی

$$u^1 = u_0^1, \quad u^2 = u_0^2 + t,$$

خواهیم داشت

$$g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{22}(u_0^1, u_0^2),$$

و، بالاخره، از منحنی

$$u^1 = u_0^1 + t, \quad u^2 = u_0^2 + t$$

به دست می آید

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) = g_{12}(u_0^1, u_0^2) + g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1, u_0^2) + \tilde{g}_{12}(u_0^1, u_0^2) + \tilde{g}_{22}(u_0^1, u_0^2);$$

در نتیجه،

$$g_{12}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{12}(u_0^1, u_0^2).$$

چون  $(u_0^1, u_0^2)$  می تواند دلخواه باشد، این  $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$  را ثابت می کند.

از آن سو، اتحادهای  $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$  ایجاب می‌کنند که، به‌ازای هر منحنی  
 $u^i = u^i(t)$ ،  $a \leq t \leq b$  داشته باشیم

$$\int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt;$$

در نتیجه، نگاشت ایزومتري می‌باشد.

دوسطحي که برای آنها یک نگاشت ایزومتري از یکی بروی دیگری وجود داشته باشد ایزومتريک خوانده می‌شوند. اگر هر نقطه از یک سطح همسایگی داشته باشد که بتوان آن را به‌طور ایزومتريک روی همسایگی از نقش نقطه روی سطح دیگر نگاشت، سطوح را موضعا " ایزومتريک خواهیم نامید.

گاهی می‌توان یک نگاشت ایزومتريک از یک سطح بروی دیگری را به وسیله یک تغییر شکل پیوسته از سطح اول بتوی دیگری به دست آورد، به‌طوری که سطح همواره در یک کلاس انتظام و ایزومتريک باقی بماند. اگر این ممکن باشد، دو سطح را قابل اعمال بریکدیگر خواهیم نامید. گاهی سطوح ایزومتريک چنین تغییر شکل را پذیرا نیستند مثل، مثلاً، یک دستکش راست و یک دستکش چپ.

### امثله و تمرین

۱. ایزومتري موضعی بین زنجیرگون و مارپیچ گون. زنجیرگون

$$x = a \cosh \frac{u^1}{a} \cos u^2, \quad y = a \cosh \frac{u^1}{a} \sin u^2, \quad z = u^1$$

دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{u^1}{a} [(du^1)^2 + a^2 (du^2)^2]$$

است (ر.ک. مثال ۴، ۴۰۱۶).

مارپیچ گون

$$x = v^1 \cos v^2, \quad y = v^1 \sin v^2, \quad z = av^2$$

دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = (dv^1)^2 + [(v^1)^2 + a^2] (dv^2)^2$$

می‌باشد.

ثابت می‌کنیم نگاشت

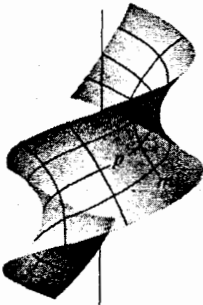
$$v^1 = a \sinh \frac{u^1}{a}, \quad v^2 = u^2$$

یک ایزومتري است. ابتدا، با در نظر گرفتن معادلات اخير به عنوان تبديل مختصات منحنی الخط روی مارپیچ گون، یک پارامتری سازی سازگار روی مارپیچ گون به دست می آوریم. در این صورت، داریم

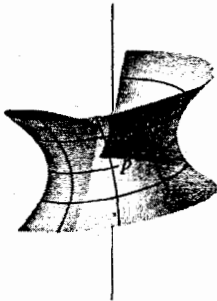
$$dv^1 = \cosh \frac{u^1}{a} du^1, \quad dv^2 = du^2,$$

و اولین فرم اساسی در پارامتری سازی جدید خواهد شد

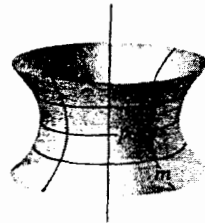
$$ds^2 = \cosh^2 \frac{u^1}{a} (du^1)^2 + a^2 \cosh^2 \frac{u^1}{a} (du^2)^2.$$



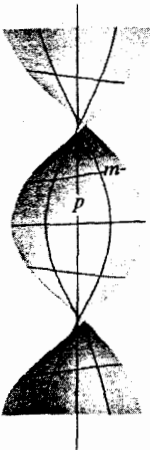
(۴)



(۵)



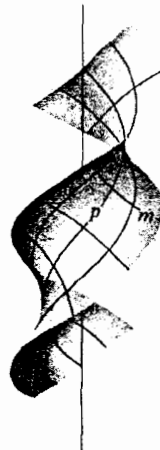
(۶)



(۷)



(۸)



(۹)

چون این همان اولین فرم اساسی زنجیرگون است، نگاشت ما ایزومتري می باشد. توجه کنید که نگاشت یک به یک است فقط اگر پارامتر  $u^1$  به بازه ای به طول کوچکتر از  $2\pi$  محدود شده باشد.

در این نگاشت، نصف النهارات زنجیرگون به صورت خطوط جاری مارپیچ گون، و دوائر عرض جغرافیایی زنجیرگون به صورت مارپیچ درمی آیند. کوچکترین دایره عرض جغرافیایی زنجیرگون به صورت محور مارپیچ گون درخواهد آمد. این نگاشت رامی توان به صورت تغییر شکل پیوسته ای از یک سطح در فضا انجام داد، به این ترتیب که زنجیرگون را در امتداد یک نصف النهار بریده و سپس کوچکترین دایره عرض جغرافیایی را راست کرد. شکل ۱۰۲۰ چند مرحله متوالی این عمل را نشان می دهد.

۲. ثابت کنید سطح

$$x = 3u^1 + 3u^1(u^2)^2 - (u^1)^3, \quad y = 3u^2 - 3(u^1)^2u^2 + (u^2)^3, \quad z = 3(u^1)^2 - 3(u^2)^2$$

با یک سطح دوار ایزومتريک (موضعا) است.

راهنمایی. تغییر مختصات  $\frac{u^2}{u^1}$  را به کار برید.

### ۳۰۲۰ ایزومتري یک سطح گسترده با صفحه

سطحی که به وسیله خطوط مماس بر منحنی  $r = p(s)$ ، که در آن  $s$  پارامتر طبیعی است، جارو شود، معادله ای به شکل

$$r = p(u^1) + u^2 t(u^1)$$

داشته و اولین فرم اساسی آن برابر است با

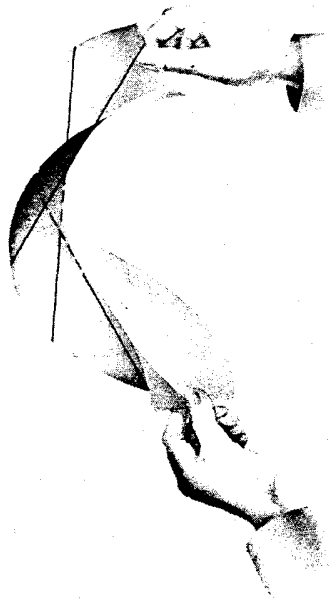
$$ds^2 = [1 + (\kappa(u^1))^2(u^2)^2](du^1)^2 + 2 du^1 du^2 + (du^2)^2.$$

(طبق معمول،  $\kappa, n, b, t$  بردارهای سه وجهی فرنه و انحنا منحنی را نشان می دهند). ضرایب فقط به انحنا منحنی بستگی دارند. لذا، اگر دو منحنی دارای انحناهای یکسان به صورت متوابعی از پارامترهای طبیعی بوده ولی تابه های مختلف داشته باشند، سطوح ایزومتريک (لااقل موضعا) خواهند بود. بخصوص، می توان یک منحنی با انحنا معلوم و تاب صفر اختیار کرد. وجود این منحنی را قضیه اساسی نظریه منحنیهای زیربخش ۱۰۸ تضمین می کند. در این حالت، منحنی در یک صفحه واقع می شود و هر دو پارچه  $u^2 > 0$  و  $u^2 < 0$  روی یکدیگر قرار می گیرند. پارامترهای  $(u^1, u^2)$  را می توان مختصات منحنی الخط صفحه در نظر گرفت، و اگر خود را به همسایگی به قدر کافی کوچکی روی صفحه به پارامترهای  $(u^1, u^2)$  که تماما در یکی از نیم صفحه های  $u^2 > 0$  یا  $u^2 < 0$  واقع است محدود کنیم، این پارامتری سازی یک نمایش پارامتری منتظم بخش از صفحه خواهد بود.

نگاشت یک سطح گستردنی با پال بازگشت معلوم بتوی صفحه که با بردن نقطه به مختصات  $(u^1, u^2)$  به نقطه‌ای از صفحه با همان مختصات منحنی الخط حاصل می‌شود در صورت تحدید به یک همسایگی به قدر کافی کوچک روی یکی از پارچه‌های سطح مزبور یک به یک است، و واضح است که اولین فرم اساسی را حفظ می‌کند. لذا، این نگاشت یک ایزومتري موضعی می‌باشد. اثبات اینکه مخروطها و استوانه‌ها نیز با صفحه موضعا "ایزومتريک هستند به خواننده محول می‌شود. از تلفیق این مطلب با نتایج حاصل در زیر بخش ۱۴، خواهیم داشت:

**قضیه.** سطوح گستردنی، به استثنای پال بازگشت آنها، با صفحه موضعا "ایزومتريک هستند.

این امر نام "گستردنی" را توجیه می‌کند، زیرا می‌توان آنها را روی یک صفحه، بدون انبساط یا انقباض، گسترانید، اما در این گسترش ممکن است قسمتهایی از صفحه بیش از یکبار پوشیده شوند. با برگشت به عقب، می‌توان قسمتهایی از سطح گستردنی را با تغییر شکل صفحه، بدون انبساط و انقباض، به دست آورد. هرکس طرز به دست آوردن یک سطح مخروطی یا استوانه‌ای را به این طریق می‌داند. شکل ۲۰۲۰ طرز به دست آوردن یک



شکل ۲۰۲۰

سطح گسترده‌ی دارای یال بازگشت را با چسباندن دو تکه کاغذ تخت واقع بر هم در امتداد یک منحنی مسطح و سپس تغییر این منحنی به یک منحنی پیچ خورده نشان می‌دهد. در این عمل دو تکه کاغذ تخت واقع بر هم از یکدیگر جدا شده و دو پارچه سطح را تشکیل می‌دهند، و منحنی به صورت یال بازگشت در خواهد آمد.

### تمرین

همانطور که در مثال ۲ در ۲۰۱۳ دیدیم، خطوط قطبی یک منحنی مانند  $\mathcal{C}$  یک سطح گسترده‌ی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که، در گسترش سطح روی صفحه، گسترده‌های این منحنی (ر.ک. بخش ۷) به صورت خطوط مستقیم در می‌آیند.

### ۴.۲۰ نگاشت همشکل یا همزاویه

یک نگاشت از سطح  $\mathcal{F}_1$  بروی سطح  $\mathcal{F}_2$  را همشکل یا همزاویه گوییم هرگاه زاویه بین منحنیهای متقاطع متناظر روی سطوح را حفظ کند. اولین فرمهای اساسی  $\mathcal{F}_1$  و  $\mathcal{F}_2$  در مختصات سازگار را به  $g_{ij}$  و  $\tilde{g}_{ij}$  نشان می‌دهیم.

قضیه. یک نگاشت از کلاس  $C_1$  همشکل است اگر و فقط اگر اولین فرمهای اساسی سطوح در مختصات سازگار در هر نقطه متناسب باشند:

$$\tilde{g}_{ij} = \alpha^2 g_{ij}. \quad (4.20)$$

ضریب  $\alpha^2 = [\alpha(u^1, u^2)]^2$  به  $(u^1, u^2)$  بستگی داشته و مثبت است.

برهان. فرمول (۲۲.۱۶) مربوط به زاویه بین منحنیها روی یک سطح بی درنگ نشان می‌دهد که (۴.۲۰) همشکلی نگاشت را ایجاب می‌کند. درواقع،

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\phi} &= \frac{\tilde{g}_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{\tilde{g}_{ij} du^i du^j} \sqrt{\tilde{g}_{ij} \delta u^i \delta u^j}} = \frac{\alpha^2 g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{\alpha^2 g_{ij} du^i du^j} \sqrt{\alpha^2 g_{ij} \delta u^i \delta u^j}} \\ &= \frac{g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{g_{ij} \delta u^i \delta u^j}} = \cos \phi. \end{aligned}$$

برای اینکه ثابت کنیم به ازای یک نگاشت همشکل شرط (۴.۲۰) برقرار است، در یک نقطه از سطح اول دوراستای عمود بر هم  $du^1:du^2$  و  $\delta u^1:\delta u^2$  را اختیار می‌کنیم. راستای اول کاملاً دلخواه بوده، و راستای دوم با معادله

$$g_{ij} du^i \delta u^j = 0$$

معین می‌شود. چون نگاشت همشکل است، نقشها نیز بر هم عمودند و خواهیم داشت

$$(\delta \cdot 20) \quad \bar{g}_{ij} du^i \delta u^j = 0.$$

با انتخاب  $du^1 = 0, du^2 = 1$ ، درمی‌یابیم که دیفرانسیلهای راستاهای عمود برهم در دستگاه معادلات

$$g_{21} \delta u^1 + g_{22} \delta u^2 = 0,$$

$$\bar{g}_{21} \delta u^1 + \bar{g}_{22} \delta u^2 = 0$$

صدق می‌کند. اما این دستگاه معادلات دارای یک جواب نابدیهی است اگر و فقط اگر دترمینانش صفر باشد. بنابراین، داریم

$$\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

که از آنجا  $\bar{g}_{21} = (\bar{g}_{22}/g_{22})g_{21}$  یا  $\bar{g}_{22} = \alpha^2 g_{22}$ ،  $\bar{g}_{21} = \alpha^2 g_{21}$ ، که در آن  $\alpha^2 = \bar{g}_{22}/g_{22}$ ، به دست می‌آید

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

که  $\bar{g}_{12} = (\bar{g}_{11}/g_{11})g_{12}$  را نتیجه می‌دهد. اما  $\bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = \alpha^2 g_{21} = \alpha^2 g_{12}$  اگر  $\bar{g}_{12} \neq 0$  و، در نتیجه،  $g_{12} \neq 0$ ، این ایجاب می‌کند که  $\bar{g}_{11} = \alpha^2 g_{11}$ ، اگر  $\bar{g}_{12} = \bar{g}_{12} = 0$ ، راستاهای  $du^1 = du^2 = 1$  و  $du^1 = du^2 = 0$  برهم عمودند. در نتیجه،

$$\bar{g}_{11}g_{22} - \bar{g}_{22}g_{11} = 0$$

یا

$$\frac{\bar{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\bar{g}_{22}}{g_{22}}.$$

لذا،  $(\delta \cdot 20)$  در تمام حالات ثابت می‌شود.

با استفاده از این قضیه و وجود موضعی مختصات ایزومتریک که به‌ازای آنها اولین

فرم اساسی

$$ds^2 = \rho^2[(du^1)^2 + (du^2)^2]$$

با اولین فرم اساسی  $(du^1)^2 + (du^2)^2$  صفحه در مختصات دکارتی متناسب است (که در

۷۰۱۶ محرز شد)، خواهیم داشت:

نتیجه. هر سطح از کلاس  $C_3$  موضعا "همشکل صفحه است. در نتیجه، به ازای هر دو سطح از کلاس  $C_3$ ، یک نگاشت موضعا "همشکل وجود دارد که یک نقطه منتظم دلخواه یکی از سطوح را به یک نقطه منتظم دلخواه سطح دیگر می‌برد.

این نگاشت از منحصربفرد بودن خیلی دور است؛ در واقع، بی‌نهایت از این نگاشتها وجود دارند که، علاوه بر این، حتی یک راستای مفروض در نقطه انتخاب شده را به یک راستای معلوم می‌نگارند.

از نسبت (۴۰۲۰) معلوم می‌شود که نسبت طول نقش قوسهای کوچک آغاز شده از نقطه  $(u^1, u^2)$  به طول قوسهای تقریباً "مساوی  $\alpha(u^1, u^2)$  بوده و به راستای قوس بستگی ندارد. با اینحال، این نسبت ممکن است تابع نقطه باشد. بنابراین، یک نگاشت همشکل در همسایگی به قدر کافی کوچک به یک تشابه نزدیک است، اگرچه نسبت تشابه از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند. اگر این نسبت  $\alpha$  ثابت باشد، نگاشت یک تشابه نامیده می‌شود.

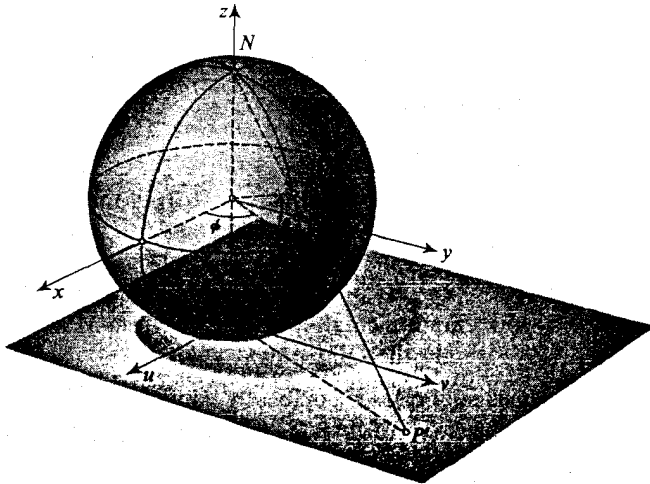
نگاشتهای از یک کره بروی صفحه دارای کاربردهایی در نقشه کشی هستند. همانطور که بعداً خواهیم دید، یک نگاشت ایزومتریک یا تشابه از کره بتوی صفحه وجود ندارد. به این دلیل است که نمی‌توان نقشه کاملی از جهان با مقیاسی که در تمام نقشه ثابت باشد رسم کرد. استفاده از نگاشتهای همشکل این حسن را دارد که زوایای روی نقشه همان زوایای روی کره هستند، و با آنکه مقیاس روی نقشه تغییر می‌کند، در یک نقطه معلوم در تمام جهات یکی است.

### امثله و تمرین

۱. تصویر گنجنگار. ما یک نگاشت از کره سوراخ شده به شعاع  $a$  بروی صفحه را به طریق زیر تعریف می‌کنیم. از یک نقطه ثابت روی کره مانند  $N$ ، که آن را قطب شمال می‌نامیم، نقاط کره را روی صفحه مماس در نقطه  $S$ ، یعنی قرینه  $N$ ، تصویر می‌کنیم (شکل ۳۰۲۰). این نگاشت به هر نقطه از کره، بجز  $N$ ، یک نقطه از صفحه، یعنی تصویر نقطه مفروض از کره، را نسبت می‌دهد. این نگاشت یک به یک و برعکس است. آن را تصویر گنجنگار می‌نامند.

یک دستگاه مختصات متعامد دکارتی در فضا طوری اختیار می‌کنیم که مبدأ  $O$  بر

مرکز کره قرار داشته و خط جهتدار  $ON$  محور  $z$  باشد. در این صورت، قطب شمال،



شکل ۳۰۲۰

که مرکز تصویر است، دارای مختصات  $(0, 0, a)$  است. در صفحه تصویر نیز مختصات دکارتی متعامد  $u, v$  را با مبدا دستگاه مختصات در نقطه تماس با کره، و محورهای  $u$  و  $v$  موازی محورهای  $x$  و  $y$  اختیار می‌کنیم. در این صورت، نقطه‌ای از کره به مختصات کروی  $(\theta, \phi)$  به نقطه‌ای از صفحه به مختصات

$$u = 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos \phi, \quad v = 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin \phi$$

نگاشته می‌شود. اثبات این مطلب را به خواننده محول می‌کنیم. معادلات اخیر را می‌توان یک تبدیل از مختصات موضعی روی کره در نظر گرفت. از مقایسه آنها با فرمولهای (۱۵.۱۱)، معلوم می‌شود که مختصات جدید روی کره همان مختصات مورد بحث در تمرین ۹ از ۳۰.۱۱ و تمرین ۲ از ۴۰.۱۶ است. این مختصات جدید روی کره و مختصات  $(u, v)$  روی صفحه نسبت به تصویر گنجنگار سازگارند. اما اولین فرم اساسی کره برحسب این مختصات عبارت است از

$$ds^2 = \frac{16a^2}{4a^2 + u^2 + v^2} (du^2 + dv^2),$$

که با اولین فرم اساسی صفحه، یعنی  $du^2 + dv^2$ ، متناسب است. بنابراین، تصویر گنجنگاریک نگاشت همشکل می‌باشد. در نقشه کشی، از آن برای رسم نواحی قطبی استفاده می‌شود.

۲. تصویر مرکاتور<sup>۱</sup>. این تصویر یک نگاشت همشکل از کره بتوی صفحه است، به طوری که نصف النهارات به خطوطی موازی محور  $v$ ، و دوائر عرض جغرافیایی به خطوطی موازی محور  $u$  نگاشته می شوند درحالی که مقیاس در امتداد استوا ( $\theta = 0$ ) در تمام نقاط یکی است. بنا به فرض، خطوط ثابت  $\theta$  به خطوط ثابت  $v =$ ، و خطوط ثابت  $\phi =$  به خطوط ثابت  $u =$  نگاشته می شوند. بنابراین، نگاشت ما به صورت زیر می باشد:

$$u = f(\phi), \quad v = g(\theta).$$

چون مقیاس در امتداد استوا  $\theta = 0$  یکی است،  $u$  باید با  $\phi$  متناسب باشد؛ یعنی،

$$u = \lambda \phi, \quad \lambda \text{ ثابت}$$

لذا، با معرفی مختصات جدید  $\phi$  و  $\theta$  روی صفحه، اولین فرم اساسی جدید

$$ds^2 = du^2 + dv^2 = [g'(\theta)]^2 d\theta^2 + \lambda^2 d\phi^2$$

به دست می آید. از مقایسه این فرم با اولین فرم اساسی کره به شعاع  $a$ ، یعنی

$$a^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2),$$

شرط همشکلی نگاشت را به صورت زیر خواهیم یافت:

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{a^2} = \frac{\lambda^2}{a^2 \cos^2 \theta}$$

یا

$$g'(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta}$$

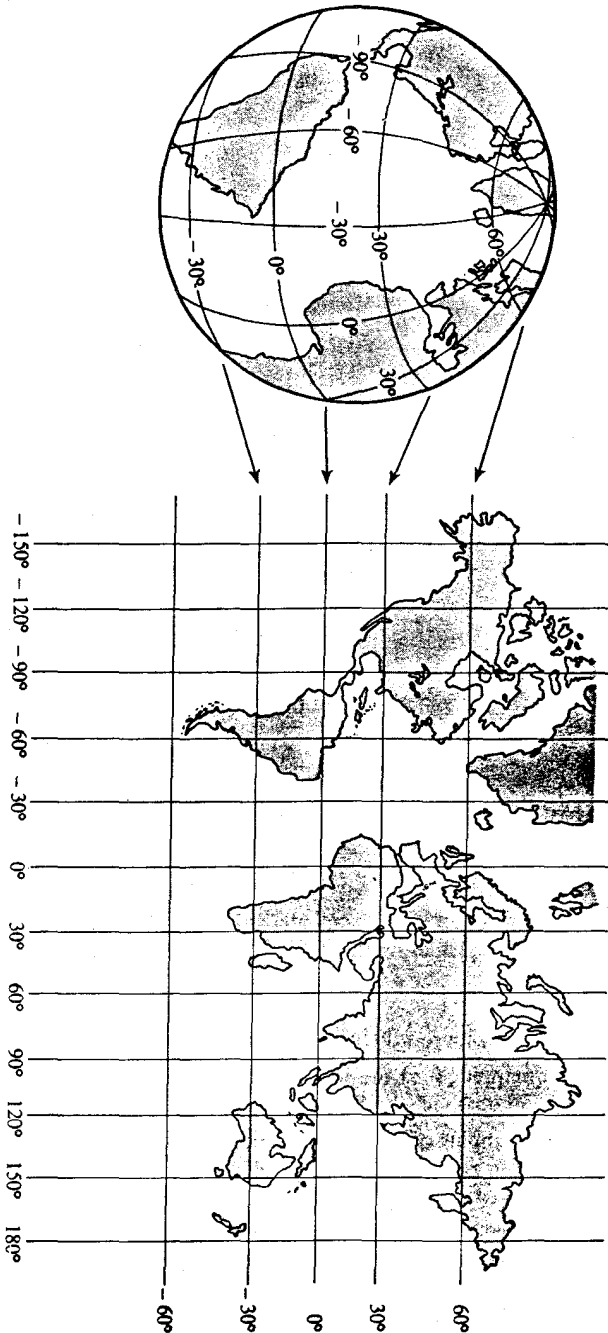
علامت + را برای رادیکال انتخاب می کنیم. انتخاب دیگر تصویری به دست می دهد که نسبت به محور  $v$  متقارن است. بعلاوه، داریم

$$g(\theta) = \int \frac{\lambda d\theta}{\cos \theta} = \lambda \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) + C.$$

انتخاب ثابت  $C$  نگاشت را فقط با انتقال نقش در امتداد محور  $v$  متاثر می سازد. بنابراین، معادلات تصویر مرکاتور

$$u = \lambda \phi, \quad v = \lambda \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

به دست می آیند (شکل ۴۰۲۰). در تصویر مرکاتور، خطوط اریب (یعنی، خطوطی



شکل ۴۰۲۰

که نصف النهارات را در زاویه ثابتی قطع می‌کنند) به خطوطی مستقیم نگاشته می‌شوند. به این دلیل، از نقشه‌های تصویر مرکاتور در کشتیرانی و هدایت هواپیما استفاده می‌شود.

۳. ثابت کنید هر نگاشت ایزومتریک سطوح یک نگاشت همشکل است.

۴. ثابت کنید که انعکاس صفحه نسبت به یک دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $R$ ، یعنی نگاشتی که هر نقطه  $P \neq O$  را به نقطه  $P'$  واقع بر همان شعاع  $OP$  طوری می‌برد که  $OP \cdot OP' = R^2$ ، یک نگاشت همشکل از صفحه با نقطه محذوف  $O$  است.

۵. یک نگاشت همشکل از یک چنبره بتوی صفحه پیدا کنید.

## ۵.۲۰ نگاشتهای هم مساحت

یک نگاشت هم مساحت نگاشتی است که مساحت ناحیه‌ها را حفظ می‌کند.

قضیه. هر نگاشت منتظم از کلاس  $C_1$  از سطح  $\mathcal{F}_1$  بتوی سطح  $\mathcal{F}_2$  یک نگاشت موضعا "هم مساحت است اگر و فقط اگر، در مختصات سازگار،

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2 = \tilde{g}. \quad (۶۰۲۰)$$

برهان. مساحت نواحی روی هر دو سطح نظیر به ناحیه  $\Omega$  روی صفحه به پارامترهای  $(u^1, u^2)$  به ترتیب برابرند با

$$\int_{\Omega} \int \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 \quad \text{یا} \quad \int_{\Omega} \int \sqrt{\tilde{g}} \, du^1 \, du^2$$

این نگاشت هم مساحت است اگر و فقط اگر بازای هر  $\Omega$ ،

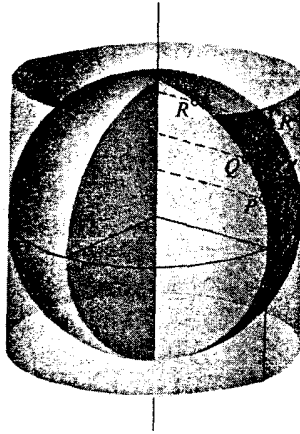
$$\int_{\Omega} \int \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 = \int_{\Omega} \int \sqrt{\tilde{g}} \, du^1 \, du^2,$$

که، به نوبه خود، معادل این است که انتگرالدهها با هم مساوی باشند. بنابراین،  $\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}}$  یا  $g = \tilde{g}$  شرط لازم و کافی بوده، و قضیه ثابت می‌شود.

## امثله و تمرین

۱. تصویر لامبرت<sup>۱</sup>. با تصویر نقاط یک کره بتوی استوانه محیطی‌اش به وسیله

عمودهایی بر محور استوانه و، بعد، گسترش استوانه روی صفحه، نگاشتی از کره (بدون  
دو نقطه متقاطع) بتوی صفحه، به نام تصویر لامبرت، به دست می آید (شکل ۵۰۲۰).



شکل ۵۰۲۰

با استفاده از مختصات استوانه‌ای  $(\phi, z)$  روی استوانه، برای این تصویر معادله زیر را  
خواهیم داشت:

$$\phi = \phi, \quad z = a \sin \theta,$$

که در آن  $\phi$  طول جغرافیایی و  $\theta$  عرض جغرافیایی روی کره است. اولین فرم اساسی  
استوانه بر حسب مختصات استوانه‌ای مساوی است با

$$ds^2 = a^2 d\phi^2 + dz^2,$$

و بر حسب مختصات جدید برابر است با

$$ds^2 = a^2 d\phi^2 + a^2 \cos^2 \theta d\theta^2,$$

که در آنجا  $g = a^4 \cos^2 \theta$ . بنابراین،  $g$  مساوی مبین اولین فرم اساسی کره بوده، و  
تصویر بتوی استوانه هم مساحت می باشد.

با گستردن استوانه روی صفحه، تصویر لامبرت به دست می آید:

$$u = a\phi, \quad v = a \sin \theta,$$

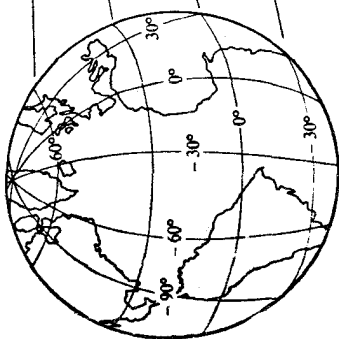
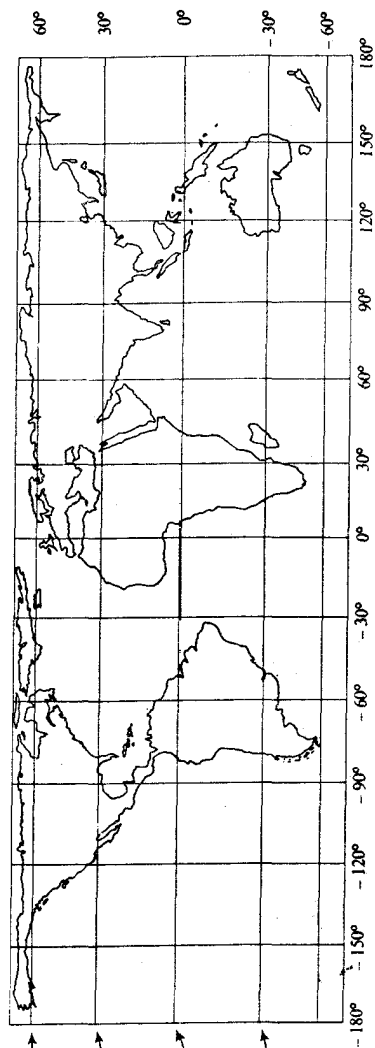
که  $(u, v)$  مختصات دکارتی در صفحه است. تصویر لامبرت نیز هم مساحت است.

۲. ثابت کنید که اگر یک نگاشت هم شکل و هم مساحت باشد، ایزومتري است. واضح

است که ایزومتريها هم شکل و هم مساحت می باشند.

۳. یک نگاشت هم مساحت از صفحه بروی چنبره حاصل از دوران یک دایره به شعاع

$a$  حول محوری که در صفحه دایره در فاصله  $b > a$  از مرکز قرار دارد را پیدا کنید.



۴. ثابت کنید به ازای هر نگاشت هم مساحت یک تور وجود دارد که طول قوس منحنیهای آن حفظ می شود.

راهنمایی. از مختصات همگرایی روی یکی از سطوح استفاده کنید.

## ۲۱. انحناى ژئودزیک و خطوط ژئودزیک

### ۱۰.۲۱ هندسه ذاتی یک سطح

همانطور که در ۲۰.۲۰ دیدیم، اولیس فرم اساسی سطح، وقتی سطح به طور ایزومتریک روی سطح دیگر نگاشته شود، تغییر نمی کند و، بعکس، نگاشتی که اولین فرم اساسی را حفظ کند یک ایزومتري است.

از اینرو، کمیتی که بتوان آن را فقط بر حسب ضرایب اولین فرم اساسی و مشتقاتشان بیان کرد نیز حفظ می شود، البته مشروط بر اینکه مختصات روی هر دو سطح سازگار باشند. ما قبلاً "با این نوع کمیات آشنا شده ایم، از آن جمله ضرایب اولین فرم اساسی  $g_{ij}$  و  $\Gamma_{ij}^k$ ، طول یک منحنی روی یک سطح، زاویه بین منحنیهای واقع بر یک سطح، مساحت یک ناحیه روی یک سطح، و (در پرتو قضیه زیر بخش ۳۰.۱۸) انحناى گاوسی.

با اینحال، بین دو کمیت اول و چهار کمیت بعدی فوق فرقی اساسی وجود دارد. ضرایب اولین فرم اساسی و  $\Gamma$ های کریتوفل به انتخاب مختصات منحنی الخط بستگی دارند، ولذا، مقادیرشان تحت یک نگاشت ایزومتریک فقط در حالتی حفظ می شوند که مختصات منحنی الخط نسبت به این نگاشت سازگار باشند. از آن سو، بقیه کمیتها کمیات هندسی واقعی هستند، که از مختصات منحنی الخط به کار رفته در محاسبه آنها مستقل اند، ولذا، همیشه تحت یک نگاشت ایزومتریک، بی توجه به مختصات منحنی الخط، حفظ می شوند. گوییم اینها پایاهای نگاشتهای ایزومتریک سطوح می باشند.

همچنین، بعضی از خواص یک سطح یا نقاط آن می توانند تحت یک نگاشت ایزومتریک حفظ شوند؛ مثلاً، "نوع یک نقطه (بیضی، هذلولوی، یا سهموی) تحت یک نگاشت ایزومتریک تغییر نمی کند، زیرا این نوع به وسیله علامت انحناى گاوسی مشخص می شود، که یک پایای نگاشتهای ایزومتریک است.

کمیات و خواصی که به وسیله نگاشتهای ایزومتریک سطوح حفظ می شوند به هندسه های تعلق دارند به نام هندسه ذاتی سطوح.

ما قبلاً "چند کمیت ذاتی را ذکر کرده ایم: طول، زاویه، مساحت، و انحناى گاوسی. از اینها فقط انحناى گاوسی به اثبات بیش و کم پیچیده ای برای خاصیت ذاتی خود نیاز دارد (Gauss's theorem egregium)؛ خاصیت ذاتی سایرین تقریباً "بدیهی است. از

خاصیت ذاتی انحنا ی گاوسی فوراً " قضیه زیر به دست می آید .

**قضیه .** کره با صفحه موضعا " ایزومتریک نیست .

درواقع ، اگر کره با صفحه موضعا " ایزومتریک بود ، انحنا های گاوسی در نقاط متناظر یکی می شد . اما انحنا ی گاوسی کره عددی مثبت است ، حال آنکه انحنا ی گاوسی صفحه صفر می باشد . این قضیه را ثابت خواهد کرد .

این فصل اصولاً " به هندسه ذاتی سطوح اختصاص دارد . با اینحال در طول راه مفاهیمی را نیز معرفی نموده و چند مطلب را که به هندسه ذاتی مربوط نمی شوند ثابت خواهیم کرد .

## ۲.۲۱ انحنا ی یک منحنی روی سطح

یک منحنی در فضا داده شده است . بردار انحنا ی این منحنی در نقطه  $P$  برداری است همراستا و همجهت بردار قائم اصلی در  $P$  و طولش برابر است با انحنا ی منحنی در  $P$  . اگر بردار انحنا را با  $k$  نشان دهیم ، خواهیم داشت

$$(۱۰۲۱) \quad k = \kappa n.$$

اگر منحنی روی سطحی قرار گیرد ، می توان این بردار را به دو مولفه تجزیه کرد : مماس و قائم به این سطح در نقطه  $P$  . مولفه مماسی را بردار انحنا ی ژئودزیک نامیده و آن را با  $k_g$  نشان می دهیم ، و مولفه قائم را بردار انحنا ی قائم نامیده و با  $k_n$  نشان خواهیم داد .

فرض کنیم منحنی روی سطح

$$r = r(u^1, u^2)$$

از کلاس  $C_2$  قرار داشته و ، در مختصات منحنی الخط ، به معادله پارامتری

$$(۲۰۲۱) \quad u^i = u^i(s)$$

باشد ، که در آن  $s$  پارامتر طول قوس است . در این صورت ، معادله پارامتری منحنی در فضا عبارت است از

$$r = r(u^1(s), u^2(s)),$$

و بردار انحنا مساوی است با

$$k = \kappa n = r''.$$

ما داریم

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_i \frac{du^i}{ds}, \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{r}_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathbf{r}_i \frac{d^2 u^i}{ds^2}$$

و، طبق (۱۰۱۸)، داریم

$$\mathbf{r}'' = (\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{m}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathbf{r}_k \frac{d^2 u^k}{ds^2};$$

در نتیجه،

$$\mathbf{k} = \mathbf{r}'' = \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{r}_k + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \mathbf{m}$$

در اینجا تجزیه لازم صورت گرفته است؛ و لذا، برای بردار انحای ژئودزیک داریم

$$(۳۰۲۱) \quad \mathbf{k}_g = \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{r}_k$$

و برای بردار انحای قائم خواهیم داشت

$$(۴۰۲۱) \quad \mathbf{k}_n = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \mathbf{m}.$$

همچنین، داریم

$$(۵۰۲۱) \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n.$$

از تعریف بردار انحنا واضح است که بردارهای انحای ژئودزیک و قائم یک منحنی به انتخاب پارامتری سازی بستگی ندارند. همچنین، از (۳۰۲۱) نتیجه می شود که مولفه های بردار انحای ژئودزیک نسبت به پایه طبیعی  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  بر حسب علائم کریستوفل و مشتقات مختصات منحنی الخط نسبت به پارامتر منحنی بیان می شوند. بنابراین، بردار انحای ژئودزیک یک پایای ایزومترها است؛ یعنی، اگر یک نگاهت ایزومتري دو سطح  $\mathcal{F}_1$  و  $\mathcal{F}_2$  باشد، بردار انحای ژئودزیک یک منحنی روی  $\mathcal{F}_1$  در نقطه های مانند  $P$  به وسیله این نگاهت به بردار انحای ژئودزیک نقش منحنی روی  $\mathcal{F}_2$  در نقش  $P$  برده می شود. در زیر بخش بعدی، انحای ژئودزیک با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می گیرد. بررسی انحای قائم را به بخش ۱۰۲۵ موکول می کنیم.

### ۳.۲۱ انحای ژئودزیک

یک منحنی از کلاس  $C_2$  مانند

$$u^i = u^i(s)$$

را روی سطحی از کلاس  $C_2$  در نظر می‌گیریم. چون بردار انحنای ژئودزیک  $k_g$  در نقطه  $P$  تصویر قائم بردار  $k$  در  $P$  (که بر مماس منحنی عمود است) روی صفحه مماس بر سطح در نقطه  $P$  است (که این خط مماس را در بر دارد)، باید بر بردار مماس  $t$  منحنی در  $P$  عمود باشد. در این نقطه، علاوه بر بردار یکه مماس  $t$ ، بردار یکه دیگر  $u$  را نیز در نظر می‌گیریم که از دوران  $t$  حول قائم به سطح در  $P$  به اندازه یک زاویه قائمه مثبت در جهت موضعی سطح حاصل می‌شود. بنابراین،

$$u = m \times t. \quad (6.21)$$

بردار  $u$ ، بدلیل عمود بودن بر  $m$ ، یک بردار مماس بر سطح است؛ علاوه،  $(6.21)$  نشان می‌دهد که  $u$  و  $t$  متعامدند، و سه بردار  $t, u, m$  یک سه‌تایی جهتدار با جهت مثبت تشکیل می‌دهند.  $u$  را قائم ژئودزیک منحنی در  $P$  می‌نامند. توجه کنید که جهت بردار  $u$  به جهت سطح بستگی دارد.

فرض کنیم سطح با منحنی واقع روی آن به‌طور ایزومتریک روی سطح دیگر نگاشته شده باشد. با این نگاشت، جهت سطح اول جهتی را به سطح دیگر القا می‌کند که ممکن است با جهت سطح دوم یکی باشد یا نباشد. در حالت اول، گوییم نگاشت جهت را حفظ می‌کند، و در حالت دوم، جهت را برمی‌گرداند. بردار قائم ژئودزیک منحنی در  $P$  به بردار قائم ژئودزیک نقش در نقطه متناظر برده می‌شود اگر نگاشت جهت را حفظ کند، و به بردار قائم ژئودزیک قرینه برده میشود اگر نگاشت جهت را برگرداند. بنابراین، بردار قائم ژئودزیک را می‌توان به هندسه ذاتی سطوح مربوط دانست فقط با یک شرط که جهتش به جهت سطح بستگی دارد. چون  $k_g$  و  $u$  دارای یک راستا هستند (متعامد به  $m$  و  $u$ )،

$$k_g = k_g u.$$

ضریب  $k_g$  انحنای ژئودزیک منحنی روی سطح نامیده می‌شود. چون بردار  $k_g$  پایای نگاشته‌های ایزومتریک بوده و  $u$  به‌ازای نگاشته‌های حافظ جهت پایاست و تحت ایزومتری‌هایی که جهت را برمی‌گردانند تغییر علامت می‌دهد؛ انحنای ژئودزیک اسکالر  $k_g$  نیز همان خاصیت را دارد؛ یعنی، قدر مطلقش پایا بوده و علامتش به جهت بستگی خواهد داشت.

قضیه. انحنای ژئودزیک هر منحنی از کلاس  $C_2$  روی یک سطح از کلاس  $C_2$  برابر است با

$$k_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} & \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \end{array} \right| \quad (7.21)$$

که در آن  $s$  پارامتر طول قوس منحنی است. قدر مطلق انحنای ژئودزیک به دستگاه مختصات منحنی الخط بستگی ندارد، ولی علامتش با تغییر جهت سطح یا منحنی تغییر می‌یابد. قدر مطلق انحنای ژئودزیک پایای نگاشت ایزومتریک است.

برهان. داریم

$$(۸.۲۱) \quad k_g = \mathbf{k}_g \mathbf{u} = \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{r}_k \mathbf{u},$$

ولی

$$\mathbf{r}_k \mathbf{u} = \mathbf{r}_k (\mathbf{m} \times \mathbf{t}) = \mathbf{m} (\mathbf{t} \times \mathbf{r}_k),$$

و

$$\mathbf{t} = \frac{du^1}{ds} \mathbf{r}_1.$$

بنابراین،

$$\mathbf{r}_k \mathbf{u} = \frac{du^1}{ds} \mathbf{m} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_k),$$

$$\frac{du^1}{ds} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_1) = \frac{du^2}{ds} (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) = -\frac{du^2}{ds} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = -\sqrt{g} \frac{du^2}{ds} \mathbf{m}.$$

زیرا  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{g} \mathbf{m}$ ، به همین نحو، داریم

$$\frac{du^1}{ds} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \sqrt{g} \frac{du^1}{ds} \mathbf{m}.$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{u} = -\sqrt{g} \frac{du^2}{ds}, \quad \mathbf{r}_2 \mathbf{u} = \sqrt{g} \frac{du^1}{ds}.$$

با گذاردن این مقادیر در (۸.۲۱)، رابطه<sup>۶</sup> (۷.۲۱) به دست می‌آید.

همانطور که قبلاً دیده شد، انحنای ژئودزیک تحت یک نگاشت ایزومتریکی که جهت را حفظ می‌کند حفظ می‌شود، و زمانی که ایزومتري جهت را برگرداند تغییر علامت می‌دهد. تغییر جهت منحنی (تعویض  $s$  با  $-s$ ) علامت سطر اول در ترمینان (۷.۲۱) را تغییر می‌دهد و لسی تأثیری بر سطر دوم ندارد. بنابراین، علامت انحنای ژئودزیک نیز در این حالت تغییر می‌یابد. پایایی فرمول (۸.۲۱) را می‌شد با محاسبه اثبات کرد، ولی این

مطلب با توجه به اینکه انحای ژئودزیک بی‌توسل به مختصات منحنی الخط و فقط با استفاده از بردار انحای منحنی و بردار قائم سطح تعریف شده نیز نتیجه می‌شود.

فرمول (۷۰۲۱) فقط برای پارامتری سازی طبیعی منحنی برقرار است. برای آنکه یک فرمول معتبر کلی به دست آید، ابتدا توجه می‌کنیم که برای یک پارامتری سازی دیگر  $t$  از منحنی، داریم

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{du^k}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{-1/2} \frac{du^k}{dt},$$

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} = \frac{d^2 u^k}{dt^2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{du^k}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} = \left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{-1} \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \frac{du^k}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

اگر این را در (۷۰۲۱) گذارده و حاصل ضرب

$$\left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{1/2} \frac{d^2 t}{ds^2}$$

در سطر اول را از سطر دوم دترمینان کم کنیم، خواهیم داشت

$$(۹۰۲۱) \quad k_g = \frac{\sqrt{g}}{\left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{3/2}} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{vmatrix}$$

توجه کنید که تعاریف بردارهای انحای ژئودزیک و انحای قائم یک سطح فورا "دو

خاصیت زیر را نتیجه می‌دهند:

۱. هرگاه دو سطح در امتداد یک خط بر هم مماس بوده (یعنی، هر دو در تمام نقاط این خط که بر هر دوی آنها واقعند صفحات مماس یکسان داشته باشند) و در نقاط مشترک آنها یک جهت داشته باشند، آنگاه انحای ژئودزیک خط واقع بر هر دو سطح یکسان است. هرگاه جهتها مخالف یکدیگر باشند، آنگاه انحای ژئودزیک روی یکی از سطوح قرینه انحای ژئودزیک روی دیگری می‌باشد.

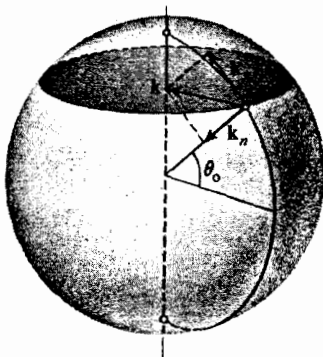
۲. هرگاه دو سطح در امتداد منحنی  $\mathcal{C}$  یکدیگر را در هر نقطه با زاویه قائمه قطع کنند، آنگاه بردار انحای ژئودزیک  $\mathcal{C}$  بر یک سطح با بردار انحای قائم  $\mathcal{C}$  بر سطح دیگر در هر نقطه از  $\mathcal{C}$  یکی است، و بالعکس.

### امثله و تمرین

۱. انحای ژئودزیک یک دایره عرض جغرافیایی بر کره. این انحای ژئودزیک را با

استفاده مستقیم از تعریف، برای  $\theta = \theta_0$  پیدامی کنیم. بردار انحنا  $k$  در صفحه دایره قرار دارد و طولش مساوی عکس شعاع این دایره است؛ یعنی،  $|a \cos \theta_0|^{-1}$ . بنابراین (ر.ک. شکل ۱۰.۲۱)، طول بردار  $k_g$  مساوی قدر مطلق

$$\frac{1}{a \cos \theta_0} \sin \theta_0 = \frac{1}{a} \tan \theta_0$$



شکل ۱۰.۲۱

است. علامت به جهت کره و دایره بستگی دارد. بخصوص، اگر جهت کره به وسیله دستگاه مختصات منحنی الخط با طول جغرافیایی  $\phi$  به عنوان اولین مختص و عرض جغرافیایی  $\theta$  به عنوان دومین مختص القا شده باشد (در این صورت، بردار قائم  $m$  از مرکز به خارج اشاره دارد)، و اگر جهت دایره عرض جغرافیایی در جهت افزایش طول جغرافیایی  $\phi$  باشد، بردار ژئودزیک با فرمول فوق بیان خواهد شد.

۲. انحنا ژئودزیک یک منحنی واقع بر یک صفحه با انحنا مسطح که در زیر بخش ۲.۹ مطرح شد یکی است.

۳. انحناهای ژئودزیک مارپیچ

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

واقع بر استوانه  $z = u^2$ ،  $x = a \cos u^1$ ،  $y = a \sin u^1$ ،  $z = u^2$  و بر مارپیچ گون  $x = u^1 \cos u^2$ ،  $y = u^1 \sin u^2$ ،  $z = u^2$  را بیابید.

۴. انحناهای ژئودزیک منحنیهای مختصات سطح

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = f(u^2),$$

که در آن  $f$  تابعی از کلاس  $C_2$  است، را بیابید.

۵. ثابت کنید دوائر عظیمه کره دارای انحنا ژئودزیک صفر هستند.

۶. انحنا ژئودزیک منحنی  $\mathcal{C}$  واقع بر یک سطح گسترده در هر نقطه با انحنا مسطح

در نقطه نظیر نقش منحنی به وسیله یک نگاشت ایزومتريک جهت نگهدار سطح گستردنی روی صفحه یکی است. این نتیجه‌ای است از خاصیت ذاتی انحناى ژئودزیک.

۷. ثابت کنید قدر مطلق انحناى ژئودزیک منحنی  $r = r(s)$  روی سطح گستردنی که به وسیلهٔ مماسهای بر منحنی جارو می‌شود با انحناى آن یکی است.

۸. ثابت کنید انحناى ژئودزیک منحنی  $r = r(s)$  بر سطح اصلاحی آن، یعنی پوش صفحات اصلاحی آن، همه‌جا مساوی ۰ است. بنابراین، اگر سطح را روی صفحه بگسترانیم، منحنی به خطی مستقیم بدل خواهد شد.

۹. نتایج این بخش را به کار برده، مسئلهٔ ۳۰۲ را با محاسبهٔ انحناى ژئودزیک گسترده‌های مربوطه حل کنید.

۱۰. ثابت کنید انحناى ژئودزیک یک منحنی به معادلهٔ ضمنی  $\phi(u^1, u^2) = 0$  که در آن  $\phi$  تابعی از کلاس  $C_2$  است، برابر است با

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{g_{12}\phi_2 - g_{22}\phi_1}{g_{11}(\phi_1)^2 - 2g_{12}\phi_1\phi_2 + g_{22}(\phi_2)^2} + \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{g_{12}\phi_1 - g_{11}\phi_2}{g_{11}(\phi_1)^2 - 2g_{12}\phi_1\phi_2 + g_{22}(\phi_2)^2} \right],$$

که در آن  $\phi_1 = \partial\phi/\partial u^1$ ،  $\phi_2 = \partial\phi/\partial u^2$

۱۱. ثابت کنید که اگر مختصات منحنی الخط متعامد باشند ( $g_{12} = 0$ )، انحناى ژئودزیک  $u^1$  — خط مساوی

$$-\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \ln \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2},$$

و انحناى ژئودزیک  $u^2$  — خط برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \ln \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}.$$

۱۲. ثابت کنید که اگر هریک از  $u^1$  — خطوط یک دستگاه مختصات ایزومتريک روی یک سطح انحناى ژئودزیک ثابت داشته باشد، هریک از  $u^2$  — خطوط نیز انحناى ژئودزیک ثابت خواهد داشت.

۱۳. ثابت کنید انحناى ژئودزیک یک منحنی که در هر نقطه با  $u^1$  — خط زاویهٔ  $\alpha(s)$  می‌سازد مساوی است با

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\sqrt{g}\Gamma_{11}^2}{g_{11}} \frac{du^1}{ds}.$$

این فرمول به گاوس منسوب است.

## ۴.۲۱ خطوط ژئودزیک

یک خط ژئودزیک یا ، خلاصه تر ، یک ژئودزیک ، یک سطح منحنیی است که انحنای ژئودزیک آن در هر نقطه صفر باشد .

چون قدر مطلق انحنای ژئودزیک یک پایای ایزومترهای سطوح است ، مفهوم خط ژئودزیک به هندسه ذاتی تعلق خواهد داشت .

معادله دیفرانسیل خط ژئودزیک را می توان با متحد صفر گرفتن طرف راست (۷.۲۱) یا (۹.۲۱) به دست آورد . این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است . به جای آن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به کار می بریم ، که با متحد صفر گرفتن هر مولفه بردار انحنای ژئودزیک جداگانه به دست می آید . معادلات زیر را داریم :

$$(۱۰.۲۱) \quad \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0 \quad (k = 1, 2).$$

اما ، چون  $s$  در این معادله پارامتر قوس است ، شرط

$$(۱۱.۲۱) \quad g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1$$

نیز باید به وسیله خط ژئودزیک برقرار شود .

شرط (۱۱.۲۱) به ما اجازه تعویض معادلات (۱۰.۲۱) با یک معادله به صورت زیر را نیز می دهد :

$$(۱۲.۲۱) \quad \frac{d^2 u^2}{(du^1)^2} = \Gamma_{22}^1 \left( \frac{du^2}{du^1} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \left( \frac{du^2}{du^1} \right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \frac{du^2}{du^1} - \Gamma_{11}^2,$$

که در آن  $u^2$  تابعی از  $u^1$  گرفته می شود .

به آسانی ثابت می شود که اگر مقادیر اولیه برای  $u^i$  و  $du^i/ds$  در شرط (۱۱.۲۱) صدق کنند ، این شرط به وسیله جواب معادلات (۱۰.۲۱) که با این مقادیر اولیه معین می شود نیز برقرار است .

در واقع ، با مشتقگیری از سمت چپ (۱۱.۲۱) ، داریم

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + 2g_{ij} \frac{d^2 u^i}{ds^2} \frac{du^j}{ds}.$$

با گذاردن یک جواب دستگاه (۱۰.۲۱) به جای  $u^i$  ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} - 2g_{ij} \Gamma_{ik}^i \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} - 2\Gamma_{ikj} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds} \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds} \\ &\quad - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds}. \end{aligned}$$

اگر در مجموع دوم اندیس  $k$  را به  $i$  و  $l$  را به  $k$ ، در مجموع سوم  $l$  را به  $i$ ، و در مجموع چهارم  $l$  را به  $i$ ،  $k$  را به  $j$ ، و  $j$  را به  $k$  تغییر دهیم، درمی یابیم که مجموع صفر می باشد.

این یعنی طرف چپ (۱۱.۲۱) ثابت است و مقدارش همه جا همان مقدار در نقطه ابتدایی است. این ما را از قید اینکه هر دم جواب (۱۰.۲۱) را در (۱۱.۲۱) امتحان کنیم آزاد می سازد.

**قضیه ۱.** از هر نقطه منتظم یک سطح از کلاس  $C_2$  در هر راستا دست کم یک خط ژئودزیک می گذرد. اگر فرضهای انتظام قویتر باشند، مثلاً "سطح از کلاس  $C_3$  باشد، دقیقاً" یک چنین خط ژئودزیک وجود خواهد داشت.

**برهان.** فرض کنیم  $a = a^i \mathbf{r}_i$  بردار یکه راستای داده شده در نقطه  $P_0(u_0^i, u_0^j)$  باشد. در این صورت، مولفه های  $a^i$ ، وقتی به عنوان مقادیر اولیه برای  $du^i/ds$  به کار روند، در معادله (۱۱.۲۱) صدق می کنند. از اینرو، معادله یک خط ژئودزیک ماربر  $P_0$  در راستای جواب معادله (۱۰.۲۱) با مقادیر اولیه  $a^i$ ،  $du^i/ds = a^i$ ،  $u^i = u_0^i$  است. بنابر قضیه وجودی و یکتایی نظریه معادلات دیفرانسیل، این جواب در صورتی که ضرایب پیوسته باشند وجود دارد، و اگر در شرایط قویتری صدق کنند (مثلاً، "شرط لپ شیتس<sup>۱)</sup> منحصر بفرد است، و در هر حالت، اگر ضرایب مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند، این امر درست خواهد بود. این فرض که سطح از کلاس  $C_2$  باشد پیوستگی ضرایب  $\Gamma_{ij}^k$  را ایجاب می کند؛ فرض از کلاس  $C_3$  بودن ایجاب می کند که ضرایب  $\Gamma_{ij}^k$  از کلاس  $C_1$  باشند. این برهان قضیه ما را کامل خواهد کرد.

در اینجا پارامتری سازی هندسی زیر از خطوط ژئودزیک را ذکر می کنیم.

قضیه ۲. یک منحنی از کلاس  $C_2$  روی یک سطح از کلاس  $C_2$  یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر صفحه بوسان منحنی در هر نقطه به صفحه مماس بر سطح در آن نقطه متعامد بوده یا انحنای منحنی در این نقطه صفر باشد.

برهان. این مطلب فوراً از این امر که  $k_g = 0$  اگر و فقط اگر  $k$  و  $m$  همخط باشند نتیجه می شود که حالتی است که اگر و فقط اگر  $k = 0$  یا بردار قائم اصلی منحنی، یعنی  $n$ ، و بردار قائم سطح، یعنی  $m$ ، همخط باشند. شرط اخیر یعنی صفحه بوسان شامل قائم سطح باشد؛ و لذا، به صفحه مماس متعامد خواهد بود.

### امثله و تمرین

احکام زیر را ثابت کنید:

۱. خطوط ژئودزیک روی صفحه خطوط مستقیم می باشند.
۲. خطوط ژئودزیک روی کره دوائر عظیمه اند.
۳. خطوط ژئودزیک روی استوانه مستدیر عبارتند از خطوط جاری، مقطع صفحات عمود بر خطوط جاری، و مارپیچهای واقع بر استوانه.
۴. گسترده یک منحنی در فضا خطوط ژئودزیک روی پوش صفحات قائم به منحنی است (قس. تمرین در ۳۰۲ و تمرین ۹ در ۳۰۲۱).
۵. هر خط مستقیم واقع بر یک سطح یک خط ژئودزیک آن سطح است.
۶. خطوط ژئودزیک یک سطح دوار را بیابید.
۷. معادله دیفرانسیل خطوط ژئودزیک سطح  $z = f(x, y)$  را بیابید.
۸. معادلات پارامتری خطوط ژئودزیک سهمی گون دوار

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = \frac{(u^1)^2}{2p}, \quad p = \text{ثابت}$$

را بیابید.

۹. ثابت کنید هرگاه سطحی مختصات منحنی الخط متعامد بپذیرد، به طوری که همه  $u^1$  - خطوط و  $u^2$  - خطوط خطوط ژئودزیک باشند، آنگاه سطح گسترده می خواهد بود.
۱۰. ثابت کنید که تصویر از مرکز یک کره بروی کره ای هم مرکز با آن و به شعاع متفاوت، با آنکه ایزومتري نیست، خطوط ژئودزیک را بتوی خطوط ژئودزیک می نگارد.
۱۱. مثال پیش یک نگاشت همشکل (حتی یک تشابه) است؛ نگاهشهای مستوی صفحه

$$(x, y) \rightarrow (ax + by + c, dx + ey + f),$$

که در آن  $ae - bd \neq 0$ ، خطوط مستقیم (ژئودزیکها) را بتوی خطوط مستقیم می‌نگارند بی‌آنکه لزوماً "نگاشتهایی همشکل یا هم مساحت باشند. این مطلب را با اختیار مقادیر خاصی برای ضرایب نشان دهید.

۱۲. ثابت کنید یک نگاشت همشکل که همه ژئودزیکها را به ژئودزیکها برد یک تشابه است راهنمایی. از مختصات همگرمایی استفاده کنید.

## ۵.۲۱ مختصات نیمه ژئودزیک

حال به توصیف ساختنی می‌پردازیم که به مختصات نیمه ژئودزیک ختم می‌شود. یک منحنی منتظم دلخواه روی سطحی که از نقطه دلخواه  $P_0$  می‌گذرد اختیار کرده، و پارامتر طبیعی منحنی را با  $u^2$  نشان می‌دهیم به طوری که  $P_0$  نظیر به مقدار  $u^2 = 0$  باشد. همچنین، در هر نقطه از این منحنی خط ژئودزیک معین شده به وسیله بردار قائم ژئودزیک  $u$  در نقطه نظیر را اختیار و پارامتر طول قوس روی این خط ژئودزیک را با  $u^1$  نشان می‌دهیم.

دو پارامتر  $u^1, u^2$  موضع یک نقطه را در قلمرو جارو شده به وسیله این خطوط ژئودزیک معین می‌کنند. در همسایگی به قدر کافی کوچک نقطه  $P_0$  می‌توان آنها را به عنوان مختصات منحنی الخط در یک نمایش پارامتری منتظم سطح به کار برد.

★ برای اثبات این امر، یک مختصات منحنی الخط مجاز معلوم در همسایگی  $P_0$  را با  $v^1$  و  $v^2$  نشان می‌دهیم. فرض کنیم معادله منحنی انتخابی ما عبارت باشد از

$$v^i = \phi^i(\tau), \quad a < \tau < b.$$

در این صورت، نقطه  $P_0$  دارای مختصات  $v_0^i = \phi^i(0)$  است.

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(13.21) \quad \frac{d^2 v^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(v^1, v^2) \frac{dv^i}{dt} \frac{dv^j}{dt} = 0.$$

فرض کنیم

$$(14.21) \quad \Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2)$$

جواب دستگاه با مقادیر اولیه زیر باشد:

$$(15.21) \quad \Psi^i(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \phi^i(\tau)$$

$$(16.21) \quad \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \xi^i.$$

$\xi^1$  و  $\xi^2$  را به مستطیل  $\delta < \xi^2 < \beta$ ,  $\gamma < \xi^1 < \alpha$  مقید می‌کنیم که شامل جفت مولفه‌های  $(\xi^1, \xi^2)$  از تمام بردارهای یک‌همسایگی از نقطه  $P_0$  که شامل منحنی

است می باشد.

در این صورت، نظریهء معادلات دیفرانسیل می گوید که، اگر توابع  $\Gamma_{ij}^*$  از کلاس  $C_1$  و توابع  $\phi^i(t)$  از کلاس  $C_2$  باشند، جوابها به ازای  $t$  در بازه ای چون  $-\eta \leq t \leq \eta$  وجود دارند و توابع  $\Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2)$  در متوازی السطوح  $\alpha < \xi^1 < \beta$ ،  $a < \tau < b$ ،  $-\eta \leq t \leq \eta$  از کلاس  $C_2$  می باشند.

حال اگر توابع  $u^i = \psi^i(t)$  جوابی از دستگاه (۳.۲۱) با مقادیر اولیهء ثابت  $\psi^i(0) = \phi^i(\tau)$ ،  $\psi^i(0) = \lambda \xi^i$ ،  $\lambda = \omega^i(t) = \psi^i(t/\lambda)$  توابع  $v^i = \omega^i(t)$  نیز جوابی از (۱۳.۲۱) با مقادیر اولیهء  $\xi^i$  به دست خواهند داد. به عبارت دیگر، طبق یکتایی جواب، داریم

$$\Psi^i(t/\lambda, \tau, \lambda \xi^1, \lambda \xi^2) = \Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2). \quad (17.21)$$

بخصوص، به ازای  $\lambda = t/\eta$ ، داریم

$$\Psi^i(\eta, \tau, t \xi^1/\eta, t \xi^2/\eta) = \Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2). \quad (18.21)$$

با مشتگیری از این اتحاد نسبت به  $t$  و گذاردن  $t = 0$  در آن، به دست می آید

$$\frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^k}(\eta, \tau, 0, 0) \xi^k = \eta \xi^i.$$

و با جایگذاری  $\delta_j^k = \xi^k$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j}(\eta, \tau, 0, 0) = \eta \delta_j^i. \quad (19.21)$$

در این صورت، از (۱۵.۲۱) و (۱۸.۲۱) نتیجه می شود که

$$\frac{\partial \Psi^i}{\partial \tau}(\eta, \tau, 0, 0) = \frac{\partial \Psi^i}{\partial \tau}(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \dot{\phi}^i(\tau). \quad (20.21)$$

حال به کار ساختن خویش باز می گردیم؛ قرار می دهیم  $t = u^1$  و  $\tau = u^2$  و مولفه های بردار قائم ژئودزیک  $u(u^2)$  را با  $a^1(u^2), a^2(u^2)$  نشان می دهیم. چون خطوط ژئودزیک ما جوابهای دستگاه (۱۳.۲۱) با شرایط اولیهء  $v^i = \phi^i(0)$ ،  $dv^i/dt = a^i(u^2)$  اند، معادلهء ژئودزیک خواهد بود

$$v^i = \Psi^i(u^1, u^2; a^1(u^2), a^2(u^2)),$$

که، بنابر (۱۸.۲۱)، همان

$$v^i = \Psi^i(u^1, u^2, a^1(u^2), a^2(u^2)) = \Psi^i\left(\eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta}\right) \quad (21.21)$$

می باشد. مشتقات جزئی

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^1} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j} \left( \eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta} \right) \frac{a^j(u^2)}{\eta},$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^2} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial \tau} \left( \eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta} \right) + \frac{u^1}{\eta} \frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j} (\dots) \frac{da^j}{du^2}.$$

پس در نقطه  $P_0$ ، که متناظر  $u^1 = 0 = u^2$  است، خواهیم داشت

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^1} = a^i(0), \quad \frac{\partial v^i}{\partial u^2} = \phi^i(0).$$

اما  $a^i(0)$  و  $\phi^i(0)$  مولفه‌های دوبردار نا صفر متعامدند؛ لذا، بردارهای مستقلی هستند. بنابراین، در مینان

$$J = \begin{vmatrix} a^1(0) & a^2(0) \\ \phi^1(0) & \phi^2(0) \end{vmatrix}$$

مخالف صفر است، و این ژاکوبی تبدیل مختصات از  $(v^1, v^2)$  به  $(u^1, u^2)$  در  $P_0$  می‌باشد.

بنابراین،  $(u^1, u^2)$  مختصات مجاز در همسایگی  $P_0$  می‌باشند. ★

در مختصات  $(u^1, u^2)$ ، منحنی اولیه دارای معادله  $u^1 = 0$  است، خطوط ژئودزیک دارای معادلات ثابت  $u^2 =$  اند، و  $u^1$  پارامتر طول قوس روی خطوط ژئودزیک است. از حالا به بعد در همه بخشها از این مختصات موضعی استفاده می‌کنیم. برای خطوط ژئودزیک ثابت  $u^2 =$  داریم

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} = 0, \quad \frac{du^2}{ds} = 0, \quad \frac{du^1}{ds} = 1$$

با گذاردن این در معادلات (۱۸.۲۱)، نتیجه می‌شود که، در مختصات ما،

$$(۲۲.۲۱) \quad \Gamma_{11}^k = 0.$$

همچنین، با گذاردن  $du^1/ds = 1$  و  $du^2/ds = 0$  در (۱۱.۲۱)، خواهیم داشت

$$(۲۳.۲۱) \quad g_{11} = 1, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} = 0.$$

فرمول (۲۲.۲۱) معادل است با

$$\frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^l} \right) = 0$$

که، در پرتو (۲۳.۲۱)، نتیجه می‌دهد که

$$g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0,$$

$$g^{22} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

اما هر دو ضریب  $g^{12}$  و  $g^{22}$  نمی توانند همزمان صفر شوند، زیرا در غیر این صورت دترمینان  $g^{11}g^{22} - (g^{12})^2 = 1/g$  صفر می شد. بنابراین،

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0,$$

که نشان می دهد که  $g_{12}$  به  $u^1$  بستگی ندارد. اما زاویه بین خط  $u^1 = 0$  و هر خط  $u^2 = c$  یک زاویه قائمه است؛ و لذا، به ازای هر  $u^2$ ،  $g_{12}(0, u^2) = 0$ ؛ در نتیجه، به  $u^2$  نیز بستگی ندارد؛ و لذا، ثابت ما صفر است. این یعنی مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  متعامد می باشند.

حال اگر  $g_{22}(u^1, u^2)$  را با  $G(u^1, u^2)$  نشان دهیم، خواهیم دید که اولین فرم اساسی سطح در این مختصات عبارت است از

$$(24.21) \quad ds^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2,$$

که با  $(29.16)$  یکی است. لذا، مختصات  $(u^1, u^2)$  همانهایی هستند که در زیر بخش ۱۶ مختصات نیمه ژئودزیک نامیدیم. نام "نیمه ژئودزیک" را این امر که یک خانواده از خطوط مختصات از خطوط ژئودزیک و خانواده دیگر از مسیرهای قائم اولی تشکیل شده است توجیه خواهد کرد. لذا، وجود مختصات نیمه ژئودزیک در همسایگی به قدر کافی کوچک نقطه  $P$  را ثابت کرده ایم، به طوری که خط  $u^1 = 0$  خط مفروض دلخواهی ماربر  $P$  می باشد.

با شروع کار ساختن از یک خط ژئودزیک می توان مختصات نیمه ژئودزیک را از این هم خاصتر کرد. اگر، علاوه بر این، منحنی  $u^1 = 0$  یک خط ژئودزیک در پارامتری سازی طول قوس باشد، اولین فرم اساسی و علایم کریستوفل در شرایط اضافی زیر صدق می کنند:

$$(25.21) \quad g_{22}(0, u^2) = 1, \quad \Gamma_{jk}^i(0, u^2) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2).$$

### امثله و تمرین

۱. مختصات دکارتی متعامد در صفحه حالت خاصی از مختصات نیمه ژئودزیک اند. همچنین اند مختصات قطبی در صفحه. مبداء یک نقطه منفرد پارامتری سازی در حالت اخیر است.

۲. مثال مختصات قطبی ساختن مختصات نیمه ژئودزیک زیر را، به نام مختصات ژئودزیک قطبی، پیشنهاد می کند. نقطه  $P_0$  از سطح را ثابت گرفته و همه خطوط ژئودزیک خارج شده از این نقطه را در نظر می گیریم. یک چنین خطی باراستای خود معین

می‌شود؛ و لذا، می‌توان آن را با زاویه بین بردار مماس ثابتی در  $P_0$  و بردار مماس ژئودزیک ما مشخص کرد. موضع نقطه  $P$  روی ژئودزیک را می‌توان با طول قوس ژئودزیک بین  $P_0$  و  $P$  معین نمود. به این طریق، می‌توان دو پارامتر معرف موضع نقطه  $P$  را به دست آورد. در صفحه اینها مختصات قطبی به مبداء  $P_0$  می‌باشند. ثابت کنید می‌توان این دو پارامتر را به عنوان مختصات منحنی الخط در همسایگی  $P_0$  که خود  $P_0$  حذف شده است به کاربرد. نقطه  $P_0$  یک نقطه منفرد این پارامتری سازی است؛ مختصات آن به طور منحصر بفرد تعریف نشده‌اند.

۳. مختصات گروی روی کره یک مختصات نیمه ژئودزیک‌اند. روی یک کره به شعاع  $a$ ، مختصات  $u^1 = a\theta$ ،  $u^2 = a\phi$  نیز نیمه ژئودزیک هستند. اگر عرض جغرافیایی  $\theta$  را با  $\psi = \pi/2 - \theta$  ( $0 < \psi < \pi$ ) عوض کنیم، مختصات  $v^1 = \phi$ ،  $v^2 = a\psi$  مختصات قطبی به مبداء "قطب شمال" ( $\theta = \pi/2$ ) می‌باشند.

۴. اگر پارامتر  $u$  منحنی که یک سطح دوار تولید می‌کند پارامتر طول قوس باشد، مختصات منحنی الخط مثال ۳ در ۳.۱۱ مختصات نیمه ژئودزیک خواهند بود.

۵. اگر مختصات منحنی الخط نیمه ژئودزیک باشند، فرمول تمرین ۱۳ در ۳.۲۱، که انحناى ژئودزیک یک منحنی را بر حسب زاویه اش  $\alpha$  با  $u^1$  - خط بیان می‌کند، خواهد شد

$$k_s = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^1} \frac{du^2}{ds};$$

و در نتیجه، معادله خطوط ژئودزیک را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d\alpha}{du^2} = - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^1}.$$

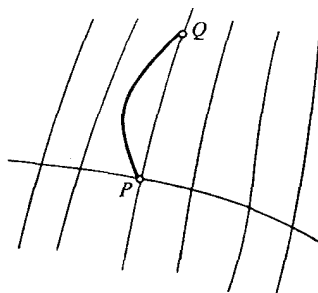
۶. با استفاده از فرمول اخیر، ثابت کنید که خطوط ژئودزیک یک سطح دوار نصف النهارات را در زاویه  $\alpha$  قطع می‌کنند، به طوری که  $\sin \alpha$  با فاصله نقطه تا محور نسبت عکس دارد (قضیه کلو<sup>۱</sup>).

## ۶.۲۱ خاصیت مینیمال خطوط ژئودزیک

قضیه. یک قوس از خط ژئودزیک  $\mathcal{C}$  ماربر نقطه  $P$  که گاملا "در همسایگی به قدر کافی کوچکی از  $P$  سطح  $\mathcal{C}$  از کلاس  $C_3$  قرار گرفته کوتاهترین راه بین  $P$  و نقطه دیگری از این

خط ژئودزیک در آن همسایگی است.

برهان. با معلوم بودن خط ژئودزیک  $\mathcal{C}$ ، یک منحنی روی سطح در نظر می گیریم که از  $P$  گذشته و متعامد به  $\mathcal{C}$  باشد (شکل ۲۰۲۱). با استفاده از این منحنی به عنوان پایه برای



شکل ۲۰۲۱

ساختن یک دستگاه مختصات نیمه ژئودزیک در همسایگی  $P$  بصورتی که در زیر بخش پیش توصیف شد استفاده می کنیم. با انتخاب پارامتری سازی مناسبی برای منحنی، مختصات  $P$ ،  $(0, 0)$  می شوند، و معادله خط ژئودزیک داده شده  $\mathcal{C}$  خواهد شد  $u^2 = 0$ . حال نقطه  $Q$  را روی خط ژئودزیک  $\mathcal{C}$  گرفته و یک منحنی از کلاس  $C_1$  واصل بین  $P$  و  $Q$  در داخل همسایگی که مختصات منحنی الخط ساخته شده منتظم انداخته می کنیم. اگر معادلات این منحنی  $u^i = u^i(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) باشند، برای طول آن فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt.$$

بعلاوه، چون  $G > 0$ ، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt \geq \left| \int_0^1 \frac{du^1}{dt} dt \right| = |u^1(1)|,$$

که در آن  $u^1(1)$  مختص  $Q$  است؛ یعنی،  $|u^1(1)|$  طول قوس ژئودزیک بین نقاط  $P$  و  $Q$  است، و قضیه ثابت خواهد بود.

به عبارت دیگر، هر خط ژئودزیک موضعا "کوتاهترین راه بین دو نقطه است. این مطلب به طور همهجایی برقرار نیست. مثلاً، هر دو نقطه یک کره را می توان با دست کم دو قوس از یک خط ژئودزیک بهم وصل کرد ولی، جز در حالتی که نقاط متقابلند که بی نهایت ژئودزیک آنها را بهم وصل می کنند، فقط یکی از دو قوس واصل کوتاهترین

است. این قوس قوسی است که از نصف دایره عظیمه ماربر دو نقطه کوچکتر است.

خطوط ژئودزیک روی یک سطح از بسیاری جهات شبیه خطوط مستقیم در صفحه اند. درست مثل خطوط مستقیم در صفحه، بر یک سطح به قدر کافی منظم دقیقاً "یک ژئودزیک وجود دارد که از نقطه مفروضی گذشته و راستای مفروضی دارد. با اینحال، در صفحه، دو خط متمایز فقط می توانند در یک نقطه برخورد کنند، که این برای خطوط ژئودزیک فقط در همسایگی به قدر کافی کوچک نقطه مشترک درست است. بدون این قید، امر فوق ممکن است برای خطوط ژئودزیک برقرار نباشد. در واقع، هر دو خط ژئودزیک روی کره، یعنی دایره عظیمه، دو نقطه مشترک خواهند داشت. یک خط مستقیم در صفحه کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه است؛ این باز برای خطوط ژئودزیک فقط تحت این شرط که همسایگی به قدر کافی کوچک است درست می باشد. همانند خطوط مستقیم روی صفحه که خطوطی با انحنای مسطح صفرند، خطوط ژئودزیک خطوطی با انحنای ژئودزیک صفر می باشند.

## ۷.۲۱ تاب ژئودزیک

به هر نقطه از منحنی  $u^i = u^i(s)$  از کلاس  $C_1$  روی سطح

$$r = r(u^1, u^2)$$

از کلاس  $C_1$  می توان یک کنج مرکب از سه بردار یکه دو بدو بر هم عمود مربوط کرد: بردار مماس  $t$ ، بردار قائم ژئودزیک  $u = m \times t$  (که در صفحه مماس بر سطح قرار دارد)، و بردار قائم  $m$  به سطح.

فرض کنیم سطح و منحنی هر دو از کلاس  $C_2$  بوده، و توابع برداری  $t(s)$ ،  $u(s)$ ،  $m(s)$  از کلاس  $C_1$  باشند. چون این سه بردار به ازای هر  $s$  مستقل خطی اند، می توان مشتقات آنها را به صورت ترکیباتی خطی از  $t$ ،  $u$ ،  $m$  نوشت:

$$\frac{dt}{ds} = \alpha t + \beta u + \gamma m,$$

$$\frac{du}{ds} = \alpha_1 t + \beta_1 u + \gamma_1 m,$$

$$\frac{dm}{ds} = \alpha_2 t + \beta_2 u + \gamma_2 m,$$

که در آن ضرایب توابعی از پارامتر  $s$  اند. با مشتگیری از اتحادهای

$$t^2 = 1, \quad u^2 = 1, \quad m^2 = 1, \quad tu = 0, \quad tm = 0, \quad um = 0,$$

معلوم می‌شود که

$$\alpha = \beta_1 = \gamma_2 = 0, \quad \beta = -\alpha_1, \quad \gamma = -\alpha_2, \quad \gamma_1 = -\beta_2.$$

چون بردار

$$\frac{dt}{ds} = \kappa n = \beta u + \gamma m$$

بردار انحناست، طبق (۲۰.۲۱)، ضرایب  $\beta, \gamma$  به ترتیب انحنای ژئودزیک و قائم می‌باشند؛ یعنی،  $\beta = -\alpha_1 = k_g, \gamma = -\alpha_2 = k_n$ ، دو ضریب مساوی دیگر را با  $\tau_g$  نشان می‌دهیم و تاب ژئودزیک منحنی می‌نامیم:  $\tau_g = \gamma_1 = -\beta_2$ . با این نماد، فرمولهای زیر، به نام فرمولهای بونه - کووالفسکی<sup>۱</sup>، را خواهیم داشت:

$$\frac{dt}{ds} = k_g u + k_n m,$$

$$(26.21) \quad \frac{du}{ds} = -k_g t + \tau_g m,$$

$$\frac{dm}{ds} = -k_n t - \tau_g u.$$

با استفاده از اینها، می‌توان برای تاب ژئودزیک فرمولی به دست آورد. بنابر فرمول (۲۰.۱۸) وینگارتن، داریم

$$\frac{dm}{ds} = -b_j^i \frac{du^j}{ds} r_i,$$

و، بنابر خط سوم (۲۶.۲۱)،

$$(27.21) \quad \tau_g = -u \frac{dm}{ds} = -\left( m t \frac{dm}{ds} \right) = (m r_k r_i) b_j^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds},$$

زیرا  $t = (du^k/ds) r_k$  با توجه به این امر که

$$r_1 \times r_2 = -r_2 \times r_1 = \sqrt{g} m,$$

فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\tau_g = \sqrt{g} \left( b_j^2 \frac{du^j}{ds} \frac{du^1}{ds} - b_j^1 \frac{du^j}{ds} \frac{du^2}{ds} \right),$$

که می‌توان آن را به شکل معادل زیر نیز نوشت:

$$(28.21) \quad \tau_g = \sqrt{g(\delta_i^1 b_j^2 - \delta_i^2 b_j^1)} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}.$$

نتایج فوق قضیه زیر را نتیجه می‌دهند.

قضیه. تاب ژئودزیک در یک نقطه از یک منحنی روی یک سطح از کلاس  $C_2$  فقط به راستای منحنی بستگی دارد و از فرمول (۲۸.۲۱) به دست می‌آید. تاب ژئودزیک در یک نقطه به ازای یک راستای مفروض روی یک سطح از کلاس  $C_3$  مساوی تاب خط ژئودزیک این راستا در این نقطه است.

برهان. قسمت اول قضیه فوراً از این امر نتیجه می‌شود که فرمول (۲۸.۲۱) فقط شامل ضرایبی است که به نقطه واقع بر سطح و مشتقات اول معادلات منحنی نسبت به پارامتر قوس بستگی دارند. برای اثبات قسمت دوم، می‌بینیم که برای یک خط ژئودزیک، بردار قائم اصلی منحنی، یعنی  $n$ ، با بردار قائم به سطح، یعنی  $m$ ، همخط است. بنابراین داریم

$$n = \varepsilon m, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

که نتیجه می‌دهد که بردار قائم دوم مساوی است با

$$b = t \times n = \varepsilon t \times m = -\varepsilon u.$$

با مشتقگیری از این نسبت به  $s$  و استفاده از فرمولهای بونه - کووالفسکی (۲۶.۲۱)، به دست می‌آوریم

$$-tn = \varepsilon k_g t - \varepsilon \tau_g m = -\tau_g n,$$

زیرا، برای یک خط ژئودزیک،  $k_g = 0$ . در نتیجه،  $\tau = \tau_g$ ، و اثبات تمام است.

حال به تاب ژئودزیک در زیر بخش ۶.۲۹ بازمی‌گردیم.

### امثله و تمرین

۱. قبل از هر چیز، می‌بینیم که تاب ژئودزیک یک مفهوم از هندسه ذاتی نیست. در واقع، تاب ژئودزیک در هر راستایی از صفحه صفر است، ولی بر استوانه مستدیر، که موضعا "باصفحه ایزومتریک است، همه خطوط ژئودزیک، جز خطوط جاری ومقاطع حاصل از صفحات عمود بر محور، مارپیچ بوده و دارای تاب ناصفرند که، بنا بر قضیه ما، مساوی تاب ژئودزیک در راستای مارپیچ می‌باشد.

۲. ثابت کنید تاب ژئودزیک روی کره در هر راستا مساوی صفر است.

## ۲۲ سطوح با انحنای گاوسی ثابت

### ۱۰.۲۲ قضایای عمومی

سطوح با انحنای گاوسی ثابت کلاس مهمی از سطوح را تشکیل می‌دهند. یکی از خواص جالب این کلاس آن است که یک سطح از این کلاس خانواده بزرگی از نگاشتهای موضعا<sup>۱</sup> ایزومتریک بتوی خود را می‌پذیرد.

قضیه. دو سطح با انحنای گاوسی ثابت مساوی موضعا<sup>۱</sup> ایزومتریک اند. یک نگاشت موضعا<sup>۱</sup> ایزومتریک وجود دارد که یک نقطه مفروض دلخواه از یک سطح و یک راستای مفروض دلخواه در این نقطه را به یک نقطه مفروض دلخواه از سطح دوم و یک راستا در آن نقطه می‌نگارد.

برهان. دستگاههای مختصات نیمه ژئودزیک را روی هر دو سطح در همسایگی نقاط مفروض به صورت زیر می‌سازیم: خطوط ژئودزیک ماربر نقاط مفروض در راستای داده شده را منحنیهای پایه<sup>۱</sup>  $u^1 = 0$  می‌گیریم. در این صورت، اولین فرمهای اساسی هر دو سطح به ترتیب به شکل زیر خواهند بود:

$$(du^1)^2 + G(du^2)^2, \quad (du^1)^2 + \tilde{G}(du^2)^2,$$

که در آنها

$$(10.22) \quad G(0, u^2) = \tilde{G}(0, u^2) = 1, \quad \frac{\partial G(0, u^2)}{\partial u^1} = \frac{\partial \tilde{G}(0, u^2)}{\partial u^1} = 0.$$

بنابر (۲۲.۱۸)، داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{(\partial u^1)^2},$$

و همین رابطه برای  $\tilde{G}$ :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial^2 \sqrt{\tilde{G}}}{(\partial u^1)^2}.$$

در نتیجه،  $\sqrt{G}$  و  $\sqrt{\tilde{G}}$  جوابهای معادله دیفرانسیل

$$(20.22) \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial u^1)^2} = -Kz$$

با ضریب ثابت  $K$  اند، زیرا هر دو سطح، طبق فرض، دارای یک انحنای گاوسی ثابت

می‌باشند.

چون  $K$  به  $u^2$  بستگی ندارد، معادله (۲۰۲۲) را می‌توان یک معادله دیفرانسیل معمولی گرفت، و یک جواب به‌طور منحصر بفرد با مقادیر اولیه  $z$  و  $\partial z / \partial u^1$ ، که ممکن است به  $u^2$  نیز به‌عنوان پارامتر بستگی داشته باشند، معین می‌شود. اما، بنابر (۱۰۲۲)، هردوی  $\sqrt{G}$  و  $\sqrt{\bar{G}}$  در شرایط اولیه یکسان صدق می‌کنند. در نتیجه، همه‌جا داریم  $\sqrt{G} = \sqrt{\bar{G}}$ ، بدین معنی که اولین فرمهای اساسی یکی هستند. لذا، نداشتن از یک سطح بتوی دیگر، که یک نقطه به مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  بر سطح اول را به یک نقطه با همان مختصات منحنی الخط بر سطح دیگر می‌برد، یک ایزومتري موضعی است. طرز ساختن دستگاههای مختصات بوضوح معلوم می‌کند که نقطه و راستای مفروض بر سطح اول به وسیله این نداشتن به نقطه و راستای معلوم بر سطح دیگر نگاشته می‌شود، و برهان تمام است.

از این قضیه و خواص معلوم کره، صفحه، و کره‌نما، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱. یک سطح با انحنا گوسی ثابت و مثبت  $K = a^{-2}$  با سطح یک کره به شعاع  $a$  موضعا "ایزومتريک است. یک سطح با انحنا گوسی ثابت  $K = 0$  با یک صفحه موضعا "ایزومتريک است. یک سطح با انحنا گوسی ثابت منفی  $K = -a^{-2}$  با کره نما موضعا "ایزومتريک است.

درحالتی که سطح دوم منطبق بر سطح اول است، خواهیم داشت:

نتیجه ۲. به ازای دو نقطه دلخواه  $P$  و  $Q$  از یک سطح با انحنا گوسی ثابت و دو راستای مماسی دلخواه در  $P$  و  $Q$ ، یک نداشت موضعا "ایزومتريک از سطح بتوی خود وجود دارد که  $P$  را به  $Q$  و راستای مفروض در  $P$  را به راستای مفروض در  $Q$  می‌برد.

تمرین

با انتگرالگیری از معادله (۲۰۲۲)، تحقیق کنید که اولین فرم اساسی یک سطح با انحنا گوسی ثابت مساوی است با  
(T) درحالت  $K = 1/a^2 > 0$ :

$$(3.022) \quad ds^2 = (du^1)^2 + \cos^2 \frac{u^1}{a} (du^2)^2;$$

(ب) در حالت  $K = -1/a^2 < 0$ :

$$(۴.۲۲) \quad ds^2 = (du^1)^2 + \cosh^2 \frac{u^1}{a} (du^2)^2.$$

## ۲.۲۲ سطوح دوار با انحنای ثابت

معادله یک سطح دوار به شکل

$$x = f(u^1) \cos u^2, \quad y = f(u^1) \sin u^2, \quad z = h(u^1)$$

را، که  $f(u^1) \geq 0$  و  $u^1$  پارامتر طبیعی بر نصف النهار است، در نظر می‌گیریم. بنابر نتایج تمرین ۳، ۴.۱۶، داریم

$$[f'(u^1)]^2 + [h'(u^1)]^2 = 1 \quad \text{زیرا } G = f^2, \text{ که در آن } ds^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2.$$

چون مختصات نیمه ژئودزیک‌اند، داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^1 \partial u^1},$$

و چون  $f$  فقط تابع  $u^1$  بوده و  $K$  ثابت است، تابع  $f$  در معادله دیفرانسیل معمولی

$$(۵.۲۲) \quad \frac{d^2 f}{(du^1)^2} = -Kf$$

صدق می‌کند. پس از حل این معادله، می‌توان  $h$  را از معادله

$$(۶.۲۲) \quad (f')^2 + (h')^2 = 1$$

تعیین کرد.

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱.  $K = 0$ . پس جواب (۵.۲۲) عبارت است از  $f = Au^1 + B$ ، که از آنجا

$$h = \pm \sqrt{1 - A^2} u^1 + C,$$

که در آن  $A, B, C$  ثابتهای انتگرالگیری بوده و  $|A| \leq 1$ . نصف النهار یک خط راست است و سطح، که به مقادیر ثابتها بستگی دارد، یک مخروط، یک استوانه، یا یک صفحه است که به محور دوران عمود می‌باشد.

۲.  $K = 1/a^2 > 0$ . انحنای گاوسی مثبت. جواب معادله (۵.۲۲) به شکل

$$f = A \cos \left( \frac{u^1}{a} + \phi_0 \right)$$

است با ثابتهای انتگرالگیری  $A$  و  $\phi_0$ . ثابت  $\phi_0$  لازم نیست، زیرا با تغییر  $u^1$  به وسیله یک ثابت می‌توان آن را حذف کرد. لذا، با فرض  $\phi_0 = 0$  و

$$f = A \cos \frac{u^1}{a}$$

مطالب محدود نخواهند شد.

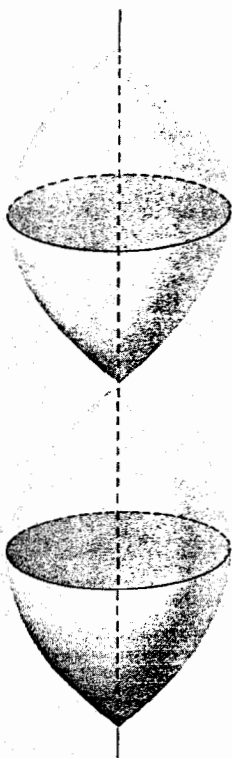
بنابر (۶۰۲۲)، داریم

$$(۷۰۲۲) \quad h = \varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} \sin^2 \frac{u^1}{a}} du^1, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

مجدداً"، سه حالت متمایز داریم.

(۱)  $A = a$ . پس  $f = a \cos(u^1/a)$ ، که در آن  $C$  ثابت انتگرالگیری است. نصف النهار یک نیم‌دایره به شعاع  $a$  و مرکز واقع بر محور دوران است، و سطح یک کره می‌باشد.

(ب)  $A < a$ . در این حالت انتگرال را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد. با اینحال، به آسانی می‌توان شکل سطح را به‌طور کیفی توصیف کرد. انحراف یک نقطه سطح از محور



شکل ۱۰۲۲

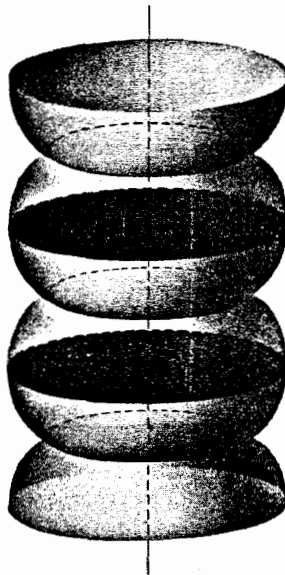
$f$  بین  $0$  و  $a < A$  تغییر می‌کند. به‌ازای  $u^1 = -\frac{1}{2}a\pi + 2na\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) مقدار  $0$  گرفته می‌شود. در این نقاط، به‌آسانی معلوم می‌شود که نصف النهار محور را در زاویه  $\arcsin A/a$  قطع می‌کند. آن قسمت از سطح دوار که نظیر به مقادیر  $u^1$  بین  $-\frac{1}{2}a\pi$  و  $\frac{1}{2}a\pi$  است شکل دوک دارد. این وضع به‌طور متناوب در امتداد محور دوران تکرار می‌شود (شکل ۱۰۲۲).

(پ)  $A > a$ . در این حالت، برای  $h$  با معنی بودن  $h$ ، باید مقادیر پارامتر  $u^1$  را با شرط

$$\left| \frac{A}{a} \sin \frac{u^1}{a} \right| \leq 1$$

محدود کرد. این یعنی  $u^1$  باید به‌بازه  $[-a \arcsin a/A, a \arcsin a/A]$  یا به انتقال آن به اندازه  $2\pi$  مضربی از  $2\pi$  محدود شود.

انحراف  $f$  از محور دوران همیشه کمتر از  $\sqrt{A^2 - a^2}$  و  $r_1 = A \cos \arcsin a/A = \sqrt{A^2 - a^2}$  بیشتر از  $r_2 = A$  نیست. آن قسمت از سطح نظیر تغییر پارامتر  $u^1$  در این بازه که متناوباً "تکرار می‌شود در شکل ۲۰۲۲ نموده شده است. این قسمت به دو دایره عرض



شکل ۲۰۲۲

جغرافیایی به شعاع مینیمم  $r_1 = \sqrt{A^2 - a^2}$  ختم می‌شود. صفحه مماس بر سطح در یک نقطه متغیر، وقتی نقطه به یکی از این دوایر عرض جغرافیایی نزدیک شود، به صفحه بین

دایره، و در نتیجه به موضعی عمود بر محور، نزدیک می‌شود. بین این دو دایره عرض جغرافیایی یک دایره عرض جغرافیایی به شعاع ماکزیم  $r_2 = A$  وجود دارد. صفحات مماس بر سطح در نقاط این دایره عرض جغرافیایی موازی محور می‌باشند.

۳.  $K = -1/a^2 < 0$ : انحنای گاوسی منفی.

دراین حالت، جواب (۵.۲۲) عبارت است از

$$f = C_1 e^{u^1/a} + C_2 e^{-u^1/a}$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  ثابتهای انتگرالگیری‌اند.

مجدداً، سه حالت در نظر می‌گیریم.

(۲)  $C_2 = 0$ . در اینجا، با قرار دادن  $C_1 = c$ ، داریم

$$f = c e^{u^1/a}, \quad h = \varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} e^{2u^1/a}} du^1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

که کرانی برای  $u^1$  را به دست می‌دهد؛ یعنی،

$$\frac{c^2}{a^2} e^{2u^1/a} \leq 1.$$

یا

$$u^1 \leq \frac{a}{2} \ln \frac{a^2}{c^2}.$$

تحت این شرط، می‌توان قرارداد  $(c/a)e^{u^1/a} = \sin \phi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  داریم

$$f = a \sin \phi, \quad h = \varepsilon a \left( \ln \tan \frac{\phi}{2} + \cos \phi \right) + C_3.$$

لذا، نصف النهار نیمی از یک کشاننده به‌ازای  $\varepsilon > 0$  و نیم دیگر به‌ازای  $\varepsilon < 0$  است و سطح پارچه نظیر از کره نما می‌باشد. حالت  $C_1 = 0$  را می‌توان با گذاردن  $-u^1$  به‌جای  $u^1$  به این حالت تحویل کرد.

(ب)  $C_1 C_2 > 0$ ، به‌این معنی که هردوی  $C_1$  و  $C_2$  مثبت‌اند. با قرارداد

$$2\sqrt{C_1 C_2} = A, \quad \ln \frac{C_1}{C_2} = 2b,$$

داریم

$$f = A \cosh \left( \frac{u^1}{a} + b \right).$$

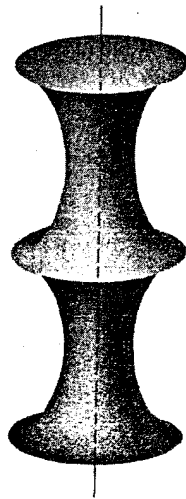
بی‌آنکه خللی به کلیت وارد شود، می‌توان فرض کرد  $b = 0$ ، زیرا هر تغییری از این

ثابت یعنی صرفاً "تغییری از پارامتر  $u^1$  . بنابراین ،

$$f = A \cosh u^1/a, \quad h = \varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} \sinh^2 \frac{u^1}{a}} du^1.$$

مجدداً " در این حالت  $h$  را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد . مقدار ماکزیمم مجاز  $\sinh(u^1/a)$  عبارت است از  $a/A$  . به‌ازای مقدار نظیر از پارامتر ،  $\cosh(u^1/a)$  مقدار ماکزیمم  $\sqrt{A^2 + a^2}/A$  را می‌گیرد .

بنابراین ، انحراف از محور دوران از مقدار ماکزیمم  $\sqrt{A^2 + a^2}$  ( که نظیر به  $u^1 = -a \operatorname{arsinh}(a/A)$  است ) تا مقدار مینیمم  $A$  ( به‌ازای  $u^1 = 0$  ) تغییر می‌کند و مجدداً " به‌ازای  $u^1 = a \operatorname{arsinh}(a/A)$  مقدار ماکزیمم است . با محاسبه‌ای ساده می‌توان امتحان کرد که ، در نقاط دایره‌ء عرض جغرافیایی به شعاع مینیمم ، صفحه‌ء مماس موازی محور است ، حال آنکه صفحات مماس ، وقتی نقطه‌ء تماس به یکی از دایره‌ء عرض جغرافیایی پایانی به شعاع ماکزیمم نزدیک می‌شود ، بر محور عمود می‌باشد . سطوح به دست آمده به‌این طریق را سطوح دوار با انحنای منفی ثابت از نوع هذلولوی می‌نامند و در شکل ۳.۲۲ نموده شده‌اند .



شکل ۳.۲۲

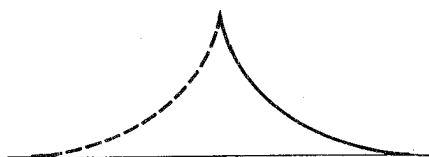
( پ )  $C_1 > 0, C_2 < 0$  . جایگذاری  $A = 2\sqrt{-C_1 C_2}$  ,  $2b = \ln(-C_1/C_2)$  نتیجه می‌دهد که

$$f = A \sinh(u^1/a + b).$$

مجدداً " ، می‌توان فرض کرد  $b = 0$  و به‌دست آورد که

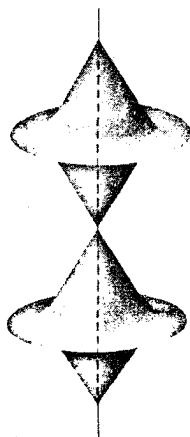
$$f = A \sinh \frac{u^1}{a}, \quad h = \varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} \cosh^2 \frac{u^1}{a}} du^1.$$

مجدداً، انتگرال را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد. این بار بایستی فرض کرد  $A < a$ . قرار می‌دهیم  $A = a \sin \alpha$ . پس  $\cosh^2(u^1/a)$  باید بین ۱ و  $1/\sin^2 \alpha$  باشد. لذا، پارامتر  $u^1$  را به‌بازه  $[0, \operatorname{arcosh}(1/\sin \alpha)]$  محدود می‌کنیم. انحراف  $f$  از محور دوران بین ۰ و  $A \sinh(\operatorname{arcosh}(1/\sin \alpha)) = a \cos \alpha$  تغییر می‌کند. قسمت نظیر از نصف النهار محور را در زاویه‌ای مساوی  $\alpha$  قطع می‌کند. زاویه بین مماس بر نصف النهار و محور دوران، وقتی نقطه تماس به انحراف ماکزیمم نزدیک شود، به زاویه قائمه میل می‌کند. در شکل ۴.۲۲، این قسمت از نصف النهار با خطی پیوسته نموده شده است.



شکل ۴.۲۲

حالت  $C_1 < 0, C_2 > 0$  با جایگذاری  $v^1 = -u^1$  به حالت قبل تحویل می‌شود. در اینجا با همان مقدار ثابت  $A$  قسمتی به دست می‌آید که در شکل ۴.۲۲ با خط منقطع نموده شده است. با تکرار این قسمت‌ها به‌طور متناوب، می‌توان یک سطح دوار نامتناهی ساخت که در شکل ۵.۲۲ نموده شده است، و سطح در برخورد با محور و روی دوایر عرض



شکل ۵.۲۲

جغرافیایی به شعاع ماکزیمم که یالهای بازگشت سطح‌اند نقاط منفرد دارد.

## تمرین

محاسبات لازم برای نتایج بخش پیش را کامل کنید.

## ۲۳ قضیه گاوس-بونه

## ۱۰.۲۳ گسترش یک منحنی از سطح روی صفحه

منحنی  $\mathcal{C}: u^i = u^i(t)$  روی سطح  $\mathcal{F}$  از کلاس  $C_2$  را در نظر می‌گیریم. صفحات مماس بر سطح در نقاط این منحنی یک خانواده<sup>۱</sup> یک پارامتری از صفحات را تشکیل می‌دهند. معادله<sup>۲</sup> این خانواده عبارت است از

$$[R - r(u^1(t), u^2(t))]m(u^1(t), u^2(t)) = 0,$$

که در آن  $t$  پارامتر خانواده است. مشخصهای این خانواده، علاوه بر این، در معادله<sup>۳</sup>

$$\left(-r_i \frac{du^i}{dt}\right)m + (R - r)m_i \frac{du^i}{dt} = 0,$$

یا

$$(R - r)m_i \frac{du^i}{dt} = 0,$$

نیز صدق می‌کنند، زیرا  $r_i m = 0$ . در نتیجه، مشخصها از نقاط منحنی ما می‌گذرند، زیرا معادله به ازای  $R = r$  برقرار است.

پوش این خانواده از صفحات یک سطح گستردنی است که بر سطح مفروض در امتداد منحنی مماس است. این سطح گستردنی را می‌توان به‌طور ایزومتریک بتوی صفحه نگاشت. نقش منحنی  $\mathcal{C}$  تحت این نگاشت یک منحنی مسطح است به نام گسترش منحنی  $\mathcal{C}$  بر صفحه.

قضیه. گسترشهای دو منحنی که در یک ایزومتری دو سطح نظیر بهم هستند همنهشت می‌باشند.

برهان. چون منحنیها در یک ایزومتری سطوح نظیر به یکدیگرند، انحناهای ژئودزیک آنها در نقاط نظیر یکی هستند. اینها، به نوبه خود، (با تقریب علامت) با انحناهای ژئودزیک روی سطوح گستردنی مماسی یکی هستند (ر.ک. تذکر ۱، ص ۲۴۷)، و مالا<sup>۴</sup> با انحناهای مسطح گسترشهای خود یکی می‌باشند. لذا، گسترشها دارای معادلات طبیعی یکسان  $k = k(s)$  اند (یا معادلات فقط در علامت فرق دارند)، که ایجاب می‌کند

که دو منحنی مسطح همنهشت می باشند (با یک حرکت جسم صلب در صفحه اگر علامات یکی باشند، یا، در غیر این صورت، با حرکتی در فضا).

### امثله و تمرین

۱. به ازای یک دایره کوچک روی کره، سطح گسترده‌ی مماسی یک مخروط است. پس از گسترش روی صفحه مجدداً "قوسی از یک دایره به شعاع متفاوت به دست می آید. ثابت کنید شعاع گسترش دایره به عرض جغرافیایی  $\theta = \theta_0$  مساوی  $a \cot \theta_0$  است، که در آن  $a$  شعاع کره است.
۲. ثابت کنید که گسترش یک خط ژئودزیک خطی راست است.

### ۲.۲۳ دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری روی یک سطح

یک میدان برداری مماسی در یک قلمرو واقع بر یک سطح تابعی است که به هر نقطه از قلمرو یک بردار نسبت می دهد که بر سطح در این نقطه مماس است. ما به میدانهای برداری مماسی روی سطح میدانهای برداری روی سطح نیز می گوییم. ما میدانهای برداری تعریف شده در طول یک منحنی واقع بر سطح، به جای در یک قلمرو، را نیز در نظر می گیریم. یک میدان برداری را می توان به طور تحلیلی با تعریف مولفه های بردارها نسبت به مختصات منحنی الخطی به عنوان توابعی از مختصات نقطه

$$a^i = a^i(u^1, u^2) \quad (1.23)$$

تعریف کرد. البته، این نمایش میدان موضعی است و به انتخاب مختصات منحنی الخط بستگی دارد. گوییم یک میدان برداری روی یک سطح از کلاس  $C_n$  از کلاس  $C_k$  ( $k \leq n-1$ ) است اگر توابع (۱.۲۳) از کلاس  $C_k$  باشند. از این به بعد فرض می کنیم تمام میدانهای برداری مورد نظر از کلاس  $C_2$  اند، مگر اینکه خلاف آن گفته شده باشد.

بردارهای میدان (۱.۲۳) عبارتند از

$$a(u^1, u^2) = a^i(u^1, u^2) r_i(u^1, u^2). \quad (2.23)$$

دیفرانسیل این میدان برداری در نقطه  $P$ ، مساوی

$$\begin{aligned} da &= da^i r_i + a^i dr_i = da^i r_i + a^i r_{ij} du^j \\ &= da^k r_k + a^i \Gamma_{ij}^k r_k du^j + a^i b_{ij} m du^j \\ &= (da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j) r_k + b_{ij} a^i du^j m, \end{aligned} \quad (3.23)$$

عموماً "یک بردار مماس نیست. اما فرمول (۳.۲۳) تجزیه این میدان برداری به دو مولفه را به دست می دهد:  $(da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j) r_k$ ، که تصویر دیفرانسیل (۳.۲۳) روی صفحه

مماس است، و مولفه قائم  $b_{ij}a^i du^j m$ .

تصویر دیفرانسیل میدان برداری روی صفحه مماس دیفرانسیل مطلق میدان روی سطح نامیده می شود.

ما مولفه های دیفرانسیل مطلق را دیفرانسیلهای مطلق مولفه های می نامیم، و برای دیفرانسیل مطلق علامت  $D$  را به کار می بریم؛ لذا،  $Da$  دیفرانسیل مطلق میدان برداری  $a$  است، و  $Da^i$  دیفرانسیل مطلق مولفه  $i$  م آن می باشد.

قضیه ۱. دیفرانسیلهای مطلق مولفه های یک میدان برداری روی یک سطح از فرمول

$$(4.23) \quad Da^k = da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j$$

به دست می آیند. لذا، مفهوم دیفرانسیل مطلق یک مفهوم ذاتی می باشد.

برهان. از (۳.۲۳) نتیجه می شود که

$$Da = (da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j) r_k;$$

در نتیجه، مولفه های  $Da^k$  از (۴.۲۳) به دست می آیند. در این فرمول معادلات سطح فقط به شکل علایم کریستوفل ظاهر می شوند. بنابراین، دیفرانسیل مطلق تحت ایزومتربها پایاست، و برهان تمام می باشد.

با استفاده از علامت مشتگیری مطلق، می توان (۳.۲۳) را به شکل

$$(5.23) \quad da = Da + b_{ij} a^i du^j m$$

نوشت.

از تعریف دیفرانسیل مطلق فوراً "خواهیم داشت:

قضیه ۲. هرگاه دو سطح در امتداد یک منحنی برهم مماس باشند، دیفرانسیلهای مطلق روی هر دو سطح در راستای این منحنی از یک میدان برداری مماسی تعریف شده در امتداد منحنی یکی هستند.

بالاخص، دیفرانسیل مطلق یک میدان از بردارهای مماس بر یک سطح مانند  $\mathcal{S}$  که در امتداد منحنی  $\gamma$  روی سطح تعریف شده است مساوی دیفرانسیل مطلق همان میدان است که به عنوان یک میدان از بردارهای مماس بر سطح گستردنی مماس به  $\mathcal{S}$  در امتداد  $\gamma$  گرفته شده است. دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری در صفحه با دیفرانسیل معمولی

یکی است، زیرا  $b_{ij} = 0$ .

با تلفیق همه نتایج این بخش، قضیه زیر به دست می آید.

قضیه ۳. تحت گسترش یک منحنی از یک سطح روی صفحه، دیفرانسیل مطلق در راستای منحنی از یک میدان برداری تعریف شده در امتداد این منحنی به دیفرانسیل معمولی در راستای منحنی گسترش یافته نقش یک میدان برداری مفروض نگاشته می شود.

این مطلب به معنی زیر است: همان نگاشت ایزومتریک سطح گسترده منحنی را به دست می دهد طوری تعمیم یافته است که بردارهای مماس در نقاط منحنی را بتوی بردارها در صفحه می نگارد.

به جای دیفرانسیل مطلق میدان در راستای یک منحنی مانند  $u^i = u^i(t)$ ، می توان از مشتق مطلق نسبت به پارامتر  $t$  استفاده کرد:

$$(6.23) \quad \frac{Da^k}{dt} = \frac{da^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k a^i \frac{du^j}{dt}.$$

امثله و تمرین

۱. مشتق مطلق نسبت به پارامتر طول قوس منحنی  $u^i = u^i(s)$  میدان بردارهای مماس بر این منحنی مساوی است با

$$\frac{Dt^k}{ds} = \frac{dt^k}{ds} + \Gamma_{ij}^k t^i \frac{du^j}{ds},$$

که در آن  $t^i$  ها مولفه های بردار مماس  $t$  نسبت به دستگاه مختصات منحنی الخط است. چون  $t^k = du^k/ds$ ، نیز می توانیم بنویسیم

$$\frac{Dt^k}{ds} = \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}.$$

از مقایسه این فرمول با فرمول بردار انحنا ژئودزیک (۳.۲۱)، معلوم می شود که مشتق مطلق میدان بردارهای مماس یک منحنی نسبت به قوس مساوی بردار انحنا ژئودزیک منحنی

$$\frac{Dt}{ds} = k_g = k_g u$$

است، که در آن  $u$  بردار قائم ژئودزیک منحنی تعریف شده در زیر بخش ۳.۲۱

می‌باشد.

درنتیجه، قدر مطلق انحنای ژئودزیک هر منحنی روی یک سطح مساوی طول مشتق مطلق میدان بردارهای یک‌ه‌مماس بر منحنی نسبت به قوس است.

۲. فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو میدان برداری مماسی باشند که در قلمروی واقع بر سطح یا در طول یک منحنی تعریف شده‌اند. دراین صورت، حاصل ضرب اسکالر  $ab$  تابعی است از نقاط آن قلمرو یا منحنی. پس داریم

$$d(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db. \quad (۷.۲۳)$$

درواقع،

$$d(ab) = (da)b + a(db) = (Da + b_{ij}a^i du^j)m)b + a(Db + b_{ij}b^i du^j)m = Da \cdot b + a \cdot Db,$$

زیرا  $a$  و  $b$  به عنوان بردارهای مماس بر  $m$  متعامدند؛ درنتیجه،  $ma = mb = 0$ .

۳. مشتق مطلق میدان بردارهای قائم ژئودزیک  $u$  به یک منحنی روی سطح نسبت به طول قوس متعامد به  $u$  است، زیرا دیفرانسیل معمولی میدان بردارهای یک‌ه‌مماس  $u$  متعامد به  $u$  است؛ و درنتیجه، بردار  $m$  نیز چنین است. بنابراین، داریم

$$\frac{Du}{ds} = \lambda t,$$

که در آن ضریب  $\lambda$  مساوی است با

$$\lambda = t \frac{Du}{ds}.$$

مشتقگیری مطلق از اتحاد  $tu = 0$  نتیجه می‌دهد که

$$t \frac{Du}{ds} = -u \frac{Dt}{ds}$$

یا  $\lambda = -k_g$ . درنتیجه، برای مشتقگیری مطلق فرمولهایی شبیه فرمولهای فرنه برای صفحه خواهیم داشت:

$$\frac{Dt}{ds} = k_g u, \quad \frac{Du}{ds} = -k_g t.$$

۴. مشتق مطلق در امتداد دایره عرض جغرافیایی  $\theta = \theta_0$  میدان بردارهای یک‌ه‌مماس به نصف النهارات و در جهت افزایش پارامتر  $\theta$  نسبت به  $\phi$  را بیابید.

۵. فرض کنید  $r = p(s)$  یک منحنی در فضا با پارامتری سازی طبیعی بوده و  $n(s)$  و  $b(s)$  به ترتیب بردار یک‌ه‌مماس اصلی و بردار یک‌ه‌مماس قائم دوم باشند. بر سطح

$$r = p(u^2) + u^1 b(u^2)$$

مشتقات مطلق میدان بردارهای یکه مماس به  $u^1$  - خطوط (یعنی، خطوط ثابت  $u^2$ ) را در امتداد منحنیهای مختصات بیابید.

۶. با استفاده از نتایج تمرینات ۳ و ۵، انحناهای ژئودزیک خطوط ثابت  $u^1$  بر سطح تمرین ۵ را بیابید.

### ۳.۲۳ انتقال موازی به مفهوم لوی - سیویتا<sup>۱</sup>

گوئیم یک میدان برداری روی یک سطح تعریف شده در امتداد منحنی  $\mathcal{C}$  به وسیله انتقال موازی یا تغییر مکان موازی در امتداد منحنی به دست آمده است، یا در امتداد منحنی موازی است، اگر دیفرانسیل مطلق میدان در راستای منحنی صفر باشد. به عبارت دیگر، این یعنی دیفرانسیل معمولی در راستای منحنی در هر نقطه از منحنی  $\mathcal{C}$  قائم به سطح است.

این تعریف فوراً "به شرطی لازم و کافی برای توازی یک میدان از بردارهای مماس به سطح مانند  $a(t)$  در امتداد یک منحنی چون  $u^i = u^i(t)$  منجر می شود؛ یعنی،

$$Da^k = da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j = 0,$$

یا

$$(۸.۲۳) \quad da^k = -\Gamma_{ij}^k a^i du^j,$$

یا، بر حسب مشتقات نسبت به پارامتر روی منحنی،

$$(۹.۲۳) \quad \frac{da^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k a^i \frac{du^j}{dt}$$

اگر بردار  $a_0 = a_0^i r_i(u^1(t_0), u^2(t_0))$  در نقطه اولیه  $t_0$  معلوم باشد، میدان برداری حاصل از  $a_0$  در امتداد منحنی به وسیله انتقال موازی در امتداد منحنی توسط معادله دیفرانسیل (۹.۲۳) با توابع مجهول  $a^1, a^2$  و شرایط اولیه  $a^i(t_0) = a_0^i$  معین می شود. قضیه زیر تعبیر توصیفی تری از انتقال موازی به دست می دهد.

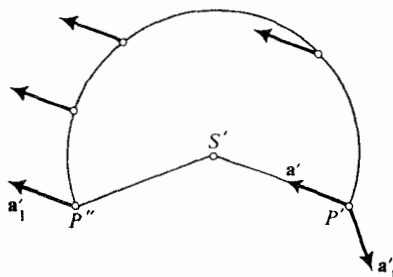
قضیه ۱. یک میدان برداری مماسی روی یک سطح مانند  $a$  که بر منحنی  $\mathcal{C}$  تعریف شده است در امتداد  $\mathcal{C}$  موازی است اگر و فقط اگر این میدان به وسیله نگاشتی که منحنی را روی صفحه گسترش می دهد به میدانی از بردارهای مساوی در صفحه نگاشته شود. مفهوم انتقال موازی در امتداد یک منحنی روی یک سطح یک مفهوم از هندسی ذاتی سطح است.

برهان. همانطور که در بخش قبل دیدیم، این نگاشت دیفرانسیل مطلق میدان را به دیفرانسیل معمولی نقش میدان می‌برد. لذا، طبق تعریف، میدان موازی است ( $Da = 0$ ) اگر و فقط اگر این نقش یک میدان ثابت باشد. چون گسترش یک منحنی یک نگاشت ایزومتریک است، انتقال موازی مفهومی از هندسه ذاتی بوده، و برهان تمام می‌باشد.

در پرتو این قضیه، عمل انتقال یک بردار مماس بر سطح  $\mathcal{F}$  در  $P$  به‌طور موازی در امتداد منحنی  $\mathcal{C}$  روی سطح که از  $P$  می‌گذرد را می‌توان به‌طور هندسی به‌صورت زیر تعریف کرد: سطح گسترده‌ی مماس بر  $\mathcal{F}$  در امتداد منحنی  $\mathcal{C}$  را به‌طور ایزومتریک بتوی صفحه می‌نگاریم، و با این کار گسترش  $\mathcal{C}^*$  از  $\mathcal{C}$  را به‌دست می‌آوریم. این نگاشت نقطه  $^D$  را به نقطه  $P^*$  بر  $\mathcal{C}^*$  و بردار مماس  $a$  را به برداری چون  $a^*$  در صفحه متصل در  $P^*$  می‌نگارد. یک میدان برداری ثابت ( $a^* = a$ ) را در امتداد گسترش  $\mathcal{C}^*$  تعریف کرده و آن را با ایزومتری معکوس بتوی سطح گسترده‌ی به‌طور معکوس می‌نگاریم. با این کار میدانی از بردارهای مماس به سطح گسترده‌ی در نقاط منحنی  $\mathcal{C}$ ، و در نتیجه مماس بر  $\mathcal{F}$ ، به دست می‌آید، که میدان حاصل از انتقال موازی است.

انتقال موازی یک بردار به منحنی وابسته است که در امتداد آن صورت می‌گیرد؛ یعنی، اگر دو نقطه  $P, Q$  با دو قوس متمایز بهم مربوط شده باشند و بردار  $a$  در  $P$  مفروض باشد، انتقال موازی  $a$  به  $Q$  در امتداد دو قوس، در حالت کلی، دو بردار مختلف در  $Q$  به‌دست می‌دهد. همچنین، انتقال موازی یک بردار در امتداد یک منحنی بسته، در حالت کلی، پس از رسیدن به نقطه اولیه، به بردار متفاوتی با بردار اولیه منجر می‌شود. این امر در مثال زیر روشن خواهد شد.

انتقال موازی در امتداد یک دایره عرض جغرافیایی روی کره را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰.۲۳). در نقطه‌ای مانند  $P$  بردار  $a$  را مماس بر نصف النهار اختیار کرده، و



شکل ۱۰.۲۳

نتیجه حاصل از انتقال موازی  $a$  حول دایره عرض جغرافیایی و مراجعت به  $P$  را پیدا می‌کنیم. سطح گستردنی مماسی در این حالت یک مخروط است و بردار  $a$  بر مولد مستقیم الخط قرار دارد. اگر مخروط را در امتداد این مولد بریده و آن را روی صفحه گسترش دهیم، قطاع  $S'P'P''$  از یک دایره را به دست می‌آوریم. نقش  $P$  دو برابر نقش  $P'$  و  $P''$  تکرار می‌شود.  $a'$  نقش  $a$ ، در  $P'$  از خط  $P'S'$  حرکت می‌کند. حال اگر یک میدان ثابت مانند  $a'$  را در امتداد نقش دایره عرض جغرافیایی بسازیم، در  $P''$  برداری مانند  $a'_1$  خواهیم داشت، که در نگاشت ایزومتริก معکوس روی سطح همان نقش  $a_1$  مثل بردار  $a''_1$  در  $P'$  دارد. در نتیجه، پس از یک انتقال موازی حول دایره عرض جغرافیایی بردار  $a$  به صورت یک بردار  $a_1$  باز می‌گردد، که با  $a$  زاویه‌ای مساوی زاویه  $P'S'P''$  در راس گسترش مخروط مماسی می‌سازد.

این بخش را با قضیه زیر به پایان می‌بریم.

**قضیه ۲.** انتقال موازی در امتداد یک منحنی حاصل ضرب اسکالر دو بردار را حفظ می‌کند. در نتیجه، طول یک بردار و زاویه بین بردارها را نیز حفظ خواهد کرد.

برهان. بنابر (۷۰۲۳)، داریم

$$d(ab) = (Da)b + a(Db).$$

بنابراین،  $Da = 0 = Db$  ایجاب می‌کند که  $d(ab) = 0$ ، و برهان تمام است.

#### ۴.۲۳ انتقال موازی و انحناى ژئودزیک

فرض کنیم  $a(s)$  یک میدان از بردارهای یکه مماس بر سطح (جهتدار)  $\mathcal{F}$  موازی در امتداد منحنی  $\mathcal{C}: u^i = u^i(s)$  باشد، که  $s$  پارامتر طبیعی (طول قوس) بر منحنی است. همچنین،  $\alpha(s)$  زاویه جهتدار از بردار  $a(s)$  به بردار مماس  $t$  بر منحنی باشد.

**قضیه.** مشتق زاویه  $\alpha$  نسبت به طول قوس مساوی انحناى ژئودزیک منحنی  $\mathcal{C}$  است:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_g. \quad (10023)$$

برهان. به خاطر قضیه ۲ از زیر بخش قبل، مهم نیست کدام میدان موازی در امتداد  $\mathcal{C}$

گرفته شود. در واقع، از تغییر این میدان به دیگری  $\alpha$  به قدر یک ثابت جمعی تغییر می کند، و آن زاویه ثابت بین دو میدان است، که بر مشتق اثری ندارد. در امتداد منحنی داریم

$$\cos \alpha = a(s)t(s),$$

که از آنجا

$$-\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds}(a(s)t(s)) = \frac{Da}{ds}t + a \frac{Dt}{ds}.$$

اما، بنا به فرض ما که  $a$  در امتداد منحنی موازی است،  $Da/ds = 0$ ، و بنابر نتایج مثال ۲۰.۲۳، ۱ داریم

$$-\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} = k_g a u.$$

این فرمول برای هر میدان  $a$  که در امتداد منحنی موازی است برقرار است. با ثابت گرفتن نقطه دلخواه  $s_0$  از منحنی، می توان میدان  $a$  را طوری گرفت که در نقطه  $s_0$ ،  $a(s_0)u(s_0) = 1$ ،  $\alpha(s_0) = \angle(u, t) = -\pi/2$  زاویه، در این صورت،  $\sin \alpha(s_0) = -1$  و داریم

$$\frac{d\alpha}{ds}(s_0) = k_g(s_0).$$

چون نقطه  $s_0$  دلخواه گرفته شده بود، این معادله به ازای هر  $s$  برقرار است، و برهان تمام می باشد.

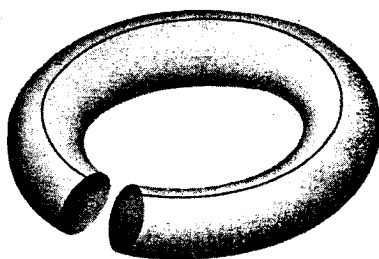
امثلة و تمرین

۱. رابطه (۱۰.۲۳) را با استفاده از گسترش منحنی روی صفحه و فرمول (۵.۹) ثابت کنید.
۲. ثابت کنید یک منحنی بر یک سطح یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر میدان بردارهای مماس در امتداد این منحنی موازی باشد.
۳. ثابت کنید هر منحنی بر یک سطح یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر میدان بردارهای قائم ژئودزیک به این منحنی در امتداد منحنی موازی باشد.

### ۵.۲۳ انتقال موازی در امتداد یک کنتور بسته

یک ناحیه روی یک سطح را همبند ساده گوییم در صورتی که هر منحنی بسته یا یک منحنی که دو نقطه از کرانه آن را بهم وصل می کند قلمرو را به دو یا چند قسمت از هم جدا تقسیم

کند. مثلاً، یک قرص مستدیر همبند ساده است. همچنین، سطح یک کره، ولی سطح یک چنبره این طور نیست. درواقع، هر نصف النهار از چنبره یک منحنی بسته است که چنبره را قسمت نمی‌کند، زیرا اگر چنبره را در امتداد نصف النهار آن برش دهیم، باز هم همبند می‌باشد (شکل ۲۰.۲۳)



شکل ۲۰.۲۳

یک قلمرو همبند ساده در نظر می‌گیریم با کنتور  $\mathcal{C}$  که قطعه قطعه از کلاس  $C_1$  است و یک میدان از کلاس  $C_2$  از بردارهای یکه مماس به سطح مانند  $a(u^1, u^2)$  در این قلمرو. توجه کنید که هر قلمرو بر یک سطح چنین میدان را نمی‌پذیرد؛ مثلاً، هیچ میدان پیوسته‌ای از بردارهای یکه مماس بر تمام یک کره نیست. با اینحال، چنین میدانی بر یک نیمکره یا حتی بر یک کره سوراخ شده حاصل از حذف یک نقطه وجود دارد. برای ساختن این میدان در این حالت، بردارهای یکه مماس بر  $u$  - خطوط در مثال ۹ از ۳۰.۱۱ را اختیار می‌کنیم. در نتیجه، ضرورت وجود میدان  $a$  محدودیتی برای قلمرو مورد نظربه بار می‌آورد. اگر قلمرو تماماً در یک همسایگی که یک دستگاه منتظم از مختصات منحنی الخط می‌پذیرد واقع باشد، یک میدان از این نوع در این قلمرو وجود خواهد داشت؛ مثلاً، میدان بردارهای یکه مماس بر  $u^1$  - خطوط.

فرض کنیم  $p_0$  بردار مفروض دلخواهی در یکی از نقاط کنتور بوده و  $p$  بردار حاصل از  $p_0$  با انتقال موازی در امتداد منحنی باشد. پس از بازگشت به نقطه شروع، بردار یکه‌ای به دست می‌آوریم که، در حالت کلی، با  $p_0$  متمایز است. زاویه جهتدار  $\Delta\phi$  که بردار  $p$  در اثر انتقال موازی حول کنتور به قدر آن گشته است را حساب می‌کنیم. واضح است که، در پرتو قضیه ۲ از ۳۰.۲۳، این زاویه به انتخاب بردار اولیه  $p_0$  بستگی ندارد. درواقع، اگر این بردار را با  $q_0$  عوض کرده و میدان برداری دیگر  $q$  را در امتداد کنتور به راه اندازیم، زاویه  $\angle(p, q)$  ثابت خواهد ماند؛ لذا، این تغییر بر  $\Delta\phi$  اثری نخواهد داشت.

قضیه. فرض کنیم  $\mathcal{C}$  یک کنتور قطعه قطعه هموار از قلمرو همبند ساده  $\Omega$  روی یک سطح از کلاس  $C_3$  باشد، به طوری که بست  $\Omega$  مجموعه بازی مرکب از فقط نقاط منتظم بوده و یک میدان از کلاس  $C_2$  از بردارهای یکجه مماس مانند  $a(u^1, u^2)$  را بپذیرد. در این صورت، زاویه دوران یک بردار حاصل از انتقال موازی آن حول کنتور مساوی است با

$$(11.23) \quad \Delta\phi = \iint_{\Omega} K \sqrt{g} du^1 du^2 = \iint_{\Omega} K dS,$$

که در آن  $K$  انحنای گاوسی سطح بوده و  $dS$  عنصر مساحت می باشد.

برهان. روی کنتور پارامترطبیعی اختیار می کنیم، به طوری که جهت کنتور بر جهت القایی حاصل از جهت سطح منطبق باشد (یعنی، قائم ژئودزیک  $u$  به کنتور در جهت درون قلمرو باشد یا، به عبارت دیگر و به طور شهودی تر، قلمرو برای ناظری که در امتداد کنتور در جهت مثبت حرکت کرده و در طرف مثبت سطح می ماند، در طرف چپ باقی بماند). فرض کنیم  $a(u^1, u^2)$  میدان برداری باشد که وجودش محرز است. همچنین،  $\phi$  زاویه جهتدار از  $a$  به  $p$  در هر نقطه کنتور باشد. در این صورت،  $\phi$  تابعی از یک نقطه بر کنتور می باشد. میدان برداری حاصل از  $a(u^1, u^2)$  با چرخش همه بردارها به قدر زاویه قائمه و درجهت مثبت را با  $b(u^1, u^2)$  نشان می دهیم. این نیز یک میدان از کلاس  $C_2$  است، زیرا  $b = m \times a$ .

برای میدان موازی  $p(s)$  در امتداد کنتور، داریم

$$\cos \phi = ap,$$

$$-\sin \phi d\phi = d(ap) = (Da)p,$$

زیرا  $Dp = 0$ .

نقطه دلخواه  $s_0$  را بر کنتور ثابت گرفته، و فرض می کنیم میدان موازی طوری باشد که در نقطه شروع  $p(s_0) = b(u^1(s_0), u^2(s_0))$ . در این صورت، در  $s_0$  داریم

$$\phi(s_0) = \angle(a, b) = \frac{1}{2}\pi, \quad \sin \phi(s_0) = 1;$$

در نتیجه، در  $s_0$

$$d\phi = -(Da)b.$$

چون  $s_0$  کاملاً دلخواه است، این رابطه در تمام طول کنتور برقرار است. توجه کنید که

$$da = Da + b_i a^i du^i m \quad \text{و} \quad bm = 0, \quad \text{زیرا } b \text{ مماسی بر سطح است، پس داریم}$$

$$d\phi = -b(da)$$

و، در نتیجه،

$$\Delta\phi = - \oint b \, da,$$

که در آن  $\oint$  انتگرال خط در امتداد کنتور می‌باشد. این را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$(۱۲.۲۳) \quad \Delta\phi = - \oint a_1 b \, du^1 + a_2 b \, du^2.$$

اما توابع  $a_1 b$  و  $a_2 b$  در تمام قلمرو بسته  $\Omega$  و همسایگی آن تعریف شده‌اند. با اعمال فرمول مشهور گرین<sup>۱</sup>، یعنی

$$\oint (M \, dx + N \, dy) = \int_{\Omega} \int \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy,$$

براین انتگرال، به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= - \int_{\Omega} \int \left( \frac{\partial(a_2 b)}{\partial u^1} - \frac{\partial(a_1 b)}{\partial u^2} \right) du^1 \, du^2 \\ &= - \int_{\Omega} \int (a_2 b_1 - a_1 b_2) du^1 \, du^2 = \int_{\Omega} \int (a_1 b_2 - a_2 b_1) du^1 \, du^2, \\ &\quad \cdot \quad a_{21} b - a_{12} b = 0 \text{ زیرا} \end{aligned}$$

حال برای انتگرال چند تبدیل اعمال می‌کنیم. ابتدا، چون  $a, b, m$  یک سه‌تایی جهتدار متعامد یک‌به‌یک با جهت مثبت از بردارها را تشکیل می‌دهد، داریم

$$m = a \times b, \quad ab = am = bm = 0, \quad a^2 = b^2 = m^2 = 1, \quad \text{و، در نتیجه،}$$

$$aa_i = bb_i = mm_i = 0.$$

با استفاده از نمادهای اختصاری

$$a_i b = -ab_i = \alpha_i, \quad a_i m = -am_i = \beta_i, \quad b_i m = -bm_i = \gamma_i,$$

می‌توان نیز نوشت

$$a_i = \alpha_i b + \beta_i m, \quad b_i = -\alpha_i a + \gamma_i m, \quad m_i = -\beta_i a - \gamma_i b,$$

که از آنجا

$$\cdot \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \quad \text{و} \quad a_i b_j = \beta_i \gamma_j$$

از سوی دیگر، داریم

$$m_1 \times m_2 = (-\beta_1 a - \gamma_1 b) \times (-\beta_2 a - \gamma_2 b)$$

$$= \beta_1 \gamma_2 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \beta_2 \gamma_1 (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \mathbf{m};$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 = (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) \mathbf{m}.$$

بنابر نتایج زیر بخش ۴۰۱۷، داریم

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = K \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = K \sqrt{g} \mathbf{m},$$

و

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 = K \sqrt{g}.$$

بنابراین، (۱۲.۲۳) شکل

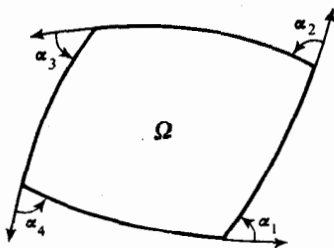
$$\Delta \phi = \int_{\Omega} \int K \sqrt{g} \, du^1 \, du^2$$

را به خود می‌گیرد، که برهان را تمام خواهد کرد.

توجه کنید که فرض اینکه قلمرو نقطه منفرد ندارد لازم است. در مثال مخروط و یک کنتور در اطراف راس مخروط، قبلاً دیدیم که، اگرچه متحدان  $K = 0$  جز به ازای راس، که در آن تعریف نشده است،  $\Delta \phi \neq 0$ .

### ۶.۲۳ قضیه گاوس-بونه

ناحیه  $\Omega$  را بر یک سطح از کلاس  $C_3$  در نظر می‌گیریم که به یک کنتور قطعه قطعه از کلاس  $C_2$  محدود شده است (شکل ۳۰.۲۳)، و فرض می‌کنیم جهت کنتور با جهت سطح سازگار



شکل ۳۰.۲۳

باشد؛ یعنی، قائم ژئودزیک در جهت درون قلمرو باشد. فرض کنیم در هر نقطه ناپیوستگی (تعدادی متناهی) از مماس بر کنتور (برای اختصار، آنها را  $\mathbf{r}_i$  می‌نامیم)، یک مماس از چپ و یک مماس از راست وجود داشته باشد. بالاخره، زوایای جهته‌دار مماس از چپ با مماس از راست در رؤس متوالی را با  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  نشان می‌دهیم.

قضیه (گاوس-بونه). هرگاه کنتور  $\mathcal{C}$  قطعه قطعه از کلاس  $C_2$  بوده و گرانه قلمرو همبند ساده  $\Omega$  روی سطح  $\mathcal{F}$  از کلاس  $C_3$  باشد که میدانی از کلاس  $C_2$  از بردارهای یکه مماس می‌پذیرد، آنگاه

$$(13.23) \quad \int_{\Omega} \int K \, dS + \oint k_g \, ds + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

برهان. برهان ترکیبی از نتایج دو بخش قبل است. فرض کنیم  $t$  بردار مماس بر کنتور باشد.  $t$  تابعی از پارامتر قوس کنتور است که همه‌جا بر کنتور جز در تعدادی متناهی راس تعریف شده است. همچنین است تابع اسکالر  $\psi$ ، مساوی زاویه از  $a$  به  $t$  در همان نقطه کنتور. وقتی نقطه در امتداد کنتور حرکت کند، زاویه  $\psi$  تغییر می‌کند. مقدارش، وقتی نقطه از راس  $i$  م‌بگذرد، به قدر  $\alpha_i$  جهش می‌نماید. بعد از یک دور کامل حول کنتور، نمو این زاویه  $2\pi$  خواهد بود:

$$(14.23) \quad \Delta\psi = 2\pi.$$

با آنکه این امر تا حدی شهوداً واضح است، اثبات دقیق آن از حوصله این کتاب خارج می‌باشد. حال میدان برداری کمکی  $p$  حاصل از انتقال موازی حول کنتور را اختیار می‌کنیم؛ داریم

$$\angle(a, t) = \angle(a, p) + \angle(p, t)$$

یا، با استفاده از نمادگذاری این بخش و بخش پیش،  $\phi = \angle(a, p)$ ,  $\alpha = \angle(p, t)$ ,  $\psi = \phi + \alpha$ . در نتیجه،

$$\Delta\psi = \Delta\phi + \Delta\alpha.$$

بنابر قضیه ۴.۲۳، مجموع نموهای زاویه  $\alpha$  در امتداد قطعات هموار کنتور برابر است با  $\oint k_g \, ds$ . هنوز جهشهایی از زاویه در رئوس وجود دارند که جمع کل آنها  $\sum \alpha_i$  است. بنابراین،

$$\Delta\alpha = \oint k_g \, ds + \sum \alpha_i.$$

بنابر (۱۱.۲۳)، داریم

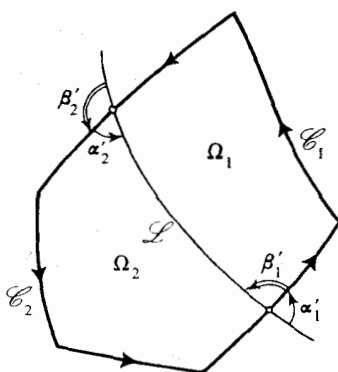
$$\Delta\phi = \int_{\Omega} \int K \, dS.$$

از تلفیق همه اینها با (۱۴.۲۳)، به دست می‌آوریم

$$\int_{\Omega} \int K \, dS + \oint k_g \, ds + \sum \alpha_i = 2\pi,$$

که برهان را تمام خواهد کرد.

با آنکه قضیه را با فرض محدود کننده‌ای در باب قلمرو  $\Omega$  ثابت کردیم، این قضیه برای قلمروهای همبند ساده از کلاس وسیعتر معتبر است. در واقع، اگر قلمرو  $\Omega$  را بتوان به تعدادی متناسقی قلمرو کنار هم تجزیه کرد به طوری که مفروضات قضیه در هر قلمرو جزئی جداگانه برقرار باشد، قضیه برای تمام قلمرو برقرار است، حتی اگر تمام قلمرو میدانی از بردارهای یکه را نپذیرد. برای آنکه از طرز تعمیم نتایج ایده‌ای داشته باشیم، حالتی را در نظر می‌گیریم که قلمرو  $\Omega$  به دو قلمرو  $\Omega_1, \Omega_2$  تجزیه شده است (شکل ۴.۲۳). فرض کنیم  $\mathcal{C}$  کنتور  $\Omega$  بوده، و  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  به ترتیب اجزای این کنتور در  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$



شکل ۴.۲۳

باشند، و  $\mathcal{L}$  منحنی جداکن  $\Omega_1$  از  $\Omega_2$  باشد. زوایا در رؤس کنتور  $\Omega_1$  را با  $\alpha'_j$  و زوایا در رؤس کنتور  $\Omega_2$  را با  $\beta'_k$  نشان می‌دهیم. برای قلمروهای  $\Omega_1, \Omega_2$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int K dS + \oint_1 k_g ds + \sum \alpha'_j &= 2\pi, \\ \int_{\Omega_2} \int K dS + \oint_2 k_g ds + \sum \beta'_j &= 2\pi, \end{aligned} \quad (۱۵.۲۳)$$

که در آنها  $f_1$  و  $f_2$  انتگرالهای خط در امتداد دو کنتوراند. با یک جهت مناسب بر  $\mathcal{L}$ ، داریم

$$\oint_1 k_g ds = \int_{\mathcal{C}_1} k_g ds + \int_{\mathcal{L}} k_g ds,$$

$$\oint_2 k_g ds = \int_{\mathcal{C}_2} k_g ds - \int_{\mathcal{L}} k_g ds.$$

لذا،

$$\oint_1 k_g ds + \oint_2 k_g ds = \oint_{\mathcal{C}} k_g ds.$$

اگر زوایای کنتور قلمرو  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  را با  $\alpha_i$  نشان دهیم، به آسانی می بینیم که مجموع تمام زوایای  $\alpha'_j$  و  $\beta'_k$  مساوی مجموع تمام  $\alpha_i$  ها بعلاوه چهار زاویه اضافی روی کنتورها (  $\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2$  در شکل) در رئوس جدید است که در جاهای اتصال  $\mathcal{L}$  به کنتور قدیم ایجاد می شوند. مجموع این چهار زاویه مساوی  $2\pi$  است، زیرا

$$\alpha'_1 + \beta'_1 = \alpha'_2 + \beta'_2 = \pi.$$

بنابراین،

$$\sum \alpha'_j + \sum \beta'_j = \sum \alpha_i + 2\pi.$$

حال، با افزودن دو معادله (۱۵.۲۳) بهم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int K dS + \int_{\Omega_2} \int K dS + \int_{\mathcal{C}_1} k_g ds + \int_{\mathcal{L}} k_g ds + \int_{\mathcal{C}_2} k_g ds - \int_{\mathcal{L}} k_g ds \\ + \sum \alpha'_j + \sum \beta'_j = 4\pi, \end{aligned}$$

یا

$$\int_{\Omega} \int K dS + \oint_{\mathcal{C}} k_g ds + \sum \alpha_i + 2\pi = 4\pi,$$

و، بالاخره،

$$\int_{\Omega} \int K dS + \oint_{\mathcal{C}} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

فرمول گاوس - بونه در حالات خاص زیر ساده تر خواهد شد.

۱. اگر کنتور هموار از کلاس  $C_2$  باشد،  $\sum \alpha_i = 0$  و داریم

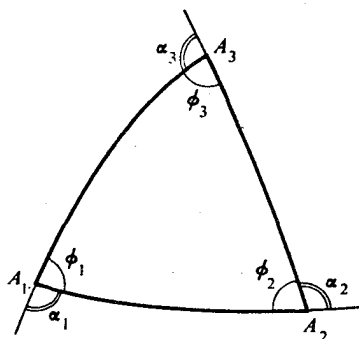
$$\int_{\Omega} \int K dS + \oint_{\mathcal{C}} k_g ds = 2\pi.$$

۲. اگر قلمرو به وسیله یک چند ضلعی ژئودزیک کراندار باشد، یعنی قطعات هموار کنتور

خطوط ژئودزیک باشند،  $\oint k_g ds = 0$  و

$$\int_{\Omega} \int K dS + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

اگر زوایای درونی یک  $n$  ضلعی ژئودزیک (شکل ۵.۲۳) را با  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$



شکل ۵.۲۳

نشان دهیم، داریم  $\alpha_i = \pi - \phi_i$  و

$$\int_{\Omega} \int K dS + \sum_{i=1}^n (\pi - \phi_i) = 2\pi,$$

$$\int_{\Omega} \int K dS + n\pi - \sum_{i=1}^n \phi_i = 2\pi,$$

که از آنجا

$$(۱۶.۲۳) \quad \int_{\Omega} \int K dS = \sum_{i=1}^n \phi_i - \pi(n-2).$$

بخصوص، برای یک مثلث ژئودزیک با زوایای درونی  $\alpha, \beta, \gamma$ ، داریم

$$(۱۷.۲۳) \quad \alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_{\Omega} \int K dS.$$

تفاضل  $\Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$  بین  $\pi$  و مجموع زوایای درونی مثلث را نقص زاویه مثلث می‌نامند. این کمیت در صفحه اقلیدسی برای هر مثلث صفر است. بر یک سطح با انحنای گاوسی منفی این نقص مثبت، و بر یک سطح با انحنای گاوسی مثبت نقص منفی خواهد بود.

بر یک سطح با انحنای ثابت، نقص زاویه با مساحت مثلث ژئودزیک  $\Omega$  متناسب است. درواقع،

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_{\Omega} \int K dS = K \int_{\Omega} \int dS = K(\text{مساحت } \Omega).$$

در حالت خاص کره به شعاع  $a$ ، داریم  $K = a^{-2}$  و نتیجه می‌گیریم که

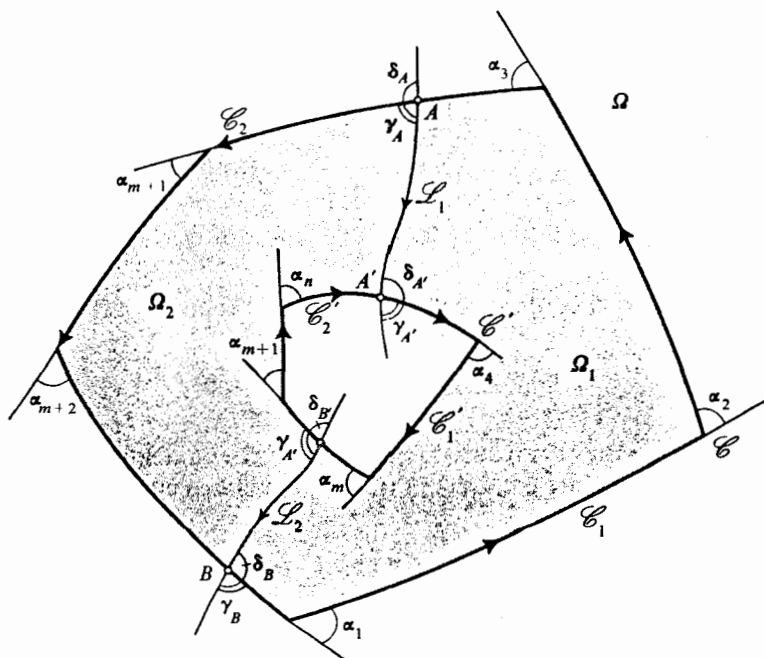
$$(۱۸.۲۳) \quad \text{مساحت } \Omega = a^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = -a^2 \Delta.$$

### تمرین

۱. ثابت کنید بر یک سطح با انحنای گاوسی منفی، هیچ خط ژئودزیک بسته هموار بدون خود قطعی وجود ندارد.
۲. ثابت کنید دو خط ژئودزیک بسته هموار مختلف در یک ناحیه همبند ساده روی یک سطح با انحنای گاوسی مثبت باید یکدیگر را قطع کنند.

### ۷.۲۳ فرمول گاوس-بونه تعمیم یافته

اگر قلمرو  $\Omega$  همبند ساده نباشد، کرانه آن یک کنتور ساده نیست ولی از چند منحنی بسته تشکیل شده است. بر هر مولفه کرانه جهتیتی به وسیله جهت خود قلمرو القامی شود. ابتدا قلمرو طوق مانند  $\Omega$  را در نظر می‌گیریم که کرانه‌اش از دو منحنی  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  تشکیل شده است (شکل ۶.۲۳). با دو منحنی هموار  $\mathcal{L}_1$  و  $\mathcal{L}_2$  که هریک نقطه‌ای از  $\mathcal{C}$  (به ترتیب  $A$  و  $B$ ) را به نقطه‌ای از  $\mathcal{C}'$  ( $A'$  و  $B'$ ) وصل می‌کنند، می‌توان این طوق را به دو قلمرو همبند ساده کنار هم  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  تقسیم کرد.



شکل ۶.۲۳

آن قسمت از  $\mathcal{C}$  را که به کرانه  $\Omega_1$  تعلق دارد با  $\mathcal{C}_1$ ، و قسمت باقیمانده در کرانه

$\Omega_2$  را با  $\mathcal{C}_2$  نشان می‌دهیم و، به همین ترتیب، قسمتهای  $\mathcal{C}'$  را با  $\mathcal{C}'_1$  و  $\mathcal{C}'_2$  نشان می‌دهیم. کرانه  $\Omega_1$  از  $\mathcal{C}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{C}'_1, \mathcal{L}_2$  و کرانه  $\Omega_2$  از  $\mathcal{C}_2, -\mathcal{L}_1, \mathcal{C}'_2, -\mathcal{L}_2$  تشکیل شده است، که در آنها  $\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_i$  همان  $\mathcal{L}_i$  با جهت مخالف است. همچنین، زوایای منحنیهایی جهتدار در نقاط  $\mathcal{C}_1$  و  $\mathcal{C}'_1$  را با  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ، و این زوایا در نقاط  $\mathcal{C}_2$  و  $\mathcal{C}'_2$  را با  $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$  نمایش می‌دهیم. بی آنکه به کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که نقاط  $A, A', B, B'$  آن نقاطی از  $\mathcal{C}$  یا  $\mathcal{C}'$  اند که در آنها منحنی نظیر هموار است. اما این نقاط رئوس کنشورهای دو ناحیه جزئی  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  اند. پس کنشور  $\Omega_1$  دارای زوایای  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  و چهار زاویه اضافی  $\gamma_A, \gamma_{A'}, \gamma_B, \gamma_{B'}$  در  $A, A', B, B'$ ، و کنشور  $\Omega_2$  دارای زوایای  $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$  و زوایای اضافی  $\delta_A, \delta_{A'}, \delta_B, \delta_{B'}$  در آن نقاط می‌باشد. توجه کنید که  $\gamma_A + \delta_A = \gamma_{A'} + \delta_{A'} = \gamma_B + \delta_B = \gamma_{B'} + \delta_{B'} = \pi$  در نتیجه، مجموع ۸ زاویه اضافی مساوی  $4\pi$  می‌باشد. حال، با اعمال فرمول گاوس - بونه بر هر قلمرو همبند ساده جداگانه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int K dS + \int_{\mathcal{C}_1} k_g ds + \int_{\mathcal{L}_1} k_g ds + \int_{\mathcal{C}'_1} k_g ds + \int_{\mathcal{L}_2} k_g ds + \sum_i^m \alpha_i \\ + \gamma_A + \gamma_{A'} + \gamma_B + \gamma_{B'} = 2\pi, \\ \int_{\Omega_2} \int K dS + \int_{\mathcal{C}_2} k_g ds - \int_{\mathcal{L}_1} k_g ds + \int_{\mathcal{C}'_2} k_g ds - \int_{\mathcal{L}_2} k_g ds + \sum_{m+1}^n \alpha_i \\ + \delta_A + \delta_{A'} + \delta_B + \delta_{B'} = 2\pi. \end{aligned}$$

با افزودن این دو فرمول بهم، به دست می‌آوریم که

$$\int_{\Omega} \int K dS + \int_{\mathcal{C}} k_g ds + \int_{\mathcal{C}'} k_g ds + \sum_i^n \alpha_i + 4\pi = 4\pi.$$

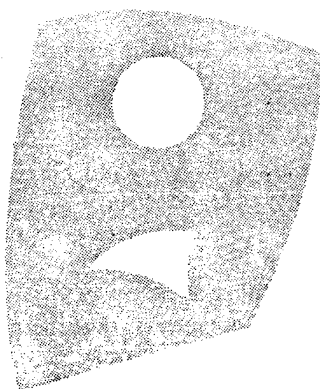
چون  $\int_{\mathcal{C}} k_g ds + \int_{\mathcal{C}'} k_g ds$  انتگرالی روی تمام کرانه  $\partial\Omega$  از  $\Omega$  است، بالاخره خواهیم داشت

$$(۱۹.۲۳) \quad \int_{\Omega} \int K dS + \int_{\partial\Omega} k_g ds + \sum_i^n \alpha_i = 0.$$

اثبات اینکه اگر قلمرو  $\Omega$  (شکل ۷.۲۳) دو حفره داشته و کرانه‌اش از سه منحنی بسته از هم جدا تشکیل شده باشد،

$$\int_{\Omega} \int K dS + \int_{\partial\Omega} k_g ds + \sum_i^n \alpha_i = -2\pi$$

به خواننده محول می‌شود. در حالت کلی، اگر قلمرو  $\Omega$  دارای  $n$  حفره بوده یا کرانه‌اش



شکل ۷.۲۳

$n + 1$  مولفه داشته باشد، خواهیم داشت

$$(۲۰.۲۳) \quad \int_{\Omega} \int K dS + \int_{\partial\Omega} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi(1 - n).$$

### ۸.۲۳ انتگرال انحنای

به ازای قلمرو  $\Omega$  بر یک سطح (در حالت خاص، تمام سطح)، انتگرال

$$\int_{\Omega} \int K dS = \int_{\Omega} \int K \sqrt{g} du^1 du^2$$

را انتگرال انحنای ناحیه  $\Omega$  می نامیم.

با استفاده از فرمول گاوس-بونه، انتگرال انحنای چند سطح بسته را حساب می کنیم.

۱. کره. برای یافتن انتگرال انحنای کره، با استفاده از یک منحنی هموار بسته مانند

$\mathcal{C}$ ، آن را به دو قلمرو همبند ساده  $\Omega_1, \Omega_2$  تجزیه می کنیم. این منحنی کرانه هر دو

قلمرو است ولی با جهت های مخالف. داریم

$$\int_{\Omega_1} \int K dS + \int_{\mathcal{C}} k_g ds = 2\pi,$$

$$\int_{\Omega_2} \int K dS - \int_{\mathcal{C}} k_g ds = 2\pi.$$

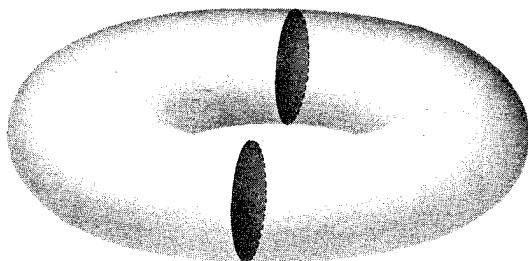
از اینرو، برای انتگرال انحنای تمام کره داریم

$$\int_{\Omega} \int K dS = 4\pi.$$

یعنی، انتگرال انحنای کره مساوی  $4\pi$  است.

واضح است که ما در اینجا، جزا از اینکه یک منحنی بسته کره را به دو قلمرو همبند ساده تجزیه می‌کند، از خواص دیگر کره استفاده نکردیم. اما این امر برای تمام سطوح بسته‌ای که با کره همانریخت (معادل توپولوژیک) هستند درست است. بنابراین، همه آنها دارای انحنای فراگیر  $4\pi$  اند، مشروط بر اینکه در شرایط انتظامی که وجود انحنای گاوسی را تضمین می‌کنند صدق نمایند.

۲. چنبره. چنبره معادل توپولوژیک کره نیست. چنبره را می‌توان با استفاده از دو منحنی بسته هموار به دو قلمرو تجزیه کرد (شکل ۸.۲۳). این قلمروها همبند ساده



شکل ۸.۲۳

نبوده، بلکه طوق مانند هستند. دو منحنی با هم کرانه مشترک دو ناحیه را تشکیل می‌دهند، ولی جهت‌های القایی کرانه‌های دو قلمرو مخالف یکدیگر می‌باشند. با استفاده از فرمول (۱۱.۲۳)، داریم

$$\int_{\Omega_1} \int K dS + \int_{\partial\Omega_1} k_g ds = 0,$$

$$\int_{\Omega_2} \int K dS + \int_{\partial\Omega_2} k_g ds = 0.$$

چون  $\int_{\partial\Omega_1} = -\int_{\partial\Omega_2}$ ، برای تمام چنبره خواهیم داشت

$$\int \int K dS = 0.$$

انتگرال انحنای چنبره مساوی ۰ است. مجدداً، این امر برای هر سطح همانریخت با چنبره برقرار خواهد ماند.

برای تعمیم این نتایج به سطوح بسته دیگر، باید پایاهای توپولوژیکی، به نام مشخص

اولر - پوانکاره<sup>۲</sup> سطح، را در نظر گرفت.

### ۹.۲۳ مشخص اولر - پوانکاره

یک سطح بسته جهت پذیرا به تعدادی متناهی قلمرو همبند ساده کنار هم طوری تجزیه می‌کنیم که کرانه‌های آنها چند ضلعیهایی منحنی الخط بوده و بستهای سه قلمرو یا بیشتر فقط بتوانند در یک راس چند ضلعیها مشترک باشند. بخشی از کرانه که دو راس را بهم وصل کرده و شامل راس دیگری نباشد یک ضلع نامیده می‌شود. تعداد رئوس را با  $v$ ، تعداد اضلاع را با  $e$ ، و تعداد قلمروها را با  $f$  نشان می‌دهیم. در این صورت، عدد صحیح

$$\chi = v - e + f$$

مشخص اولر - پوانکاره سطح نامیده می‌شود.

قضیه. انتگرال انحنا<sup>۳</sup> یک سطح جهت پذیر بسته از کلاس  $C_3$  با مشخص اولر - پوانکاره<sup>۴</sup>  $\chi$  برابر است با  $2\pi\chi$ .

برهان. تجزیه‌ای از سطح به صورتی که در تعریف  $\chi$  توصیف شد را در نظر می‌گیریم. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، فرض می‌کنیم همه اضلاع خطوط ژئودزیک باشند؛ لذا، قسمت  $\oint k_g ds$  فرمول گاوس - بونه مساوی صفر است و می‌تواند حذف شود. بعلاوه، کنتورهای قلمروهای خاص می‌توانند فقط در رئوس تجزیه زاویه داشته باشند. مجموع زوایای درونی در راس  $A_i$  تمام چند ضلعیها با این راس مساوی  $2\pi$  است. تعداد چند ضلعیها با این راس مساوی تعداد اضلاع  $e_i$  مرسوم از  $A_i$  است. چون زاویه برونی چند ضلعی در  $A_i$  (این زاویه‌ای است که در فرمول گاوس - بونه می‌آید) مساوی  $\pi$  منهای زاویه درونی است، مجموع زوایای برونی همه چند ضلعیها در  $A_i$  مساوی  $(e_i - 2)\pi = e_i\pi - 2\pi$  می‌باشد. مجموع همه زوایای برونی چند ضلعیها در تمام رئوس مساوی است با

$$\sum_{i=1}^v (e_i - 2)\pi = (2e - 2v)\pi = 2\pi(e - v),$$

چونکه  $\sum_{i=1}^v e_i = 2e$ ، زیرا هر ضلع در مجموع دوبار حساب می‌شود - به‌ازای هر نقطه انتهایی‌اش یکبار.

در نتیجه، اگر فرمول گاوس - بونه را برای هر چند ضلعی جداگانه بنویسیم و بعد مجموع آنها را بگیریم، خواهیم داشت

$$\iint K dS + 2\pi(e - v) = f \cdot 2\pi,$$

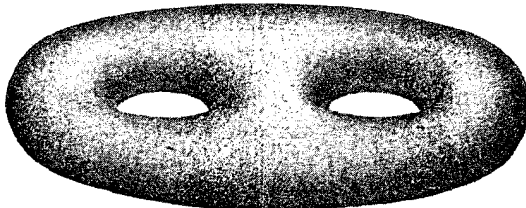
که از آنجا

$$\iint K \, dS = 2\pi(f - e + v) = 2\pi\chi,$$

و برهان تمام می شود.

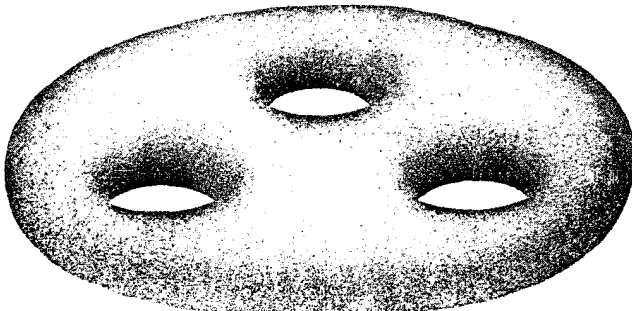
چون انتگرال  $\iint K \, ds$  به تجزیه خاصی از سطح به چند ضلعینا بستگی ندارد، این استقلال مشخص اویلر - پوانکاره را از تجزیه سطح به چند ضلعینا برای سطوح از کلاس  $C_3$  ثابت خواهد کرد.

در نتیجه، مشخص اویلر - پوانکاره کره 2، از آن چنبره 0، و از آن چنبره بادو حفره (شکل ۹.۲۳) -2 است. عدد  $1 - \chi/2$  جنس سطح نامیده می شود. لذا، کره سطحی



شکل ۹.۲۳

با جنس 0، چنبره با جنس 1، چنبره با دو حفره با جنس 2، چنبره با سه حفره (شکل ۱۰.۲۳) با جنس 3 است، و غیره.



شکل ۱۰.۲۳

★ ۲۴ مشتقگیری مطلق در چند گونا‌های ریمانی

۱۰.۲۴ دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری و یک میدان تانسوری

همانطور که در ۶۰.۱۹ دیدیم، می توان علائم کریستوفل  $\Gamma_{ij}^k$  را در یک چندگونای ریمانی

تعریف کرد. این کار به ما اجازه تعریف دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری و میدانهای تانسوری را خواهد کرد. دیفرانسیل مطلق میدان برداری به وسیله

$$Da^k = da^k + \Gamma_{rs}^k du^r du^s \quad (1.24)$$

برحسب مختصات موضعی تعریف می شود، که در آن  $a^k$  ها مولفه های میدان برداری می باشند. برای توجیه این تعریف، باید ثابت کنیم که مولفه های  $Da^k$ ، وقتی مختصات موضعی تغییر کنند، از قانون تبدیل بردارها تبعیت می کنند.

مشتقگیری مطلق را می توان به طرز منحصر بفرد به میدانهای تانسوری از نوع دلخواه طوری تعمیم داد که شرایط زیر برقرار شوند:

۱. دیفرانسیل مطلق یک اسکالر با دیفرانسیل معمولی یکی باشد:

$$Da^i = da^i;$$

۲. دیفرانسیل مطلق حاصل ضرب دو تانسور از قاعده معمول برای دیفرانسیل حاصل ضربها تبعیت کند:

$$D(a^{i_1 \dots i_r} b^{j_1 \dots j_s}) = (Da^{i_1 \dots i_r}) b^{j_1 \dots j_s} + a^{i_1 \dots i_r} D(b^{j_1 \dots j_s});$$

۳. عمل مشتقگیری مطلق و انقباض تانسورها تعویض پذیر باشند.

با اعمال این شرایط، می توان فرمولی برای دیفرانسیل مطلق یک بردار کوواریان مانند  $a_i$  پیدا کرد. درواقع، با اختیار بردار دلخواه  $b^i$ ، می توان اسکالر  $a_i b^i$  را تشکیل داد. بنابر خاصیت ۱، داریم

$$da_i b^i + a_i db^i = d(a_i b^i) = D(a_i b^i).$$

بنابر خواص ۲ و ۳، نیز داریم

$$D(a_i b^i) = (Da_i) b^i + a_i D(b^i) = (Da_i) b^i + a_i (db^i + \Gamma_{rs}^i du^r du^s).$$

لذا،

$$da_i b^i = (Da_i) b^i + a_i \Gamma_{rs}^i du^r du^s = (Da_i) b^i + \Gamma_{rs}^i a_r du^s b^i$$

یا

$$(da_i - \Gamma_{rs}^i a_r du^s) b^i = (Da_i) b^i.$$

چون این برای هر میدان برداری دلخواه  $b^i$  درست است، نتیجه می گیریم که باید مساوی

$$Da_i = da_i - \Gamma_{rs}^i a_r du^s \quad (2.24)$$

باشد.

با استدلالی مشابه، می توان دید که دیفرانسیل مطلق یک تانسور مخلوط از نوع

$(k, l)$  مانند  $a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$  باید مساوی

$$(۳.۲۴) Da_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = da_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{r=1}^k \Gamma_{rs}^{i_s} a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_{r-1} r i_{r+1} \dots i_k} du^s - \sum_{r=1}^l \Gamma_{j_r s}^{i_s} a_{j_1 \dots j_{r-1} j_{r+1} \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} du^s$$

باشد. باقی می ماند اثبات اینکه مولفه های (۲.۲۴) و (۳.۲۴) به ترتیب بر طبق قوانین تبدیل برای بردارهای کوواریان و برای تانسورها از نوع  $(k, l)$  تبدیل می شوند.

از تعویض دیفرانسیل  $da_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$  با  $(\partial a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} / \partial u^s) du^s$  و معرفی نماد

$$(۴.۲۴) \nabla_s a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}}{\partial u^s} + \sum_{r=1}^k \Gamma_{rs}^{i_s} a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_{r-1} r i_{r+1} \dots i_k} - \sum_{r=1}^l \Gamma_{j_r s}^{i_s} a_{j_1 \dots j_{r-1} j_{r+1} \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} du^s$$

داریم

$$Da_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \nabla_s a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} du^s.$$

می توان ثابت کرد که ضرایب  $\nabla_s a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ ، که با فرمول (۴.۲۴) تعریف شده اند، مولفه های یک تانسور از نوع  $(k, l+1)$  اند مشروط بر اینکه  $a$  ها مولفه های یک تانسور از نوع  $(k, l)$  باشند. این تانسور مشتق کوواریان، تانسور  $a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$  می باشد.

تمرین

۱. ثابت کنید که  $Da^i$  طبق قانون تبدیل برای مولفه های یک تانسور از نوع  $(1, 0)$ ، و  $Da_i$  طبق قانون تبدیل برای تانسورها از نوع  $(0, 1)$  تبدیل می شوند.
۲. ثابت کنید که  $Dg_{ij} = 0, Dg^{ij} = 0$ .
۳. هرگاه  $u^1, \dots, u^n$  مختصات دکارتی در فضای اقلیدسی  $n$  بعدی باشند، آنگاه

$$\nabla_s a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial}{\partial u^s} a_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \quad \text{و} \quad Da_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = da_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$$

## ۲.۲۴ تانسور ریمان<sup>۱</sup> - کریستوفل

با آنکه مشتق کوواریان تعمیمی از مشتق جزئی است، تفاوتی اساسی بین آنها وجود دارد؛ مثلاً، اگرچه دو مشتگیری جزئی متوالی تعویض پذیراند:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i},$$

این همیشه برای مشتقات کوواریان صادق نیست.

با محاسبه  $\nabla_r \nabla_s v^k - \nabla_s \nabla_r v^k$ ، معلوم می شود که

$$\nabla_r \nabla_s v^k - \nabla_s \nabla_r v^k = R_{rsj}^{\dots k} v^j,$$

که در آن ضرایب  $R_{rsj}^{\dots k}$  مولفه‌های یک تانسور از نوع (3, 1) می‌باشند. این تانسور تانسور ریمان - کریستوفل یا تانسور انحنا فضا نامیده می‌شود.

همچنین، می‌توان مولفه‌های کوواریان (از نوع  $(0, r)$ ) این تانسور را در نظر گرفت:

$$R_{rsij} = R_{rsi}^{\dots k} g_{kj}.$$

این مولفه‌ها در اتحادهای زیر صدق می‌کنند:

$$R_{rsij} = -R_{rsji} = -R_{srij} = R_{ijrs}.$$

در حالت خاص  $n = 2$ ، در بین مولفه‌ها فقط مولفه اساسی  $R_{1212}$  وجود دارد (بقیه یا صفرند یا مساوی این یکی یا مساوی  $-R_{1212}$ ). اگر چندگونا یک سطح گرفته شود، مولفه  $R_{1212}$  با انحنای گاوسی رابطه نزدیکی خواهد داشت؛ یعنی،

$$R_{1212} = K \cdot g.$$

## تمرین

۱. از (۴.۲۴) فرمولی نتیجه بگیرید که  $R_{rsj}^{\dots k}$  را بر حسب تانسور متری  $g_{ij}$  یا علائم کریستوفل  $\Gamma_{ij}^k$  یا هر دو بیان نماید. (با فرمولهای مربوط به  $K$  در (۲۱.۱۸) مقایسه کنید).

۲. ثابت کنید که برای فضای اقلیدسی  $n$  بعدی،  $R_{rsj}^{\dots k} = 0$ .

## ۳.۲۴ تغییر مکان موازی و خطوط ژئودزیک

به همان طریقی که تغییر مکان موازی در امتداد منحنیها بر یک سطح تعریف شد، می‌توان تغییر مکان موازی یک بردار یا تانسور را در امتداد یک منحنی در یک چندگونای ریمانی تعریف کرد. می‌گوییم میدان تانسوری  $a_{j_1 \dots j_l}^{\dots i_1 \dots i_k}$  در امتداد منحنی  $u^i = u^i(t)$  موازی است اگر که در هر نقطه از منحنی و در راستای آن داشته باشیم

$$Da_{j_1 \dots j_l}^{\dots i_1 \dots i_k} = 0.$$

یک خط ژئودزیک در چندگونای یک منحنی تعریف می‌شود که خانواده بردارهای یکه مماس آن در امتداد منحنی موازی باشند. این منجر به معادلات دیفرانسیل خطوط ژئودزیک منطبق با معادلات (۴.۲۱) می‌شود منتها در آنها اندیس جمع‌بندی مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را خواهد گرفت.

در حالت 2 بعدی، همه قضایای هندسه ذاتی سطوح برای یک چندگونای ریمانی، حتی اگر چندگونای نتوان به عنوان یک سطح در فضای سه بعدی مجسم کرد، معتبر می‌مانند. \*

## خواص غیر ذاتی سطوح

در این فصل همه جا سطوح مورد نظر را از کلاس  $C_3$ ، منحنیهای پارامتری روی سطح را از کلاس  $C_2$ ، و میدانهای برداری را از کلاس  $C_1$  می گیریم. در نتیجه، اولین فرم اساسی از کلاس  $C_2$ ، و دومین فرم اساسی از کلاس  $C_1$  است. این مفروضات همیشه در صورت قضایا تکرار نخواهند شد.

۲۵ انحناى قائم، انحناى میانگین، نقاط نافی

۱۰۲۵ انحناى قائم سطح

بر یک سطح ماربر نقطه  $P$  یک منحنی در نظر می گیریم. تصویر بردار انحناى  $k$  منحنی در  $P$  روی بردار قائم  $m$  سطح در  $P$  را انحناى قائم در  $P$  منحنی روی سطح می نامیم. این انحنا را با  $k_n$  نشان می دهیم.

قضیه. انحناى قائم در  $P$  یک منحنی روی یک سطح به راستای منحنی بستگی داشته و مساوی نسبت مقادیر دومین فرم اساسی به اولین فرم اساسی به ازای این راستا است:

$$(۱۰۲۵) \quad k_n = \frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j}.$$

برهان. طبق تعریف، انحناى قائم مساوی تصویر بردار انحناى  $k$  روی  $m$  است؛ در نتیجه،

$$k_n = km.$$

همانطور که در ۲۰۲۱ دیدیم، داریم  $k = k_g + k_n$ . چون  $k_g$  مماس بر سطح است،

$k_g m = 0$ . لذا  $k_n = km = k_n m$ ، به خاطر (۴۰۲۱)، ایجاب می کند که

$$(۲۰۲۵) \quad k_n = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds},$$

که در آن  $s$  پارامتر طبیعی منحنی است. اما، برای پارامتر طبیعی، اتحاد زیر را داریم:

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1,$$

که ایجاب می‌کند

$$k_n = \frac{b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}}{g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}}$$

با ضرب صورت و مخرج در  $ds^2$ ، (۱۰۲۵) را خواهیم داشت. این فرمول با این شکل به پارامتری سازی بستگی ندارد. بعلاوه، فرمول تنها مستلزم مشتقات اول مختصات نقاط منحنی نسبت به پارامتر طبیعی است؛ در نتیجه، فقط به راستا و، احتمالاً، جهت منحنی، بستگی دارد. اما تغییر علامت همهٔ دیفرانسیل‌های مربوطه (که متناظر تغییر جهت است) اثری بر نسبت ندارد. لذا، انحنا قائم فقط به راستا بستگی دارد، و قضیه ثابت است.

به خاطر این امر می‌توان در باب انحنا قائم در یک نقطهٔ مفروض با راستایی معلوم بدون اشاره به یک منحنی خاص از این راستا صحبت کرد، و انحنا قائم، برخلاف انحنا ژئودزیک، کمیتی مربوط به خود سطح می‌شود تا منحنیهای واقع بر آن.

بعلاوه، برخلاف انحنا ژئودزیک، انحنا قائم به هندسهٔ ذاتی سطح تعلق ندارد؛ به عبارت دیگر، تحت ایزومتريها حفظ نمی‌شود. ساده‌ترین مثال استوانهٔ مستدیر است. این سطح با صفحه موضعا "ایزومتريک است، ولی انحنا قائم یک برش عرضی عمود بر محور آن عکس شعاع بوده و مخالف صفر است، درحالی که نقش این برش عرضی خطی مستقیم بوده و انحنا قائم آن صفر می‌باشد.

### امثله و تمرین

۱. قائم اصلی یک مارپیچ محورا استوانهٔ محمل خود را در زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. لذا، بر استوانه عمود است؛ و در نتیجه، مساوی بردار انحنا  $k$  می‌باشد. بالنتیجه، انحنا قائم مارپیچ روی استوانه مساوی انحنا یا قرینهٔ انحنا مارپیچ در فضا است. علامت به جهت انتخابی استوانه بستگی دارد.

۲. بطور کلی، انحنا قائم در راستایی معلوم بر انحنا یا قرینهٔ انحنا یک خط ژئودزیک این راستا منطبق است.

۳. انحنا قائم مارپیچ  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = ct$  روی مارپیچ گون

$$x = u^1 \cos u^2, y = u^1 \sin u^2, z = cu^2$$

۴. ثابت کنید مربع انحناى یک منحنى روى یک سطح، در یک نقطه، مجموع مربعات انحناهای قائم و ژئودزیک در این نقطه است.

۵. نشان دهید که انحناى قائم در نقطه  $P$  به ازای یک راستای معلوم، با تقریب علامت، بر انحناى فصل مشترک سطح با صفحه قائم به سطح در  $P$  که شامل خط مماس با راستای معلوم است منطبق می باشد.

۶. انحناى قائم سطح

$$s = f(x, y)$$

در راستای خط مماسی که کسینوسهای هادی آن  $a, b, c$  اند را بیابید.

۷. انحناهای ژئودزیک و قائم یک دایره به شعاع  $b$  روى کره به شعاع  $a$  را بیابید.

۸. ثابت کنید انحناى قائم یک نصف النهار از یک سطح دوار فقط و فقط در نقاط سهموی صفر است.

۹. انحناى قائم دواير عرض جغرافیایی یک کره نما را بیابید.

### ۲۰۲۵ قضیه مونیه<sup>۱</sup>

زاویه بین بردار قائم اصلی  $n$  یک منحنى بر سطح در  $P$  و بردار قائم  $m$  به سطح در این نقطه را با  $\alpha$  نشان می دهیم. اگر  $\kappa$  انحناى منحنى در  $P$  و  $k_n$  انحناى قائم باشد، طبق تعریف انحناى قائم داریم

$$k_n = \kappa \cos \alpha. \quad (۳۰۲۵)$$

چون انحناى قائم فقط به راستای منحنى و زاویه  $\alpha$  به موضع صفحه بوسان منحنى بستگی دارد، می توان ادعا کرد که انحنا در  $P$  منحنى روى یک سطح کاملاً به وسیله صفحه بوسان منحنى در آن نقطه معین می شود. در واقع، فصل مشترک این صفحه بوسان با صفحه مماس سطح در  $P$  راستای منحنى را مشخص می کند؛ لذا، انحناى قائم  $k_n$ ، و نیز زاویه  $\alpha$ ، معین می شوند. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\kappa = \frac{k_n}{\cos \alpha}.$$

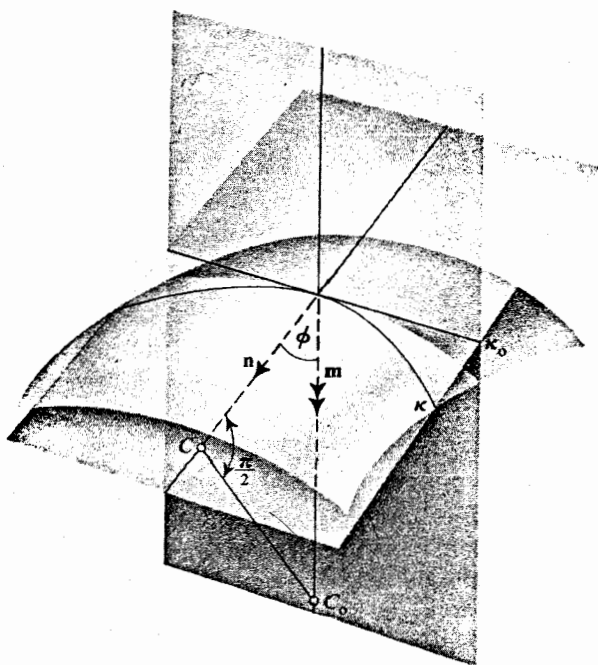
تنها استثنا وقتی است که صفحه بوسان منحنى بر سطح مماس باشد، که در این حالت  $\cos \alpha = 0$ . طبق (۳۰۲۵)، این فقط وقتی می تواند رخ دهد که انحناى قائم در راستای

منحنی صفر باشد. لذا، همهٔ منحنیها روی سطح که در  $P$  یک صفحهٔ بوسان دارند در  $P$  یک انحنا خواهند داشت.

در حالتی که صفحهٔ بوسان بر سطح عمود است ( $\cos \alpha = \pm 1$ )، انحناهای منحنی همان انحناهای مقطع قائم صفحه به ازای همان راستا، یعنی فصل مشترک سطح با یک صفحهٔ قائم به سطح و مماس بر منحنی، است. در این صورت، انحناهای منحنی بر انحناهای قائم یا قرینهٔ انحناهای قائم منطبق می‌باشد.

این نتایج را می‌توان به نحو توصیفی تری در قضیهٔ زیر بیان کرد.

**قضیه (مونه).** مرکز انحنا در  $P$  منحنی  $\mathcal{H}$  با انحناهای قائم ناصفر روی سطح  $\mathcal{F}$  تصویر قائم روی صفحهٔ بوسان در  $P$  مرکز انحنا مقطع قائم سطح در  $P$  است که بر  $\mathcal{H}$  در  $P$  مماس می‌باشد (شکل ۱۰۲۵).



شکل ۱۰۲۵

برهان. فرض کنیم  $C_0$  مرکز انحناهای مقطع قائم بوده، و  $C$  مرکز انحناهای منحنی در  $P$  باشد. در این صورت، داریم

$$\vec{PC} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \text{ و } \vec{PC}_0 = \frac{1}{k_n} \mathbf{m}$$

از آن سو، تصویر بردار  $\vec{PC}_0$  روی بردار  $\mathbf{n}$ ، که بردار نیز گرفته شده، مساوی است با

$$(\vec{PC}_0 \mathbf{n}) \mathbf{n} = \frac{1}{k_n} (\mathbf{m} \mathbf{n}) \mathbf{n} = \frac{\cos \alpha}{k_n} \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} = \vec{PC}.$$

لذا، تصویر نقطه  $C_0$  روی قائم اصلی با  $C$  یکی است. اما قائم اصلی منحنی و قائم سطح هردو بر مماس بر منحنی که در صفحه بوسان است عمودند. از اینرو، تصویر قائم  $PC_0$  بر صفحه بوسان با قائم اصلی منحنی، و تصویر  $C_0$  بر صفحه بوسان با تصویر  $C_0$  بر قائم اصلی یکی می باشد. لذا، این تصویر بر مرکز انحنا  $C$  منطبق بوده، و قضیه ثابت خواهد شد.

مرکز انحنا  $C_0$  مقطع قائم با راستایی معلوم در  $P$  را مرکز انحنا قائم به ازای راستای معلوم در  $P$ ، و  $R_n = 1/k_n$ ، یعنی عکس انحنا قائم، را شعاع انحنا قائم می نامیم.

راستاهایی که به ازای آنها  $k_n = 0$  را ستاهای مجانبی نامیده می شوند. این حالت در زیربخش ۳۰۲۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت. به ازای اینها، قضیه فوق برقرار نمی باشد.

### تمرین

۱. با استفاده از خاصیت کساننده که پاره خط مماس بین نقطه تماس و مجانب ثابت است، ثابت کنید انحنا  $\kappa$  دوار عرض جغرافیایی کره نما یکی است.
۲. یک بیضی با نیم محورهای  $a, b$  ( $a > b$ ) را فصل مشترک یک استوانه مستدیر قائم به شعاع  $b$  بایک صفحه گرفته و، با استفاده از قضیه مونیه، انحنا بیضی در رئوس آن (یعنی، نقاط برخورد بیضی با محورهای اصلی) را پیدا کنید.
۳. مجموعه مراکز انحنا در نقطه  $(0, 0, 0)$  تمام منحنیهای ماربر این نقطه و واقع بر سطح  $s = f(x, y)$  را بیابید مشروط بر اینکه  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ .

### ۳۰۲۵ نقش کروی بردار مماس بر یک سطح.

حال به نگاشت یک سطح بتوی کره یک به وسیله بردارهای قائم، که در ۴۰۱۷ بحث شد، باز می گردیم. این نگاشت به هر نقطه  $P$  از سطح نقطه پایان یک بردار به مبداء مرکز کره و مساوی بردار قائم  $\mathbf{m}$  در  $P$  را نسبت می دهد. نقش نقطه  $P$  به مختصات منحنی الخط

$(u^1, u^2)$  روی سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

دارای بردار موضع

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$$

است. با توسیع این نگاشت به بردارهای مماس سطح داده شده، درمی یابیم که بردارهای مماس  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  به بردارهای مماس  $\mathbf{m}_1$  و  $\mathbf{m}_2$  بر کره، و بردار مماس بر سطح

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i$$

به بردار مماس  $a^i \mathbf{m}_j$  بر کره نگاشته می شود. اما  $\mathbf{m}_1$  و  $\mathbf{m}_2$  متعامد به  $\mathbf{m}$  اند؛ و لذا، موازی صفحه مماس بر سطح در  $P$  می باشند. در نتیجه، در بین بردارهای مماس بر سطح در  $P$  یکی مساوی  $a^i \mathbf{m}_j$  وجود دارد. این بردار مماس در  $P$  را با  $\mathcal{S}(\mathbf{a})$  نشان می دهیم. لذا،

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) = a^i \mathbf{m}_j.$$

طبق فرمولهای وینگارتن (۲۰۱۸)، داریم

$$(۴۰۲۵) \quad \mathcal{S}(\mathbf{a}) = -b_j^i a^i \mathbf{r}_i.$$

نگاشت  $\mathcal{S}$  یک تبدیل خطی از فضای برداری بردارهای مماس در  $P$  بتوی خوداست

زیرا، همانطور که به آسانی معلوم می شود، داریم

$$(۵۰۲۵) \quad \mathcal{S}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \mathcal{S}(\mathbf{a}) + \mu \mathcal{S}(\mathbf{b}).$$

این نگاشت  $\mathcal{S}$  را تبدیل گروی فضای مماس، و  $\mathcal{S}(\mathbf{a})$  را نقش گروی بردار مماس  $\mathbf{a}$  می نامیم. توجه کنید که تعریف  $\mathcal{S}(\mathbf{a})$  اساساً "مستقل از پارامتری سازی است ولی به جهت سطح بستگی دارد. در واقع، اگر جهت سطح تغییر کند،  $\mathbf{m}$  با  $-\mathbf{m}$  عوض می شود، و نقش بردار مماس بر منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، به جای  $\mathbf{m}'(s)$  خواهد شد.

تبدیل گروی فضای برداری مماس ابزار مفیدی در بحث مسائل مختلف نظریه سطوح است. ابتدا به اثبات چند رابطه بین این تبدیل و کمیتی که از قبل می شناسیم می پردازیم.

قضیه. حاصل ضرب داخلی بردار  $\mathbf{a}$  و نقش گروی آن مساوی قرینه مقدار دومین فرم اساسی به ازای بردار  $\mathbf{a}$  است:

$$\mathbf{a} \mathcal{S}(\mathbf{a}) = -b_{ij} a^i a^j.$$

برهان. طبق (۴۰۲۵) و (۱۹۰۱۶)، داریم

$$\mathbf{a} \mathcal{S}(\mathbf{a}) = g_{ij} a^i (-b_k^j a^k) = -g_{ij} b_k^j a^i a^k.$$

و طبق (۳۰۱۸)،  $g_{ij} b_k^j = b_{ik}$ ، لذا،

$$a \mathcal{S}(a) = -b_{ik} a^i a^k = -b_{ij} a^i a^j,$$

که برهان را تمام می‌کند.

نتیجه. انحنای قائم  $k_n$  در راستای بردار  $a$  مساوی است با

$$(۶۰۲۵) \quad k_n = -\frac{a \mathcal{S}(a)}{a^2}.$$

امثله و تمرین

۱. با فرض بردار  $dr = du^i r_i$  برای  $a$ ، داریم  $\mathcal{S}(dr) = du^i m_i = dm$ ، لذا، می‌توان نوشت

$$b_{ij} du^i du^j = -dr dm$$

و

$$k_n = -\frac{dr dm}{dr^2}.$$

۲. نقش کروی بردار مماس بر نصف النهار زنجیرگون (۱۱۰۱۱) را بیابید. زاویه بین

این بردار و نقش آن چیست؟

۳. همین مسئله را برای بردار مماس بر دایره عرض جغرافیایی زنجیرگون، و برای راستایی

که زاویه بین نصف النهار و دایره عرض جغرافیایی رانصف می‌کند حل کنید.

۴. همین مسئله را برای یک بردار مماس بر خط جاری از مارپیچ گون (۱۳۰۱۱)، و

بردار مماس عمود بر خط جاری حل کنید.

۴۰۲۵ نگاشت کروی و انحنای گاوسی

دو بردار مماس  $a$  و  $b$  در نقطه  $P$  از یک سطح را در نظر می‌گیریم.

قضیه. حاصل ضرب خارجی نقشهای کروی دو بردار مماس در  $P$  مساوی حاصل ضرب خارجی

بردارها ضرب در انحنای گاوسی سطح در  $P$  است:

$$(۷۰۲۵) \quad \mathcal{S}(a) \times \mathcal{S}(b) = K a \times b.$$

برهان. داریم  $\mathcal{S}(a) = a^i m_i$ ،  $\mathcal{S}(b) = a^j m_j$ ؛ در نتیجه،

$$\mathcal{S}(a) \times \mathcal{S}(b) = a^i b^j m_i \times m_j = (a^1 b^2 - a^2 b^1) m_1 \times m_2.$$

طبق فرمولهای وینگارتن (۲۰۱۸)، داریم

$$m_1 \times m_2 = b_1^i b_2^j r_i \times r_j = (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) r_1 \times r_2.$$

با استفاده از اتحاد  $b_j^i = g^{ik} b_{jk}$ ، داریم

$$(۸.۲۵) \quad \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{g} b = K;$$

در نتیجه،

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) \times \mathcal{S}(\mathbf{b}) = K(a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

اما این با (۷.۲۵) معادل است، زیرا

$$(a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

بخصوص، با فرض  $\mathbf{a} = d\mathbf{r} = du^i \mathbf{r}_i$  و  $\mathbf{b} = \delta\mathbf{r} = \delta u^i \mathbf{r}_i$  خواهیم داشت

$$(۹.۲۵) \quad \mathcal{S}(d\mathbf{r}) \times \mathcal{S}(\delta\mathbf{r}) = d\mathbf{m} \times \delta\mathbf{m} = K d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}.$$

۵.۲۵ انحناى میانگین یک سطح

مثل قبل، دو بردار  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  در  $P$  بردار

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathcal{S}(\mathbf{b})$$

را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم این بردار با  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  همخط است؛ و در واقع، مساوی

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ضربدر ضریبی است که فقط تابع نقطه سطح بوده و به انتخاب بردارهای  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  بستگی ندارد.

داریم

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = -b_k^i a^k b^j \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = (-b_k^1 a^k b^2 + b_k^2 a^k b^1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{a} \times \mathcal{S}(\mathbf{b}) = -b_k^i a^i b^k \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = (-b_k^2 a^1 b^k + b_k^1 a^2 b^k) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

از این نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathcal{S}(\mathbf{b}) &= (-b_1^1 a^1 b^2 - b_2^1 a^2 b^2 + b_1^2 a^1 b^1 + b_2^2 a^2 b^1 \\ &\quad - b_1^2 a^1 b^1 - b_2^2 a^1 b^2 + b_1^1 a^2 b^1 + b_2^1 a^2 b^1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ &= -(b_1^1 + b_2^1)(a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -(b_1^1 + b_2^1) \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

این ضریب را با  $-2H$  نشان داده، و  $H$  را انحناى میانگین سطح در  $P$  می‌نامیم.

لذا، داریم

$$(۱۰.۲۵) \quad H = \frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2) = \frac{1}{2}b_i^i.$$

با استفاده از این نماد، داریم

$$(۱۱.۲۵) \quad \mathcal{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathcal{S}(\mathbf{b}) = -2H \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

فرمول (۱۰.۲۵) را می‌توان به شکلهای مفید دیگر نیز نوشت؛ مثلاً،

$$(۱۲.۲۵) \quad H = \frac{\frac{1}{2} g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}}{g}$$

یا

$$(۱۲.۲۵) \quad H = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & b_{12} \\ g_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & g_{12} \\ b_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}.$$

قضیه. قدر مطلق انحناى میانگین به مختصات منحنى الخط بستگی ندارد. انحناى میانگین با تغییر جهت سطح تغییر علامت می‌دهد.

برهان. با آنکه این فورا" از تعریف انحناى میانگین به عنوان ضریب  $H$  در (۱۱.۲۵) نتیجه می‌شود، ما اینجا برهانی محاسبه‌ای مبتنی بر فرمول (۱۲.۲۵) و قوانین تبدیل (۲۸.۱۶) و (۶.۲۷) ارائه می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} b_{i'j'}g^{i'j'} &= \varepsilon \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} b_{ij} \frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{s'}} g^{rs} = \varepsilon \left( \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}} \right) \left( \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^s}{\partial u^{s'}} \right) b_{ij} g^{rs} \\ &= \varepsilon \delta_i^r \delta_j^s b_{ij} g^{rs} = \varepsilon b_{ij} g^{ij}, \end{aligned}$$

که در آن  $\varepsilon = \text{sgn } \partial(u^1, u^2)/\partial(u^{1'}, u^{2'})$  و مساوی ۱ است اگر تبدیل جهت را حفظ کند، و -۱ است اگر جهت را برگرداند.

امثله و تمرین

۱. انحناى میانگین کره، زنجیرگون، و مارپیچ گون را بیابید.
۲. فرمول (۱۰.۲۵) درحالت خاص (به‌ازای  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$ ) نتیجه می‌دهد که

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 = -2H\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -2H\sqrt{g}\mathbf{m}.$$

بنابراین،

$$(۱۳.۲۵) \quad H = -\frac{1}{2\sqrt{g}}m(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2).$$

۳. سطح  $\mathcal{F}$  را درنظر می‌گیریم. سطح حاصل از  $\mathcal{F}$  با حرکت یک نقطه در امتداد قائم به  $\mathcal{F}$  در آن نقطه به اندازه فاصله ثابت  $a$  یک سطح موازی  $\mathcal{F}$  نامیده می‌شود. اگر معادله پارامتری سطح  $\mathcal{F}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

باشد، سطح موازی دارای معادله

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1, u^2) + a\mathbf{m}(u^1, u^2)$$

است، که در آن ثابت  $a$ ، از اینرو،  $R_1 = r_1 + am_1$ ،  $R_2 = r_2 + am_2$ ، و

$$\begin{aligned} R_1 \times R_2 &= r_1 \times r_2 + a(r_1 \times m_2 + m_1 \times r_2) + a^2 m_1 \times m_2 \\ &= (1 - 2Ha + Ka^2) r_1 \times r_2 = (1 - 2Ha + Ka^2) \sqrt{g} m. \end{aligned}$$

در نتیجه، بردار قائم به سطح موازی بر بردار قائم یا قرینه بردار قائم به سطح اصلی در نقطه نظیر منطبق است؛ به طور دقیقتر، بر  $\varepsilon m$  منطبق است، که در آن

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - 2Ha + Ka^2).$$

مبین اولین فرم اساسی سطح موازی در مختصات  $(u^1, u^2)$  مساوی است با

$$\tilde{g} = (1 - 2Ha + Ka^2)^2 g,$$

که به معنی آن است که نقاط منفرد پارامتری سازی  $(u^1, u^2)$  سطح موازی نقاط صادق در معادله  $1 - 2Ha + Ka^2 = 0$  می باشند.

برای یافتن انحنای میانگین  $\tilde{H}$  سطح موازی، عبارت زیر را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} (m_1 \times R_2 + R_1 \times m_2) &= (m_1 \times r_2 + am_1 \times m_2 + r_1 \times m_2 + am_1 \times m_2) \\ &= (-2H + 2aK) r_1 \times r_2 = \frac{-2H + 2aK}{1 - 2Ha + Ka^2} R_1 \times R_2 \\ &= -2\tilde{H} R_1 \times R_2. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\tilde{H} = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

همچنین، برای انحنای گاوسی  $\tilde{K}$  سطح موازی، داریم

$$m_1 \times m_2 = Kr_1 \times r_2 = K/(1 - 2Ha + Ka^2) R_1 \times R_2,$$

که از آنجا

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

۴. انحنای میانگین سطح

$$z = \ln \left( \frac{\cos x}{\cos y} \right)$$

را بیابید.

۵. انحنای میانگین سطح گسترده

$$r = p(u^1) + u^2 p'(u^1)$$

را با استفاده از نماد معمول برای سه وجهی فرنه، انحنای  $r = p(s)$  و تاب منحنی بیابید.

۶. انحناهای میانگین و گاوسی سطح خط دار تولید شده به وسیلهٔ دو جمله ایهای یک منحنی مانند  $r = p(s)$  را بیابید.

۷. انحناهای میانگین جنبهٔ

$$x = (a + b \cos u^1) \cos u^2, \quad y = (a + b \cos u^1) \sin u^2, \quad z = b \sin u^2$$

را بیابید. آیا جنبه نقاطی با انحناهای میانگین صفر دارد؟

۶.۲۵ رابطه بین انحناهای  $H$  و  $K$

قضیه. انحناهای گاوسی و انحناهای میانگین یک سطح در نقطهٔ  $P$  در نامساوی

$$(14.25) \quad H^2 \geq K$$

صدق می کنند. تساوی در آن فقط وقتی برقرار است که  $b_1^1 = b_2^2$  و  $b_1^2 b_2^1 = 0$ ، که در این صورت فرمهای اساسی در  $P$  متناسب می باشند.

برهان. چون هیچیک از  $H^2$  و  $K$  به مختصات منحنی الخط بستگی ندارند، می توان آنها را دلخواه گرفت. فرض کنیم مختصات متعامد باشند؛ یعنی،  $g^{12} = 0$  و  $g_{12} = 0$ . در این صورت، داریم

$$b_1^2 = b_{12} g^{22}, \quad b_2^1 = b_{21} g^{11}, \quad g = g_{11} g_{22},$$

که ایجاب می کند

$$(15.25) \quad b_1^2 b_2^1 = (b_{12})^2 g^{11} g^{22} = (b_{12})^2 g \geq 0,$$

که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $b_{12} = 0$ .

در این مختصات داریم

$$4(H^2 - K) = (b_1^1 + b_2^2)^2 - 4(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) = (b_1^1 - b_2^2)^2 + 4b_1^2 b_2^1.$$

به خاطر (۱۵.۲۵)، طرف راست نامنفی است، و مساوی صفر است اگر و فقط اگر

$$b_1^1 - b_2^2 = 0 \quad \text{و} \quad b_1^2 b_2^1 = 0. \quad \text{شرایط اخیر معادلند با} \quad b_1^1 = b_{11} g^{11} = b_2^2 = b_{22} g^{22}$$

اما این یعنی دومین و اولین فرم اساسی در مختصات

ما متناسب اند،  $b_{ij} = \lambda g_{ij}$ . با اعمال یک تبدیل مختصات، برای ضرایب تبدیل یافته

فرمهای اساسی، نسبت  $b_{i'j'} = \lambda g_{i'j'}$  یا  $b_{i'j'} = -\lambda g_{i'j'}$  به دست می آید، مویده آنکه نسبت

فرمها از مختصات منحنی الخط مستقل است، و قضیه ثابت می شود.

۷.۲۵ نقاط نافی

یک نقطه از یک سطح را یک نقطهٔ نافی گویند اگر و فقط اگر انحناهای قائم در این نقطه در

هر راستای یکی باشد؛  $k_n(du^1:du^2) = k$ .

از (۱۰۲۵) فوراً معلوم می‌شود که یک نقطه نافی است اگر، به‌ازای هر راستا،

$$b_{ij} du^i du^j = kg_{ij} du^i du^j.$$

یعنی، اگر

$$(16.25) \quad b_{ij} = kg_{ij}$$

در نتیجه، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱. نقطه  $P$  یک نقطه نافی یک سطح است اگر و فقط اگر دو فرم اساسی در  $P$  متناسب باشند؛ یعنی،

$$b_{11} = \lambda g_{11}, \quad g_{12} = \lambda g_{12}, \quad b_{22} = \lambda g_{22}.$$

صفحه و کره فقط از نقاط نافی تشکیل شده‌اند. از تمرین ۳، ۲۰۱۷، معلوم می‌شود که صفحه و کره تنها سطوحی هستند که هر نقطه شان نافی است. سطوحی با نقاط نافی تنها نیز وجود دارند.

با استفاده از مفهوم نقطه نافی، می‌توان قسمت دوم قضیه زیر بخش پیش را این طور بیان کرد:

در نقاط نافی و فقط در این نقاط  $H^2 = K$ . حال خاصیت مشخصه دیگری از نقاط نافی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲. در یک نقطه نافی و فقط در آن، نقش گروی هر بردار با آن همخط است؛ یعنی،

$$(17.25) \quad \mathcal{S}(a) = -ka.$$

ضریب  $k$  در این فرمول به بردار  $a$  بستگی نداشته، و مساوی قرینه انحنا قائم در این نقطه است.

برهان. در نقطه نافی  $P$ ، انحنا در هر راستای یکی است. اگر آن را با  $k$  نشان داده

و (۱۶۰۲۵)، به‌ازای  $k_n = k$ ، را در  $g^{jl}a^j$  ضرب کنیم، به دست می‌آوریم

$$(18.25) \quad b^l_j a^j = k \delta^l_j a^j = ka^l,$$

که، به‌خاطر (۴۰۲۵)، با (۱۷۰۲۵) معادل است. حال فرض کنیم  $\mathcal{S}(a)$  و  $a$ ، به‌ازای هر  $a$ ، همخط باشند؛ در نتیجه،

$$(19.25) \quad \mathcal{S}(a) = \lambda a.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم ضریب  $\lambda$  به  $a$  بستگی ندارد. فرض کنیم  $e_1$  و  $e_2$  دو بردار مماس مستقل خطی باشند و

$$\mathcal{S}(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad \mathcal{S}(e_2) = \lambda_2 e_2.$$

برای بردار  $e_1 + e_2$  از یک طرف داریم  $\mathcal{S}(e_1 + e_2) = \lambda(e_1 + e_2)$  و، از طرف دیگر،  $\mathcal{S}(e_1 + e_2) = \mathcal{S}(e_1) + \mathcal{S}(e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$  که  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  را ایجاب می‌کند. حال، با همان  $\lambda$ ، و به‌ازای بردار  $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ ، داریم

$$\mathcal{S}(a) = \alpha \mathcal{S}(e_1) + \beta \mathcal{S}(e_2) = \alpha \lambda e_1 + \beta \lambda e_2 = \lambda(\alpha e_1 + \beta e_2) = \lambda a$$

با فرض  $\lambda = -k$  در (۱۹۰۲۵)، معلوم می‌شود که (۱۷۰۲۵)، با  $k$  ای مستقل از  $a$ ، برقرار است.

با ضرب اتحاد (۱۷۰۲۵) در  $a$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{S}(a)a = -ka^2$$

که، طبق (۶۰۲۵)، ایجاب می‌کند که انحنای قائم در راستای  $a$  مساوی  $k$  است؛ در نتیجه، انحنای به‌ازای جمیع راستاهایی است و نقطه نافی می‌باشد.

#### امثله و تمرین

۱. هر نقطه نافی یک نقطه بیضوی یا یک نقطه سهموی است. در حالت دوم یک نقطه تخت است.
۲. بیضی‌گون و هذلولی‌گون دو پارچه که سطح دوار نباشند چهار نقطه نافی دارند. یک سهمی‌گون بیضوی که سطح دوار نیست دو نقطه نافی دارد. اگر یکی از این سطوح یک سطح دوار باشد، تعداد نقاط نافی دو برابر کمتر است، به‌استثنای کره، که هر نقطه‌اش نافی است. این مطلب را با یافتن نقاط نافی سطوح نظیر ثابت کنید.
۳. نقاط نافی سطح  $xyz = a^3$  را بیابید.
۴. ثابت کنید انحنای میانگین یک نقطه نافی با انحنای قائم، و انحنای گاوسی با مربع انحنای قائم یکی است.

#### ۸۰۲۵ سطوح مینیمال

سطوح با انحنای میانگین صفر سطوح مینیمال نام دارند. این نام به‌وسیله قضیه زیر توجیه می‌شود.

قضیه. هرگاه مساحت هر ناحیه بر سطح  $\mathcal{F}$  محدود به منحنی بسته قطعه قطعه هموار

$\mathcal{C}$  از مساحت قلمرو محدود به  $\mathcal{C}$  بر هر سطح دیگر شامل  $\mathcal{C}$  کوچکتر باشد، آنگاه  $\mathcal{F}$  یک سطح مینیمال است.

برهان. بی آنکه کلیت از کف برود، می توان خود را به بخش به قدر کافی کوچکی از سطح  $\mathcal{F}$  محدود کرد که مختصات منحنی الخطی مانند  $u^1, u^2$  را بپذیرد. فرض کنیم معادله پارامتری سطح  $\mathcal{F}$  عبارت باشد از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2).$$

فرض کنیم  $\Omega$  ناحیه ای بر صفحه  $(u^1, u^2)$  نظیر به ناحیه کراندار به  $\mathcal{C}$  بوده و  $\alpha(u^1, u^2)$  تابعی از کلاس  $C_1$  باشد که بر کرانه  $\Omega$  صفر می شود. به ازای  $t$  به قدر کافی کوچک، معادله

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1, u^2) + t\alpha(u^1, u^2)\mathbf{m} \quad (20.25)$$

نمایش سطحی مانند  $\mathcal{F}^t$  است که از منحنی  $\mathcal{C}$  می گذرد. در حالت خاص  $t = 0$  سطح  $\mathcal{F}$  ما به دست می آید. مساحت سطح  $\mathcal{F}^t$  کراندار به  $\mathcal{C}$  مساوی است با

$$S_t = \iint_{\Omega} |\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2| du^1 du^2.$$

این مساحت، به ازای هر تابع ثابت  $\alpha$ ، تابع مشتق پذیری از  $t$  است. ثابت می کنیم این مساحت می تواند مینیمم خود را در  $t = 0$  بگیرد اگر و فقط اگر انحنای میانگین  $H$  از  $\mathcal{F}$  متحد صفر باشد.

درواقع، داریم

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + t\alpha_1\mathbf{m} + t\alpha\mathbf{m}_1, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + t\alpha_2\mathbf{m} + t\alpha\mathbf{m}_2,$$

که از آنجا

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + t\alpha(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{m}_1) + t^2\alpha^2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \\ &\quad + t(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2 + \alpha_2\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}) + t^2\alpha(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{m}_2 + \alpha_2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}). \end{aligned}$$

با اعمال فرمولهای (۱۷۰.۱۶)، (۱۳۰.۲۵)، و (۸۰.۱۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (21.25) \quad \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 &= \sqrt{g}(1 - 2t\alpha H + t^2\alpha^2 K)\mathbf{m} \\ &\quad + t(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2 + \alpha_2\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}) + t^2\alpha(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{m}_2 + \alpha_2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}). \end{aligned}$$

چون مجموع سطر دوم یک بردار عمود بر  $\mathbf{m}$  است، مربع  $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$  مساوی مجموع مربعات اولین و دومین سطر است.

این مجموع مربعات بوضوح یک چند جمله ای از درجه ۴ نسبت به  $t$  است که ضرایبش توابعی هستند که درست ناحیه  $\Omega$  کراندارند.

با محاسبه، درمی یابیم که

$$(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^2 = g - 4t\alpha Hg + t^2\phi_1 + t^3\phi_2 + t^4\phi_3,$$

که در آن  $\phi_i$  توابعی کراندار از  $u^1, u^2$  اند. لذا، به ازای  $|t|$  به قدر کافی کوچک، می توان ادعا کرد که

$$|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2| = \sqrt{g} - 2t\alpha H\sqrt{g} - t^2\psi,$$

که در آن  $\psi$  یک تابع کراندار از  $u^1, u^2$ ، و است، و نیز

$$S_t = \int_{\Omega} \int \sqrt{g} du^1 du^2 - 2t \int_{\Omega} \int \alpha H \sqrt{g} du^1 du^2 + t^2 \int_{\Omega} \int \psi du^1 du^2.$$

این تابع فقط وقتی می تواند مینیم خود را به ازای  $t = 0$  بگیرد که مشتقش نسبت به  $t$  در  $t = 0$  صفر باشد؛ یعنی، اگر

$$\int_{\Omega} \int \alpha H \sqrt{g} du^1 du^2 = 0.$$

چون این باید به ازای هر  $\alpha$  و  $\Omega$  برقرار باشد، نتیجه می شود که باید  $H = 0$ .  
عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست، ولی تحت شرایطی مناسب درست خواهد بود.

### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید یک سطح مینیمال است اگر و فقط اگر

$$g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11} = 0.$$

۲. ثابت کنید زنجیرگون تنها سطح دواری است که یک سطح مینیمال است.

۳. ثابت کنید تنها سطوح مینیمال خط دار مارپیچ گونها هستند.

۴. هرگاه پارامترهای  $u^1, u^2$  پارامترهای ایزومتریک روی یک سطح مینیمال از کلاس  $C_3$  با معادله<sup>۴</sup> پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

باشد، آنگاه تابع  $\mathbf{r}$  در معادله<sup>۴</sup> لاپلاس

$$\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22} = 0$$

صدق می کند.

★ برهان. چون  $g_{11} = g_{22}$  و  $g_{12} = 0$ ، شرط تمرین ۱ به

$$b_{11} + b_{22} = 0$$

بدل می شود، که از آنجا

$$(\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22})\mathbf{m} = 0.$$

از آن سو،  $r_1 r_2 = 0$  ایجاب می‌کند که  $r_{11} r_2 + r_1 r_{12} = 0$ ،  $r_{12} r_2 + r_1 r_{22} = 0$  و  $r_1^2 = r_2^2$  ایجاب می‌کند که

$$r_{11} r_1 = r_{12} r_2 \quad \text{و} \quad r_{12} r_1 = r_{22} r_2$$

با گذاردن این در فرمولهای قبل، داریم

$$(r_{11} + r_{22}) r_1 = 0 \quad \text{و} \quad (r_{11} + r_{22}) r_2 = 0$$

لذا،

$$r_{11} + r_{22} = 0,$$

که برهان را تمام می‌کند. ★

۵. ثابت کنید اگر سطح  $\mathcal{F}$  به معادله

$$r = r(u^1, u^2)$$

یک سطح مینیمال باشد، ناحیه واقع بر سطح موازی  $\mathcal{F}_\alpha$

$$R = r(u^1, u^2) + \alpha m(u^1, u^2), \quad \alpha = \text{ثابت}$$

که نظیر قلمرو  $\Omega$  در صفحه پارامتری است مساحتی کوچکتر از ناحیه نظیر بر  $\mathcal{F}$  دارد.

۲۶ راستاهای مزدوج و خطوط مجانبی

۱۰۲۶ راستاهای مزدوج

نگاشت کروی از بردارهای مماس را در نظر می‌گیریم. ماتریس این نگاشت خطی، طبق (۴۰۲۵)، عبارت است از

$$\begin{pmatrix} -b_1^1 & -b_2^1 \\ -b_1^2 & -b_2^2 \end{pmatrix},$$

و در مینان آن مساوی  $K$  است. لذا، در یک نقطه بیضوی یا هذلولوی، نگاشت کروی یک تبدیل خطی نامنفرد است، هر بردار ناصفر به یک بردار ناصفر نگاشته می‌شود، و نقش کروی یک راستای مماس تعریف شده است.

در یک نقطه تخت، همه بردارهای  $a$  به ۰ نگاشته می‌شوند و نقش کروی به ازای هر راستا تعریف نشده است.

در یک نقطه سهموی که یک نقطه تخت نباشد ماتریس از رتبه یک است، و یک راستا وجود دارد به طوری که هر بردار  $a$  از این راستا دارای  $\mathcal{S}(a) = 0$  است. به ازای یک بردار مماس  $v$  از راستای دیگر، نقش کروی متعامد به  $a$  است. در واقع،

$$a \mathcal{S}(v) = -g_{ij} a^i b_j^k v^k = -b_{ik} a^i v^k = -g_{jk} b_j^i a^k v^k = v \mathcal{S}(a) = 0.$$

لذا، در یک نقطه سهموی، تبدیل کروی همه راسها جز یکی را به راستای متعامد بر همان مستثنی شده می نگارد، و نقش راستای مستثنی شده نامعین است.

راستای عمود بر نقش کروی یک راستای مفروض بر یک سطح را راستای مزدوج راستای داده شده می نامند.

از آنچه در بالا بحث شد نتیجه می شود که راستای مزدوج با یک راستای معلوم به ازای هر راستا، در یک نقطه بیضوی یا هذلولوی، و به ازای هر راستا جز یکی در یک نقطه سهموی تعریف شده است. تا جایی که به راستای مستثنی شده مربوط می شود، هر راستا (به انضمام راستای اصلی) را می توان راستای مزدوج با خود تلقی کرد. از آن سو، راستای مستثنی شده در یک نقطه سهموی راستای مزدوج هر راستای دیگر است. در نقاط تخت، هر راستا مزدوج هر راستای دیگر است.

قضیه ۱. راستای  $\delta u^1: \delta u^2$  بر یک سطح مزدوج راستای  $du^1: du^2$  است اگر و فقط اگر

$$b_{ij} du^i \delta u^j = 0. \quad (1.26)$$

برهان. نقش کروی بردار  $d\mathbf{r} = du^i \mathbf{r}_i$  با راستای  $du^1: du^2$  عبارت است از  $\mathcal{S}(d\mathbf{r})$ . بردار  $\delta \mathbf{r} = \delta u^i \mathbf{r}_i$  متعامد به  $\mathcal{S}(d\mathbf{r})$  است اگر و فقط اگر

$$\delta \mathbf{r} \mathcal{S}(d\mathbf{r}) = 0.$$

اما

$$\delta \mathbf{r} \mathcal{S}(d\mathbf{r}) = g_{ij} \delta u^i (-b_k^j du^k) = -b_{ik} \delta u^i du^k = -(b_{ij} du^i \delta u^j),$$

که (۱.۲۶) را به دست می دهد.

یک نتیجه فوری این قضیه عبارت است از

نتیجه ۱. راستای  $\delta u^1: \delta u^2$  مزدوج  $du^1: du^2$  است اگر و فقط اگر  $du^1: du^2$  مزدوج  $\delta u^1: \delta u^2$  باشد.

این مطلب از تقارن ضرایب  $b_{ij}$  نتیجه می شود

به خاطر تقابل ازدواج، می توان صرفاً از جفت راستاهای مزدوج سخن گفت. در حالت خاص، در یک نقطه سهموی، جفت راستاهای مزدوج آنها و فقط آنها بی هستند که راستای استثنایی را شامل اند.

حال به توصیف هندسی ازدواج می‌پردازیم. منحنی  $\mathcal{C}$  به معادله

$$u^i = u^i(t)$$

بر سطح  $\mathcal{F}$  به معادله

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2),$$

و سطح گسترده‌ی مماس بر  $\mathcal{F}$  در امتداد  $\mathcal{C}$  را در نظر می‌گیریم (ر.ک. زیر بخش ۱۰۲۳).

قضیه ۲. راستاهای مولدهای مستقیم الخط سطح گسترده‌ی مماس بر  $\mathcal{F}$  در امتداد  $\mathcal{C}$  باراستای منحنی  $\mathcal{C}$  در هر نقطه از منحنی مزدوج است.

برهان. سطح گسترده‌ی مورد نظر پوش خانواده‌ی یک پارامتری از صفحات

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))] \mathbf{m}(u^1(t), u^2(t)) = 0$$

به پارامتر  $t$  است. اگر مشتق در راستای منحنی را با  $d$  نشان دهیم، معلوم می‌شود که مشخص خانواده‌ای که از نقطه ثابت دلخواه  $P$  می‌گذرد در دستگاه معادلات

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{m} = 0,$$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) d\mathbf{m} = 0$$

صدق می‌کند. در نتیجه، طبق نتایج ۲۰۱۳، دارای راستای بردار  $d\mathbf{m} \times \mathbf{m}$  است (به یاد بیاورید که  $\mathbf{m} d\mathbf{r} = 0$ ). نقش کروی بردار مماس بر منحنی  $d\mathbf{r}$  عبارت است از  $\mathcal{S}(d\mathbf{r}) = d\mathbf{m}$  چون

$$(d\mathbf{m} \times \mathbf{m})\mathcal{S}(d\mathbf{r}) = d\mathbf{m} \mathbf{m} d\mathbf{m} = 0,$$

راستای مشخص خانواده صفحات (یا مولد سطح گسترده‌ی مماسی) به  $\mathcal{S}(d\mathbf{r})$  متعامد بوده، و حکم ثابت می‌باشد.

این خاصیت راستاهای مزدوج اغلب به عنوان تعریف به کار می‌رود.

حال نتیجه ساده زیر از قضیه ۱ را ذکر می‌کنیم.

نتیجه ۲. منحنیهای مختصات در  $P$  راستاهای مزدوج دارند اگر و فقط اگر در  $P$ ،  $b_{12} = 0$ .

امثله و تمرین

۱. برای تکمیل محاسبات این بخش، ثابت کنید

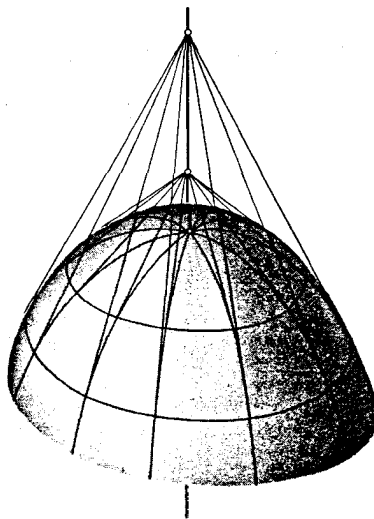
$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = K.$$

۲. ثابت کنید راستاهای نصف النهارات و دایره عرض جغرافیایی یک سطح دوار در نقاط مشترکشان مزدوجند.
۳. ثابت کنید راستای هر خط جاری یک سطح گسترده با هر راستای روی سطح در هر نقطه از خط جاری مزدوج است.
۴. ثابت کنید که اگر هر جفت راستای مزدوج در نقطه  $P$  متعامد باشند، نقطه  $P$  یک نقطه نافی است.
۵. راستاهای مزدوج راستای یک خط جاری مارپیچ گون را در نقطه خط جاری بیابید.
۶. همین مسئله را برای یک سطح خط دار ناگسترده حل کنید.

#### ۲۰۲۶ تورهای مزدوج

یک تور مرکب از دو خانواده از منحنیها، هریک وابسته به یک پارامتر، را یک تور مزدوج نامند اگر در هر نقطه راستاهای منحنیهای متعلق به دو خانواده مزدوج باشند. از تعریف تورهای مزدوج و نتیجه بخش پیش فورا "قضیه زیر به دست می آید.

قضیه. تور خطوط مختصات روی سطح یک تور مزدوج است اگر و فقط اگر در هر نقطه  $(u^1, u^2)$



شکل ۱۰۲۶

$$(20.26) \quad b_{12}(u^1, u^2) = 0.$$

با استفاده از قضیه ۲ زیربخش پیش، ساختن هندسی زیر برای تورهای مزدوج روی یک سطح به دست می آید (شکل ۱۰۲۶):

خط مستقیم دلخواه  $l$  را در فضا اختیار می کنیم. فرض کنیم یک خانواده از منحنیها از مقاطع عرضی سطح با صفحات ماربر این خط، و خانواده دیگر از منحنیهای تماس سطح با سطوح مخروطی مماس که رئوسشان بر خط  $l$  واقعند تشکیل شده باشد. تور حاصل به این طریق واقعا "یک تور مزدوج است، زیرا مماسهای وارد بر مقاطع عرضی سطح به وسیله صفحات خطوط جاری سطح مخروطی نظیر می باشند.

### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید خطوط مختصات روی سطح

$$r = u(u^1) + v(u^2),$$

که در آن  $u$  و  $v$  توابع برداری از کلاس  $C_2$  و از یک متغیرند، یک تور مزدوج تشکیل می دهند.

۲. بر مخروط گون  $z = u^2$ ،  $x = u^1 \phi(u^2)$ ،  $y = u^1 \psi(u^2)$ ، منحنیهای بیابید که با مسیرهای قائم خطوط جاری یک تور مزدوج تشکیل دهند.

حل. با محاسبه اولین فرم اساسی، معلوم می شود که

$$g_{11} = [\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2$$

$$g_{12} = u^1 [\phi(u^2) \phi'(u^2) + \psi(u^2) \psi'(u^2)]$$

$$g_{22} = (u^1)^2 ([\phi'(u^2)]^2 + [\psi'(u^2)]^2) + 1.$$

چون خطوط جاری به معادلات ثابت  $u^2 = \text{اند}$ ، می توان برای آنها راستاهای  $\delta u^1 = 1$ ،  $\delta u^2 = 0$  اختیار کرد و، طبق تمرین ۱، ۵۰۱۶، معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم زیر را خواهیم داشت:

$$g_{11} du^1 + g_{12} du^2 = 0$$

یا

$$([\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2) du^1 + u^1 [\phi(u^2) \phi'(u^2) + \psi(u^2) \psi'(u^2)] du^2 = 0.$$

لذا، می توان برای راستای مسیرهای قائم قرارداد

$$du^1 = u^1 [\phi(u^2) \phi'(u^2) + \psi(u^2) \psi'(u^2)]$$

$$du^2 = -([\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2).$$

اما ضرایب دومین فرم اساسی عبارتند از

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = [\phi'(u^2)\psi(u^2) - \phi(u^2)\psi'(u^2)]g^{-1/2}$$

$$b_{22} = u^1[\phi''(u^2)\psi(u^2) - \phi(u^2)\psi''(u^2)]g^{-1/2};$$

در نتیجه، راستای مزدوج  $\delta u^1: \delta u^2$  به  $du^1: du^2$  در معادله

$$(\phi'\psi - \phi\psi')(du^1\delta u^2 - du^2\delta u^1) + u^1(\phi''\psi - \phi\psi'')du^2\delta u^2 = 0$$

صدق می‌کند. با گذاردن مقادیر فوق و حذف شناسه  $u^2$  و توجه به اینکه  $\phi$  و  $\psi$  توابعی از  $u^2$  اند، داریم

$$(\phi'\psi - \phi\psi')u^1(\phi\phi' + \psi\psi')\delta u^2 - (\phi^1\psi - \phi\psi^1)(\phi^2 + \psi^2)\delta u^1 - u^1(\phi''\psi - \phi\psi'')(\phi^2 + \psi^2)\delta u^2 = 0$$

یا

$$u^1[(\phi'\psi - \phi\psi')(\phi\phi' + \psi\psi') - (\phi''\psi - \phi\psi'')(\phi^2 + \psi^2)]\delta u^2 - (\phi^1\psi - \phi\psi^1)(\phi^2 + \psi^2)\delta u^1 = 0.$$

دیگر آنکه، داریم

$$\frac{\phi\phi' + \psi\psi'}{\phi^2 + \psi^2}\delta u^2 - \frac{\phi''\psi - \phi\psi''}{\phi'\psi - \phi\psi'}\delta u^2 - \frac{\delta u^1}{u^1} = 0,$$

که معادله دیفرانسیل خانواده مورد سوال است. با انتگرالگیری، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2} \ln(\phi^2 + \psi^2) - \ln(\phi'\psi - \phi\psi') - \ln u^1 = \ln C$$

یا

$$\frac{\sqrt{[\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2}}{\phi'(u^2)\psi(u^2) - \phi(u^2)\psi'(u^2)} = cu^1,$$

که در آن  $c$  پارامتر خانواده است. محاسبات را با یافتن ضرایب فرمهای اساسی کامل کنید.

۳. نصف النهارات و دوائر عرض جغرافیایی یک سطح دوار یک تور مزدوج تشکیل می‌دهند.

توجه کنید که این تور به طریقه توصیف شده در این بخش با انتخاب محور دوران به عنوان خط زمینه  $l$  در ساختن به دست می‌آید.

۴. ساختن توصیف شده را، با استفاده از یک مماس بر کره به عنوان خط  $l$ ، انجام

می‌دهیم. منحنیهایی که تور مزدوج در این حالت را می‌سازند چیستند؟

۵. ثابت کنید منحنیهای ثابت  $x$  و منحنیهای ثابت  $y$  یک تور مزدوج بر سطح

$$z = ax^2 + by^2$$

می‌سازند.

۶. بر بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

منحنیهایی را بیابید که با بیضیهایی ثابت  $y =$  یک تور مزدوج تشکیل دهند.

۷. ثابت کنید منحنیهایی مختصات روی بیضیگون

$$x = a \cos u^1 \cos u^2, \quad y = b \cos u^1 \sin u^2, \quad z = c \sin u^1$$

یک تور مزدوج می سازند.

### ۳۰۲۶ راستاهای مجانبی

هر راستای خود مزدوج روی سطح یک راستای مجانبی نامیده می شود.

بنابراین، راستای استثنایی در یک نقطه سهموی (که به ازای آن  $\mathcal{P}(dr) = 0$ ، و راستای مزدوج دلخواه است) یک راستای مجانبی نیز هست.

از قضیه بخش قبل فوراً نتیجه می شود که راستای  $du^1:du^2$  یک راستای مجانبی است

اگر و فقط اگر

$$b_{ij} du^i du^j = 0. \quad (30.26)$$

از مقایسه این با قضایای ۱۰۲۵ و ۲۰۲۵، می توان گفت که

۱. یک راستا روی سطح مجانبی است اگر و فقط اگر انحنا قائم در این راستا صفر باشد.
۲. یک راستا در  $P$  روی سطح مجانبی است اگر و فقط اگر صفحه بوسان در  $P$  از هر منحنی با این راستا در  $P$  که روی سطح بوده و در  $P$  انحنا ناصفر داشته باشد بر سطح در  $P$  مماس باشد.

قضیه. در یک نقطه هذلولوی سطح دوراستای مجانبی حقیقی متمایز وجود دارند؛ در یک نقطه سهموی که نقطه تخت نباشد یک راستای مجانبی حقیقی وجود دارد؛ در یک نقطه بیضوی هیچ راستای مجانبی وجود ندارد؛ در یک نقطه تخت هر راستا مجانبی می باشد.

برهان. این نتیجه فوری معادله (۳۰۲۶) است، که معادله ای است درجه دو نسبت به  $du^1:du^2$ . به شرط صفر نبودن همه ضرایب، دو جواب حقیقی داریم اگر  $0 < b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = b$ ، یک جواب اگر  $b = 0$ ، و هیچ جواب حقیقی اگر  $b < 0$ . در حالت نقطه تخت،  $b_{ij} = 0$  و (۳۰۲۶) به صورت اتحاد درمی آید.

نتیجه زیر حاصلی است از (۳۰۲۶).

نتیجه. منحنی مختص  $u^1$  (یعنی، ثابت  $u^2 =$ ) در  $P$  راستای مجانبی دارد اگر و فقط اگر در این نقطه

$$(۴۰۲۶) \quad b_{11} = 0.$$

به همین نحو، خط  $u^2$  دارای راستای مجانبی است اگر و فقط اگر

$$(۴۰۲۶)' \quad b_{22} = 0.$$

برهان. درواقع، خط  $u^1$  دارای راستای معین شده به وسیلهٔ دیفرانسیل‌های  $du^1 = 1, du^2 = 0$  است، که پس از گذاردن در (۳۰۲۶) رابطهٔ (۴۰۲۶) نتیجه می‌شود. برای خط دیگر داریم  $du^1 = 0, du^2 = 1$  و (۴۰۲۶)' به دست می‌آید.

امثله و تمرین

۱. ثابت کنید راستاهای مجانبی بر سطح  $F(x, y, z) = 0$  به وسیلهٔ معادلات زیر معین می‌شوند:

$$(۵۰۲۶) \quad \begin{aligned} F_x dx + F_y dy + F_z dz &= 0, \\ F_{xx} dx^2 + F_{yy} dy^2 + F_{zz} dz^2 + 2F_{xy} dx dy + 2F_{xz} dx dz + 2F_{yz} dy dz &= 0, \\ \text{یا، خلاصه‌تر،} \quad dF = 0, d^2F &= 0 \end{aligned}$$

۲. ثابت کنید راستای مجانبی کره نمای (۱۲۰۱۱) در معادلهٔ

$$(du^1)^2 - \sin^2 u^1 du^2 = 0$$

صدق می‌کند.

۳. راستاهای مجانبی روی زنجیرگون (۱۱۰۱۱) را بیابید.

۴. ثابت کنید راستاهای مجانبی بر یک سطح دوار نسبت به نصف النهار متقارن اند.

#### ۴۰۲۶ خطوط مجانبی

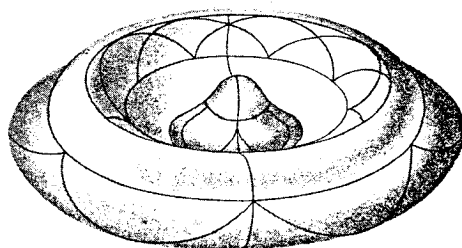
یک منحنی بر یک سطح که در هر نقطه راستای مجانبی داشته باشد یک خط مجانبی نام دارد.

لذا، معادلات خطوط مجانبی جوابهای معادلهٔ (۳۰۲۶) راستاهای مجانبی است که به عنوان معادلهٔ دیفرانسیل با متغیرهای  $u^1, u^2$  گرفته شده باشد. با استفاده از قضایای مناسب از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، قضیهٔ زیر به دست می‌آید.

قضیه. از هر نقطهٔ هذلولوی یک سطح از کلاس  $C_3$  دو خط مجانبی می‌گذرد. هیچ خط

مجانبی از یک نقطه بیضوی نمی‌گذرد. یک خط سهموی، یعنی خطی مرکب از نقاط سهموی، که یک قلمرو با انحنا ی گاوسی مثبت را از یک قلمرو با انحنا ی گاوسی منفی جدا می‌کند خود می‌تواند یک خط مجانبی باشد؛ و در این صورت، خطوط واقع در قلمرو با انحنا ی منفی به خط سهمویی نزدیک شوند که بر آن مماس است (در این صورت، خط سهموی یک جواب منفرد (۳۰۲۶) است)، یا ممکن است یک خط مجانبی نباشد، که در این صورت، مجموعه نقاط بازگشت خطوط مجانبی است که در قلمرو با انحنا ی گاوسی منفی قرار دارند.

وضع با سطح دوار حاصل از دوران سینوس گون  $z = \cos x$  حول محور  $z$  (در شکل ۲۰۲۶) توضیح داده شده است. بخشهای  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$  و  $\frac{3}{2}\pi < x < \pi$  از سینوس گون



شکل ۲۰۲۶

قلمروهایی با انحنا ی گاوسی مثبت را تولید می‌کنند؛ بخش  $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$  قلمرو با انحنا ی گاوسی منفی را تولید می‌کند. منحنیهای  $x = \frac{1}{2}\pi$ ،  $x = \frac{3}{2}\pi$  خطوط مجانبی نیستند، زیرا در صفحه‌ای واقعند که بر سطح مماس نیست؛ و لذا، راستای منحنی یک راستای مجانبی نمی‌باشد. منحنی  $x = \pi$  یک خط مجانبی است.

### امثله و تمرین

۱. یک خط مستقیم بر یک سطح همواره یک خط مجانبی است. زیرا داریم  $\kappa = 0$ ؛ و در نتیجه،  $k_n = 0$ .
۲. همانطور که قبلاً دیدیم (مثال ۳، ۱۰۲۵)، مارپیچ واقع بر یک مارپیچ گون یک خط مجانبی است.
۳. ثابت کنید هر منحنی که یک خط مجانبی و یک خط ژئودزیک یک سطح است باید خطی مستقیم باشد.
۴. ثابت کنید خطوط مجانبی کره‌نمای (۱۲۰۱۱) عبارتند از

$$u^2 - c = \pm \ln \tan(u^{1/2}).$$

نشان دهید که، وقتی  $u^1 \rightarrow \infty$ ، خط مجانبی بی‌نهایت بار حول محور کره‌نما می‌چرخد، و راستای مماس بر خط مجانبی به راستای محور میل می‌نماید.

۵. خطوط مجانبی سطح

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u + v$$

را بیابید. این یک سطح خط‌دار شبیه یک مارپیچ گون است، ولی خطوط جاری بر محور عمود نیستند (این خطوط زاویه  $45^\circ$  می‌سازند).

۶. خطوط مجانبی سطح

$$z = \frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4}$$

را بیابید. ثابت کنید این خطوط بر استوانه‌های

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{ثابت}$$

قرار دارند.

۷. خطوط مجانبی چنبره را بیابید. چه وقت خطوط مجانبی بسته‌اند؟

۸. خطوط مجانبی سطح

$$z = (y/x) \ln x$$

را یافته، و ثابت کنید این خطوط از یک خانواده خطوطی مستقیم‌اند.

۹. در نقطه هذلولوی  $P$  از سطح، فصل مشترک سطح با صفحه مماس بر سطح در  $P$  را

در نظر بگیرید. این فصل مشترک موضعا "از دو شاخه تشکیل شده است، هر کدام یک راستای مجانبی و لذا مماس به یکی از خطوط مجانبی ماربر  $P$ . ثابت کنید، روی یک سطح از کلاس  $C_3$ ، انحناى خط مجانب در  $P$ ،  $\frac{2}{3}$  ضربدر انحناى شاخه مماس این بخش است. (این مطلب را اول بار بلترامی<sup>۱</sup> ثابت کرد).

راهنمایی.  $P$  را مبداء و صفحه مماس را صفحه  $xy$  یک دستگاه مختصات در فرض گرفته، و سطح را موضعا "به شکل  $f(x, y) = 0$  نمایش دهید.

۱۰. یک منحنی در فضا داده شده است. هر نقطه از این منحنی را با خطی مستقیم به

مرکز کره بوسان در این نقطه وصل کنید. این خطوط یک سطح خط‌دار تشکیل می‌دهند. ثابت کنید مکان هندسی مراکز کرات بوسان یک خط مجانبی برای این سطح است. برای

جلوگیری از تباهی سطح یا منحنی چه فرضیهایی باید کرد؟

## ۵.۲۶ مختصات مجانبی

مختصات منحنی الخط بر یک سطح به طوری که منحنیهای مختصات خطوط مجانبی سطح باشند مختصات مجانبی نامیده می شوند.

قضیه. در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه هذلولوی از یک سطح از کلاس  $C_3$  می توان مختصات مجانبی معرفی کرد. مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  مختصات مجانبی اند اگر و فقط اگر دومین فرم اساسی به شکل

$$\text{II} = 2b_{12}(u^1, u^2) du^1 du^2 \quad (۶.۲۶)$$

باشد.

برهان. دستگاه مختصات موضعی دلخواه  $v^1, v^2$  را در نظر گرفته، و فرض می کنیم نقطه  $P_0$  به مختصات  $(v_0^1, v_0^2)$  یک نقطه هذلولوی باشد. در این صورت، در همسایگی  $P_0$ ، مبین دومین فرم اساسی منفی است، و دومین فرم اساسی خود می تواند به حاصل ضربی از دو عامل خطی تجزیه شود:

$$\text{II} = b_{ij} dv^i dv^j = (\alpha dv^1 + \beta dv^2)(\gamma dv^1 - \delta dv^2), \quad (۷.۲۶)$$

که در آن  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  تابع  $(v^1, v^2)$  بوده و  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . با تقلیل همسایگی، در صورت لزوم، می توان عاملهای انتگرالگیری  $\lambda(v^1, v^2)$  و  $\mu(v^1, v^2)$  برای این دو فرم خطی و دو تابع  $\phi^1(v^1, v^2)$  و  $\phi^2(v^1, v^2)$  را یافت به طوری که

$$\lambda(\alpha dv^1 + \beta dv^2) = d\phi^1, \quad \mu(\gamma dv^1 + \delta dv^2) = d\phi^2. \quad (۸.۲۶)$$

حال مختصات منحنی الخط  $u^1, u^2$  را با فرمولهای

$$u^1 = \phi^1(v^1, v^2), \quad u^2 = \phi^2(v^1, v^2)$$

معرفی می کنیم. ژاکوبی تبدیل

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(v^1, v^2)} = \lambda \mu \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

در  $P_0$  مخالف صفر است؛ و در نتیجه،  $u^1, u^2$  می توانند مختصات منحنی الخط منتظمی در همسایگی  $P_0$  باشند.

از رابطه (۷.۲۶) فوراً نتیجه می شود که، در مختصات جدید، دومین فرم اساسی عبارت است از

$$\Pi = \frac{1}{\lambda\mu} du^1 du^2;$$

لذا، به شکل (۶.۲۶) می باشد. اما این ایجاب می کند که، طبق نتیجه زیر بخش ۳.۲۶،  
 $u^1$  - خطوط و  $u^2$  - خطوط خطوطی مجانبی باشند.

تمرین

۱. ثابت کنید هرگاه یک خط مجانبی از یک سطح خطی مستقیم نباشد، آنگاه تاب خط مساوی  $\pm\sqrt{-K}$  است، که در آن  $K$  انحنای گاوسی در نقطه مفروض است. تابه‌ای دو خط مجانبی ماربر یک نقطه در این نقطه مختلف علامه‌اند.
- راهنمایی. از مختصات مجانبی در همسایگی نقطه مورد نظر استفاده کنید.
۲. ثابت کنید هرگاه خطوط مجانبی یک سطح در زاویه‌ای ثابت هم را قطع کنند، آنگاه انحنای گاوسی با مربع انحنای میانگین متناسب است.
۳. برای انحنای میانگین و انحنای گاوسی در مختصات مجانبی فرمولهایی بیابید.
۴. از تمرینهای دوزیر بخش پیش کدامها را می توان در مختصات مجانبی آسانتر حل کرد؟

## ۲۷ راستاهای اصلی و انحنای اصلی

### ۱.۲۷ راستاهای اصلی

راستای یک بردار مماس در نقطه  $P$  از یک سطح که با نقش کروی آن همخط باشد یک راستای اصلی در  $P$  نام دارد.

از اینرو، بردار مماس  $\mathbf{a}$  دارای راستای اصلی است اگر و فقط اگر

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{a} = 0. \quad (1.27)$$

بالاخص، برای راستای  $du^1:du^2$  می توان  $\mathbf{a} = du^i \mathbf{r}_i = d\mathbf{r}$  را اختیار کرد و شرط

(۱.۲۷) خواهد شد

$$\mathcal{S}(d\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = d\mathbf{m} \times d\mathbf{r} = 0. \quad (2.27)$$

قضیه. راستای اصلی  $du^1:du^2$  در معادله درجه دو زیر صدق می کند:

$$b_2^1(du^2)^2 + (b_1^1 - b_2^2) du^1 du^2 - b_2^1(du^1)^2 = 0. \quad (3.27)$$

دریک نقطه نافی، هر راستای یک راستای اصلی است؛ دریک نقطه غیر نافی، درست دو راستای اصلی متمایز وجود دارند.

برهان. با بیان شرط لازم و کافی (۲۰.۲۷) بر حسب مولفه‌های بردار، داریم

$$\begin{vmatrix} b_j^1 du^j & du^1 \\ b_j^2 du^j & du^2 \end{vmatrix} = 0,$$

که با (۳۰.۲۷) معادل است.

این حکم که هر راستا در یک نقطه نافی یک راستای اصلی است فوراً "از قضیه ۲ در

زیربخش ۷۰.۲۵ نتیجه می‌شود.

مبین فرم درجه دوم سمت چپ معادله (۳۰.۲۷) مساوی است با

$$-4b_2^1 b_1^2 - (b_1^1 - b_2^2)^2 = -4(b_2^1 b_1^2 - b_1^1 b_2^2) - (b_1^1 + b_2^2)^2 = 4(K - H^2) \leq 0.$$

بنابر (۱۴.۲۵)، این در نقاط غیر نافی یک عدد منفی است. در نتیجه، فرم درجه دوم

(۳۰.۲۷) تجزیه زیر را می‌پذیرد:

$$b_1^1 (du^2)^2 + (b_1^1 - b_2^2) du^1 du^2 - b_2^1 (du^1)^2 = (\alpha du^1 + \beta du^2)(\alpha^* du^1 + \beta^* du^2),$$

که در آن دو عامل فرمهایی خطی و حقیقی و مستقل خطی‌اند. لذا، معادله (۳۰.۲۷)

دو جواب متمایز دارد:  $du^1:du^2 = -\beta^*/\alpha^*$  و  $du^1:du^2 = -\beta/\alpha$  که راستاهای اصلی را معین می‌کنند. همانطور که بعداً ثابت می‌شود، این دو راستا متعامدند.

### امثله و تمرین

۱. تحقیق کنید که معادله (۳۰.۲۷) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

۲. نشان دهید که اگر سطح به معادله  $z = f(x, y)$  باشد، معادله راستاهای اصلی عبارت است از

$$[pqr - (1 + p^2)s] dx^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] dx dy + [(1 + q^2)s - pqt] dy^2 = 0,$$

که در آن

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

۳. ثابت کنید راستاهای نصف النهارات و دوائر عرض جغرافیایی یک سطح دوار راستاهای اصلی می‌باشند.

۴. ثابت کنید راستاهای اصلی بر مارپیچ گون (۱۳.۱۱) در نقطه معلوم  $(u^1, u^2)$  زاویه

بین خط جاری و مارپیچ ثابت  $u^1$  را نصف می‌کنند.

۵. ثابت کنید راستای یک خط جاری یک سطح گسترده‌نی همیشه یک راستای اصلی است.  
 ۶. به‌طور کلی، ثابت کنید یک راستای مجانبی در  $P$  یک راستای اصلی است اگر و فقط اگر  $P$  یک نقطهٔ سه‌موی باشد.

## ۲.۲۷ انحناهای اصلی

انحناهای قائم راستاهای اصلی یک سطح در یک نقطه انحناهای اصلی نام دارند. از اینرو، در یک نقطهٔ غیر نافی دو انحنا اصلی وجود دارند، هریک مربوط به یکی از راستاهای اصلی.

قضیهٔ ۱ (ردریگوز<sup>۱</sup>). بردار  $a$  از یک راستای اصلی و انحنا اصلی نظیر  $k$  در معادلهٔ

$$\mathcal{S}(a) = -ka \quad (4.27)$$

صدق می‌کند. بعکس، (۴.۲۷) شرطی کافی است برای آنکه  $a$  یک بردار از راستای اصلی و  $k$  انحنا اصلی مربوط به این راستا باشد.

برهان. شرط (۱.۲۷) معادل وجود ضریبی مانند  $k$  است به‌طوری که (۴.۲۷) برقرار باشد. با ضرب اسکالر (۴.۲۷) در  $a$ ، به دست می‌آوریم

$$k = -\frac{\mathcal{S}(a)a}{a^2},$$

که، طبق (۶.۲۵)، یعنی  $k$  انحنا قائم برای راستای  $a$  است، و قضیه ثابت می‌شود.

با جایگذاری  $a = dr$ ، به دست می‌آوریم

$$\mathcal{S}(dr) = dm = -k dr \quad (5.27)$$

یا

$$b_j^i du^j = k du^i$$

یا، بالاخره،

$$(b_j^i - \delta_j^i k) du^j = 0. \quad (6.27)$$

رابطهٔ دوم را می‌توان دستگاهی از معادلات خطی گرفت که راستای اصلی  $du^1:du^2$

را معین می‌کند، مشروط بر اینکه  $k$  انحناى اصلی نظیر باشد. چون این دستگاه‌جوابهای ناصفرى نسبت به  $du^1$  و  $du^2$  دارد (زیرا راس‌تاهای اصلی همیشه وجود دارند)، باید داشته باشیم

$$\begin{vmatrix} b_1^1 - k & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 - k \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$k^2 - (b_1^1 + b_2^2)k + b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = 0$$

یا، بالاخره،

(۷۰۲۷)

$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

لذا، دو انحناى اصلی  $k_1, k_2$  جوابهای معادله درجه دو (۷۰۲۷) اند. طبق (۱۴۰۲۵)، این معادله درجه دو دو جواب حقیقی متمایز در یک نقطه غیر نافی، و دو جواب منطبق برهم در یک نقطه نافی دارد. معادلات (۶۰۲۷) و (۷۰۲۷) به‌ما راه دیگری برای یافتن راس‌تاهای اصلی می‌دهد. ابتدا، با حل معادله (۷۰۲۷)، انحناهای اصلی را پیدا می‌کنیم؛ سپس، با گذاردن یکی از انحناهای اصلی به‌جای  $k$  در (۶۰۲۷)، راستای اصلی نظیر را به‌عنوان یک جواب دستگاه معادلات خطی می‌یابیم. با استفاده از خواص معلوم جوابهای معادلات درجه دو، قضیه زیر فوراً به‌دست می‌آید.

قضیه ۲. انحناهای اصلی یک سطح در یک نقطه نافی برابر، و در سایر نقاط متمایز هستند.

میانگین حسابی انحناهای اصلی در نقطه  $P$  از یک سطح مساوی انحناى میانگین سطح در آن نقطه است:

(۸۰۲۷)

$$k_1 + k_2 = 2H.$$

حاصل ضرب انحناهای اصلی مساوی انحناى گاوسی سطح است:

(۹۰۲۷)

$$k_1 k_2 = K.$$

فرمولهای (۸۰۲۷) و (۹۰۲۷) اغلب به‌عنوان تعاریف انحناى میانگین و انحناى گاوسی سطح به‌کار می‌روند.

امثله و تمرین

۱. معادله (۶۰۲۷) معادل است با

(۱۰۰۲۷)

$$(b_{ij} - kg_{ij}) du^j = 0.$$

۲. انحناهای اصلی سطح گسترده

$$r = p(u^1) + u^2 t(u^1)$$

را با این فرض که  $u^1$  پارامتر طبیعی منحنی  $r = p(u^1)$  است بیابید.  
[ حل. همانطور که می‌دانیم، در این حالت داریم

$$m = \varepsilon b,$$

که در آن  $b$  بردار قائم دوم منحنی است، و  $\varepsilon = -\operatorname{sgn} u^2$ . بعلاوه،

$$r_1 = t + u^2 \kappa n, \quad r_2 = t, \quad r_1 \times r_2 = -u^2 \kappa b.$$

و

$$m_1 = -\varepsilon \tau n, \quad m_2 = 0.$$

در نتیجه،

$$m_1 \times r_2 + r_1 \times m_2 = -\varepsilon \tau n \times t = \varepsilon \tau b = -\frac{\varepsilon \tau}{u^2 \kappa} r_1 \times r_2.$$

اما

$$m_1 \times r_2 + r_1 \times m_2 = -2H r_1 \times r_2.$$

بنابراین،

$$H = \frac{\varepsilon \tau}{2u^2 \kappa} = -\frac{\tau}{2|u^2| \kappa}.$$

همچنین، داریم  $K = 0$ . لذا، انحناهای اصلی در معادله

$$k^2 + \frac{\tau}{|u^2| \kappa} k = 0$$

صدق می‌کند؛  $k_1 = 0, k_2 = -\tau/(|u^2| \kappa)$ .

ثابت کنید انحناهای اصلی  $k_1 = 0$  بردارهای خط جاری سطح مربوط است.

۳. انحناهای اصلی سطح

$$x = \cos u^1 - (u^1 + u^2) \sin u^2, \quad y = \sin u^1 + (u^1 + u^2) \cos u^2, \quad z = u^1 + 2u^2$$

را بیابید.

۴. انحناهای گاوسی و انحناهای میانگین سطح

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = u^1 + u^2$$

را بیابید.

۵. ثابت کنید قدر مطلق یکی از انحناهای اصلی یک سطح دوار در نقطه  $P$  مساوی

انحنای نصف النهار در  $P$  است، درحالی که قدر مطلق دیگری مساوی عکس تصویر

پاره خط واصل بین  $P$  و تصویرش روی محور دوران بر قائم به سطح در  $P$  می باشد. اگر تحذب نصف النهار در  $P$  از محور دور شود، هردو انحناى اصلی متحدالعلامه اند؛ در غیر این صورت، مختلف العلامه می باشند.

۶. انحناهای اصلی زنجیرگون (۱۱.۱۱) را بیابید.

۷. انحناهای گاوسی و میانگین سطح

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \quad y = v^3 - 3v - 3u^2v, \quad z = 3(u^2 + v^2)$$

را بیابید.

### ۳.۲۷ تعامد راستاهای اصلی

قضیه ۱. در یک نقطه غیر نافی راستاهای اصلی متعامدند.

برهان. ابتدا فرض می کنیم راستای  $u^2$  - منحنی یک راستای اصلی نباشد. پس، برای هر دوراستای اصلی،  $du^1 \neq 0$ ؛ در نتیجه،  $b_2^1 \neq 0$ ، و معادله (۳.۲۷) را می توان به

$$b_2^1 \left( \frac{du^2}{du^1} \right)^2 + (b_1^1 - b_2^2) \frac{du^2}{du^1} - b_1^2 = 0$$

تبدیل کرد. برای یک راستای اصلی دیگرانسیلهها را با  $du^1, du^2$ ، و برای راستای دیگر با  $\delta u^1, \delta u^2$  نشان می دهیم. در این صورت، نسبت های  $du^2/du^1$  و  $\delta u^2/\delta u^1$  ریشه های این معادله اند، و داریم

$$\frac{du^2}{du^1} + \frac{\delta u^2}{\delta u^1} = \frac{b_2^2 - b_1^1}{b_2^1}$$

و

$$\frac{du^2}{du^1} \frac{\delta u^2}{\delta u^1} = -\frac{b_1^2}{b_2^1},$$

که معادلات زیر را نتیجه می دهند:

$$(11.27) \quad b_2^1 (\delta u^1 du^2 + du^1 \delta u^2) = (b_2^2 - b_1^1) du^1 \delta u^1$$

و

$$(12.27) \quad b_2^1 du^2 \delta u^2 = -b_1^2 du^1 \delta u^1.$$

از اینرو،

$$\begin{aligned} b_2^1 (g_{ij} du^i \delta u^j) &= b_2^1 [g_{11} du^1 \delta u^1 + g_{12} (du^1 \delta u^2 + \delta u^1 du^2) + g_{22} du^2 \delta u^2] \\ &= [g_{11} b_2^1 + g_{12} (b_2^2 - b_1^1) - g_{22} b_1^2] du^1 \delta u^1 \\ &= (b_{12} - b_{21}) du^1 \delta u^1 = 0. \end{aligned}$$

لذا، در این حالت، دو راستای اصلی متعامند. اکنون حالتی را که  $u^2$  - منحنی یک راستای اصلی است در نظر می‌گیریم. در این صورت، راستای  $du^1 = 0, du^2 = 1$  باید در معادله راستاهای اصلی (۳۰.۲۷) صدق کند. در نتیجه،  $b_2^1 = 0$  و  $\delta u^1, \delta u^2$  در معادله

$$(b_1^1 - b_2^2) \delta u^2 - b_1^2 \delta u^1 = 0$$

صدق می‌کند. با فرض  $b_2^1 = b_1^2 - b_2^2$ ، داریم  $\delta u^2 = b_1^2$ ، و

$$g_{ij} du^i du^j = g_{21}(b_1^1 - b_2^2) + g_{22}b_1^2 = -g_{11}b_2^1 + g_{21}(b_1^1 - b_2^2) + g_{22}b_1^2,$$

زیرا در اینجا  $b_2^1 = 0$ . اما عبارت اخیر مساوی است با  $-b_{12} + b_{21} = 0$ . لذا، راستاهای اصلی در این حالت نیز متعامد می‌باشند.

تعامد راستاهای اصلی ایجاب می‌کند که راستاهای اصلی مزدوج باشند. در واقع، طبق تعریف، نقش کروی راستای اصلی خود این راستای اصلی است. لذا، به راستای دیگر متعامد می‌باشد.

**قضیه ۲.** دو منحنی مختصات در یک نقطه غیر نافی راستاهای اصلی اند اگر و فقط اگر در  $P$  داشته باشیم

$$g_{12} = b_{12} = 0, \quad b_{11} = k_1 g_{11}, \quad b_{22} = k_2 g_{22}.$$

برهان. رابطه  $g_{12} = 0$  از قضیه ۱ نتیجه می‌شود؛ طبق نتیجه ۱۰.۲۶ و مزدوج بودن راستاهای اصلی،  $b_{12} = 0$ . پس از پایین آوردن اندیسها در (۶۰.۲۷) و قرار دادن  $du^1 = 1, du^2 = 0, k = k_1$ ، به دست می‌آوریم  $b_{11} = k_1 g_{11}$ . با جایگذاری  $b_{22} = k_2 g_{22}$ ، خواهیم داشت  $du^1 = 0, du^2 = 1, k = k_2$ .

بعکس، شرایط (۱۳.۲۷) ایجاب می‌کنند که دیفرانسیلها در راستای خطوط مختصات در (۶۰.۲۷) صدق کنند، بدین معنی که راستاهای منحنیه‌های مختصات راستاهای اصلی می‌باشند.

تمرین

ثابت کنید راستاهای اصلی تنها جفت راستاهایی هستند که هم مزدوج و هم متعامدند.

#### ۴۰.۲۷ قضیه اوپلر

فرض کنیم  $e_1$  و  $e_2$  بردارهای یک‌ه‌ دو راستای اصلی سطح در نقطه غیر نافی  $P$  باشند. این بردارها، طبق نتایج بخش قبل، متعامدند. در حالتی که  $P$  یک نقطه نافی است،  $e_1$  و  $e_2$  را دو بردار یک‌ه‌ مماس متعامد دلخواه می‌گیریم.

طبق قضیه ۱ از ۲۰.۲۷، داریم

$$\mathcal{P}(e_1) = -k_1 e_1, \quad \mathcal{P}(e_2) = -k_2 e_2.$$

که در آن  $k_1$  و  $k_2$  به ترتیب انحناهای اصلی نظیر راستاهای  $e_1$  و  $e_2$  اند. در صفحه مماس در  $P$  راستایی اختیار می‌کنیم که با راستای بردار  $e_1$  زاویه  $\alpha$  بسازد. بردار یک‌ه  $e$  این راستا از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$e = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2.$$

بعلاوه، از (۵.۲۵) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{S}(e) = \cos \alpha \mathcal{S}(e_1) + \sin \alpha \mathcal{S}(e_2) = -k_1 \cos \alpha e_1 - k_2 \sin \alpha e_2.$$

قضیه (اولر). انحنا قائم در راستایی که با راستای اصلی نظیر به انحنا اصلی  $k_1$  زاویه  $\alpha$  می‌سازد مساوی است با

$$k_n = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha. \quad (۱۴.۲۷)$$

برهان. طبق (۶.۲۵)، داریم

$$\begin{aligned} k_n &= -\frac{e \cdot \mathcal{S}(e)}{e^2} = -e \cdot \mathcal{S}(e) \\ &= -(\cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2)(-k_1 \cos \alpha e_1 - k_2 \sin \alpha e_2) \\ &= k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

که برهان را تمام می‌کند.

امثله و تمرین

۱. میانگین حسابی انحناهای قائم برای هر دوراستای متعامد مساوی انحنا میانگین در نقطه مفروض است. درواقع، فرض کنیم یکی از راستاها با راستای اصلی نظیر به انحنا اصلی  $k_1$  زاویه  $\phi$  بسازد. طبق قضیه اولر، داریم

$$\begin{aligned} k_n(\phi) &= k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi, \\ k_n(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) &= k_1 \cos^2(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) + k_2 \sin^2(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) = k_1 \sin^2 \phi + k_2 \cos^2 \phi, \end{aligned}$$

که از آنجا

$$k_n(\phi) + k_n(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) = k_1 + k_2 = 2H.$$

۲. با اثبات اینکه میانگین حسابی انحناهای قائم برای  $m$  راستای نتیجه فوق را تعمیم دهید.

۳. ثابت کنید نقاط پایان بردارهای انحنا در  $P$  همه منحنیها بر سطح ماربر نقطه  $P$  سطحی را جارو می‌کنند که دارای معادله ضمنی

$$z(x^2 + y^2) = k_1 x^2 + k_2 y^2$$

نسبت به یک دستگاه مختصات در فضا به مبدا  $P$  است که محور  $z$  آن راستای بردار قائم  $m$  در  $P$  است، و راستای محورهای  $x$  و  $y$  راستای اصلی سطح در  $P$  به ترتیب نظیر به انحناهای اصلی  $k_1$  و  $k_2$  می باشند.

راهنمایی. از قضایای اوپلر و مونیه استفاده کنید.

۴. ثابت کنید هرگاه نقطه  $P$  یک نقطه نافی باشد، سطح تمرین قبل یک صفحه است.

۵. ثابت کنید راستاهایی که باز راستای اصلی زوایای  $x$  و  $x'$  می سازند مزدوج اند اگر و فقط اگر

$$(15.27) \quad k_1 \cos \alpha \cos \alpha' + k_2 \sin \alpha \sin \alpha' = 0.$$

به عنوان نتیجه، معادله راستاهای مجانبی

$$(16.27) \quad k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha = 0$$

را به دست آورید.

۶. معادله راستاهای مجانبی به شکل  $(16.27)$  نتیجه می دهد که

$$\tan^2 \alpha = -k_2/k_1.$$

لذا، در یک نقطه هذلولوی دو جواب

$$\alpha_2 = \arctan \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}} \quad \text{و} \quad \alpha_1 = \arctan \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}$$

داریم، زیرا  $k_1 k_2 < 0$ ؛ و در نتیجه،  $-k_2/k_1 > 0$ . این نشان می دهد که راستای

اصلی زاویه بین راستاهای مجانبی رانصف می کند (قس. تمرین ۴، ۱۰.۲۷).

۷. ثابت کنید در یک نقطه سهموی یکی از انحناهای اصلی صفر بوده و راستای اصلی تنه راستای مجانبی می باشد.

۸. ثابت کنید هرگاه صفحه  $(x, y)$  بر سطح

$$z = f(x, y)$$

در  $(0, 0, 0)$  مماس بوده و محورهای  $x$  و  $y$  دارای راستاهای اصلی باشند، بسط تیلور  $z$  عبارت است از

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial k_1}{\partial x} x^3 + 3 \frac{\partial k_1}{\partial y} x^2 y + 3 \frac{\partial k_2}{\partial x} x y^2 + \frac{\partial k_2}{\partial y} y^3 \right)$$

که در آن مقادیر انحناهای اصلی  $k_1, k_2$  و مشتقات جزئی آنها در مبدا دستگاه مختصات گرفته می شوند.

## ۵.۲۷ خواص اکستریمال منحنیهای اصلی

قضیه. انحناهای اصلی  $k_1$  و  $k_2$  در نقطه  $P$  از یک سطح بیشترین و کمترین مقدار

انحنای قائم به ازای همه راستاها در این نقطه اند.

برهان. به خاطر قضیهٔ اولی، انحنای قائم در یک نقطه برای یک راستای مفروض یک تابع متناوب مشتقپذیر است با دورهٔ تناوب  $\pi$  از زاویه  $\alpha$  بین یکی از راستاهای اصلی و راستای مفروض. لذا، این تابع باید بیشترین و کمترین مقدار خود را در بازه  $[0, \pi)$  گیرد. اما این فقط می‌تواند در نقاطی رخ دهد که مشتق این تابع صفر است.

چون طبق (۱۲.۲۷)

$$k_n(\alpha) = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

داریم

$$\begin{aligned} k'_n(\alpha) &= -2k_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2k_2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2(k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

لذا، مگر آنکه  $k_1 = k_2$ ، و نقطه یک نقطهٔ نافی باشد، فقط دو راستای ممکن وجود دارند که به ازای آنها انحنای قائم می‌تواند یک مقدار اکسترمال بگیرد: یکی، که در آن  $\alpha = 0$  و  $\sin \alpha = 0$ ، یک راستای اصلی است، دیگری، که در آن  $\alpha = \pi/2$  و  $\cos \alpha = 0$ ، راستای اصلی دیگر است. مقادیر نظیر انحنای قائم، یعنی  $k_n(0) = k_1$ ،  $k_n(\pi/2) = k_2$ ، انحنای اصلی بوده، و برهان تمام است.

این خاصیت اکسترمال انحنای اصلی کرارا "به عنوان تعریف انحنای اصلی و راستاهای اصلی در نظر گرفته می‌شود.

تمرین

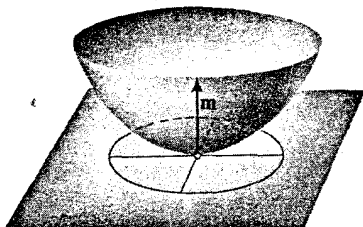
معادلات راستاهای اصلی را به عنوان راستاهایی که انحنای قائم بیشترین و کمترین مقدار را می‌گیرد به دست آورید.

۲۸ شاخص دوپن<sup>۱</sup>

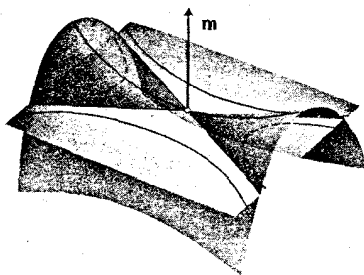
۱.۲۸ تعریف

در صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ  $P$  ساختن زیر را انجام می‌دهیم. بر هر خط مماس نقاطی را که در فاصله  $\sqrt{|k_n|}^{-1}$  از  $P$  قرار دارند اختیار می‌کنیم، که در آن  $k_n$  انحنای

قائم به راستای این خط است. این نقاط یک منحنی بر صفحه مماس تشکیل می‌دهند (شکلهای ۱۰۲۸، ۲۰۲۸) که شاخص دوین سطح در  $P$  نام دارد.



شکل ۱۰۲۸



شکل ۲۰۲۸

برای بررسی این شاخص، مختصات دکارتی  $\eta, \xi$  را با اختیار نقطه تماس  $P$  به عنوان مبدأ و بردارهای یکه  $e_1$  و  $e_2$  راستاهای اصلی را به عنوان بردارهای یکه محورهای  $\xi$  و  $\eta$  معرفی می‌کنیم.

قضیه. در نقطه بیضوی  $P$ ، شاخص دوین یک بیضی به معادله

$$(10.28) \quad |k_1|\xi^2 + |k_2|\eta^2 = 1$$

است. بخصوص، در یک نقطه نافی، شاخص یک دایره است.

در یک نقطه سهموی که یک نقطه تخت نباشد، شاخص دوین یک جفت خط به

معادلات

$$(20.28) \quad |k_1|\xi^2 = 1 \quad \text{و} \quad |k_2|\eta^2 = 1$$

است.

در یک نقطه هذلولوی، شاخص دوین از دو سهمی مزدوج به معادلات

$$(30.28) \quad k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = 1, \quad k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = -1$$

تشکیل شده است.

شاخص دوپین در نقاط تخت وجود ندارد.

برهان. طبق تعریف و فرمول اوپلر، معادله شاخص در مختصات قطبی  $(\rho, \alpha)$  خواهد بود

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} = \frac{1}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha|}}.$$

در نتیجه، معادلات پارامتری عبارتند از

$$(4.28) \quad \xi = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha|}}, \quad \eta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha|}}$$

با پارامتر  $\alpha$ . برای حذف  $\alpha$ ، دو معادله (۴.۲۸) را مربع کرده، اولی را در  $k_1$ ، دومی را در  $k_2$  ضرب نموده، و حاصل ضربها را با هم جمع می‌کنیم. با قدر مطلق گرفتن از نتیجه، به دست می‌آوریم

$$(5.28) \quad |k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2| = 1,$$

که معادله ضمنی شاخص می‌باشد.

در یک نقطه بیضوی،  $k_1$  و  $k_2$  متحدالعلامه‌اند؛ و لذا، این با (۱.۲۸) معادل است. این معادله یک بیضی است با نیم محورها  $|k_1|^{-1/2}$ ،  $|k_2|^{-1/2}$ ، یا یک دایره اگر  $k_1 = k_2$ .

در یک نقطه سهموی، یکی از انحناها صفر است، و معادله (۵.۲۸) به یکی از دو معادله (۲.۲۸) تحویل می‌شود.

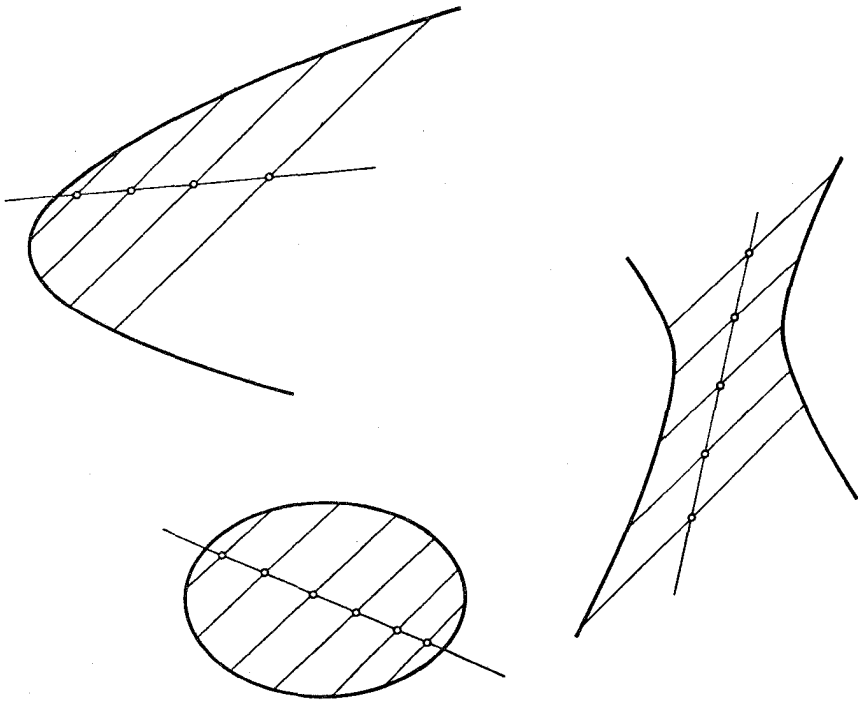
در یک نقطه هذلولوی،  $k_1$  و  $k_2$  مختلف‌العلامه بوده و (۵.۲۸) معادل تناوب دو معادله (۳.۲۸) است. اینها معادلات دو هذلولی مزدوج‌اند، یکی با نیم محور حقیقی  $|k_1|^{-1/2}$  و نیم محور موهومی  $|k_2|^{-1/2}$ ، و دیگری عکس اینها.

در یک نقطه تخت، همه انحناهای قائم صفر بوده و ساختن غیر ممکن است.

★ ۲.۲۸ شاخص دوپین و راستاهای مزدوج، اصلی، و مجانبی سطح

همانطور که دیدیم، شاخص در هر نقطه که نقطه تخت سطح نباشد وجود دارد، و یک بیضی، یک جفت هذلولی مزدوج یا یک سهمی تپا شده، یعنی یک جفت خط موازی، می‌باشد. حال مفاهیم راستاهای مزدوج، راستاهای اصلی، و راستاهای مجانبی یک مخروطی را مختصراً "یادآور می‌شویم".

یک مخروطی و یک راستا در صفحه مخروطی در نظر می‌گیریم (شکل ۳۰۲۸)، و همه وترهای مخروطی با راستای داده شده را اختیار می‌کنیم. نقاط میانی این وترها بر یک خط مستقیم واقعند. این خط در حالت بیضی یا هذلولی از مرکز مخروطی گذشته و، در حالت سهمی یا یک جفت خط موازی، موازی محور است. این خط را قطر مزدوج راستای مفروض می‌نامند، و راستای این قطر را *استای مزدوج راستای داده شده* نام دارد. از دواج راستاها در حالت بیضی یا هذلولی متقابل است. در حالت سهمی (یا یک جفت خط موازی)، راستای مزدوج راستای



شکل ۳۰۲۸

محور نامعین است، زیرا خطوط موازی محور فقط یک نقطه مشترک (هیچ نقطه مشترک) با منحنی ندارند، ولی راستای محور راستای مزدوج هر راستای دیگر است. لذا، برای حفظ تقابل، توجه می‌کنیم که هر راستا با راستای محور مزدوج است.

با محاسبه‌ای آسان می‌توان دریافت که دو راستا به شیبهای  $m$  و  $m'$  راستاهای مزدوج

بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هستند اگر و فقط اگر

$$(۶۰۲۸) \quad mm' = -b^2/a^2,$$

و راستاهای مزدوج هذلولیهای

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هستند اگر و فقط اگر

$$(۷۰۲۸) \quad mm' = b^2/a^2.$$

راستاهای محور طول و محور اقصر یک مخروطی مرکزی راستاهای اصلی مخروطی نام دارند. این راستاها مزدوج و دو بدو بر هم عمودند. در حالت یک سهمی یا یک جفت خط موازی، راستاهای اصلی جهت محور (یا خطوط) و جهت عمود می باشند. در همه حالات، جز دایره، راستاهای اصلی تنها جهتهای مزدوج عمود بر هم هستند. در حالت دایره، هر جفت راستای مزدوج بر هم عمودند و هر راستا را می توان یک راستای اصلی گرفت. راستای مجانبهای یک هذلولی یا راستای محور یک سهمی (یا خطوط یک جفت خط موازی) را به ترتیب راستای مجانبی هذلولی یا سهمی (یا سهمی تباه شده) می نامند. دو هذلولی مزدوج

$$(۸۰۲۸) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مجانبهای مشترک دارند؛ شیبهای راستاهای مجانبی عبارتند از

$$(۹۰۲۸) \quad m_1 = b/a, \quad m_2 = -b/a.$$

با استفاده از این مفاهیم نظریه مخروطیها، می توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه. راستاهای اصلی، راستاهای مجانبی، و راستاهای مزدوج بزرگ سطح در  $P$  بر راستاهای اصلی، راستاهای مجانبی، و راستاهای مزدوج شاخص دوین در این نقطه منطبق اند.

برهان. محورهای  $\xi$  و  $\eta$  بخش پیش بوضوح محورهای اصلی شاخص اند. از اینرو، راستاهای آنها راستاهای اصلی شاخص می باشند. طبق ساختن مذکور در بخش پیش، اینها راستاهای اصلی سطح می باشند. لذا، راستاهای اصلی سطح بر راستاهای اصلی شاخص منطبق می شوند. بنابر (۱۶۰۲۷)، راستاهای مجانبی سطح در یک نقطه هذلولی شیبهایی دارند که در شرط

$$m^2 = (\tan \alpha)^2 = -k_1/k_2$$

صدق می‌کنند، ولی

$$|k_1| = 1/a^2, \quad |k_2| = 1/b^2,$$

که ایجاب می‌کند

$$m^2 = b^2/a^2,$$

و این، به‌خاطر (۹۰.۲۸)، ثابت می‌کند که راستاهای مجانبی سطح بر راستاهای یکی از دو هذلولی در شاخص منطبق است. این در یک نقطهٔ سهموی کاملاً واضح است.

بالاخره، دو راستا به شیبهای  $m = \tan \alpha$  و  $m' = \tan \alpha'$  راستاهای مزدوج سطح است اگر و فقط اگر

$$mm' = \tan \alpha \tan \alpha' = -k_1/k_2.$$

لذا، در یک نقطهٔ بیضوی  $mm' = -b^2/a^2$  و در یک نقطهٔ هذلولوی  $mm' = b^2/a^2$ ، که ثابت می‌کند این راستاها را راستاهای مزدوج شاخص نیز می‌باشند.

حالت نقطهٔ سهموی که شاخص یک سهمی تباہ شده است نیز بدیهی می‌باشد.

این قضیه به‌ما توان استفاده از نظریهٔ مقاطع مخروطی در مطالعه انحنای قائم در یک نقطه از سطح را می‌دهد.

تمرین

۱. خواننده‌ای که با نظریهٔ مقاطع مخروطی آشناست احکام مربوط به راستاهای اصلی، راستاهای مجانبی، و راستاهای مزدوج یک مخروطی بیان شده در این بخش را ثابت کند.

۲. با استفاده از نتایج این بخش، ثابت کنید راستاهای اصلی زوایای بین راستاهای مجانبی را نصف می‌کنند. ★

### ۳۰.۲۸ شاخص دوین به‌عنوان حد شکل‌های مقاطع مسطح

یک سطح و نقطهٔ  $P$  بر آن مفروض است. مقاطع سطح را با دو صفحه موازی صفحهٔ مماس در  $P$  و در فاصلهٔ  $h$  در دو طرف آن در نظر می‌گیریم. این دو مقطع را بر صفحهٔ مماس تصویر کرده و یک اتساع به مرکز  $P$  و نسبت  $1/\sqrt{h}$  انجام می‌دهیم. به این ترتیب، یک منحنی به‌دست می‌آید که ممکن است از دو شاخهٔ مجزا تشکیل شده باشد.

قضیه. اگر  $P$  یک نقطهٔ تخت نباشد، حد منحنی حاصل از ساختن فوق، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، موجود و بر شاخص دوین سطح در  $P$  منطبق است.

برهان. دستگاه مختصات را در فضا طوری می‌گیریم که  $P$  مبدأ مختصات بوده، محورهای  $x$  و  $y$  در  $P$  راستاهای اصلی داشته باشند، و محور  $z$  قائم به صفحه باشد. یک همسایگی به قدر کافی کوچک بر سطح  $P$  می‌توان با معادله‌ای به شکل  $z = f(x, y)$  نمایش داد. فرض کنیم

$$A = f_{xx}(0, 0), \quad B = f_{xy}(0, 0), \quad C = f_{yy}(0, 0).$$

در این صورت، طبق فرمول تیلور، داریم

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + O(x^2 + y^2).$$

معادله مقاطع و تصاویر آنها خواهد بود

$$|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + O(x^2 + y^2)| = h,$$

و نقش آن تحت اتساع معادله‌ای دارد که با جایگذاری  $(x, y) \rightarrow (\sqrt{h}x, \sqrt{h}y)$  به دست می‌آید؛ یعنی،

$$h|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2| + o(h) = h$$

یا

$$|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2| + o(h)/h = 1.$$

این، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، به

$$(10.28) \quad |Ax^2 + 2Bxy + Cy^2| = 1$$

میل می‌کند. با انتخاب مختصات ما در فضا، می‌توان  $x$  و  $y$  را در همسایگی  $P$  پارامتری گرفت. پس در  $P$  داریم  $g_{11} = g_{22} = 1$ ،  $g_{12} = 0$ ، و  $b_{ij} = f_{ij}(0, 0)$ . اما راستاهای خطوط مختصات در  $P$ ، بنابر انتخاب مختصات ما، راستاهای اصلی اند. لذا، داریم  $(10.28)$  معادله  $A = b_{11} = k_1 g_{11} = k_1$ ،  $B = b_{12} = 0$ ،  $C = b_{22} = k_2 g_{22} = k_2$  خواهد شد

$$|k_1 x^2 + k_2 y^2| = 1,$$

که معادله شاخص (۵.۲۸) است. به ازای  $h$  به قدر کافی کوچک، در نقاط بیضوی فقط یکی از صفحات سطح را قطع می‌کند. در یک نقطه هذلولوی، تصاویر مقاطع به وسیله صفحات در یک طرف صفحه مماس به یکی از دو هذلولی که شاخص را می‌سازند میل می‌کند، و تصاویر مقاطع به وسیله صفحات در طرف دیگر به هذلولی دیگر میل خواهند کرد.

#### ۴.۲۸ شاخص تعمیم یافته

در یک نقطه تخت، شاخص دوپن معین نیست. با استفاده از پیرایش روند بخش پیش، می‌توان شاخص تعمیم یافته‌ای در این نقاط ساخت.

این روند را با زین میمون توضیح می‌دهیم (ر.ک. ۳۰۱۷)، که دارای معادله زیر است:

$$z = x(x^2 - 3y^3).$$

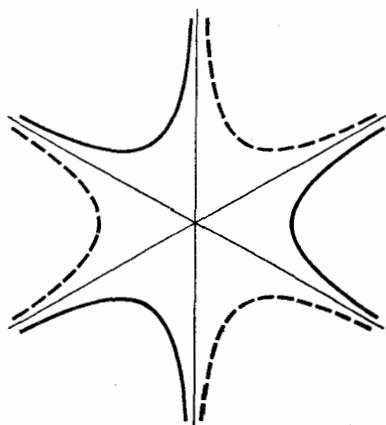
با قطع این سطح به وسیله صفحات  $z = \pm h$  و تصویر روی صفحه  $xy$ ، یک منحنی به معادله

$$|x(x^2 - 3y^2)| = h$$

به دست می‌آوریم. اگر یک اتساع از مرکز با نسبت  $1/\sqrt[3]{h}$  انجام دهیم، معادله

$$|x(x^2 - 3y^2)| = 1$$

را به دست می‌آوریم که به  $h$  بستگی ندارد. لذا، وقتی  $h \rightarrow 0$ ، حد همان خواهد بود. منحنی در شکل ۴۰۲۸ نموده شده است، که در آن خط پیوسته نمایش حد تصویر مقاطع



شکل ۴۰۲۸

در یک طرف صفحه مماس بوده، و خط نقطه چین از مقاطع به وسیله صفحات واقع در طرف دیگر ناشی شده است.

در حالت کلی، به همین ترتیب و با استفاده از  $1/\sqrt[n]{h}$  به عنوان نسبت اتساع استفاده می‌کنیم، که در آن  $n$  کوچکترین مرتبه جملات ناصفر بسط تیلور انحراف سطح از صفحه مماس در آن نقطه است.

۲۹ خطوط انحنا و گسترده یک سطح

۱۰۲۹ خطوط انحنا

یک منحنی بر یک سطح با راستای اصلی در هر نقطه یک خط انحنا می‌شود.

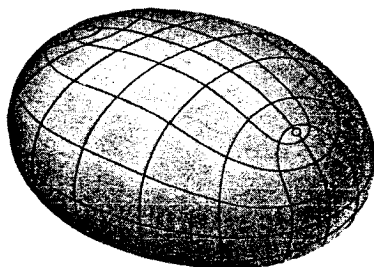
قضیه. از هر نقطه غیر نافی یک سطح از کلاس  $C_3$  دو خط انحنا دوبعد متعامد می‌گذرند.

در یک قلمرو بدون نقاط نافی یا منفرد، خطوط انحنا یک تور منتظم مرکب از دو خانواده از منحنیها را تشکیل می‌دهند.

برهان. اگر معادلات راستاهای اصلی (۳.۲۷) را معادلات دیفرانسیل بگیریم، جوابهایشان خطوط انحنا را نمایش می‌دهند. در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه غیر نافی، معادله را می‌توان به دو معادله خطی مستقل با ضرایب از کلاس  $C_1$  تجزیه کرد:

$$\alpha du^1 + \beta du^2 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha^* du^1 + \beta^* du^2 = 0 \quad (10.29)$$

(ر.ک. ۱۰.۲۷). هر یک از اینها یک خانواده یک پارامتری از منحنیها را معین می‌کند، و یک منحنی از هر خانواده از هر نقطه یک همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه می‌گذرد. چون راستاهای این دو منحنی راستاهای اصلی‌اند، پس بر هم عمودند. با استفاده از یکتابی منحنیها در هر خانواده، می‌توان دو خانواده را به هر قلمرو بدون نقاط نافی توسیع داد. نقاط نافی نقاط منفرد معادله (۴.۲۷)‌اند. در مجاورت یک نقطه نافی، خطوط انحنا در حالات مختلف متفاوت رفتار می‌کنند. مثلاً، شکل ۱۰.۲۹ رفتار خطوط انحنا را بر بیضی‌گون نشان می‌دهد. در اینجا خطوط انحنا هر دو خانواده خطوط بسته‌ای هستند



شکل ۱۰.۲۹

که هر یک دو نقطه نافی را احاطه می‌کند. یک خط انحنا وجود دارد که از هر چهار نقطه نافی می‌گذرد.

خوانندگان علاقه‌مند به تفصیل بیشتر رفتار خطوط انحنا، وقتی نقاط نافی وجود دارند، می‌توانند به بحث منحنیهای انتگرال یک معادله دیفرانسیل از نوع (۳.۲۷) (درجه دو از مرتبه اول) در یک درس مبسوط‌تر در معادلات دیفرانسیل مراجعه نمایند.

امثله و تمرین

۱. نصف النهارات و دوائر عرض جغرافیایی یک سطح دوار خطوط انحنا هستند.

۲. روی یک سطح گسترده، یک خانواده از خطوط انحنا خانواده خطوط جاری است، و دیگری خانواده مسیره‌های قائم آنها می‌باشد. درواقع، چون در سطوح گسترده داریم  $K = k_1 k_2 = 0$ ؛ درنتیجه، یکی از انحناهای اصلی صفر است؛ مثلاً،  $k_1 = 0$ . راستای اصلی نظیر، راستای یک خط جاری است. راستای اصلی دیگر متعامد به این می‌باشد.

۳. چون هر راستای روی یک کره یک راستای اصلی است، هر منحنی روی یک کره را می‌توان یک خط انحنا گرفت.

۴. خطوط انحنا مارپیچ گون

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2, \quad z = au^2$$

را بیابید.

۵. ثابت کنید در نگاشت ایزومتریک مارپیچ گون روی زنجیر گون که در مثال ۱، ۲۰۲۵ داده شد، خطوط انحنا به خطوط مجانبی نگاشته می‌شوند. این ثابت می‌کند که مفاهیم خطوط انحنا و خطوط مجانبی مفاهیمی از هندسه ذاتی سطوح نیستند.

۶. ثابت کنید خطوط مختصات سطح

$$x = \frac{1}{2}a(u^1 + u^2), \quad y = \frac{1}{2}b(u^1 - u^2), \quad z = \frac{1}{2}u^1 u^2$$

خطوطی مستقیم اند. خطوط انحنا را پیدا کنید.

۷. خط سهموی (مجموعه نقاط سهموی) سطح

$$x = (u^2)^3, \quad y = (u^1)^2 + u^1, \quad z = \frac{(u^1)^2}{2a + au^2} \quad (a > 0)$$

را بیابید. ثابت کنید این یک خط انحنا است.

۸. ثابت کنید یک خط سهموی همواره یک خط انحنا است.

۹. ثابت کنید هرگاه یکی از مسیره‌های قائم خطوط جاری یک سطح خط دار یک خط انحنا باشد، سطح گسترده خواهد بود.

۱۰. با استفاده از تمرین ۸، ثابت کنید اگر یک خط سهموی یک خط مجانبی نباشد، راستاهای مجانبی در نقاط این خط متعامد به آن هستند. لذا، اگر این خط قلمرو انحنا گوسی مثبت را از قلمرو انحنا منفی جدا کند، خطوط مجانبی که در نقاط خط سهموی بازگشت دارند مماس‌هایشان در نقاط بازگشت به خط سهموی متعامد می‌باشند.

۱۱. تصاویر خطوط انحنا بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c,$$

روی صفحه  $z = 0$  را پیدا کنید. نشان دهید که این تصاویر بیضیها و هذلولیهایی هم‌کانون‌اند.

## ۲۰۲۹ یک دستگاه مختصات خاص

اگر همه منحنیهای مختصات خطوط انحنای باشند، محاسبات با استفاده از اولین و دومین فرم اساسی بخصوص ساده خواهند شد. طبق قضیه ۲ از ۳۰۲۶، این حالت را در صورتی داریم که  $g_{12} \equiv 0$  و  $b_{12} \equiv 0$ . در این وضع، در هر نقطه داریم

$$(20.29) \quad b_{11} = k_1 g_{11}, \quad b_{12} = g_{12} = 0, \quad b_{22} = k_2 g_{22},$$

که در آنها  $k_1$  و  $k_2$  انحناهای اصلی می‌باشند.

قضیه. در همسایگی نقطه غیر نافی  $P$  می‌توان مختصات منحنی الخط داشت به طوری که همه منحنیهای مختصات خطوط انحنای باشند.

برهان. معادله (۱۰۲۹) راستاهای اصلی را در همسایگی نقطه غیر نافی  $P$  در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $\mu$  و  $\mu^*$  عاملهای انتگرالگیری معادلات خطی باشند. در این صورت، داریم

$$\mu(\alpha du^1 + \beta du^2) = dv^1, \quad \mu^*(\alpha^* du^1 + \beta^* du^2) = dv^2,$$

که در آنها  $v^1(u^1, u^2)$  و  $v^2(u^1, u^2)$  توابعی هستند که در همسایگی  $P$  تعریف شده‌اند. ژاکوبی

$$\frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(u^1, u^2)} = \mu\mu^* \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^* & \beta^* \end{vmatrix}$$

در نقطه غیر نافی  $P$  و همسایگی از آن مخالف صفر است. از اینرو،  $u^1$  و  $u^2$  را می‌توان به عنوان مختصات منحنی الخط در همسایگی  $P$  به کار برد.

در مختصات جدید، معادلات راستاهای اصلی عبارتند از  $dv^1 = 0$  یا  $dv^2 = 0$ ، که نشان می‌دهد منحنیهای مختصات خطوط انحنای می‌باشند.

## امثله و تمرین

۱. مختصات منحنی الخطی که در مثال ۳، ۳۰۱۱، بر سطوح دوار معرفی شدند از نوع مختصاتی هستند که در این بخش توصیف شدند.

۲. تبدیل فضای اقلیدسی سه بعدی که با فرمول

$$R = a^2 r / r^2$$

- داده می شود) انعکاس نسبت به کره به شعاع  $a$  و مرکز مبدأ مختصات نامیده می شود. ثابت کنید هر انعکاس خطوط انحناى یک سطح را به خطوط انحناى نقش سطح می نگارد.
۳. ثابت کنید منحنیهای روی سطح موازی  $\mathcal{F}$  (ر.ک. تمرین ۳، ۵۰۲۵) که نظیر خطوط انحناى  $\mathcal{F}$  اند خود خطوط انحناى سطح موازی می باشند.
۴. ثابت کنید هرگاه همه خطوط انحناى یک سطح منحنیهای مسطحی باشند، صفحات خطوط انحناى یک خانواده همه با خط مستقیمى مانند  $l_1$  در فضا موازی اند، و صفحات خطوط انحناى خانواده دیگر با خط دیگری چون  $l_2$  عمود بر  $l_1$  موازی می باشند.
۵. ثابت کنید هرگاه زاویه بین صفحه بوسان یک خط انحنا در نقطه  $P$  و صفحه مماس بر سطح در  $P$  در طول خط ثابت باشد، خط انحنا بر یک صفحه قرار خواهد داشت.
۶. یک سطح را سطح همگرم گویند اگر مختصات همگرایی بر آن وجود داشته باشد به طوری که همه منحنیهای مختصات خطوط انحنا باشند. ثابت کنید هر سطح مینیمال همگرم می باشد.
۷. ثابت کنید سطوح گسترده همگرم می باشند.
۸. ثابت کنید بیضی گونها سطوحی همگرم آیند.

### ۳.۲۹ قضیه یوشیم اشتال<sup>۱</sup>

قضیه. اگر دو سطح یک منحنی مشترک داشته باشند که خط انحناى هر دوى آنها باشد، زاویه بین سطوح در طول منحنی ثابت است. بعکس، اگر دو سطح در امتداد یک منحنی که خط انحناى یكى از آنهاست با زاویه ثابت متقاطع باشند، این خط خط انحناى سطح دیگر نیز خواهد بود.

برهان. بردار قائم یکی از سطوح را با  $m$  و از آن دیگری را با  $m^*$  نشان می دهیم.  $m$  و  $m^*$  در امتداد منحنی توابعی از پارامتر منحنی اند. زاویه  $\phi$  بین سطوح در نقاط مختلف منحنی نیز به این پارامتر بستگی دارد و در شرط  $\cos \phi = mm^*$  صدق می کند. با مشتقگیری در راستای منحنی، به دست می آوریم  $d \cos \phi = dm m^* + m dm^*$ . چون منحنی راستای اصلی روی هر دو سطح است، طبق (۴۰۲۷)، داریم  $dm = k dr$ ،  $dm^* = -k^* dr$  اما  $dr$  بر منحنی مماس است؛ لذا در هر نقطه به هر دو

$m$  و  $m^*$  متعامد می باشد. بنابراین، ثابت  $\phi = 0$ ،  $d \cos \phi = 0$ .

بعکس، اگر ثابت  $\phi = 0$ ، داریم

$$d \cos \phi = dm m^* + m dm^* = 0.$$

بعلاوه، اگر خط مشترک یک خط انحنا روی سطح اول باشد، خواهیم داشت  $dm = -k dr$ ؛ در نتیجه،  $dm m^* = 0$ ، که  $m dm^* = 0$  را ایجاب خواهد کرد. چون  $dm^*$  بوضوح متعامد به  $m^*$  نیز هست،  $dm^*$  باید با  $dr$  همخط باشد، که به معنی آن است که راستای منحنی یک راستای اصلی سطح دیگر نیز می باشد، و قضیه ثابت می شود.

#### ۴.۲۹ یک خاصیت مشخصه خطوط انحنا

منحنی  $\mathcal{C}: u^i = u^i(t)$  واقع بر یک سطح به نمایش پارامتری

$$r = r(u^1, u^2)$$

را در نظر می گیریم. قائمهای به این سطح در نقاط منحنی یک سطح خطدار را جارو می کنند که معادله پارامتری آن عبارت است از

$$R = r(u^1(t), u^2(t)) + vm(u^1(t), u^2(t)), \quad (3.29)$$

که در آن  $t$  و  $v$  پارامتر هستند. این سطح را سطح خطدار قائم به  $\mathcal{F}$  در امتداد  $\mathcal{C}$  خواهیم نامید.

قضیه. منحنی  $\mathcal{C}$  بر سطح  $\mathcal{F}$  از کلاس  $C_3$  یک خط انحناست اگر و فقط اگر سطح خطدار قائم به  $\mathcal{F}$  در امتداد  $\mathcal{C}$  گسترده باشد.

برهان. طبق (۹.۱۴)، سطح (۳.۲۹) گسترده است اگر و فقط اگر

$$dr m dm = 0.$$

چون هر دو بردار  $dm$  و  $dr$  متعامد به  $m$  اند، این می تواند رخ دهد اگر و فقط اگر  $dm \times dr = 0$ . اما، طبق (۲.۲۷)، این شرط لازم و کافی برای یک راستای اصلی است. لذا، سطح قائم گسترده است اگر و فقط اگر  $\mathcal{C}$  یک خط انحنا باشد، و قضیه ثابت می شود.

#### امثله و تمرین

۱. با توجه به اینکه منحنی یک مسیر قائم خانواده خطوط جاری است، می توان این را

حالت خاصی از قضیه پوشیم اشتال تلقی کرد. قضیه را به این طریق ثابت کنید.

۲. اگر یک دستگاه از سطوح مرکب از سه خانواده یک پارامتری

$$f(x, y, z, u) = 0, \quad g(x, y, z, v) = 0, \quad h(x, y, z, w) = 0$$

که از هر نقطه  $P$  از قلمروی مانند  $D$  در فضا دقیقاً "یک سطح از هر خانواده گذشته، و سطوح خانواده‌های مختلف در زاویه قائمه یکدیگر را قطع کنند یک دستگاه سه متعامد از سطوح در  $D$  نامیده می‌شود. طبق قضیه پوشیم اشتال، هر دو سطح از این دستگاه در امتداد یک خط انحنا برای هر دو سطح متقاطعند. ثابت کنید، در قلمرو  $D$ ، فصل مشترکهای هر سطح ثابت دستگاه با سطوح دو خانواده دیگر همه خطوط انحنا را می‌دهند.

۳. صفحات موازی صفحات مختصات یک دستگاه مختصات متعامد دکارتی در فضا یک دستگاه سه متعامد از صفحات را تشکیل می‌دهد.

۴. دستگاه

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

از بیضی‌گونه‌های هم‌کانون  $(-\infty < \lambda < c^2)$ ، هذلولی‌گونه‌های یکپارچه  $(c^2 < \lambda < b^2)$ ، و هذلولی‌گونه‌های دوپارچه  $(b^2 < \lambda < a^2)$  یک دستگاه سه متعامد از سطوح در فضا که مبدا مختصات حذف شده است را تشکیل می‌دهند.

۵. ثابت کنید به‌مازای هر سطح  $\mathcal{F}$  از کلاس  $C_3$ ، خانواده سطوح موازی و دو خانواده از سطوح گسترده‌نی قائم به  $\mathcal{F}$  در امتداد خطوط انحنا  $\mathcal{F}$  یک دستگاه سه متعامد در همسایگی به قدر کافی کوچک هر نقطه از  $\mathcal{F}$  تشکیل می‌دهند.

## ۵.۲۹ گسترده یک سطح

حال یال بازگشت سطح گسترده‌نی قائم به سطح مفروض  $\mathcal{F}$  در امتداد خط انحنا  $\mathcal{C}$  را پیدایمی‌کنیم. برای این کار، معادله سطح گسترده‌نی را به شکل

$$R = p(t) = r(u^1(t), u^2(t)) + \lambda(t)m(u^1(t), u^2(t))$$

نوشته و  $\lambda$  را از شرط  $dp \times m = 0$  معین می‌کنیم.

برای دیفرانسیلها در راستای منحنی، داریم

$$dp = dr + d\lambda m + \lambda dm,$$

اما، چون منحنی خط انحناست، در شرط  $dm = -k_i dr$  صدق می‌کند، که در آن  $k_i$  انحنا اصلی نظیر است. لذا، داریم

$$dp = (1 - \lambda k_i) dr + d\lambda m.$$

شرط توازی برای  $dp$  و  $m$  نتیجه می‌دهد که

$$\lambda = 1/k_i,$$

که از آنجا

$$(۴.۲۹) \quad p = r + (1/k_i)m.$$

به ازای نقطه ثابت  $P$  از سطح  $\mathcal{F}$ ، این بردار موضع مرکز انحناى قائم این نقطه به ازای راستای داده شده است. چون راستای منحنی یک راستای اصلی است و انحناى نظیر انحناى اصلی، این مرکز را مرکز انحناى اصلی می نامیم. در این باب قضیه زیر را داریم.

قضیه. قائم به سطح  $\mathcal{F}$  در نقطه  $P$  بریال بازگشت سطح خط دار قائم به  $\mathcal{F}$  در امتداد یک خط انحنا از  $\mathcal{F}$  مار بر  $P$  در مرکز انحناى اصلی که نظیر خط انحناى داده شده است مماس می باشد.

در حالت کلی، بر هر قائم دو مرکز انحناى اصلی با بردارهای موضع

$$r = \frac{1}{k_2}m \quad \text{و} \quad r + \frac{1}{k_1}m$$

وجود دارند. این مراکز انحناى قائم را گانونهای قائم به سطح نیز می نامند. در یک نقطه بیضوی، که نافی نباشد، هر دو مرکز انحناى اصلی یک طرف صفحه مماس بر سطح قرار دارند. در نقاط غیر نافی هر دو بر هم منطبق اند. در نقاط هذلولوی، در طرفین صفحه مماس بر سطح واقعند. در نقاط سهموی که نقاط تخت نباشند فقط یک مرکز وجود دارد (دیگری "در بنی نهایت" است)؛ در نقاط تخت هیچ مرکزی وجود ندارد.

به طور کلی، مراکز انحناى اصلی یک سطح مانند  $\mathcal{F}$  یک سطح می سازند که از دو پارچه، به نام گسترده سطح  $\mathcal{F}$  یا سطح گانونی  $\mathcal{F}$ ، تشکیل شده است. شکل ۲۰.۲۹ این سطح را در حالت نقاط بیضوی نشان می دهد؛ شکل ۳۰.۲۹ برای نقاط هذلولوی است. این سطح می تواند به خطوط یا حتی یک نقطه تنه امثل حالت کره، که هر دو پارچه گسترده به مرکز کره بدل شده، تباه گردد. سطوح گسترده فقط یک پارچه از گسترده را دارند.

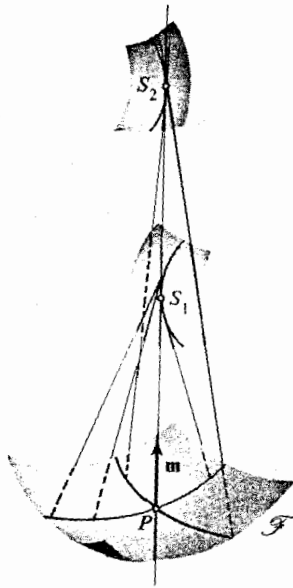
اگر نمایش پارامتری سطح  $\mathcal{F}$  به صورت

$$r = r(u^1, u^2)$$

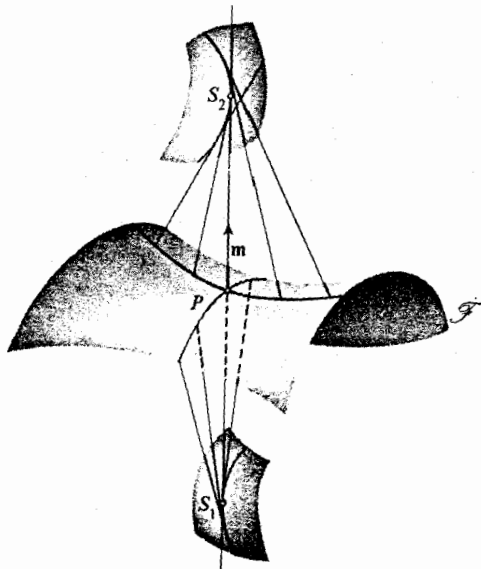
باشد، معادلات دو پارچه گسترده خواهند بود

$$(۵.۲۹) \quad R = r(u^1, u^2) + \frac{1}{k_i(u^1, u^2)}m(u^1, u^2), \quad i = 1, 2.$$

از قضیه معلوم می شود که هر پارچه از سطح مراکز انحنا به وسیله یالهای بازگشت سطوح



شکل ۲۰۲۹



شکل ۳۰۲۹

گسترده‌ی قائم به  $\mathcal{F}$  در امتداد منحنیهای یک خانواده از خطوط انحنا جارو می‌شود. لذا، قائمهای به سطح بر هر دو پارچه گسترده در مراکز انحنا اصلی می‌مانند.

معادلات (۵.۲۹) یک نگاشت از سطح  $\mathcal{F}$  روی هر پارچه از گسترده نیز تعریف می‌کنند. نقش  $P$  در این نگاشت نقطه تماس قائم به  $\mathcal{F}$  در  $P$  با پارچه نظیر از سطح است یا، به عبارت دیگر، یکی از کانونهای این قائم می‌باشد.

حال بردار قائم به گسترده را در نظر می‌گیریم. برای ساده کردن محاسبات، از مختصات منحنی الخط بر  $\mathcal{F}$  استفاده می‌کنیم، به طوری که منحنیهای مختصات خطوط انحنا باشند. در این صورت، داریم

$$m_1 = -k_1 r_1, \quad m_2 = -k_2 r_2, \quad r_1 r_2 = 0.$$

اما

$$R_1 = r_1 + \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{k_i} \right) m + \frac{1}{k_i} m_1 = \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{k_i} \right) m + \left( 1 - \frac{k_1}{k_i} \right) r_1,$$

$$R_2 = r_2 + \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{1}{k_i} \right) m + \frac{1}{k_i} m_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{1}{k_i} \right) m + \left( 1 - \frac{k_2}{k_i} \right) r_2,$$

که

$$R_1 \times R_2 = \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{k_1} \right) \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) (m \times r_2)$$

را برای یک پارچه، و

$$R_1 \times R_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{1}{k_2} \right) \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right) (r_1 \times m)$$

را برای دیگری به دست می‌دهد.

اگر قائم به سطح  $\mathcal{F}$  از یک نقطه نافی نگذرد و انحنا اصلی در امتداد خط انحنا نظیر در همسایگی نقطه ثابت نباشد،  $R_1 \times R_2 \neq 0$  در این حالت، چون بردارهای  $r_1$  و  $r_2$  دو بردار متعامدند، بردار قائم به پارچه اول گسترده، بدلیل همخط بودن با  $r_1$ ، به بردار قائم به پارچه دوم متعامد است، که با  $r_2$  همخط می‌باشد. لذا، صفحات مماس به دو پارچه گسترده سطح  $\mathcal{F}$  در نقاط تماس با یک قائم به  $\mathcal{F}$  در  $P$  متعامدند، مشروط بر اینکه  $P$  نه یک نقطه نافی و نه یک نقطه ایستای یکی از انحناهای اصلی باشد.

اگر یکی از انحناهای اصلی در امتداد خط انحنایش ثابت باشد، بر پارچه نظیر از گسترده داریم  $R_1 \times R_2 = 0$ . در این حالت، پارچه ممکن است تباه شده باشد. به همین

ترتیب، اگر نقطه نافی باشد، در نقطه نظیر از گسترده بر هر دو پارچه  $R_1 \times R_2 = 0$ ، و نقطه می تواند یک نقطه منفرد یکی از پارچه ها یا هر دو آنها باشد. توجه کنید که مراکز انحنا اصلی در یک نقطه نافی بر هم منطبق اند. لذا، هر دو پارچه گسترده بر هر قائم ماربر یک نقطه نافی از سطح دارای نقطه مشترک می باشند.

### امثله و تمرین

۱. یکی از پارچه های گسترده یک سطح دوار مانند  $\mathcal{F}$  سطحی است که بادوران حول محور گسترده نصف النهار به دست می آید. این پارچه نظیر است به انحنا اصلی مربوط به نصف النهار. سطوح گسترده دنی قائم در امتداد دوایر عرض جغرافیایی مخروطیایی هستند که رئوسشان بر محور قرار دارند؛ و لذا، پارچه دیگر گسترده به محور یا بخشی از آن تباه می شود.

۲. ثابت کنید سطوح موازی (ر. ک. مثال ۳، ۲۵، ۵) دارای سطح مراکز انحنا مشترک اند.

۳. نقاط میانی پارمخطهای واصل بین مراکز انحنا اصلی یک نقطه از سطح  $\mathcal{F}$  یک سطح مانند  $\mathcal{F}'$  را می سازند. انحنا میانی این سطح چیست؟ این سطح چه وقت تباه می شود؟

۴. ثابت کنید سطح گسترده دنی

$$r = p(u^1) + u^2 t(u^1),$$

که در آن  $u^1$  طول قوس یال بازگشت است،  $t(u^1) = p'(u^1)$ ، و تاب  $\tau$  مخالف صفر است، فقط یک پارچه گسترده دارد که معادله اش

$$r = p + u^2 t + \frac{u^2 \kappa}{\tau} b$$

می باشد (قس. مثال ۲، ۲۷، ۲۰).

۵. ضرایب اولین و دومین فرم اساسی سطح کانونی سطح مفروض  $\mathcal{F}$  را برحسب ضرایب فرمهای اساسی  $\mathcal{F}$  و انحناهای اصلی نظیر پیدا کنید.

### ۶.۲۹ تاب ژئودزیک و راستاهای اصلی

همانطور که در ۷.۲۱ دیدیم، تاب ژئودزیک در یک نقطه فقط به راستای بستگی دارد. لذا، می توان آن را برحسب زاویه  $\alpha$  از راستای اصلی به راستای مفروض بیان کرد. برای یافتن فرمول نظیر، از مختصات منحنی الخطی استفاده می کنیم که در آن منحنیهای مختصات خطوط انحنا می باشند. در این صورت، داریم

$$b_{11} = k_1 g_{11}, \quad b_{12} = g_{12} = 0, \quad b_{22} = k_2 g_{22};$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}},$$

که از آنجا

$$b_1^1 = b_{11} g^{11} = k_1, \quad b_1^2 = 0, \quad b_2^2 = b_{22} g^{22} = k_2.$$

با گذاردن این در (۲۸.۲۱)، خواهیم داشت

$$\tau_g = \sqrt{g_{11} g_{22}} \left( k_2 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} - k_1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} \right)$$

یا

$$(۶۰.۲۹) \quad \tau_g = (k_2 - k_1) \sqrt{g_{11} g_{22}} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds}.$$

زاویه  $\alpha$  از راستای اصلی (راستای خط  $u^1$ ) با مولفه‌های  $\delta_1^i$  به راستای منحنی داده شده با مولفه‌های  $du^i/ds$  از فرمول

$$\cos \alpha = \frac{g_{ij} \delta_1^i \frac{du^j}{ds}}{\sqrt{\frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}} \sqrt{g_{ij} \delta_1^i \delta_1^j}}$$

یا

$$\cos \alpha = \sqrt{g_{11}} \frac{du^1}{ds}$$

به دست می‌آید، زیرا برای پارامتر طبیعی داریم

$$g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1.$$

به همین نحو، برای زاویه  $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$  با راستای اصلی دیگر، فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\cos \beta = \sin \alpha = \sqrt{g_{22}} \frac{du^2}{ds}.$$

از تلفیق این دو فرمول، خواهیم داشت

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

بالاخره، با گذاردن در (۶۰.۲۹)، نتیجه می‌شود که

$$(۷۰.۲۹) \quad \tau_g = \frac{1}{2} (k_2 - k_1) \sin 2\alpha.$$

فرمول (۷۰.۲۹) نتایج زیر را ایجاب می‌کند:

۱. تاب ژئودزیک برای یک راستای اصلی صفر است؛

۲. بالاخص، تاب ژئودزیک یک خط انحنا در هر نقطه صفر است؛
  ۳. در یک نقطه نافی، تاب ژئودزیک در هر راستا صفر می باشد.
- روی سطوح از کلاس  $C_2$ ، این خواص راستاهای اصلی، خطوط انحنا، و نقاط نافی را به ترتیب توصیف می کنند، و می توان آنها را به عنوان تعاریف مفاهیم متناظر به کار برد.

#### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید تابهای ژئودزیک در دو راستای متقارن نسبت به یک راستای اصلی قدر مطلقهای مساوی و علامات مخالف دارند.
۲. ثابت کنید تابهای ژئودزیک در دو راستای متعامد قدر مطلقهای مساوی و علامات مخالف دارند.
۳. ثابت کنید تاب ژئودزیک بیشترین و کمترین مقدار خود را در یک نقطه به ازای راستاهایی که زوایای بین راستاهای اصلی را نصف می کنند می گیرد.

۳۰ نماد پایا

۱۰۳۰ مقدمه

همانطور که قبلاً دیدیم، نماد بردار در فضای اقلیدسی سه بعدی ما را از دستگاه مختصات در فضا و امتحان پایایی نتایج تحت تغییر دستگاه مختصات بی نیاز می کند. از آن سو، در نظریه سطوح، از مختصات منحنی الخط موضعی خیلی استفاده کرده و حتی بردارهای مماس را بر حسب مولفه هایشان نسبت به یک پایه که به وسیله مختصات منحنی الخط معرفی می شود بیان می کنیم. در سالهای اخیر در تحقیقات هندسه دیفرانسیل، راه و رسم این بوده که بستگی به مختصات موضعی را با معرفی نمادی پایا که برای بردارهای مماس بر یک سطح یا به طور کلی، بر یک چندگونا، کارساز است، حتی الامکان حذف نمایند. این به معنی تحریم کامل مختصات نیست، زیرا در مسائل هندسی ملموس شخص باید مآلاً از دستگاه مختصاتی استفاده کند. اما مسائلی نظری نیز وجود دارند که در آنها استفاده از مختصات از نماد پایا راحتتر است. برای احتراز از مسائل انتظام، در بخش ۳۰ و اکثر بخش ۳۱ به سطوح و چندگوناها از کلاس  $C_\infty$  محدود می شویم. همچنین، فرض می کنیم همه توابع، نگاشتها، میدانهای برداری، و غیره از کلاس  $C_\infty$  باشند.

۲۰۳۰ بردارهای مماس به عنوان اشتقاقها

یک روش مناسب برای بحث در بردارهای مماس بر یک سطح که هم پایا باشد (یعنی، مستقل از مختصات موضعی) و هم ذاتی (یعنی، مستقل از نحوه نشان دادن سطح در فضا) در تمرینهای ۵، ۶، ۷ از ۱۰۱۶ توصیف شد. یعنی، یک بردار مماس بر یک سطح در نقطه ای مانند  $P$  به عنوان یک اشتقاق گرفته شد؛ یعنی، یک تابعی خطی مانند  $X_P$  که به هر تابع حقیقی از کلاس  $C_\infty$  عدد  $X_P f$  را نسبت می دهد که در همسایگی  $P$  تعریف شده و در شرایط زیر صدق می کند:

(۱۰۳۰)

$$X_P(af + bg) = aX_P f + bX_P g;$$

(۲.۳۰)  $X_P(fg) = (Xf)g(P) + f(P)X_Pg$ ,  
 که در آنها  $f, g$  تابع و  $a, b$  ثابت می باشند. این ایجاب می کند که اگر تابع ثابت  $c$  باشد،

$$(۳.۳۰) \quad X_Pc = 0.$$

درواقع، فرض کنیم  $g$  تابعی باشد به طوری که  $g(P) \neq 0$ . بنابر (۱.۳۰)  $X_P(cg) = cX_Pg$ ، از آن سو، بنابر (۲.۳۰)، داریم  $X_P(cg) = (X_Pc)g(P) + cX_Pg$ . از مقایسه دو فرمول با هم، نتیجه می شود که  $(X_Pc)g(P) = 0$ ، که (۳.۳۰) را ایجاب می کند.  
 همانطور که در تمرین ۵، ۶، ۷ در ۱۰۱۶ دیدیم، بردار مماس بر یک منحنی پارامتری مانند  $P = P(t)$  بر یک سطح در نقطه  $P_0$  نظیر به مقدار  $t_0$  از پارامتر اشتقاق  $T_{P_0}$  است که با فرمول

$$(۴.۳۰) \quad T_{P_0}f = \frac{d}{dt}f(P(t_0))$$

داده می شود. برای این بردار مماس نماد  $(dP/dt)_{P_0}$  را به کار خواهیم برد.  
 تحقیق اینکه مجموعه تمام اشتقاقها در نقطه  $P$  یک فضای برداری دوبعدی تشکیل می دهند نسبتاً آسان است. برای این کار، مختصات موضعی مجاز  $(u^1, u^2)$  را در همسایگی نقطه  $P$  معرفی می کنیم. بدون لطمه به کلیت، می توان فرض کرد  $P$  نظیر به مقادیر  $u^1 = u^2 = 0$  از مختصات است. فرض کنیم  $f$  یک تابع حقیقی از کلاس  $C_\infty$  در همسایگی  $P$  بوده و،  $X_P$  اشتقاقی در  $P$  باشد. تابع  $f$  را می توان تابعی از مختصات  $u^1, u^2$  گرفت. طبق فرمول تیلور، در نقطه متغیر  $Q = (u^1, u^2)$  داریم

$$f(Q) = f(u^1, u^2) = f(0, 0) = u^1 f_1(0, 0) + u^2 f_2(0, 0) + u^1 R_1(u^1, u^2) + u^2 R_2(u^1, u^2),$$

که در آن  $\lim_{Q \rightarrow P} R_1(u^1, u^2) = 0$  و  $\lim_{Q \rightarrow P} R_2(u^1, u^2) = 0$  و  $f_1 = \partial f / \partial u^1$ ،  $f_2 = \partial f / \partial u^2$ ، به تعریف کنیم، به توابعی از کلاس  $C_\infty$  در تمام همسایگی تبدیل می شوند. حال دو اشتقاق

$$(۵.۳۰) \quad \partial_{1,P} f = f_1(0, 0), \quad \partial_{2,P} f = f_2(0, 0),$$

را نیز در  $P$  معرفی می کنیم، که صرفاً "مشتقات جزئی در  $P$  اند. در این صورت، داریم

$$f(Q) = f(P) + (\partial_{1,P} f)u^1(Q) + (\partial_{2,P} f)u^2(Q) + u^1(Q)R_1(Q) + u^2(Q)R_2(Q).$$

که در آن  $u^1(Q), u^2(Q)$  مختصات  $Q$  می باشند. با اعمال  $X_P$  بر تابع  $f$  و استفاده از (۱.۳۰)، (۲.۳۰) و (۳.۳۰) (توجه کنید که  $P$ ، و در نتیجه  $f(P)$ ، ثابت است)، به دست می آوریم

$$X_P f = (\partial_{1,P} f)X_P u^1 + (\partial_{2,P} f)X_P u^2 + (X_P u^1)R_1(P)$$

$$+ u^1(P)X_P R_1 + (X_P u^2)R_2(P) + u^2(P)X_P R_2 \\ = (X_P u^1)\partial_{1,P}f + (X_P u^2)\partial_{2,P}f,$$

زیرا  $R_1(P) = R_2(P) = u^1(P) = u^2(P) = 0$  در نتیجه،

$$(۶۰۳۰) \quad X_P = (X_P u^1)\partial_{1,P} + (X_P u^2)\partial_{2,P}.$$

لذا، هراشتقاق ترکیبی خطی از  $\partial_{1,P}, \partial_{2,P}$  است. فقط مانده استقلال  $\partial_{1,P}, \partial_{2,P}$  را ثابت کنیم. فرض کنیم

$$a \partial_{1,P} + b \partial_{2,P} = 0.$$

چون  $\partial_{i,P} u^j = \delta_i^j$ ، با اعمال اشتقاق طرف چپ بر  $u^1$  به دست می آوریم  $a = 0$ ، و با اعمال بر  $u^2$  خواهیم داشت  $b = 0$ .

در جریان اثبات، پایه (۵۰۳۰) مربوط به مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  را معرفی کردیم. به آسانی معلوم می شود که این پایه با  $(r_1, r_2)$  در  $P$  با نماد گذاری قبلی ما یکی است، اگر بردارهای نظیر در هر دو جهت را مثل تمرین ۵، ۱۰۱۶، یکی کنیم. همچنین، ثابت کردیم که مولفه های بردار  $X_P$  نسبت به این پایه طبیعی  $X_P u^i$  می باشند.

### امثله و تمرین

۱. ثابت کنید  $\partial_{1,P_0}$  و  $\partial_{2,P_0}$  به ترتیب بردارهایی مماس بر منحنیهای  $u^1 = t, u^2 = u_0^2$  و  $u^1 = u_0^1, u^2 = s$  در نقطه  $P_0 = (u_0^1, u_0^2)$  اند.

۲. ثابت کنید  $T_{P_0}$  تعریف شده با فرمول (۴۰۳۰) در واقع یک اشتقاق در  $P_0$  است.

### ۳.۳۰ میدانهای برداری مماس

حال فرض کنیم  $P$  در قلمروی مانند  $\mathcal{D}$  تغییر کرده، و  $X_P$  یک اشتقاق در  $P$  به ازای هر  $P$  در  $\mathcal{D}$  باشد. به این ترتیب، یک میدان برداری مماس بر سطح به دست می آید.  $X_P$ ، وقتی بر تابع  $f$  تعریف شده در  $\mathcal{D}$  اعمال می شود، به نقطه  $P$  از  $\mathcal{D}$  یک عدد حقیقی نسبت می دهد. لذا، با حذف اندیس  $P$ ، می توان یک میدان برداری را یک عملگر  $X$  گرفت که تابع  $f$  را به تابع  $Xf$  می نگارد. این عملگر در شرایط زیر صدق می کند:

$$(۷۰۳۰) \quad X(af + bg) = aXf + bXg, \quad a, b = \text{ثابت};$$

$$(۸۰۳۰) \quad X(fg) = (Xf)g + fXg.$$

عملگر  $X$  صادق در این شرایط یک میدان برداری یا یک تبدیل بی نهایت کوچک نامیده می شود. میدان برداری را از کلاس  $C_r$  گویند اگر  $Xf$  به ازای هر تابع از کلاس  $C_{r+1}$  از کلاس  $C_r$  باشد، البته مشروط بر اینکه  $r + 1$  از کلاس سطح بزرگتر نباشد. در

حالت سطوح و توابع از کلاس  $C_\infty$ ، لازم نیست مواظب تقلیل کلاس توابع تحت یک تبدیل بی نهایت کوچک باشیم.

تبدیلات بی نهایت کوچک تعریف شده در قلمرو  $\mathcal{D}$  بر یک سطح را می توان به طرز روشنی بهم افزود و یا در توابع ضرب کرد:

$$(X + Y)f = Xf + Yf;$$

$$(\alpha X)f = \alpha Xf.$$

جمع دارای خواص گروه است با  $Xf \equiv 0$  به عنوان صفر جمع (که با 0 نموده می شود)، و ضرب شرکت پذیر بوده و در قانون پخش پذیری صدق می کند. از دیدگاه جبری، میدانهای برداری یک مدول روی حلقه<sup>۱</sup> تعویض پذیر توابع تشکیل می دهند.

به طور موضعی، در یک همسایگی با مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$ ، می توان میدان برداری  $X$  را ترکیبی خطی با ضرایب تابعی از دو میدان برداری مستقل  $\partial_1, \partial_2$  گرفت به طوری که

$$\partial_i f = \partial f / \partial u^i;$$

یعنی،

$$(9.30) \quad X = \xi^i \partial_i.$$

### ۴.۳۰ گروه<sup>۲</sup> دو میدان برداری

همانطور که پیشتر گفتیم، ما خود را به میدانهای برداری و توابع از کلاس  $C_\infty$  محدود می کنیم. دو میدان برداری  $X, Y$  را در قلمرو  $\mathcal{D}$  در نظر می گیریم. با اعمال متوالی  $X$  و  $Y$  بر تابعی از کلاس  $C_\infty$ ، تابع جدید  $XYf$  از کلاس  $C_\infty$  به دست می آید. لذا،  $XY$  نیز یک عملگر بر توابع است. عملگر

$$(10.30) \quad [X, Y] = XY - YX$$

گروه<sup>۱</sup> پواسن<sup>۱</sup> (یا تعویضگر) میدانهای برداری  $X, Y$  نام دارد. گروه خود یک میدان برداری است. در واقع، (۷.۳۰) بوضوح برقرار است. همانند (۸.۳۰)، داریم

$$XY(fg) = X[(Yf)g + f(Yg)] = (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + fXYg,$$

و، از تعویض  $X$  و  $Y$  با هم، خواهیم داشت

$$YX(fg) = (YXf)g + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg) + fYXg,$$

که از آنجا

$$[X, Y](fg) = XY(fg) - YX(fg)$$

$$= (XYf)g - (YXf)g + fXYg - fYXg$$

$$= ([X, Y]f)g + f[X, Y]g,$$

که برقراری (۸.۳۰) را ثابت می‌کند.

امثله و تمرین

۱. ثابت کنید در یک همسایگی مختصات به مختصات  $(u^1, u^2)$ ، میدانهای برداری  $\partial_1, \partial_2$

در خاصیت

$$[\partial_1, \partial_2] = 0$$

صدق می‌کنند.

۲. ثابت کنید هرگاه  $X = \xi^i \partial_i$ ,  $Y = \eta^j \partial_j$ ، آنگاه

$$(11.30)$$

$$[X, Y] = \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \right) \partial_j.$$

۳. ثابت کنید تعویضگر در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(12.30)$$

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [X, X] = 0,$$

$$(13.30)$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

همچنین، ثابت کنید که

$$(14.30)$$

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X.$$

$$(15.30)$$

$$[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y.$$

اتحاد (۱۳.۳۰) اتحاد ژاکوبی<sup>۱</sup> نام دارد.

### ۵.۳۰ ضرب اسکالر بردارهای مماس

همانطور که در بخش ۱۶ و بعداً<sup>۲</sup> در فصل ۶ دیدیم، اولین فرم اساسی نقش مهمی در نظریه سطوح دارد. اولین فرم اساسی به صورت مربع اسکالر بردارهای مماس به دست آمده است. در نماد پایای ما، حاصل ضرب اسکالر میدانهای برداری جای اولین فرم اساسی را می‌گیرد. به ازای دومیدان برداری مماس  $X, Y$ ، حاصل ضرب اسکالر آنها را با  $(X, Y)$  نشان می‌دهیم؛ یعنی، تابعی که در هر نقطه  $P$  مساوی حاصل ضرب اسکالر بردارهای  $X_P, Y_P$  در  $P$  است. این ضرب اسکالر از خواص زیر بهره‌مند است  $(\alpha, \beta)$  توابعی

دلخواهند):

$$(16.30) \quad (X, Y) = (Y, X);$$

$$(17.30) \quad (\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha(X, Z) + \beta(Y, Z);$$

$$(18.30) \quad \text{در هر نقطه که } (X, X) > 0, X \neq 0$$

با استفاده از این ضرب اسکالر، می توان طول یک مسیر مانند  $P = P(t), a \leq t \leq b$  را، همساز با (۱۰.۱۶)، از انتگرال

$$\int_a^b \sqrt{dP/dt, dP/dt} ds$$

به دست آورد. ضرایب اولین فرم اساسی در مختصات منحنی الخط  $(u^1, u^2)$  مساوی است با

$$g_{ij} = (\partial_i, \partial_j).$$

### ۶.۳۰ مشتق مطلق

تعاریف دیفرانسیل مطلق و مشتق مطلق یک میدان در امتداد یک منحنی که در زیربخش ۲.۲۳ شد را به یاد می آوریم. اینها به ترتیب تصویر دیفرانسیل و مشتق میدان بر صفحه مماس بر سطح بودند. فرمول (۶.۲۳) نشان می دهد که مشتق مطلق در یک نقطه به بردار مماس بر منحنی بستگی دارد تا خود منحنی. لذا، می توان مشتق مطلق میدان برداری  $X$  را در جهت بردار  $Y_P$  در  $P$  تعریف کرد، و ما این مشتق را با  $\nabla_{Y_P} X$  نشان خواهیم داد. با متغیر  $P$  و میدان برداری  $Y$ ، میدان مشتقات مطلق یک میدان برداری مانند  $\nabla_Y X$  می شود. به ازای میدان ثابت  $Y$ ، یک عملگر است که میدانهای برداری را بتوی میدانهای برداری می نگارد.

برای دستیابی به خواص عملگر مشتقگیری مطلق، مختصات منحنی الخط را معرفی و از فرمول (۶.۲۳) استفاده می کنیم. فرض کنیم  $X = \xi^i \partial_i, Y = \eta^j \partial_j$ .  $\xi^i$  نقش  $a^i$ ، و  $\eta^j$  نقش  $du^j/dt$  در (۶.۲۳) را دارد. لذا، خواهیم داشت

$$(19.30) \quad \nabla_Y X = \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \right) \eta^j,$$

زیرا

$$\frac{d\xi^k}{dt} = \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} \frac{du^j}{dt}.$$

از این فرمول به آسانی خواص زیر از  $\nabla_Y$  به دست می آیند:

$$(20.30) \quad \nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y;$$

$$(۲۱.۳۰) \quad \nabla_Y(fX) = f\nabla_Y X + (Yf)X;$$

$$(۲۲.۳۰) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

که در آنها  $X, Y, Z$  میدان برداری و  $f, g$  تابع می باشند .

یک کلاس از مشتقهای مطلق  $\nabla_Y$  صادق در (۲۰.۳۰) تا (۲۲.۳۰) ، که  $Y$  همه میدانهای مماس را می گیرد ، یک همبندی نامیده می شود .

می توان ثابت کرد که هر همبندی  $\nabla_Y$  صادق در شرایط (۲۰.۳۰) تا (۲۲.۳۰) را می شود ، به مختصات ، به شکل (۱۹.۳۰) بیان کرد ، که در آن  $\Gamma_{ij}^k$  توابعی از یک نقطه اند . در واقع ، فرض کنیم  $X = \xi^i \partial_i$  ,  $Y = \eta^j \partial_j$  . در این صورت ، طبق (۲۲.۳۰) ، داریم

$$\nabla_Y X = \nabla_{\eta^j \partial_j} \xi^i \partial_i = \eta^j (\nabla_{\partial_j} X).$$

همچنین ، طبق (۲۰.۳۰) و (۲۱.۳۰) ،

$$\nabla_{\partial_j} X = \nabla_{\partial_j} (\xi^i \partial_i) = \xi^i \nabla_{\partial_j} \partial_i + (\partial_j \xi^i) \partial_i = \xi^i \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} \partial_k ;$$

در نتیجه ،

$$\nabla_Y X = \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} \partial_k + (\nabla_{\partial_j} \partial_i) \xi^i \right) \eta^j .$$

چون  $\nabla_{\partial_j} \partial_i$  یک میدان برداری مماس است ، باید داشته باشیم

$$(۲۳.۳۰) \quad \nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k ,$$

زیرا  $\partial_k$  در هر نقطه یک پایه برای بردارهای مماس تشکیل می دهد . با گذاردن این در فرمول قبل ، فرمولی به شکل (۱۹.۳۰) به دست می آید .

با اینحال ، این خواص همه خواص مشتقگیری مطلق بر سطح ۲.۲۳ نیستند . بخصوص ،

ایجاب نمی کنند که  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  . داریم

$$\nabla_Y X = \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \right) \eta^j \partial_k = \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} \eta^j + \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j \right) \partial_k ,$$

$$\nabla_X Y = \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k \eta^i \right) \xi^j \partial_k = \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} \xi^j + \Gamma_{ji}^k \xi^i \eta^j \right) \partial_k .$$

اگر  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  ، خواهیم داشت

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} \eta^j - \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} \xi^j \right) \partial_k = [Y, X] .$$

لذا ، تقارن علایم کریستوفل شرط زیر را ایجاب می کند :

$$(۲۴.۳۰)$$

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X] .$$

حال خاصیت (۷.۲۳) دیفرانسیل مطلق بیان شده برحسب عملگرهای مشتقات مطلق  $\nabla_Y X$  شکل زیر را خواهد یافت:

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y), \quad (25.30)$$

که در آن  $(,)$  حاصل ضرب اسکالر درایه‌ها را نشان می‌دهد.

خواص (۲۵.۳۰) تا (۲۲.۳۰) همراه با (۲۴.۳۰) و (۲۵.۳۰) عملگرهای  $\nabla_Y X$  را به‌طور منحصر بفرد معین می‌کنند. برهان اساساً همان برهان زیربخش ۲.۱۸ است. در بسیاری حالات، میدانهای  $X$  را در نظر می‌گیریم که فقط در امتداد منحنی  $\mathcal{C}$  تعریف شده‌اند، و مشتق مطلق چنین میدان را در راستای یک بردار مماس بر منحنی به کار می‌بریم. برای توجیه استفاده از چنین مشتق، ثابت می‌کنیم که با آنکه میدان  $X$  را به مجموعه‌ای شامل منحنی وسعت می‌دهیم، مشتق  $\nabla_Z X$  در راستای یک بردار مماس مانند  $Z$  بر منحنی به‌توسیع میدانهای  $X$  و  $Z$  بستگی ندارد. فرض کنیم  $P = P(t)$  معادله منحنی  $\mathcal{C}$  بوده و  $X, Y$  دو میدان برداری باشند که بر این منحنی منطبق‌اند و در قلمروی شامل  $\mathcal{C}$  تعریف شده‌اند. همچنین،  $Z_0$  یک بردار مماس بر منحنی در نقطه  $P_0$  بوده و  $Z$  به‌توسیع دلخواه  $Z_0$  به یک میدان برداری در همسایگی  $P_0$  باشد. آنچه باید ثابت شود این است که  $\nabla_Z(X - Y)$  در  $P_0$  مساوی صفر است.

مختصات موضعی  $(u^1, u^2)$  را در همسایگی  $P_0$  طوری معرفی می‌کنیم که منحنی داده شده منحنی ثابت  $u^2 = u_0^2$  باشد. لذا،  $Z_{P_0} = \lambda \partial_{1, P_0}$ ، و به‌آزای هر تابع  $f(P)$ ، که در امتداد منحنی ثابت و جاهای دیگر دلخواه است، داریم  $Z_{P_0} f = 0$ . البته،

$$X - Y = \alpha \partial_1 + \beta \partial_2.$$

چون در امتداد منحنی  $X - Y = 0$ ، در نقاط منحنی ما  $\alpha = \beta = 0$ ؛ و در نتیجه،  $Z_{P_0} \alpha = Z_{P_0} \beta = 0$ ، بنابراین،

$$\begin{aligned} \nabla_{Z_{P_0}}(X - Y) &= \nabla_{Z_{P_0}}(\alpha \partial_1 + \beta \partial_2) = \alpha(P_0) \nabla_{Z_{P_0}} \partial_1 + (Z_{P_0} \alpha) \partial_1 \\ &+ \beta(P_0) \nabla_{Z_{P_0}} \partial_2 + (Z_{P_0} \beta) \partial_2 = 0. \end{aligned}$$

تمرین

۱. ثابت کنید (۲۴.۳۰) ایجاب می‌کند که  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .
۲. ثابت کنید هرگاه  $\nabla_X$  و  $\tilde{\nabla}_X$  دو همبندی مختلف باشند، یعنی هر دو در شرایط (۲۵.۳۰) تا (۲۲.۳۰) صدق کنند، آنگاه میدان برداری  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$  به هر دو  $X$  و  $Y$  به‌طور خطی وابسته است؛ یعنی، به‌آزای میدانهای برداری  $X, Y, Z$  و توابع  $f, g$

$$T(fX + gY, Z) = fT(X, Z) + gT(Y, Z),$$

$$T(X, fY + gZ) = fT(X, Y) + gT(X, Z).$$

۳. ثابت کنید بهازای هر  $\nabla_X$  صادق در  $(20.30)$  تا  $(22.30)$ ،

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

نسبت به  $X$  و  $Y$  خطی بوده و متقارن اریب است، یعنی در همان شرایط  $T$  در تمرین قبل صدق می‌کند؛ و، بعلاوه،

$$S(X, Y) = -S(Y, X).$$

$S$  ثابت همبندی  $\nabla_Z$  نام دارد. فرمول  $(24.30)$  معادل  $S = 0$  می‌باشد.

### ۷.۳۰ کاربردهای هندسه ذاتی سطوح

نماد بخش پیش را می‌توان در نظریه سطوح به‌کار برد. با استفاده از مشتق مطلق  $\nabla_Y X$  صادق در شرایط  $(20.30)$  تا  $(22.30)$ ،  $(24.30)$ ، و  $(25.30)$ ، شرط توازی میدان برداری  $X$  در امتداد  $P = P(t)$  را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\nabla_{dP/dt} X = 0. \quad (26.30)$$

همان‌طور که دیدیم،  $X$  فقط باید در امتداد منحنی تعریف شود تا  $(26.30)$  معنی داشته باشد.

یک خط ژئودزیک با این امر که بردار مماس بر آن در امتداد آن موازی است توصیف می‌شود. لذا،  $P = P(t)$  نمایش یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر، در هر نقطه از منحنی،

$$\nabla_{dP/dt} \frac{dP}{dt} = 0. \quad (27.30)$$

خط ژئودزیک  $P = P(t)$  به‌طور منحصر بفرد به‌وسیله نقطه شروع  $P_0 = P(0)$  و بردار مماس شروع  $X_{P_0} = (dP/dt)_{t=0}$  معین می‌شود. به‌ازای بردار مماس مفروض  $X_{P_0}$ ، تابع نمایشی

$$P(t) = \exp(tX_{P_0})$$

را تعریف می‌کنیم، که در آن  $P(t)$  خط ژئودزیک با بردار مماس شروع  $X_{P_0}$  است.

### ۸.۳۰ توسیع نگاشتها به میدانهای برداری

در زیربخش ۱۰.۲۰ توضیح دادیم که چگونه نگاشت  $\phi: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  از یک سطح به دیگری را می‌توان به نگاشتی از بردارهای مماس بر  $\mathcal{F}_1$  بتوی بردارهای مماس بر  $\mathcal{F}_2$  توسیع داد. این توسیع با نماد فعلی ما خیلی ساده می‌شود. به‌ازای تابع  $f$  در  $\mathcal{F}_2$ ، ترکیب

$f \circ \phi$  تابع  $f$  با نگاشت  $\phi$ ، یعنی  $(f \circ \phi)P = f(\phi P)$ ، یک تابع بر  $\mathcal{F}_1$  است. اگر هر دوی  $f$  و  $\phi$  از کلاس  $C_\infty$  باشند؛ ترکیب  $f \circ \phi$  نیز چنین است.

حال میدان برداری مماس  $X$  بر  $\mathcal{F}_1$  را در نظر می‌گیریم. نقش میدان برداری  $X$  تحت نگاشت توسیع یافته  $X^* = \phi X$  را با

$$(28.30) \quad X^* f = X f \circ \phi$$

بهازای تابع  $f$  تعریف شده در  $\mathcal{F}_2$ ، یا در نقش  $\phi \mathcal{F}_1$  از  $\mathcal{F}_1$  در  $\mathcal{F}_2$ ، تعریف می‌کنیم.

### تمرین

۱. تحقیق کنید  $X^*$  تعریف شده با (۲۸.۳۰) واقعا "یک میدان برداری مماس بر  $\mathcal{F}_1$  است.

۲. ثابت کنید  $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$ .

۳. با استفاده از مختصات منحنی الخط موضعی، ثابت کنید توسیع نگاشت توصیف شده در این بخش بر آنکه در ۱۰.۲۰ شد منطبق است.

### ۹.۳۰ عملگر انحنا

بهازای دومیدان برداری  $X, Y$  بر یک سطح، عملگر  $R(X, Y)$  بر میدانهای برداری تعریف شده با فرمول

$$(29.30) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

را در نظر می‌گیریم. این عملگر عملگر انحنا نامیده می‌شود. عملگر انحنا یک عملگر خطی است، و در  $X, Y$  متقارن اریب است؛ یعنی،

$$(30.30) \quad R(X, Y) = -R(Y, X),$$

$$(31.30) \quad R(X, Y)(fU + gV) = fR(X, Y)U + gR(X, Y)V,$$

که در آن  $X, Y, U, V$  میدان و  $f, g$  تابع می‌باشند.

خاصیت اول واضح است. برای اثبات (۳۱.۳۰)، ابتدا توجه می‌کنیم که (۲۰.۳۰)

فورا "ایجاب می‌کند که  $R(X, Y)(U + V) = R(X, Y)U + R(X, Y)V$ . لذا، کافی

است ثابت‌کنیم، بهازای هر تابع  $\alpha$  و هر میدان برداری  $Z$ ،  $R(X, Y)(\alpha Z) = \alpha R(X, Y)Z$ ،

بنابر (۲۱.۳۰)، داریم

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (\alpha Z) &= \nabla_X [\alpha \nabla_Y Z + (Y\alpha)Z] \\ &= \alpha \nabla_X \nabla_Y Z + (X\alpha) \nabla_Y Z + (Y\alpha) \nabla_X Z + (X Y \alpha) Z, \end{aligned}$$

که از آنجا

$$\nabla_X \nabla_Y (\alpha Z) - \nabla_Y \nabla_X (\alpha Z) = \alpha (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) + (XY\alpha - YX\alpha)Z.$$

بعلاوه،

$\nabla_{[X,Y]}(\alpha Z) = \alpha \nabla_{[X,Y]}Z + [X, Y]Z = \alpha \nabla_{[X,Y]}Z + (XY\alpha - YX\alpha)Z.$   
 با تفريق، معلوم می شود که  $R(X, Y)(\alpha Z) = \alpha R(X, Y)Z$  و نتیجه حاصل است.  
 اثبات اینکه  $R(X, Y)Z$  به طور خطی به  $X$  و به  $Y$  وابسته است، یعنی

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z) &= fR(X, Z) + gR(Y, Z), \\ R(X, fY + gZ) &= fR(X, Y) + gR(X, Z), \end{aligned}$$

را به خواننده وامی گذاریم.

این خواص  $R(X, Y)Z$  ایجاب می کند که این میدان برداری در نقطه مفروض  $P$  فقط به مقادیر میدانهای  $X, Y, Z$  در  $P$  بستگی دارد. به عبارت دیگر، اگر در  $P$ ،  $X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2$ ، هرچه در جاهای دیگر باشند، در  $P$  خواهیم داشت  $R(X_1, Y_1)Z_1 = R(X_2, Y_2)Z_2$ ، اگرچه این معادله ممکن است در نقاط دیگر برقرار نباشد. بالاخره، عملگر انحنا بر یک سطح با متر یا ضرب اسکالر معین می شود، زیرا متر مشتق مطلق  $\nabla_X X$  را معین می کند. با استفاده از خواص مشتق مطلق (۲۰.۳۰) تا (۲۲.۳۰) و (۲۴.۳۰)، می توان اتحادهای زیر را ثابت کرد:

$$\begin{aligned} (23.30) \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= 0, \\ \nabla_X(R(X, Y)U) + \nabla_Y(R(Z, X)U) + \nabla_Z(R(X, Y)U) \\ &= R(X, Y)\nabla_Z U + R(Y, Z)\nabla_X U + R(Z, X)\nabla_Y U \\ (34.30) \quad &+ R([X, Y], Z)U + R([Y, Z], X)U + R([Z, X], Y)U. \end{aligned}$$

اتحاد اول اتحاد ریچی<sup>۱</sup>، و اتحاد دوم اتحاد بیانچی<sup>۲</sup> نام دارد. بعداً، در ۱۳.۳، به (۳۴.۳۰) شکل ساده تری خواهیم داد.

برای نشان دادن نوع محاسبات، (۳۳.۳۰) را ثابت کرده، اثبات (۳۴.۳۰) را به خواننده وامی گذاریم. طبق (۲۴.۳۰)، داریم

$$\nabla_X Z = [X, Z] + \nabla_Z X \quad \text{و} \quad \nabla_Y Z = [Y, Z] + \nabla_Z Y$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla_X[Y, Z] + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y[X, Z] - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla_X[Y, Z] + \nabla_Y[Z, X] + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

بعلاوه،

$$R(Y, Z)X = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X,$$

$$R(Z, X)Y = \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y.$$

لذا، طبق اتحاد ژاکوبی،

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y$$

$$= \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Z, X]} Y$$

$$+ \nabla_Z [\nabla_X Y - \nabla_Y X] - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

تمرین

۱. فرمولهای (۳۲.۳۰) و (۳۴.۳۰) را ثابت کنید.

۲. عملگر  $R^*(X, Y)$  را با فرمول

$$R^*(X, Y)Z = (X, Z)Y - (Z, Y)X$$

تعریف کنید، که در آن  $(X, Z)$  حاصل ضرب اسکالر  $X$  و  $Z$ ، و  $(Z, Y)$  حاصل ضرب اسکالر  $Z$  و  $Y$  است. ثابت کنید عملگر  $R^*(X, Y)$ ، مثل  $R(X, Y)$ ، در همان شرایط (۳۰.۳۰) تا (۳۴.۳۰) صدق می‌کند. از این تمرین استفاده خواهیم کرد.

۱۰.۳۰ عملگر انحنا و انحنا ی گاوسی

با استفاده از ضرب اسکالر، می‌توان عبارت

$$(R(X, Y)U, V)$$

را به‌ازای هر چهار میدان برداری  $X, Y, U, V$  تشکیل داد، که نسبت به هر متغیر  $X, Y, U, V$  خطی با ضرایب تابعی است. همچنین است عبارت

$$(35.30) \quad (R^*(X, Y)U, V) = (X, U)(Y, V) - (U, Y)(X, V).$$

عبارت  $(R(X, Y)U, V)$  در شرایط تقارن زیر صدق می‌کند:

$$(36.30) \quad (R(X, Y)U, V) = (R(U, V)X, Y),$$

$$(37.30) \quad (R(X, Y)U, V) = -(R(Y, X)U, V) = -(R(X, Y)V, U),$$

و شرطی که از (۳۳.۳۰) نتیجه می‌شود:

$$(38.30) \quad (R(X, Y)U, V) + (R(Y, U)X, V) + (R(U, X)Y, V) = 0.$$

اتحادهای مشابهی به‌وسیله  $R^*(X, Y)U, V$  برقرار می‌شوند.

نسبت

$$\frac{(R(X, Y)X, Y)}{(R^*(X, Y)X, Y)} = \frac{(R(X, Y)X, Y)}{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2}$$

را به ازای دو میدان برداری مستقل  $X, Y$  بر یک سطح در نظر می گیریم. این نسبت، با آنکه ظاهراً "تابع  $X$  و  $Y$  است، فقط به نقطه سطح بستگی دارد. در واقع، فرض کنیم

$$U = \alpha X + \beta Y, \quad V = \gamma X + \delta Y$$

جفت دیگری از میدانهای مستقل باشد؛ لذا،  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ، در این صورت، بنا بر خاصیت خطی، داریم

$$\begin{aligned} (R(U, V)U, V) &= (R(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)) \\ &= (\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta)(R(X, Y)X, Y) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(R(X, Y)X, Y). \end{aligned}$$

به همین نحو،

$$(R^*(U, V)U, V) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(R^*(X, Y)X, Y),$$

که از آنجا

$$\frac{(R(U, V)U, Y)}{(R^*(U, V)U, V)} = \frac{(R(X, Y)X, Y)}{(R^*(X, Y)X, Y)}.$$

برای یافتن معنی هندسی این نسبت، مختصات موضعی  $(u^1, u^2)$  را معرفی کرده و قرار می دهیم  $X = \partial_1, Y = \partial_2$ . در این صورت، طبق (۲۳.۳۵)، داریم

$$\begin{aligned} R(\partial_1, \partial_2)\partial_1 &= \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\partial_1 - \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\partial_1 \\ &= \nabla_{\partial_1}(\Gamma_{12}^s\partial_s) - \nabla_{\partial_2}(\Gamma_{11}^s\partial_s) \\ &= \frac{\partial\Gamma_{12}^s}{\partial u^1}\partial_s + \Gamma_{12}^s\nabla_{\partial_1}\partial_s - \frac{\partial\Gamma_{12}^s}{\partial u^2}\partial_s - \Gamma_{11}^s\nabla_{\partial_2}\partial_s \\ &= \frac{\partial\Gamma_{12}^s}{\partial u^1}\partial_s + \Gamma_{12}^s\Gamma_{s1}^r\partial_r - \frac{\partial\Gamma_{11}^s}{\partial u^2}\partial_s - \Gamma_{11}^s\Gamma_{s2}^r\partial_r \\ &= \left( \frac{\partial\Gamma_{12}^s}{\partial u^1} - \frac{\partial\Gamma_{11}^s}{\partial u^2} + \Gamma_{12}^s\Gamma_{r1}^r - \Gamma_{11}^s\Gamma_{r2}^r \right) \partial_s. \end{aligned}$$

چون  $(\partial_s, \partial_2) = g_{2s}$ ، از اینجا به دست می آوریم

$$(R(\partial_1\partial_2)\partial_1\partial_2) = \left( \frac{\partial\Gamma_{12}^s}{\partial u^1} - \frac{\partial\Gamma_{11}^s}{\partial u^2} + \Gamma_{12}^s\Gamma_{r1}^r - \Gamma_{11}^s\Gamma_{r2}^r \right) g_{2s},$$

که از مقایسه با یکی از فرمولها برای انحنای گاوسی  $K$  در ۳۰.۱۸ نتیجه می دهد که

$$(R(\partial_1 \partial_2) \partial_1 \partial_2) = -Kg.$$

از آن سو،

$$(R^*(\partial_1 \partial_2) \partial_1, \partial_2) = (\partial_1, \partial_1)(\partial_2, \partial_2) - (\partial_1, \partial_2)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g.$$

با توجه به استقلال میدانهای برداری  $X, Y$  که در بالا ثابت شد، به‌آزای هر  $X, Y$  داریم

$$(R(X, Y)X, Y) = -K(R^*(X, Y)X, Y). \quad (۳۹.۳۰)$$

از این فرمول می‌توان برای تعیین انحنای گاوسی یک سطح برحسب عملگر انحنا استفاده کرد.

تمرین

۱.  $(۳۶.۳۰)$  تا  $(۳۸.۳۰)$  را ثابت کنید.

۲. ثابت کنید  $(R^*(X, Y)U, V)$  در  $(۳۶.۳۰)$  تا  $(۳۸.۳۰)$  صدق می‌کند.

### ۱۱.۳۰ دومین فرم اساسی

دومین فرم اساسی یک فرم درجه دوم نسبت به مولفه‌های  $du^1, du^2$  بردارهای مماس بود. با نماد پایای ما، راحت‌تر آن است که از فرم دو خطی مربوطه استفاده کنیم. این به‌ما یک فرم دوخطی متقارن مانند  $B(X, Y)$  می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$B(X, Y) = B(Y, X); \quad (۴۰.۳۰)$$

$$B(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha B(X_1, Y) + \beta B(X_2, Y);$$

$$B(X, \alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha B(X, Y_1) + \beta B(X, Y_2), \quad (۴۱.۳۰)$$

که در آن  $\alpha, \beta$  توابعی از نقطه‌اند.

در فصل ۷ از نگاشت کروی  $\mathcal{S}$  در صفحه مماس استفاده کردیم، که با دومین فرم اساسی معادل است به این معنی که دومین فرم اساسی را می‌توان با فرمول ساده‌ای از  $\mathcal{S}$  به‌دست آورد و بالعکس. نگاشت کروی  $\mathcal{S}$  قبلاً یک عملگر برداری بر میدانهای برداری است که  $X$  را به  $\mathcal{S}X$  می‌برد. فرمولهای (۲۰.۱۸) و (۳۰.۱۸) که بین دومین فرم اساسی و نگاشت کروی رابطه برقرار می‌کنند در نماد فعلی معنی زیر را دارد:

$$B(X, Y) = -(\mathcal{S}X, Y) = -(\mathcal{S}Y, X).$$

مطالب فصل ۷، که در آن عملگر  $\mathcal{S}$  بسیار به‌کار رفت، قبلاً در بیشتر قسمت‌ها پایاست. خواننده می‌تواند بدون اشکال همه آن‌ها را به زبان نماد جدید انتقال دهد.

فقط متذکر می‌شویم که معادله گاوس (۱۵.۱۸) معادل

$$B(X, X)B(Y, Y) - [B(X, Y)]^2 = -(R(X, Y)X, Y), \quad (۴۲.۳۰)$$

و فرمول کودازی (۱۶۰۱۸) معادل

$$\nabla_X(\mathcal{S}Y) - \nabla_Y(\mathcal{S}X) = [X, Y] \quad (۴۳۰۳۰)$$

می‌باشد.

### تمرین

۱.  $(۴۲۰۳۰)$  و  $(۴۳۰۳۰)$  را ثابت کنید.
۲. معادله‌ای معادل  $(۴۲۰۳۰)$  بیابید که فقط برحسب عملگرهای  $\mathcal{S}$  و  $R(X, Y)$  بدون استفاده از ضرب اسکالر، بیان شده باشد.

### ★ ۱۲۰۳۰ تعمیم به چندگونا‌های ریمانی

بحث میدانهای برداری به‌عنوان عملگرهایی بر توابع و صادق در  $(۷۰۳۰)$  و  $(۸۰۳۰)$  را می‌توان بی‌هیچ پیرایش برای چندگونا‌های دیفرانسیل با بعد دلخواه مطرح کرد. یک چندگونای ریمانی، مضافاً، یک ضرب اسکالر دارد که در هر نقطه از چندگونای  $(X, Y)$  تعریف شده است که در شرایط  $(۱۶۰۳۰)$  تا  $(۱۸۰۳۰)$  صدق می‌کند.

در همه بحثهای ما، جز دریافتن  $(۳۹۰۳۰)$ ، از این امر که سطح یک چندگونای دوبعدی است استفاده نکرده‌ایم. لذا، همه نتایج تا فرمول  $(۳۸۰۳۰)$  در چندگونا‌های  $n$  بعدی معتبر می‌مانند فقط با یک اختلاف که وقتی مختصات موضعی به‌کار می‌روند، اندیسهای  $1, 2$  مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را می‌گیرند. مثلاً، در اینجا پایه برای میدانهای برداری مربوط به مختصات منحنی‌الخط از  $n$  میدان برداری تشکیل شده است.

یک همبندی در یک چندگونا مجدداً یک عملگر مانند  $\nabla_Y$  است که در شرایط  $(۲۰۰۳۰)$  تا  $(۲۲۰۳۰)$  صدق می‌کند. بعلاوه، اگر شرایط  $(۲۴۰۳۰)$  و  $(۲۵۰۳۰)$  رانیز بگذاریم، همبندی کاملاً به وسیله متر یا ضرب اسکالر  $(X, Y)$  معین می‌شود. با همبندی و ضرب اسکالر در دست، می‌توان عملگر انحنای  $R(X, Y)$  را از فرمول  $(۲۹۰۳۰)$  و  $R^*(X, Y)$ ، مثل تمرین ۲، ۹۰۳۰، تعریف کرد. به همین نحو،  $(R(X, Y)U, V)$  و  $(R^*(X, Y)U, V)$  در  $(۳۵۰۳۰)$  تا  $(۳۸۰۳۰)$  صدق می‌کنند.

استدلال ۱۰۰۳۰ را نمی‌توان به خاطر بعد کاملاً به‌کار برد. اما، اگر میدانهای برداری  $X, Y$  را با دو میدان برداری که ترکیباتی خطی از  $X, Y$  اند عوض کنیم، نسبت  $(R(X, Y)X, Y)$   $(R^*(X, Y)X, Y)$  تغییر نخواهد کرد. لذا، این نسبت به میدانهای صفحات  $\sigma$  پیموده شده به وسیله بردارهای  $X, Y$  در هر نقطه به‌جای خود بردارها بستگی دارد. قرینه این نسبت در نقطه مفروض  $P$  به‌ازای صفحه مفروض  $\sigma$  در فضای مماس در  $P$  را

انحنای مقطعی در  $P$  نسبت به  $\sigma$  دو بعدی نامیده و آن را با  $K(P, \sigma)$  نشان می‌دهیم.  
در نتیجه، داریم

$$(44.30) \quad (R(X, Y)X, Y) = -K(P, \sigma)(R^*(X, Y)X, Y),$$

که در آن، در هر نقطه  $P$ ،  $\sigma$  صفحهٔ پیچیده شده به وسیله  $X, Y$  است.  
در چندگونا‌های ریمانی با بعد  $n \geq 3$ ، قضیهٔ زیر، منسوب به شور<sup>۱</sup>، برقرار است.

قضیه. اگر در یک چندگونای ریمانی با بعد  $n \geq 3$  انحنای مقطعی در هر نقطه به دو راستا بستگی نداشته باشد، این انحنا ثابت است: یعنی، به نقطه نیز بستگی ندارد.

قبل از اثبات قضیه، ابتدا  $m$  زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. اگر  $K(P, \sigma)$  در  $(44.30)$  به  $\sigma$  بستگی نداشته باشد، به ازای هر سه میدان  $X, Y, Z$

$$(45.30) \quad R(X, Y)Z = -K(R^*(X, Y)Z),$$

که در آن  $K$  انحنای مقطعی به عنوان تابعی از نقطه است.

برهان. با گذاردن  $Y + V$  به جای  $Y$  در  $(44.30)$  و استفاده از اینکه  $K(P, \sigma) = K(P)$  به  $\sigma$  بستگی ندارد، به دست می‌آوریم

$$(R(X, Y + V)X, Y + V) = -K(R^*(X, Y + V)X, Y + V),$$

یا

$$\begin{aligned} & (R(X, Y)X, Y) + (R(X, Y)X, V) + (R(X, V)X, Y) + (R(X, V)X, V) \\ &= -K[(R^*(X, Y)X, Y) + (R^*(X, Y)X, V) + (R^*(X, V)X, Y) + (R^*(X, V)X, V)], \end{aligned}$$

و با اعمال مجدد  $(44.30)$  بر  $X, V$  و  $X, Y$ ، خواهیم داشت

$$(R(X, Y)X, V) + (R(X, V)X, Y) = -K[(R^*(X, Y)X, V) - (R^*(X, V)X, Y)]$$

یا، بنابر  $(36.30)$  (به وسیلهٔ هردوی  $R$  و  $R^*$  برقرار می‌شود)، به ازای هر  $V$ ،

$$(R(X, Y)X, V) = -K(R^*(X, Y)X, V),$$

که نتیجه می‌دهد

$$(46.30) \quad R(X, Y)X = -KR^*(X, Y)X.$$

حال با گذاردن  $X + Z$  به جای  $X$ ، به دست می‌آوریم

$$R(X + Z, Y)(X + Z) = -KR^*(X + Z, Y)(X + Z),$$

$$R(X, Y)X + R(Z, Y)X + R(X, Y)Z + R(Z, Y)Z \\ = -K[R^*(X, Y)X + R^*(Z, Y)X + R^*(X, Y)Z + R^*(Z, Y)Z].$$

اگر مجدداً (۴۶.۳۰) را دوبار به کار ببریم، درمی یابیم که

$$R(X, Y)Z + R(Z, Y)X = -K[R^*(X, Y)Z + R^*(Z, Y)X].$$

پس از یک جایگشت دوری  $X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X$ ، خواهیم داشت

$$R(Z, X)Y + R(Y, X)Z = -K[R^*(Z, X)Y + R^*(Y, X)Z].$$

اگر رابطه دوم را از اول کم کنیم، به دست می آوریم

$$2R(X, Y)Z + R(Z, Y)X - R(Z, X)Y = -K[2R^*(X, Y)Z + R^*(Z, Y)X \\ - R^*(Z, X)Y].$$

بنابراین اتحاد ریچی (۳۳.۳۰)،

$$R(Z, Y)X - R(Z, X)Y = -R(Y, Z)X - R(Z, X)Y = R(X, Y)Z$$

و، به همین نحو،

$$R^*(Z, Y)X - R^*(Z, X)Y = R^*(X, Y)Z.$$

بنابراین،  $3R(X, Y)Z = -3KR^*(X, Y)Z$ ، و قضیه اثبات می شود.

حال می توان به اثبات قضیه شور پرداخت. با گرفتن مشتق مطلق  $\nabla_Z$  از طرفین

(۴۶.۳۰)، که در آن  $Z$  با  $U$  عوض شده است، خواهیم داشت

$$(۴۷.۳۰) \quad \nabla_Z(R(X, Y)U) = -(ZK)R^*(X, Y)U - K\nabla_Z(R^*(X, Y)U).$$

$\mathfrak{S}\{\quad\}$  یعنی عملی که مرکب است از گرفتن مجموع عبارت داخل دوابرو با دو عبارت

حاصل از آن به وسیله دو جایگشت دوری متوالی  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$ . با این نماد،

اتحاد بیانچی (۳۴.۳۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathfrak{S}\{\nabla_Z(R(X, Y)U)\} = \mathfrak{S}\{R(X, Y)\nabla_Z U\} + \mathfrak{S}\{R([X, Y], Z)U\}.$$

با اعمال  $\mathfrak{S}$  بر طرفین (۴۷.۳۰)، داریم

$$\mathfrak{S}\{\nabla_Z(R(X, Y)U)\} = -\mathfrak{S}\{(ZK)R^*(X, Y)U\} - K\mathfrak{S}\{\nabla_Z(R^*(X, Y)U)\}.$$

و با اعمال اتحاد بیانچی، که برای  $R$  همانند  $R^*$  برقرار است، به دست می آوریم

$$\mathfrak{S}\{R(X, Y)\nabla_Z U\} + \mathfrak{S}\{R([X, Y], Z)U\} \\ = -\mathfrak{S}\{(ZK)R^*(X, Y)U\} - K\mathfrak{S}\{R^*(X, Y)\nabla_Z U\} \\ - K\mathfrak{S}\{R^*([X, Y], Z)U\}.$$

اما، طبق اتحاد (۴۵.۳۰)،

$$R([X, Y], Z)U = -KR^*([X, Y], Z)U \quad \text{و} \quad R(X, Y)\nabla_Z U = -KR^*(X, Y)\nabla_Z U$$

لذا، اتحاد بالا با  $\{ (ZK)R^*(X, Y)U \} = 0$  یا، به شکل گسترده، با

$$(ZK)R^*(X, Y)U + (XK)R^*(Y, Z)U + (YK)R^*(Z, X)U = 0$$

معادل است. حال فرض کنیم  $X$  یک میدان برداری ناصفر،  $Y$  یک میدان برداری ناصفر،  $Z = U$  و  $X$  به  $Y$  متعامد،  $Z$  یک میدان از بردارهای یکبه یک عمود بر  $X$  و  $Y$  باشد. چنین میدانهای برداری در همسایگی به قدر کافی کوچکی از هر نقطه وجود دارند، زیرا بعد فضاها برداری مماس، طبق فرض، دست کم ۳ است. حال داریم

$$R^*(X, Y)U = (X, U)Y - (U, Y)X = 0 \quad ((U, X) = (U, Y) = 0 \text{ چون}),$$

$$R^*(Z, X)U = (Z, U)X - (U, X)Z = X \quad ((Z, U) = 1 \text{ چون}),$$

$$R^*(Y, Z)U = (Y, U)Z - (U, Z)Y = -Y.$$

بنابراین،

$$(YK)X - (XK)Y = 0.$$

چون میدانهای  $X, Y$ ، بدلیل متعامد و ناصفر بودن، مستقل اند، این ایجاب می کند که  $YK = 0$  و  $XK = 0$ . این، چون میدانهای  $X, Y$  دلخواه و ناصفرند، یعنی ثابت  $K = 0$  و قضیه اثبات می شود.

### ۱۳.۳۰ مشتقگیری مطلق از تانسورها

در زیر بخش ۳۰.۱۹ نشان دادیم که چگونه تانسورها را می توان مستقل از دستگاه مختصات، به عنوان توابعی چند خطی از بردارها و همبردارها، تعریف کرد. در ۱۰.۲۴ دیفرانسیل مطلق میدانهای تانسوری فقط برحسب مولفه های تانسور تعریف شدند. با نمادهای پایا، راحت تر آن است که مشتق مطلق را مستقل از دستگاه مختصات تعریف کنیم.

با میدانهای همبردارها، یعنی فرمهای خطی بر بردارها در هر نقطه، آغاز می کنیم. یک میدان همبردار  $\omega$ ، که در بخش ۳۱ فرم دیفرانسیل خطی نامیده شد، میدان برداری  $X$  را به تابع  $\omega(X)$  می نگارد. گوییم میدان  $\omega$  از کلاس  $C_\infty$  است اگر  $\omega(X)$ ، هم ازای هر میدان برداری  $X$  از کلاس  $C_\infty$ ، تابعی از کلاس  $C_\infty$  باشد. به ازای میدان برداری  $Y$ ،  $\nabla_Y \omega$  را یک میدان همبردار تعریف می کنیم به طوری که

$$Y\omega(X) = (\nabla_Y \omega)(X) + \omega(\nabla_Y(X)), \quad (48.30)$$

که از آنجا

$$(\nabla_Y \omega)(X) = Y\omega(X) - \omega(\nabla_Y(X)).$$

اسات خطی بودن  $(\nabla_Y \omega)(X)$  با ضرایب تابعی نسبت به  $X$  و  $Y$ ، به این معنی که  $T(X, Y) = (\nabla_Y \omega)(X)$  یک تانسور از نوع  $(0, 2)$  است، را به خواننده محول می کنیم.

در حالت کلی، اگر  $T$  یک میدان تانسوری از نوع  $(k, l)$  بوده و  $Y$  یک میدان برداری باشد، مشتق مطلق  $\nabla_Y T$  را طوری تعریف می‌کنیم که

$$\begin{aligned} Y T(\omega^1, \dots, \omega^k; X_1, \dots, X_l) &= (\nabla_Y T)(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l) \\ &+ T(\nabla_Y \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l) + T(\omega^1, \nabla_Y \omega^2, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l) + \dots \\ &+ T(\omega^1, \dots, \omega^{k-1}, \nabla_Y \omega^k, X_1, \dots, X_l) + T(\omega^1, \dots, \omega^k, \nabla_Y X_1, \dots, X_l) + \dots \\ &+ T(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_{l-1}, \nabla_Y X_l). \end{aligned}$$

می‌توان ثابت کرد که  $\tilde{T}(\omega^1, \dots, \omega^k; X_1, \dots, X_{l+1}) = (\nabla_{X_{l+1}} T)(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l)$  یک تانسور از نوع  $(k, l+1)$  است.

گاهی انواع دیگر عملگر (علاوه بر عملگرهای چندخطی اسکالر بر همبردارها و بردارها) را می‌توان به عنوان تانسور تعبیر کرد. مثلاً، یک عملگر خطی برداری  $T$  بر بردارها که میدان برداری  $X$  را به میدان برداری  $TX$  می‌نگارد را می‌توان به عنوان یک تانسور از نوع  $(1, 1)$  تلقی کرد. در واقع،

$$T(\omega, X) = \omega(T(X))$$

یک تانسور از نوع  $(1, 1)$  است، و تناظری یک به یک بین توابع دو خطی  $T(\omega, X)$  و عملگرهای برداری  $T$  وجود دارد. به همین نحو، با قرار دادن

$$R(\omega, X, Y, Z) = \omega(R(X, Y)Z),$$

می‌توان عملگر انحنا  $R$  را به عنوان یک تانسور از نوع  $(1, 3)$  تعبیر کرد. مشتق مطلق این تانسور  $\nabla_U R$  به ازای  $U$  معلوم باز یک تانسور از نوع  $(1, 3)$  است و می‌تواند به عنوان یک عملگر برداری بر یک میدان برداری تعبیر مجدد شود که به طور خطی به دو میدان برداری  $(\nabla_U R)(X, Y)$  با قرار دادن میدانهای برداری  $X, Y, Z$  و میدان همبردار  $\omega$ :

$$\omega((\nabla_U R)(X, Y)Z) = (\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z)$$

بستگی دارد. این تعبیر مشتق مطلق تانسور انحنا خیلی به کار می‌رود. مثلاً، با استفاده از این مفهوم، می‌توان اتحاد بیانچی  $(34.30)$  را ساده کرد، و اتحاد معادل آن

$$(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0 \quad (50.30)$$

را به دست آورد.

## تمرین

۱. با معرفی مختصات منحنی الخط موضعی و پایه  $\partial_i$  و پایه دوگان  $\partial^i$  (که در بخش ۳۱ با  $du^i$  نموده خواهد شد)، و استفاده از  $(19.30)$ ، ثابت کنید که تعریف مشتقگیری

مطلق از تانسورها در این بخش بر تعریف شده در ۱۰۲۴ منطبق است.

۲. حکم بیان شده بعد از فرمول (۴۸.۳۰)، و نیز حکم بعد از (۴۹.۳۰)، را ثابت کنید.

۳. ثابت کنید که

$$(\nabla_Z R)(X, Y)U = \nabla_Z(R(X, Y)U) - R(\nabla_Z X, Y)U - R(X, \nabla_Z Y)U - R(X, Y)\nabla_Z U.$$

۴. با استفاده از فرمول اخیر و خواص (۲۰.۳۰) تا (۲۲.۳۰) و (۲۴.۳۰)، اتحاد بیانچی به شکل (۵۰.۳۰) را ثابت کنید. ★

### ۱۴.۳۰ جادهنده‌ها از چندگوناها در یک چندگونای ریمانی

فرض کنیم  $\phi$  یک نگاشت منتظم یا جادهنده‌ای از چندگونای  $M$  بتوی چندگونای ریمانی  $\tilde{M}$  باشد. چندگونای ریمانی دارای متر یا ضرب اسکالر میدانهای برداری مانند  $(X, Y)$  و همبندی  $\nabla_Y$  القا شده به وسیله ضرب اسکالر است. فرض کنیم  $X, Y$  میدانهای برداری مماس بر  $M$  باشند. جادهنده را می‌توان به بردارهای مماس به همان نحوی که نگاشت از سطوح در ۸.۳۰ توسیع داد. در  $M$  یک ضرب اسکالر تعریف می‌کنیم به این نحو که قرار می‌دهیم

$$(X, Y) = (\phi X, \phi Y),$$

که در آن طرف راست ضرب اسکالر در  $\tilde{M}$  است. واضح است که  $(X, Y)$  در شرایط (۱۶.۳۰) و (۱۷.۳۰) صدق می‌کند. برای اثبات اینکه در (۱۸.۳۰) نیز صدق می‌کند، توجه می‌کنیم که نگاشت  $\phi$  منتظم نام دارد (ر.ک. ۵.۱۱). اگر توسیع آن در هر نقطه فضای برداری مماس را به یک فضای برداری با همان بعد، و در نتیجه بردارهای ناصفر را به بردارهای ناصفر، بنگارد. لذا، اگر  $\phi X, X \neq 0$  نیز چنین است و  $(X, X) = (\phi X, \phi X) \neq 0$ . در نتیجه،  $(X, Y)$  چندگونارا به یک چندگونای ریمانی بدل می‌کند. متر  $(X, Y)$  را متر القا شده به وسیله جادهنده می‌نامیم.

همچنین، اگر به ازای دو میدان برداری  $X, Y$  قرار دهیم

$$\nabla_Y X = \text{proj } \tilde{\nabla}_{\phi(Y)} \phi X,$$

که در آن "proj" در هر نقطه  $\phi(P)$  تصویر متعامد بردار روی صفحه مماس بر جادهنده در  $P$  است، می‌توانیم یک همبندی به  $M$  القا کنیم. این همبندی بر همبندی القا شده به وسیله متر القایی منطبق است.

اگر بعد  $\tilde{M}$  یکی بیشتر از بعد  $M$  باشد (که در این صورت، می‌گوییم جادهنده از متمم بعد یک است)، می‌توان، در نقاط  $\phi(\mathcal{V})$ ، که  $\mathcal{V}$  یک همسایگی به قدر کافی کوچکی در  $M$  است، اقلاً "موضعی، میدان  $N$  از بردارهای یکه قائم به جادهنده را

تعریف کرد. این میدان را می‌توان در همسایگی نقش  $\phi(V)$  به یک میدان توسیع داد. طبق استدلالی شبیهه دو بند نهایی ۶.۳۵، می‌توان ثابت کرد که، به‌ازای بردار  $\phi X_P$  مماس بر جادهنده در نقطه  $\phi(P)$ ، مشتق  $\nabla_{\phi X_P} N$  از میدان  $X$  مستقل بوده و فقط به مقدار  $X_P$  در  $P$  بستگی دارد. چون  $(N, N) = 0$ ، و در نتیجه  $(\tilde{\nabla}_{\phi X_P} N, N_P) = 0$ ، بردار  $\tilde{\nabla}_{\phi X_P} N$  متعامد به  $N_P$  است و، لذا، مماس بر جادهنده بوده، و می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mathcal{F}(X_P) = \phi^{-1}(\nabla_{\phi(X_P)} N).$$

$\mathcal{F}$ : یک تبدیل خطی از فضای مماس است.

بخصوص، نظریه سطوح را می‌توان، با گرفتن فضای اقلیدسی سه بعدی به عنوان  $\mathbb{R}^3$  و سطح به عنوان یک نشاننده (یا، به‌طور کلیتر، جادهنده) از یک چندگونای دو بعدی، مطرح کرد.

از خواننده می‌خواهیم قسمت‌هایی از فصول ۵ تا ۷ را با این نمادها تنظیم نماید.

### ۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی

#### ۱.۳۱ فرمهای دیفرانسیل خطی بریک سطح

فضای بردارهای مماس بر یک سطح در نقطه‌ای مانند  $P$  و مجموعه تمام فرمهای خطی، یعنی توابع حقیقی  $\omega_P$  از بردار مماس در  $P$  که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\omega_P(X_P + Y_P) = \omega_P(X_P) + \omega_P(Y_P),$$

$$\omega_P(aX_P) = a\omega_P(X_P),$$

را در نظر می‌گیریم. مجموعه تمام فرمهای خطی در نقطه  $P$  یک فضای برداری دوبعدی-فضای دوگان فضای بردارهای مماس-را تشکیل می‌دهد. هر دو فرم خطی مستقل  $\omega_P^1, \omega_P^2$  یک پایه برای این فضا می‌سازند؛ در نتیجه، هر فرم دیگر  $\omega_P$  را می‌توان به شکل

$$\omega_P = a_i \omega_P^i$$

نمایش داد، که در آن  $a_i$  عدد می‌باشند.

فرض کنیم  $P$  در قلمرویی مانند  $\mathcal{D}$  تغییر کند، و یک میدان از فرمهای خطی، یعنی فرمی خطی در هر نقطه، در نظر می‌گیریم. چنین میدانی از فرمها، به نام فرم دیفرانسیل خطی، تابعی است مانند  $\omega$  که به میدان برداری  $X$  در  $\mathcal{D}$  تابع حقیقی  $\omega(X)$  رانسبت می‌دهد.  $\omega$ ، در تحدید به بردارهای مماس در نقطه معلوم  $P$ ، یک فرم خطی در  $P$  می‌شود. فرم دیفرانسیل خطی  $\omega$  را مشتق‌پذیر از کلاس  $C_r$  نامیم اگر مقدارش  $\omega(X)$  بر میدان برداری  $X$  از کلاس  $C_r$  یک تابع مشتق‌پذیر از کلاس  $C_r$  باشد. فرم دیفرانسیل خطی  $\omega$  در خواص زیر صدق می‌کند:

$$(۱.۳۱) \quad \omega(X + Y) = \omega(X) + \omega(Y);$$

$$(۲.۳۱) \quad \omega(aX) = a\omega(X),$$

که در آن  $X, Y$  میدانهای برداری بوده و  $a$  تابعی در قلمرو  $\mathcal{D}$  می باشد. این خواص ایجاب می کنند که، به ازای هر مجموعه از توابع  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و میدانهای برداری  $X_1, X_2, \dots, X_n$  داشته باشیم

$$(۳.۳۱) \quad \omega(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1 \omega(X_1) + a_2 \omega(X_2) + \dots + a_n \omega(X_n).$$

فرمهای دیفرانسیل خطی  $\omega^1, \dots, \omega^k$  را در قلمرو  $\mathcal{D}$  مستقل گوییم اگر، در تحدید به هر نقطه  $P$  از  $\mathcal{D}$ ، فرمهای مستقلی در  $P$  شوند. در حالت سطح نمی تواند بیش از دو فرم مستقل در  $P$  وجود داشته باشد. اگر فرمهای  $\omega^1, \omega^2$  در  $\mathcal{D}$  مستقل باشند، هر فرم دیفرانسیل خطی دیگر  $\omega$  در  $\mathcal{D}$  را می توان به شکل

$$(۴.۳۱) \quad \omega = a_i \omega^i$$

نمایش داد، که در آن  $a_i$  تابعی از نقطه در  $\mathcal{D}$  است.

فرض کنیم  $f$  یک تابع مشتقپذیر از کلاس  $C_r$  بر سطحی از کلاس  $C_r$  باشد. فرم دیفرانسیل خطی  $df$  را با

$$(۵.۳۱) \quad df(X) = Xf$$

تعریف می کنیم. اثبات اینکه این یک فرم دیفرانسیل خطی از کلاس  $C_{r-1}$  است را به خواننده وامی گذاریم. این فرم خطی دیفرانسیل تابع  $f$  نام دارد.

اگر مختصات منحنی الخط موضعی  $(u^1, u^2)$  را در همسایگی معرفی کنیم، توابع  $u^1$  و  $u^2$  که به هر نقطه  $P$  مختصات را نسبت می دهند توابعی از کلاس  $C_r$  اند. دیفرانسیلهای  $du^i$  این توابع به هر میدان برداری مولفه های آن نسبت به پایه طبیعی  $(\partial_1, \partial_2)$  نظیر به مختصات موضعی را نسبت می دهد؛ یعنی، اگر  $X = \xi^i \partial_i$ ،

$$(۶.۳۱) \quad du^i(X) = du^i(\xi^j \partial_j) = \xi^i.$$

درواقع، داریم  $\partial_j u^i = \partial u^i / \partial u^j = \delta_j^i$  و  $du^i(\partial_j) = \partial_j u^i = \delta_j^i$  و  $du^i(\xi^j \partial_j) = \xi^j du^i(\partial_j) = \xi^j \delta_j^i = \xi^i$  و لذا، هر فرم دیفرانسیل خطی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega = a_i du^i,$$

که در آن  $a_i$  تابعی از  $(u^1, u^2)$  در همسایگی که مختصات  $(u^1, u^2)$  معتبرند می باشد.

فرمول (۶.۳۱) کاملاً "برطبق تعبیر ما از علامات  $du^i$  به عنوان مولفه های بردار مماس در قسمت اصلی کتاب رفتار می کند.

توجه کنید که اگر تابع  $f$  را بر سطح به عنوان تابعی از مختصات  $u^1, u^2$  در نظر

بگیریم، خواهیم داشت

$$(۷.۳۱) \quad df = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i.$$

در واقع، طبق (۵.۳۱) و (۶.۳۱)،

$$df(X) = df(\xi^i \partial_i) = \xi^i df(\partial_i) = \xi^i \partial f / \partial u^i = \partial f / \partial u^i du^i(X).$$

برای احتراز از محاسبات بیشتر کلاس فرمهای مورد بحث، فرض می‌کنیم درآینده همه سطوح، چندگوناها، نگاشتها، فرمهای دیفرانسیل، و میدانهای برداری مورد نظر از کلاس  $C_\infty$  باشند.

امثله و تمرین

۱. تحقیق کنید که در نمایش  $\omega = a_i du^i$  داریم

$$(۸.۳۱) \quad a_i = \omega(\partial_i).$$

۲. با استفاده از این نتیجه، ثابت کنید فرم

$$\omega = a_i du^i$$

بریک سطح از کلاس  $C_{r+1}$  از کلاس  $C_r$  است اگر و فقط اگر توابع  $a_i$  از کلاس  $C_r$  باشند.

۲.۳۱ فرمهای دیفرانسیل خطی در ابعاد بالاتر

اساساً، همان تعاریف و فرمولها را می‌توان در چندگوناها  $n$  بعدی - بویژه، در فضای اقلیدسی سه بعدی - به کار برد. تنها تفاوتها عبارتند از اینکه اندیسها و جمعبندها، به جای ۱، ۲، روی مقادیر  $1, 2, \dots, n$  گرفته می‌شوند، حداکثر  $n$  فرم مستقل وجود دارند، و هر مجموعه از  $n$  فرم مستقل را می‌توان یک پایه برای تمام فرمهای دیفرانسیل خطی گرفت.

۳.۳۱ نگاشتها و فرمهای دیفرانسیل

بمازای دو چندگونا  $M$  از بعد  $n$  و  $\tilde{M}$  از بعد  $m$ ، فرض کنیم  $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$  یک نگاشت از کلاس  $C_\infty$  باشد. در این صورت، اگر فرم دیفرانسیل خطی  $\tilde{\omega}$  در چندگونا  $\tilde{M}$ ، یا دست کم در نقش  $\phi(M)$ ، داده شده باشد، می‌توان فرم دیفرانسیل خطی  $\omega = \phi^* \tilde{\omega}$  را در  $M$  به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنیم  $X$  یک میدان برداری مماس بر  $M$  بوده، و  $\tilde{X} = \phi_* X$  نقش میدان  $X$  تحت توسیع  $\phi$  به بردارهای مماس باشد.  $\tilde{X}$  یک میدان مماس بر  $\tilde{M}$  است. قرار می‌دهیم

$$(۹.۳۱) \quad \phi^* \tilde{\omega}(X) = \tilde{\omega}(\tilde{X}) = \tilde{\omega}(\phi X).$$

به آسانی ثابت می شود که  $\phi^*\tilde{\omega}$  یک فرم دیفرانسیل خطی در  $M$  است. با استفاده از مختصات موضعی  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$  در قلمروی مانند  $\mathcal{D}$  بر  $M$  و  $(v^1, v^2, \dots, v^m)$  در قلمروی بر  $\tilde{M}$  که شامل نقش  $\mathcal{D}$  است، می توان نگاشت را، درتحدید به  $\mathcal{D}$ ، با دستگاهی از  $m$  تابع از  $n$  متغیر

$$v^{\kappa} = \phi^{\kappa}(u^1, \dots, u^n), \quad \kappa = 1, 2, \dots, m \quad (10.31)$$

نمایش داد.

چون سروکار ما با چندگوناها با ابعاد مختلف است، قرار داد جمع بندی خود را با گذاشتن اینکه اندیسهایی که با حروف لاتینی  $i, j, k$  و غیره نموده می شوند مقادیر  $1, 2, \dots, n$  را گرفته و اندیسهایی که با حروف یونانی  $\kappa, \lambda, \mu$  و غیره نموده می شوند مقادیر  $1, 2, \dots, m$  را بگیرند پیرایش می کنیم.

میدان برداری مماس  $\xi^i \partial_i$  به  $X$  به  $M$  به وسیله  $\phi$  به میدان برداری  $\tilde{X}$  با مولفه های

$$\eta^{\kappa} = \frac{\partial \phi^{\kappa}}{\partial u^i} \xi^i$$

نگاشته می شود. در نتیجه، طبق (۸.۳۱)،

$$\phi^*\tilde{\omega}(\xi^i \partial_i) = \tilde{\omega}\left(\frac{\partial \phi^{\kappa}}{\partial u^i} \xi^i \partial_{\kappa}\right).$$

اگر قرار دهیم  $\phi^*\tilde{\omega}(\partial_i) = a_i$  و  $\tilde{\omega}(\partial_{\kappa}) = b_{\kappa}$ ، بنابر (۸.۳۱) می توانیم بنویسیم

$$\tilde{\omega} = b_{\kappa} dv^{\kappa} \quad \text{و} \quad \phi^*\tilde{\omega} = a_i du^i$$

و، بنابر (۶.۳۱)،  $\xi^i = du^i(X)$ ، لذا،

$$a_i du^i(X) = b_{\kappa} \frac{\partial \phi^{\kappa}}{\partial u^i} du^i(X)$$

یا، چون  $X$  دلخواه است،

$$a_i du^i = b_{\kappa} \frac{\partial \phi^{\kappa}}{\partial u^i} du^i. \quad (11.31)$$

این یعنی فرم القایی  $\phi^*\tilde{\omega}$  بیان شده با مختصات، از فرم  $\tilde{\omega}$  در مختصات به وسیله تعویض صوری  $dv^{\kappa}$  با دیفرانسیل تابع نظیر  $v^{\kappa}$  از متغیرهای  $u^i$  به دست آمده است. این روند صوری در محاسبات خیلی مفید است.

امثله وتمرین

۱. فرض کنید  $//$  فضای اقلیدسی سه بعدی با مختصات دکارتی متعامد  $x^1, x^2, x^3$ ، صفحه  $(x^1, x^2)$  بوده، و  $\phi$  نشاننده صفحه در فضا باشد. همچنین،

$\bar{\omega} = dx^1 + dx^2 + dx^3$ ؛ یعنی، فرم  $\bar{\omega}$  به هر بردار در هر نقطه مجموع سه مولفه‌اش را نسبت دهد. فرم القایی در صفحه خواهد بود  $\phi^*\bar{\omega} = dx^1 + dx^2$  که به هر بردار در صفحه مجموع دو مولفه‌اش (که مجموع هر سه مولفه این بردار در فضا نیز هست، زیرا مولفه سوم مساوی صفر است) را نسبت می‌دهد.

۲. فرض کنید  $\mathcal{H}$  مجدداً "فضای اقلیدسی سه بعدی"،  $\mathcal{H}$  مارپیچ‌گون

$$x^1 = u^1 \cos u^2, \quad x^2 = u^1 \sin u^2, \quad x^3 = au^2,$$

و  $\phi$  باز نگاشت شمول باشد. فرم  $\bar{\omega} = dx^1 + dx^2 + dx^3$  یک فرم دیفرانسیل خطی بر سطح القا می‌کند. برای یافتن فرم القایی برحسب  $du^1$  و  $du^2$ ، کافی است جایگذاری صورتی

$$dx^1 = \cos u^2 du^1 - u^1 \sin u^2 du^2,$$

$$dx^2 = \sin u^2 du^1 + u^1 \cos u^2 du^2,$$

$$dx^3 = a du^2$$

را انجام داده، بدین ترتیب به دست آورد که

$$\phi^*\bar{\omega} = (\cos u^2 + \sin u^2 + a) du^1 + (u^1 \cos u^2 - u^1 \sin u^2) du^2.$$

۳. فرض کنید  $\mathcal{H} \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] = \mathcal{Q} : \Phi$ ، که در آن  $\mathcal{H}$  یک چندگونای دیفرانسیل بوده، و مختصات نقطه  $\mathcal{Q}$ ،  $(t, s)$  باشند. همچنین،  $\Phi$  مستقل از  $s$ ، دارای خواص زیر باشد:

$$\Phi(0, s) = P_0, \quad \Phi(1, s) = P_1$$

و نیز،  $\bar{\omega}$  یک فرم دیفرانسیل خطی در  $\mathcal{H}$  باشد. در این صورت،  $\omega = \Phi^*\bar{\omega}$  یک فرم دیفرانسیل خطی در  $\mathcal{Q}$  است؛ و در نتیجه،

$$\omega = a(t, s) dt + b(t, s) ds.$$

ثابت کنید  $b(0, s)$  و  $b(1, s)$  بستگی به  $s$  ندارند.

۴. از تمرین قبل نتیجه بگیرید که اگر  $\partial a / \partial s = \partial b / \partial t$ ،

$$I(s) = \int_0^1 a(t, s) dt$$

بستگی به  $s$  ندارد؛ و در نتیجه،

$$\int_0^1 a(t, 0) dt = \int_0^1 a(t, 1) dt.$$

۴.۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی درجه دوم و ضرب برونی فرمهای خطی

یک فرم دیفرانسیل برونی درجه دوم  $\Omega$  به هر جفت مرتب از میدانهای برداری  $(X, Y)$

تابع  $\Omega(X, Y)$  را نسبت می‌دهد و در شرایط زیر صدق می‌کند: به ازای میدانهای برداری دلخواه  $X, Y, X_1, X_2$  و تابع دلخواه  $f$ ،

$$(12.31) \quad \Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X) \quad (\text{متقارن اریب}),$$

$$(13.31) \quad \Omega(X_1 + X_2, Y) = \Omega(X_1, Y) + \Omega(X_2, Y),$$

$$(14.31) \quad \Omega(fX, Y) = f\Omega(X, Y).$$

این خواص ایجاب می‌کنند که

$$(15.31) \quad \Omega(X, X) = 0,$$

و، بعلاوه، قانون پخشپذیری در هر دو جا برقرار است؛ یعنی،

$$\Omega(a_1X_1 + \dots + a_nX_n, Y) = a_1\Omega(X_1, Y) + \dots + a_n\Omega(X_n, Y)$$

و

$$\Omega(X, b_1Y_1 + \dots + b_nY_n) = b_1\Omega(X, Y_1) + \dots + b_n\Omega(X, Y_n),$$

که در آنها ضرایب  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  توابعی از یک نقطه‌اند.

یک طریقه مهم برای به دست آوردن فرمهای دیفرانسیل برونای درجه دوم ضرب برونای فرمهای خطی است. به ازای دو فرم دیفرانسیل خطی  $\omega, \theta$ ، حاصل ضرب برونای  $\omega \wedge \theta$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(16.31) \quad (\omega \wedge \theta)(X, Y) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X).$$

از این تعریف فوراً نتیجه می‌شود که ضرب برونای فرمهای خطی متقارن اریب است:

$$(17.31) \quad \omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega,$$

و نسبت به هر عامل خطی است؛ یعنی، برای فرمهای  $\omega^1, \dots, \omega^n$  و توابع  $a_1, \dots, a_n$  داریم

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \omega^i \right) \wedge \theta = \sum_{i=1}^n a_i (\omega^i \wedge \theta),$$

و، به همین نحو،

$$\omega \wedge \left( \sum_{k=1}^n b_k \theta^k \right) = \sum_{k=1}^n b_k (\omega \wedge \theta^k).$$

همچنین، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \omega^i \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^n b_j \omega^j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \omega^i \wedge \omega^j.$$

مجموع دوم نیز مساوی است با

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j b_i \omega^j \wedge \omega^i = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j b_i \omega^i \wedge \omega^j.$$

از اینرو، نیز داریم

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \omega^i \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^n b_j \omega^j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i) \omega^i \wedge \omega^j.$$

حال قلمرو  $\mathcal{Q}$  به مختصات موضعی  $u^i$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$X = \xi^k \partial_k, Y = \eta^l \partial_l$$

$$\begin{aligned} du^i \wedge du^j(X, Y) &= \xi^k \eta^l du^i \wedge du^j(\partial_k, \partial_l) \\ &= \xi^k \eta^l [du^i(\partial_k) du^j(\partial_l) - du^i(\partial_l) du^j(\partial_k)] \\ &= \xi^k \eta^l [\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j] = \xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i. \end{aligned}$$

اینک فرض کنیم  $\Omega$  یک فرم دیفرانسیل برونوی درجه دوم بوده، و قرار می‌دهیم

$$\Omega(\partial_i, \partial_j) = a_{ij}.$$

بنابراین،

$$(18.31) \quad \Omega = \frac{1}{2} a_{ij} du^i \wedge du^j.$$

ضرایب متقارن اریب  $a_{ij} = -a_{ji}$  به‌طور منحصر بفرد به‌وسیله فرم و محتصات موضعی

معین می‌شوند.

درواقع،

$$\Omega(X, Y) = \Omega(\xi^i \partial_i, \eta^j \partial_j) = \xi^i \eta^j \Omega(\partial_i, \partial_j).$$

لذا،

$$\Omega(X, Y) = a_{ij} \xi^i \eta^j = a_{ji} \xi^j \eta^i = -a_{ij} \xi^j \eta^i,$$

زیرا

$$a_{ij} = \Omega(\partial_i, \partial_j) = -\Omega(\partial_j, \partial_i) = -a_{ji}.$$

درنتیجه،

$$\Omega(X, Y) = \frac{1}{2} a_{ij} (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i) = \frac{1}{2} a_{ij} du^i \wedge du^j(X, Y).$$

از آن‌سو، هرگاه  $a_{ij} = -a_{ji}$  و  $\Omega = \frac{1}{2} a_{ij} du^i \wedge du^j = 0$ ، آنگاه، با اختیار دو اندیس

ثابت متمایز  $i_0, j_0$  فرض  $X = \partial_{i_0}$ ،  $Y = \partial_{j_0}$  و برای  $\Omega(X, Y)$  فقط دو جمله مجموع احتمالاً "مخالف صفرند و

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{i_0 j_0} du^{i_0} \wedge du^{j_0}(X, Y) + \frac{1}{2} a_{j_0 i_0} du^{j_0} \wedge du^{i_0}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{2} a_{i_0 j_0} - \frac{1}{2} a_{j_0 i_0} = \frac{1}{2} a_{i_0 j_0} + \frac{1}{2} a_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} = 0,$$

که صفر بودن همه ضرایب را نشان می‌دهد.

حال می‌توان ثابت کرد که در نقطه  $P$ ، اگر  $\omega \wedge \theta \neq 0$  و فقط اگر  $\omega$  و  $\theta$  در این

نقطه مستقل باشند.

با معرفی مختصات موضعی در همسایگی  $P$ ، می توان نوشت

$$\omega = a_i du^i, \quad \theta = b_j du^j.$$

لذا،

$$\omega \wedge \theta = a_i b_j du^i \wedge du^j = \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i) du^i \wedge du^j.$$

چون ضرایب  $a_i b_j - a_j b_i$  متقارن اریباند، در  $P$ ،  $\omega \wedge \theta = 0$ ، اگر و فقط اگر در  $P$  به ازای هر جفت  $i, j$ ،  $a_i b_j - a_j b_i = 0$ ، که رخ می دهد اگر و فقط اگر در  $P$ ،  $a_i = \lambda b_i$  یا  $b_i = \mu a_i$ .

در حالت یک سطح، فقط دو فرم مستقل  $du^1, du^2$  وجود دارند؛ و در نتیجه، فقط یک حاصل ضرب ناصفر  $du^1, du^2$  وجود خواهد داشت. لذا، فقط یک حاصل ضرب ناصفر  $du^1 \wedge du^2 = -du^2 \wedge du^1$  وجود دارد و هر فرم دیفرانسیل برونی درجه دوم مساوی است با

$$\Omega = a du^1 \wedge du^2.$$

ما عمداً "همه" استدلالهای این بخش را بی استفاده از اینکه بعد 2 است بیان می کنیم؛ در نتیجه، همه نتایج در حالت کلی چندگوناها با بعد دلخواه برقرارند.

### امثله و تمرین

۱. فرض کنید  $U = aX + bY$ ،  $V = cX + dY$ . ثابت کنید به ازای هر فرم دیفرانسیل برونی درجه دوم  $\Omega$ ، داریم

$$\Omega(U, V) = (ad - bc)\Omega(X, Y).$$

۲. با استفاده از نتیجه بخش پیش، توجه کنید که اگر در ترمینان جایگذاری در تمرین پیش 1 باشد،

$$\Omega(U, V) = \Omega(X, Y).$$

۳. یک جفت مرتب از بردارها در فضای مماس یک صفحه جهتدار - صفحه پیموده شده به وسیله بردارها -، و یک مساحت - مساحت متوازی الاضلاع پیموده شده به وسیله دو بردار - معین می کند. یک جایگذاری با در ترمینان 1 دو بردار را با جفت دیگری در همان صفحه عوض می کند، و به صفحه همان جهت را داده و متوازی الاضلاعی با همان مساحت را می پیماید. در این حالت گوییم دو جفت بردار یک عنصر مسطح معین می کنند. مسئله قبل را می توان این طور تعبیر هندسی کرد که بگوییم یک فرم دیفرانسیل برونی درجه دوم، به جای خود جفت بردارها، به عنصرهای مسطح که به وسیله جفت بردارها نمایش داده شده بستگی دارد.

### ۵.۳۱ لم کارتان<sup>۱</sup>

قضیه زیر، به نام لم کارتان، ابزار سودمندی است.

قضیه. فرض کنیم  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k$  فرمهای خطی مستقلی در قلمرو  $\mathcal{L}$  از یک چندگونای دیفرانسیل  $n$  بعدی بوده، و  $k \leq n$ . هرگاه

$$(19.31) \quad \theta^1 \wedge \omega^1 + \theta^2 \wedge \omega^2 + \dots + \theta^k \wedge \omega^k = 0,$$

نگاه

$$(20.31) \quad \theta^j = a_i^j \omega^i, \text{ که در آن } a_i^j = a_i^j$$

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که کافی است قضیه در همسایگی بدخواه کوچک هر نقطه از  $\mathcal{L}$  ثابت شود. در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه دلخواه، می‌توان مجموعه فرمهای مستقل  $\omega^1, \dots, \omega^k$  را به یک پایه مانند  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k, \omega^{k+1}, \dots, \omega^n$  کامل کرد. در این صورت، داریم

$$\theta^j = \sum_{i=1}^k a_i^j \omega^i + \sum_{i=k+1}^n a_i^j \omega^i, \quad j = 1, \dots, k.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \theta^j \wedge \omega^j &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k a_i^j \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_i^j \omega^i \wedge \omega^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (a_i^j - a_j^i) \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_i^j \omega^i \wedge \omega^j = 0. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که به ازای  $i, j = 1, \dots, k$ ،  $a_i^j - a_j^i = 0$  یا  $a_i^j = a_j^i$ ؛ و به ازای  $i = k+1, \dots, n$ ،  $a_i^j = 0$ ، و قضیه اثبات می‌شود.

### ۶.۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی از درجه دلخواه

یک فرم دیفرانسیل برونی  $\omega$  از درجه  $p$ ، در هر نقطه  $P$  از چندگونا، یک فرم چند خطی از  $p$  بردار مماس است که متقارن اریب می‌باشد؛ یعنی، وقتی بر  $p$  بردار یک جایگشت زوج اعمال شود، مقدارش حفظ می‌شود؛ و وقتی جایگشت فرد باشد، علامتش

تغییر می‌یابد. با نقطه متغیر  $\omega$  به یک  $p$  تایی مرتب از میدانهای برداری  $X_1, X_2, \dots, X_p$  تابع  $\omega(X_1, \dots, X_p)$  را نسبت می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۲۱.۳۱)  $\omega(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(p)}) = \text{sgn } \pi \omega(X_1, X_2, \dots, X_p)$ ,  
 که در آن  $\pi$  یک جایگشت از اعداد  $1, 2, \dots, p$  است و  $\text{sgn } \pi = 1$  اگر جایگشت زوج باشد،  
 و  $-1$  است اگر فرد باشد:

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_{k-1}, X + Y, X_{k+1}, \dots, X_p) &= \omega(X_1, \dots, X_{k-1}, X, X_{k+1}, \dots, X_p) \\ &+ \omega(X_1, \dots, X_{k-1}, Y, X_{k+1}, \dots, X_p), \\ \omega(X_1, \dots, X_{k-1}, aX_k, X_{k+1}, \dots, X_p) &= a\omega(X_1, \dots, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, \dots, X_p). \end{aligned}$$

(۲۲.۳۱)

(۲۳.۳۱)

دو شرط اخیر خطی بودن نسبت به هر متغیر با ضرایب تابعی را ایجاب می‌کنند.  
 به‌ازای دو فرم دیفرانسیل برونی  $\omega$  از درجه  $p$  و  $\theta$  از درجه  $q$ ، حاصل ضرب  
 برونی  $\omega \wedge \theta$  را یک فرم دیفرانسیل برونی از درجه  $p + q$  تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که

$$\omega \wedge \theta(X_1, X_2, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \theta(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}),$$

(۲۴.۳۱)

که در آن جمع‌بندی روی تمام جایگشت‌های اعداد  $1, 2, \dots, p + q$  گرفته شده است. در حالت  
 خاص دو فرم خطی، این تعریف بر تعریف داده شده در ۴.۳۱ منطبق است.  
 ضرب برونی فرمهای دیفرانسیل برونی شرکتپذیر است؛ یعنی، اگر  $\omega, \theta, \sigma$  فرمهای  
 دیفرانسیل برونی به‌ترتیب از درجات  $p, q, r$  باشند،

$$(25.31) \quad (\omega \wedge \theta) \wedge \sigma = \omega \wedge (\theta \wedge \sigma).$$

اثبات این امر، با آنکه دراصل سراسر است، در قسمت جایگشتها به دقت نیاز  
 دارد.

همه جایگشت‌های  $\pi$  از اعداد  $1, 2, \dots, p + q + r$  را در نظر گرفته، و آنها را به  
 کلاسهای هم‌ارزی تقسیم می‌کنیم به این نحو که دو جایگشت  $\pi$  و  $\pi'$  را هم‌ارز گیریم اگر  
 $r$  عدد آخر را در همان مواضع قرار دهند؛ یعنی، به‌ازای  $i = 1, 2, \dots, r$ ،  
 $\pi(p + q + i) = \pi'(p + q + i)$ . هر کلاس هم‌ارزی شامل یک جایگشت  $\pi^*$  است، که ما آن  
 را نمایش یکنوای کلاس می‌نامیم، به طوری که  $\pi^*(1) < \pi^*(2) < \dots < \pi^*(p + q)$ . حال  
 جایگشت‌های  $\rho$  از اعداد  $1, 2, \dots, p + q$  را در نظر می‌گیریم.  $\rho$  را می‌توان با جایگشتی از  
 اعداد  $1, 2, \dots, p + q + r$  یکی کرد که اعداد  $p + q + 1, \dots, p + q + r$  را بی‌تغییر

می‌گذارد.

اگر ترکیبات  $\pi^* \rho$  یک نمایش یکنوای  $\pi^*$  از یک کلاس هم‌ارزی جایگشت‌ها را با همه جایگشت‌های  $\rho$  که فقط بر  $p+q$  اعداد اول اثر دارند اختیار کنیم، همه جایگشت‌های  $\pi$  هم‌ارز با  $\pi^*$  به دست می‌آیند. لذا، هر جایگشت  $\pi$  را می‌توان به صورت ترکیبی از جایگشت یکنوای هم‌ارز  $\pi^*$  با جایگشت مناسبی چون  $\rho$  نمایش داد. واضح است که داریم

$$\text{sgn } \pi = \text{sgn } \pi^* \text{sgn } \rho$$

به خاطر تقارن اریب حاصل ضرب  $\omega \wedge \theta$ ، برای  $\pi = \pi^* \rho$ ، و به ازای میدانهای دلخواه  $X_1, \dots, X_{p+q+r}$ ، داریم

$$(\omega \wedge \theta)(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}) = \text{sgn } \rho \omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \dots, X_{\pi^*(p+q)}).$$

اما، طبق تعریف، داریم

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \dots, X_{p+q+r}) = \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \omega \wedge \theta(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}) \cdot \sigma(X_{\pi(p+q+1)}, \dots, X_{\pi(p+q+r)}).$$

جمع‌بندی را می‌توان ابتدا در هر کلاس هم‌ارزی جداگانه، و سپس روی همه کلاس‌های هم‌ارزی انجام داد. در این صورت، مجموع روی کلاس هم‌ارزی با نمایش یکنوای  $\pi^*$  مساوی است با

$$\sum_{\rho} \text{sgn } \pi^* \text{sgn } \rho \omega \wedge \theta(X_{\pi^*\rho(1)}, \dots, X_{\pi^*\rho(k+q)}) \sigma(X_{\pi^*(p+q+1)}, \dots, X_{\pi^*(p+q+r)})$$

که، طبق (۲۶.۳۱)، مساوی است با

$$(p+q)! \text{sgn } \pi^* \omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \dots, X_{\pi^*(p+q)}) \sigma(X_{\pi^*(p+q+1)}, \dots, X_{\pi^*(p+q+r)}).$$

در نتیجه،

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \dots, X_{p+q+r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\pi^*} \text{sgn } \pi^* \omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \dots, X_{\pi^*(p+r)}) \cdot \sigma(X_{\pi^*(p+q+1)}, \dots, X_{\pi^*(p+q+r)}),$$

که در آن جمع‌بندی فقط روی نماینده‌های یکنوای  $\pi^*$  از کلاس‌های هم‌ارزی گرفته شده است. اما، طبق تعریف  $\omega \wedge \theta$ ، داریم

$$\omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \dots, X_{\pi^*(p+q)}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\rho} \text{sgn } \rho \omega(X_{\pi^*\rho(1)}, \dots, X_{\pi^*\rho(p)}) \cdot \theta(X_{\pi^*\rho(p+1)}, \dots, X_{\pi^*\rho(p+q)}),$$

که در آن  $\rho$  همه جایگشت‌های  $1, 2, \dots, p+q$  را می‌گیرد. با جایگذاری این در بالا، به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 & (\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \dots, X_{p+q+r}) \\
 &= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\rho} \sum_{\pi^*} \text{sgn } \pi^* \text{sgn } \rho \omega(X_{\pi^*\rho(1)}, \dots, X_{\pi^*\rho(p)}) \\
 & \quad \cdot \theta(X_{\pi^*\rho(p+1)}, \dots, X_{\pi^*\rho(p+q)}) \sigma(X_{\pi^*\rho(p+q+1)}, \dots, X_{\pi^*\rho(p+q+r)}).
 \end{aligned}$$

اما مجموعه تمام ترکیبات  $\pi^*\rho$  درست بر مجموعه تمام ترکیبات  $\pi$  از اعداد  $1, 2, \dots, p+q+r$  منطبق است؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned}
 & (\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \dots, X_{p+q+r}) \\
 &= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \theta(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}) \\
 & \quad \cdot \sigma(X_{\pi(p+q+1)}, \dots, X_{\pi(p+q+r)}).
 \end{aligned}$$

استدلالی مشابه با تقسیم دیگری به کلاسهای هم‌ارزی، معلوم می‌سازد که همان فرمول برای  $\omega \wedge (\theta \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{p+q+r})$  برقرار است.

از تعریف ضرب برون‌ی معلوم می‌شود که ضرب برون‌ی نسبت به هر عاملش خطی است و در قانون تعویضپذیری زیر صدق می‌کند:

$$(27.31) \quad \omega \wedge \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge \omega,$$

که در آن  $p$  درجه  $\omega$  و  $q$  درجه  $\theta$  است.

در یک همسایگی مختصات به مختصات موضعی  $u^i$ ، می‌توان یک فرم برون‌ی از درجه

$p$  را به شکل

$$(28.31) \quad \omega = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$$

نمایش داد، که در آن ضرایب، اگر در اندیسهایشان متقارن اریب باشند، مساوی‌اند با

$$a_{i_1 \dots i_p} = \omega(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_p}).$$

به همین نحو، اگر فرمهای دیفرانسیل خطی  $\omega^i (i = 1, \dots, n)$  یک پایه برای فرمهای

دیفرانسیل خطی تشکیل دهند،

$$(29.31) \quad \omega = \frac{1}{p!} b_{i_1 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p},$$

که در آن  $b_{i_1 \dots i_p} = \omega(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$ ، و بردارهای  $X_1, \dots, X_n$  پایه دوگان را می‌سازند؛

یعنی،  $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ .

از قانون تعویضپذیری برای ضرب برون‌ی نتیجه می‌شود که، اگر دو عامل یکی باشند،

$$du^{i_1} \wedge du^{i_2} \wedge \dots \wedge du^{i_p} = 0.$$

در پرتو نمایش (28.21)، هر فرم دیفرانسیل برون‌ی از درجه بالاتر از بعد چندگونا

صفر است. یک فرم از درجه مساوی بعد  $n$  برابر است با  $a du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^n$ . می توان ثابت کرد که فرمهای دیفرانسیل خطی  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k$  تابع نقطه  $P$  اند اگر و فقط اگر در آن نقطه  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$ .

در واقع، اگر فرمها وابسته باشند، یکی از آنها، مثلاً  $\omega^k$ ، ترکیبی خطی از دیگران (دست کم در  $P$ ) است:  $\omega^k = a_1 \omega^1 + \dots + a_{k-1} \omega^{k-1}$ . لذا،

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k = a_1 \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{k-1} \wedge \omega^1 + a_2 \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{k-1} \wedge \omega^2 + \dots + a_{k-1} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{k-1} \wedge \omega^{k-1} = 0.$$

برای اثبات عکس، در همسایگی  $P$  مختصات موضعی  $u^i$  را معرفی کرده و فرمها را به صورت ترکیبی خطی از فرمهای  $du^1, \dots, du^n$  نمایش می دهیم:

$$\omega^\kappa = a_i^\kappa du^i, \quad \kappa = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

در این صورت،

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = a_{i_1}^1 du^{i_1} \wedge a_{i_2}^2 du^{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_k}^k du^{i_k},$$

که در آن  $i_1, \dots, i_k$  اندیسهای جمع بندی مستقل اند. در نتیجه،

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \dots a_{i_k}^k du^{i_1} \wedge du^{i_2} \wedge \dots \wedge du^{i_k}.$$

چون ضرایب متقارن اریب نیستند، نمی توان از  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$  نتیجه گرفت که ضرایب صفرند.

بهر حال، اگر  $\pi$  جایگشتی از اعداد  $1, \dots, k$  باشد،

$$du^{i_{\pi(1)}} \wedge \dots \wedge du^{i_{\pi(k)}} = \text{sgn } \pi du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k},$$

و نیز داریم

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = \text{sgn } \pi a_{i_{\pi(1)}}^1 \dots a_{i_{\pi(k)}}^k du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}.$$

در نتیجه،

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = \frac{1}{k!} \left( \sum_{\pi} \text{sgn } \pi a_{i_{\pi(1)}}^1 \dots a_{i_{\pi(k)}}^k \right) du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k},$$

که در آن جمع بندی  $\sum$  روی تمام جایگشتهای  $\pi$  از  $1, 2, \dots, p$  گرفته شده است. این ضرایب جدید از قبل متقارن اریب اند؛ در نتیجه، همه مساوی صفر می باشند، ولی مجموع داخل پرانتز مساوی دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & a_{i_2}^1 & \dots & a_{i_k}^1 \\ a_{i_1}^2 & a_{i_2}^2 & \dots & a_{i_k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^k & a_{i_2}^k & \dots & a_{i_k}^k \end{vmatrix}$$

لذا،  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$  ایجاب می‌کند که همه این دترمینانها صفرند، که خود به معنی این است که سطرهاى ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

وابسته‌اند یا که فرمهای  $\omega^1, \dots, \omega^k$  وابسته‌اند، و حکم ثابت است.

برای تکمیل تعریف ضرب برونى فرمهای دیفرانسیل برونى از درجات مختلف، یک تابع را یک فرم از درجه ۰ گرفته و ضرب برونى تابع  $f$  و فرم  $\omega$  را مساوی فرم  $f\omega$  تعریف می‌کنیم، که  $f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega$ .

### ۷.۳۱ دیفرانسیل برونى یک فرم دیفرانسیل خطى

بهازای فرم دیفرانسیل خطى  $\omega$ ، دیفرانسیل برونى فرم  $\omega$  فرم دیفرانسیل برونى درجه دوم  $d\omega$  است به طوری که، بهازای هر دو میدان بردارى  $X, Y$ ،

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \quad (۳۰.۳۱)$$

اثبات اینکه این یک فرم دیفرانسیل برونى درجه دوم است به خواننده محول می‌شود.

اگر  $\omega = df$  دیفرانسیل یک تابع باشد،

$$d\omega = 0. \quad (۳۱.۳۱)$$

در واقع،

$$\begin{aligned} (ddf)(X, Y) &= X df(Y) - Y df(X) - df([X, Y]) \\ &= XYf - YXf - [X, Y]f = 0. \end{aligned}$$

یک فرم دیفرانسیل خطى که در قلمروى چون  $\mathcal{D}$  در شرط (۳۱.۳۱) صدق کند، در قلمرو  $\mathcal{D}$  بسته نامیده می‌شود. اگر در  $\mathcal{D}$ ،  $\omega = df$ ،  $\omega$  را در  $\mathcal{D}$  گاهل می‌گوییم. نتیجه قبلى ما یعنی هر فرم کامل بسته است. عکس این فقط موضعی درست است؛ یعنی، در همسایگی به قدر کافی کوچک هر نقطه. در تمرینات به این مبحث باز خواهیم گشت. از تعریف دیفرانسیل برونى فرم دیفرانسیل خطى  $\omega$ ، معلوم می‌شود که

$$d(\omega^1 + \omega^2) = d\omega^1 + d\omega^2,$$

$$(۳۱.۳۱)$$

و

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

معادله اول را می‌توان به مجموع تعدادی دلخواه فرم تعمیم داد.

در یک قلمرو به مختصات موضعی  $u^i$  داریم

$$\omega = a_i du^i,$$

که از آنجا

$$(۳۳.۳۱) \quad d\omega = da_i \wedge du^i + a_i ddu^i = da_i \wedge du^i.$$

چون

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^j,$$

داریم

$$d\omega = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^j \wedge du^i = \frac{\partial a_j}{\partial u^i} du^i \wedge du^j,$$

اما، از آن سو،

$$d\omega = -\frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^i \wedge du^j,$$

زیرا  $du^j \wedge du^i = -du^i \wedge du^j$ ، لذا، خواهیم داشت

$$(۳۴.۳۱) \quad d\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_j}{\partial u^i} - \frac{\partial a_i}{\partial u^j} \right) du^i \wedge du^j$$

با ضریب متقارن اریب

$$\frac{\partial a_j}{\partial u^i} - \frac{\partial a_i}{\partial u^j}.$$

فرمولهای (۳۳.۳۱) و (۳۴.۳۱) فرمولهایی عملی اند که برای تعیین دیفرانسیل برونی یک فرم خطی داده شده است.

امثله و تمرین

۱. دیفرانسیل برونی فرمهای دیفرانسیل خطی زیر در صفحه و فضای اقلیدسی سه بعدی زیر را پیدا کنید:

$$(\tau) \quad x dx - y dy$$

$$(\nu) \quad x dy - y dx$$

$$(\rho) \quad z dx + x dy + y dz$$

۲. ثابت کنید فرم  $x dx + y dy + z dz$  در فضای اقلیدسی سه بعدی هم بسته و هم کامل است.

۳. به ازای فرم دیفرانسیل خطی  $\omega$  در چندگونای  $M$ ، نقطه ثابت  $P_0$  و نقطه متغیر

$P$  را در  $M$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $Q = \phi(t), 0 \leq t \leq 1$  مسیری بین نقاط  $P_0$  و  $P$  باشد. فرم  $\phi^*\omega$  یک فرم دیفرانسیل خطی در  $[0, 1]$  است؛ لذا،  $\phi^*\omega = a(t) dt$ . تابع  $a$  به انتخاب مسیر بستگی دارد. ثابت کنید هرگاه

$$I_\phi(P) = \int_0^1 a(t) dt$$

فقط تابع  $P$  بوده ولی از مسیر بین  $P_0$  و  $P$  مستقل باشد، آنگاه

$$\omega = dI.$$

۴. فرض کنید  $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$  یک نگاشت مشتق‌پذیر از چندگونای دیفرانسیل  $M$  بتوی  $\tilde{M}$  بوده، و نیز،  $\tilde{\omega}$  یک فرم دیفرانسیل برونی از درجه  $p$  در  $\tilde{M}$  باشد. در این صورت، فرم القایی  $\phi^*\tilde{\omega}$ ، شبیه حالت  $p = 1$ ، با

$$\phi^*\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_p) = \tilde{\omega}(\phi X_1, \dots, \phi X_p)$$

تعریف می‌شود. صحت این تعریف را ثابت کنید.

۵. ثابت کنید، تحت شرایط تمرین قبل، اگر  $\tilde{\omega}$  یک فرم دیفرانسیل خطی در  $\tilde{M}$  باشد،

$$d(\phi^*\tilde{\omega}) = \phi^*(d\tilde{\omega}). \quad (35.31)$$

۶. فرض کنید  $\mathcal{D}$  یک قلمرو همبند و همبند ساده در چندگونای  $M$  بوده، و  $\phi, \psi$  دو مسیر واصل دو نقطه  $P_0, P_1$  باشند. طبق تعریف همبندی ساده، یک تغییر شکل پیوسته از مسیر  $\phi$  به  $\psi$ ، یعنی تابعی مانند  $\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ ، هست به طوری که

$$\Phi(t, 0) = \phi(t), \quad \Phi(t, 1) = \psi(t),$$

$$\Phi(0, s) = P_0, \quad \Phi(1, s) = P_1.$$

می‌دانیم که اگر چندگونا و مسیرهای  $\phi, \psi$  از کلاس  $C_\infty$  باشند،  $\Phi$  ای می‌توان یافت که آن نیز از کلاس  $C_\infty$  باشد.

حال فرض کنید  $\omega$  یک فرم دیفرانسیل خطی بسته در  $\mathcal{D}$  باشد. فرم  $\Phi^*\omega = a(t, s) dt + b(t, s) ds$  نیز یک فرم بسته است، زیرا  $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega) = 0$ ، لذا،

$$d\phi^*\omega = \left( \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial s} \right) dt \wedge ds = 0,$$

که از آنجا  $\partial b / \partial t - \partial a / \partial s = 0$ ، با استفاده از تمرین ۳، ۳۰۳۱، و تمرین ۳ زیر بخش فعلی، ثابت کنید  $\omega$  یک فرم کامل در  $\mathcal{D}$  است.

۷. فرم

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

نمونه‌ای است از یک فرم بسته در صفحه بدون مبدا (لذا، در قلمروی تعریف شده که همبند ساده نیست) که در تمام قلمرو خود کامل نیست.

### ۸.۳۱ دیفرانسیلهای برونی فرمها از درجه بالاتر

مشتقگیری برونی را می‌توان به فرمهای دیفرانسیل برونی از درجات دلخواه تعمیم داد به نحوی که دیفرانسیل  $d\omega$  فرم  $\omega$  از درجه  $p$  یک فرم درجه  $p+1$  بوده، و شرایط زیر برقرار باشند:

$$(۳۶.۳۱) \quad d\omega = 0;$$

$$(۳۷.۳۱) \quad d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta;$$

$$(۳۸.۳۱) \quad d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta,$$

که در آن  $p$  درجه فرم  $\omega$  است.

این شرطها مشتقگیری برونی را به‌طور منحصر بفرد معین می‌کنند. می‌توان برای دیفرانسیل برونی یک فرم از درجه  $p$  فرمولهایی مشابه (۳۵.۳۱) به‌دست آورد، ولی ما خود را به یافتن عبارتی برای دیفرانسیل برحسب مختصات محدود می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$d(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}) = 0.$$

درواقع،  $d(du^i \wedge du^j) = d du^i \wedge du^j - du^i \wedge d du^j = 0$ ، و، بنابر استقرا،  $d(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) = 0$  ایجاب می‌کند که

$$d(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{k+1}}) = d(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) \wedge du^{i_{k+1}} + (-1)^k du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k} \wedge d du^{i_{k+1}} = 0.$$

درنتیجه، هرگاه

$$\omega = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p},$$

آنگاه

$$d\omega = \frac{1}{p!} da_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}.$$

مثل حالت  $p=1$ ، فرم  $\omega$  را بسته‌نامند اگر  $d\omega=0$ ، و کامل نامند اگر  $\omega = d\theta$ ، که در آن  $\theta$  یک فرم از درجه  $p-1$  است. همچنین، در اینجا هر فرم کامل بسته است ولی عکس آن فقط موضعی و در همسایگیهای به‌قدر کافی کوچک درست است. بررسی فرمهای دیفرانسیل برونی کامل و بسته بریک چندگونا کلا "اطلاعاتی از نهاد توپولوژیک چندگونا

به ما می دهد، ولی این بررسی از حوصله این کتاب خارج است.

### ۹.۳۱ کاربردهای فرمهای دیفرانسیل برونی

ما در اینجا خود را به کاربرد فرمهای دیفرانسیل برونی در نظریه سطوح محدود می کنیم. به خوانندگانی که به کاربردهای دیگر فرمهای دیفرانسیل برونی علاقه مندند، کتاب هارلی فلاندرز<sup>۱</sup> را توصیه می کنیم.

توجه کنید که در نظریه منحنیها و نظریه سطوح از کنجهایی وابسته به منحنی یا سطح استفاده کردیم. در حالت منحنیها، این سه وجهی فرقه متعامد یکه جهتدار با جهت مثبت بود. در حالت سطوح، کنج به وسیله پارامتری سازی القا شده و از بردارهای  $r_1, r_2, m$  تشکیل شده بود و بالا جبار تناسب کنجهای متعامد یکه را فدا کردیم. فرمهای دیفرانسیل برونی به ما توان استفاده از کنجهای متعامد در این حالت را نیز می دهد. سه بخش بعد فقط مثالی از این استفاده به دست می دهد که منجر به تشکیل راستاهای اصلی می شود. این یک توضیح نسبتاً "مصنوعی و ناقص بوده، و از نشان دادن قدرت و سودمندی کامل روش فرمهای دیفرانسیل برونی در هندسه بدور است.

### ۱۰.۳۱ میدان کنجهای موضعی بریک سطح

یک سطح و در هر نقطه  $P$  آن کنجی مرکب از سه بردار مستقل  $e_1, e_2, e_3$  در نظر می گیریم. فرض کنیم  $v$  یک بردار مماس بر سطح در  $P$  باشد. در این صورت، سه مولفه  $v$  نسبت به  $e_1, e_2, e_3$  فرمهایی خطی بر سطح در  $P$  می باشند. این فرمها را با  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  نشان می دهیم. در نتیجه،

$$v = \omega^1(v)e_1 + \omega^2(v)e_2 + \omega^3(v)e_3 = \omega^\kappa(v)e_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3.$$

خود بردار  $v$  را می توان مقدار دیفرانسیل تابع برداری  $r(P)$  به ازای  $v$  تصور کرد که به هر نقطه  $P$  بردار موضع آن را نسبت می دهد،  $v = dr(v)$ . لذا، می توان نوشت

$$dr = \omega^\kappa e_\kappa. \quad (۳۹.۳۱)$$

آنچه داریم یک فرم دیفرانسیل خطی برداری است. با اینحال، می توان، با استفاده از یک دستگاه مختصات ثابت در فضای اقلیدسی سه بعدی و گرفتن معادله برداری به عنوان تلخیص یک دستگاه از سه معادله اسکالر برای مولفه ها، از گسترش نظریه این نوع فرمها

1. HARLEY FLANDERS, *Differential Forms with Applications to Physical Sciences*, Academic Press, New York (1963).

پرهیز کرد. به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_\kappa &= a_\kappa\mathbf{i} + b_\kappa\mathbf{j} + c_\kappa\mathbf{k} \end{aligned}$$

و (۳۹.۳۱) به جای دستگاه معادلات

$$dx = \omega^* a_\kappa, \quad dy = \omega^* b_\kappa, \quad dz = \omega^* c_\kappa$$

می باشد.

مقدار دیفرانسیل  $de_\kappa$  به ازای بردار مماس  $\mathbf{v}$  مجدداً "یک بردار در فضا است؛ در نتیجه، می توان مولفه های آن را نسبت به پایه  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  در نظر گرفت، و اگر این مولفه ها را با  $\omega_\kappa^\lambda$  نشان دهیم، خواهیم داشت

$$de_\kappa = \omega_\kappa^\lambda e_\lambda, \quad \kappa, \lambda = 1, 2, 3, \quad (40.31)$$

که در آن  $\omega_\kappa^\lambda$  ها فرمهای دیفرانسیل خطی می باشند. دیفرانسیل برونای فرم کامل  $d\mathbf{r}$  مساوی صفر است؛ در نتیجه، بنابر (۳۹.۳۱)، داریم

$$d\omega^* e_\kappa - \omega^* \wedge de_\kappa = 0;$$

و، بنابر (۴۰.۳۱)،

$$d\omega^* e_\kappa - \omega^* \wedge \omega_\kappa^\lambda e_\lambda = d\omega_\kappa^\lambda e_\lambda - \omega^* \wedge \omega_\kappa^\lambda e_\lambda = 0,$$

که از آنجا

$$d\omega^\lambda - \omega^* \wedge \omega_\kappa^\lambda = 0. \quad (41.31)$$

به همین نحو،  $d de_\kappa = 0$ ؛ و در نتیجه،

$$d\omega_\kappa^\lambda e_\lambda - \omega_\kappa^\lambda \wedge de_\lambda = d\omega_\kappa^\mu e_\mu - \omega_\kappa^\lambda \wedge \omega_\lambda^\mu e_\mu = 0,$$

که از آنجا

$$d\omega_\kappa^\mu - \omega_\kappa^\lambda \wedge \omega_\lambda^\mu = 0. \quad (42.31)$$

معادلات (۴۱.۳۱) و (۴۲.۳۱) شرایطی هستند که باید به وسیله فرمهای  $\omega^*, \omega_\lambda^*$  برقرار شوند. این شرطها را معادلات نهادهای فضا می نامند.

۱۱.۳۱ کنجهای موضعی با دو بردار مماس بر سطح و یک بردار قائم بر آن حال کنجهای خاصی اختیار می کنیم. ابتدا برای  $\mathbf{e}_3$  بردار یکه قائم مثبت به سطح را برمی گزینیم، و  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  را مماس بر سطح می گیریم. در این صورت، مولفه سوم  $\omega^3$  به ازای هر بردار مماس بر سطح صفر است، و داریم

$$d\mathbf{r} = \omega^i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2), \quad \omega^3 = 0,$$

و معادلات نهادی (۴۱.۳۱) برای سطح خواهند شد

$$\begin{aligned} d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i &= 0, \quad i, j = 1, 2, \\ -\omega^j \wedge \omega_j^3 &= 0. \end{aligned} \quad (43.31)$$

خط دوم (بمازای  $\kappa = 3$ )، طبق لم کارتان، ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_2^3 &= b\omega^1 + c\omega^2, \end{aligned} \quad (44.31)$$

که در آنها  $a, b, c$  توابعی از نقطه می‌باشند.

بعلاوه، چون  $e_3$  بردار یکه‌ء قائم است،  $de_3$  یک برداز مماس بوده، و  $\omega_3^3 = 0$ . در نتیجه، داریم ( $i, j$  مقادیر 1, 2 را می‌گیرند)

$$\begin{aligned} dr &= \omega^i e_i, \\ de_i &= \omega_j^i e_j + \omega_i^3 e_3, \\ de_3 &= \omega_j^3 e_j. \end{aligned} \quad (45.31)$$

چون بردارهای  $e_1, e_2$  بردارهای مماس بوده و  $e_3$  یک بردار قائم است، فرمهای  $\omega^i, \omega_j^i$  تنها فرمهایی هستند که خواص ذاتی سطح را نمایش می‌دهند، حال آنکه  $\omega_i^3$  و  $\omega_3^3$  مسئول هندسه غیر ذاتی می‌باشند.

باقی معادلات نهادی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i &= \omega_j^3 \wedge \omega_3^i, \\ d\omega_j^3 - \omega_j^k \wedge \omega_k^3 &= 0, \end{aligned}$$

زیرا  $\omega_3^3 = 0$ . فرمهای دیفرانسیل برونی درجه دوم مساوی طرف چپ یا طرف راست خط بالایی فرمهای انحنا  $\Omega_j^i$  نام دارند. با استفاده از این نماد، می‌توان معادلات نهادی برای فرمها را بدون اندیس 3 نوشت:

$$\begin{aligned} d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i &= 0, \\ d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i &= \Omega_j^i. \end{aligned} \quad (46.31)$$

توجه کنید که  $\Omega_j^i$  در اینجا برحسب فرمهای  $\omega^i, \omega_j^i$  فقط با معنی ذاتی بیان شده است، ولی می‌توان آنها را به‌طور غیر ذاتی نیز بیان کرد:

$$\Omega_j^i = \omega_j^3 \wedge \omega_3^i. \quad (47.31)$$

فرمول اخیر ایجاب می‌کند که  $\Omega_j^i$  نسبت به اندیسهای متقارن اریب است؛ یعنی،  $\Omega_1^1 = \Omega_2^2 = 0$  و در نتیجه،  $\Omega_j^i = \Omega_i^j$ .

برای خاص سازی بیشتر کنجها، حالتی را در نظر می‌گیریم که بردارهای  $e_1, e_2$  به جفت دیگر  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  در هر صفحه مماس تغییر کرده و  $e_3$  ثابت می‌ماند. در این صورت،

خواهیم داشت

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \bar{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3,$$

که در آن  $A_i^j$  توابعی از نقطه  $P$  اند. برای کنجهای جدید، فرمهای خطی جدید  $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_\lambda^k$  ( $i = 1, 2; \kappa = 1, 2, 3$ ) را داریم. اما  $d\mathbf{r}$  به انتخاب کنجهای بستگی ندارد؛ در

$$\text{نتیجه، } d\mathbf{r} = \bar{\omega}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \omega^j \mathbf{e}_j = \omega^j A_j^i \bar{\mathbf{e}}_i, \text{ که از آنجا}$$

$$(48.31)$$

$$\bar{\omega}^i = A_i^j \omega_j.$$

حال فرض کنیم  $B_i^j$  عنصرهای ماتریس معکوس  $(A_i^j)$  باشند؛ یعنی،

$$A_j^i B_k^j = \delta_k^i, \quad A_i^j B_j^k = \delta_i^k.$$

دراین صورت،

$$\bar{\mathbf{e}}_i = B_i^j \mathbf{e}_j, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3,$$

و

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{e}}_i &= dB_i^j \mathbf{e}_j + B_i^j d\mathbf{e}_j = dB_i^j A_j^k \bar{\mathbf{e}}_k + B_i^j \omega_j^l \mathbf{e}_l \\ &= A_j^k dB_i^j \bar{\mathbf{e}}_k + B_i^j \omega_j^l A_l^k \bar{\mathbf{e}}_k = (A_j^k dB_i^j + A_l^k B_i^j \omega_j^l) \bar{\mathbf{e}}_k. \end{aligned}$$

از آن سو،

$$d\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\omega}_i^k \bar{\mathbf{e}}_k.$$

لذا،

$$(49.31)$$

$$\bar{\omega}_i^k = A_j^k dB_i^j + A_l^k B_i^j \omega_j^l$$

بعلاوه،

$$d\bar{\mathbf{e}}_3 = d\mathbf{e}_3 = \omega_3^i \mathbf{e}_i = \omega_3^i A_i^j \bar{\mathbf{e}}_j,$$

که از آنجا

$$(50.31)$$

$$\bar{\omega}_3^i = A_i^j \omega_3^j.$$

۱۲.۳۱ کنجهای متعامد یکه و راستاهای اصلی

با خاص سازی بیشتر، فرض کنیم کنجهای متعامد یکه باشند. دراین صورت، حاصل ضرب اسکالر  $\mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\lambda = \delta_{\kappa\lambda}$  ثابت بوده و

$$d(\mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\lambda) = (d\mathbf{e}_\kappa) \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{e}_\kappa d\mathbf{e}_\lambda = 0$$

یا

$$\omega_\kappa^\mu \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\lambda + \omega_\lambda^\mu \mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\mu = \omega_\kappa^\mu \delta_{\mu\lambda} + \omega_\lambda^\mu \delta_{\kappa\mu} = \omega_\kappa^\lambda + \omega_\lambda^\kappa = 0,$$

که از آنجا

$$(51.31)$$

$$\omega_\kappa^\lambda = -\omega_\lambda^\kappa.$$

این فوراً "ایجاب می‌کند که  $\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$  و  $\omega_1^3 = -\omega_3^1$ ,  $\omega_2^3 = -\omega_3^2$  و  $\omega_1^2 = -\omega_2^1$  . بالاخص، اگر  $e_1, e_2, e_3$  کتج متعامدیکه دیگر  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 = e_3$  باشد، خواهیم داشت

$$\bar{\omega}_1^3 = -\bar{\omega}_3^1 = -A_j^i \omega_3^j = \sum_{j=1}^2 A_j^i \omega_j^3.$$

اگر یک کتج متعامد یک را به دیگری با همان جهت تغییر دهیم، باید داشته باشیم

$$e_1 = \bar{e}_1 \cos \alpha - \bar{e}_2 \sin \alpha, \quad e_2 = \bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha,$$

و

$$A_1^1 = A_2^2 = \cos \alpha, \quad A_2^1 = -A_1^2 = \sin \alpha.$$

بنابر این،

$$\bar{\omega}^1 = \cos \alpha \omega^1 + \sin \alpha \omega^2,$$

$$\bar{\omega}^2 = -\sin \alpha \omega^1 + \cos \alpha \omega^2,$$

$$\bar{\omega}_1^3 = \cos \alpha \omega_1^3 + \sin \alpha \omega_2^3,$$

$$\bar{\omega}_2^3 = -\sin \alpha \omega_1^3 + \cos \alpha \omega_2^3,$$

که از آنجا

$$\omega^1 = \bar{\omega}^1 \cos \alpha - \bar{\omega}^2 \sin \alpha,$$

$$\omega^2 = \bar{\omega}^1 \sin \alpha + \bar{\omega}^2 \cos \alpha.$$

در نتیجه، بنابر (۴۴.۳۱)، داریم

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^3 &= \cos \alpha (a\omega^1 + b\omega^2) + \sin \alpha (b\omega^1 + c\omega^2) \\ &= (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \omega^1 + (b \cos \alpha + c \sin \alpha) \omega^2 \\ &= (a \cos \alpha + b \sin \alpha) (\bar{\omega}^1 \cos \alpha - \bar{\omega}^2 \sin \alpha) \\ &\quad + (b \cos \alpha + c \sin \alpha) (\bar{\omega}^1 \sin \alpha + \bar{\omega}^2 \cos \alpha) \\ &= (a \cos^2 \alpha + 2b \cos \alpha \sin \alpha + c \sin^2 \alpha) \bar{\omega}^1 \\ &\quad + (-b \sin^2 \alpha - a \cos \alpha \sin \alpha + b \cos^2 \alpha + c \sin \alpha \cos \alpha) \bar{\omega}^2 \\ &= (a \cos^2 \alpha + c \sin^2 \alpha + 2b \cos \alpha \sin \alpha) \bar{\omega}^1 \\ &\quad + (b \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(a - c) \sin 2\alpha) \bar{\omega}^2. \end{aligned}$$

همچنین، بنابر (۴۴.۳۱)،

$$\bar{\omega}_1^3 = \bar{a} \bar{\omega}_1 + \bar{b} \bar{\omega}_2,$$

$$\bar{\omega}_2^3 = \bar{b} \bar{\omega}_2 + \bar{c} \bar{\omega}_3.$$

بنابر این،

$$\bar{h} = h \cos 2\alpha - \frac{a-c}{2} \sin 2\alpha,$$

و برای  $\bar{a}$ ,  $\bar{c}$  می‌توان عبارات نظیری برحسب  $a, b, \alpha$  به دست آورد. درواقع، قبلاً دریافتیم که

$$\bar{a} = a \cos^2 \alpha + c \sin^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha.$$

حال با اختیار  $\alpha$  طوری که  $\bar{h} = 0$ ، که ممکن است  $\alpha$  با تقریب مضربی از  $\pi/2$  معین

شود، و نشان دادن ضرایب نظیر  $\bar{a}$ ,  $\bar{c}$  با  $k_1, k_2$ ، معلوم می‌شود که

$$(52.31) \quad \omega_1^3 = -\omega_3^1 = k_1 \omega^1, \quad \omega_2^3 = -\omega_3^2 = k_2 \omega^1.$$

چون  $\Omega_j^i = \omega_j^i \wedge \omega_3^i$ ، فقط برای فرمهای انحناى ناصفر به دست می‌آوریم

$$\Omega_2^1 = -k_1 k_2 \omega^2 \wedge \omega^1 = k_1 k_2 \omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$\Omega_1^2 = -k_1 k_2 \omega^1 \wedge \omega^2.$$

همچنین، داریم

$$d\mathbf{r} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2$$

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + k_1 \omega^1 \mathbf{e}_3$$

$$d\mathbf{e}_2 = -\omega_1^2 \mathbf{e}_1 + k_2 \omega^2 \mathbf{e}_3$$

$$d\mathbf{e}_3 = -k_1 \omega^1 \mathbf{e}_1 - k_2 \omega^2 \mathbf{e}_2.$$

با توجه به اینکه مقدار فرم  $\omega^i$  بر بردار  $\mathbf{e}_j$  مولفه  $i$  م  $\mathbf{e}_j$  نسبت به پایه  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ، یعنی  $\delta_{ij}$ ، است، معلوم می‌شود که دیفرانسیلهای  $d\mathbf{e}_3$  در راستای  $\mathbf{e}_1$  و  $\mathbf{e}_2$  عبارتند از  $(d\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2) = -k_2 \mathbf{e}_2$  و  $(d\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1) = k_1 \omega^1(\mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + k_2 \omega^2(\mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 = -k_1 \mathbf{e}_1$ . این با نتایج فصل ۷، با  $\mathbf{e}_3$  به جای  $\mathbf{m}$ ، نتیجه می‌گیریم که راستاهای  $\mathbf{e}_1$  و  $\mathbf{e}_2$  راستاهای اصلی، و  $k_1, k_2$  انحناهای اصلی می‌باشند.

### ۱۳.۳۱ رابطه با فرمهای اساسی

اگر سطح با معادله پارامتری داده شده باشد، همه فرمهای دیفرانسیل  $\omega_2^1, \omega_1^2$  را می‌توان به صورت ترکیباتی خطی از  $du^1, du^2$  بیان کرد. پس، در حالت کنجهای متعامد یک، خواهیم داشت

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = (d\mathbf{r})^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

$$-(\omega_1^3 \omega^1) - (\omega_2^3 \omega^2) = -d\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{r} = b_{ij} du^i du^j,$$

که در آن حاصل ضرب معمولی فرمهای دیفرانسیل خطی می‌باشد.

## واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

|                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| <i>identity</i>               | اتحاد           |
| <i>curvature</i>              | انحنا           |
| <i>principal</i>              | اصلی            |
| <i>integral</i>               | انتگرال         |
| <i>circle of</i>              | دایره           |
| <i>geodesic</i>               | ژئودزیک         |
| <i>radius of</i>              | شعاع            |
| <i>normal</i>                 | قائم            |
| <i>sectional</i>              | مقطعی           |
| <i>mean</i>                   | میانگین         |
| <i>index</i>                  | اندیس           |
| <i>summation</i>              | جمع‌بندی        |
| <i>first fundamental form</i> | اولین فرم اساسی |
| <i>vector</i>                 | بردار           |
| <i>free</i>                   | آزاد            |
| <i>curvature</i>              | انحنا           |
| <i>binormal</i>               | قائم دوم        |
| <i>contravariant</i>          | کنتراواریان     |
| <i>covariant</i>              | کوواریان        |
| <i>localized</i>              | مقید            |
| <i>parameter</i>              | پارامتر         |
| <i>natural (arc)</i>          | طبیعی (قوس)     |
| <i>envelope</i>               | پوش             |
| <i>torsion</i>                | تاب             |
| <i>geodesic</i>               | ژئودزیک         |
| <i>tensor</i>                 | تانسور          |

|                      |             |
|----------------------|-------------|
| <i>curvature</i>     | انحناء      |
| <i>contravariant</i> | کنتراواریان |
| <i>covariant</i>     | کوواریان    |
| <i>metric</i>        | متری        |
| <i>projection</i>    | تصویر       |
| <i>stereographic</i> | گنجنگار     |
| <i>commutator</i>    | تعویضگر     |
| <i>displacement</i>  | تغییر مکان  |
| <i>parallel</i>      | موازی       |
| <i>contact</i>       | تماس        |
| <i>parallelism</i>   | توازی       |
| <i>net</i>           | تور         |
| <i>conjugate</i>     | مزدوج       |
| <i>immersion</i>     | جادهنده     |
| <i>addition</i>      | جمع         |
| <i>orientation</i>   | جهت         |
| <i>cycloid</i>       | چرخزاد      |
| <i>manifold</i>      | چندگونا     |
| <i>analytic</i>      | تحلیلی      |
| <i>orientable</i>    | جهت پذیر    |
| <i>differential</i>  | دیفرانسیل   |
| <i>property</i>      | خاصیت       |
| <i>intrinsic</i>     | ذاتی        |
| <i>line</i>          | خط          |
| <i>of curvature</i>  | انحناء      |
| <i>geodesic</i>      | ژئودزیک     |
| <i>polar</i>         | قطبی        |
| <i>loxodrome</i>     | مایل        |
| <i>asymptotic</i>    | مجانبی      |
| <i>of striction</i>  | محض         |
| <i>coordinate</i>    | مختص        |

|                                |                 |
|--------------------------------|-----------------|
| <i>circle</i>                  | دایره           |
| <i>of curvature</i>            | انحناء          |
| <i>of latitude</i>             | عرض جغرافیایی   |
| <i>osculating</i>              | بوسان           |
| <i>system</i>                  | دستگاه          |
| <i>triply orthogonal</i>       | سه متعامد       |
| <i>second fundamental form</i> | دومین فرم اساسی |
| <i>differential</i>            | دیفرانسیل       |
| <i>exterior</i>                | برونی           |
| <i>absolute</i>                | مطلق            |
| <i>direction</i>               | راستا           |
| <i>principal</i>               | اصلی            |
| <i>asymptotic</i>              | مجانسی          |
| <i>conjugate</i>               | مزدوج           |
| <i>angle</i>                   | زاویه           |
| <i>catenoid</i>                | زنجیرگون        |
| <i>geodesic</i>                | ژئودزیک         |
| <i>structure</i>               | ساختمان         |
| <i>differential</i>            | دیفرانسیل       |
| <i>surface</i>                 | سطح             |
| <i>cylindrical</i>             | استوانه‌ای      |
| <i>orientable</i>              | جهت پذیر        |
| <i>non-orientable</i>          | جهت ناپذیر      |
| <i>ruled</i>                   | خط دار          |
| <i>of revolution</i>           | دوار            |
| <i>canal</i>                   | کانال           |
| <i>focal</i>                   | کانونی          |
| <i>ordinary</i>                | معمولی          |
| <i>regular</i>                 | منتظم           |
| <i>minimal</i>                 | مینیمال         |
| <i>parabola</i>                | سهمی            |

|                                   |                     |
|-----------------------------------|---------------------|
| <i>semicubical</i>                | نیمه مکعبی          |
| <i>indicatrix</i>                 | شاخص                |
| <i>radius</i>                     | شعاع                |
| <i>of curvature</i>               | انحنای              |
| <i>of normal curvature</i>        | انحنای قائم         |
| <i>plane</i>                      | صفحه                |
| <i>rectifying</i>                 | اصلاحی              |
| <i>osculating</i>                 | بوسان               |
| <i>normal</i>                     | قائم                |
| <i>product</i>                    | ضرب                 |
| <i>scalar (dot)</i>               | اسکالر (نقطه ای)    |
| <i>vector</i>                     | برداری              |
| <i>exterior</i>                   | برونی               |
| <i>tensor</i>                     | تانسوری             |
| <i>cross (vector)</i>             | خارجی (برداری)      |
| <i>mixed</i>                      | مختلط               |
| <i>longitude</i>                  | طول جغرافیایی       |
| <i>arc length</i>                 | طول قوس             |
| <i>latitude</i>                   | عرض جغرافیایی       |
| <i>form</i>                       | فرم                 |
| <i>metric</i>                     | متری                |
| <i>exterior differential form</i> | فرم دیفرانسیل برونی |
| <i>closed</i>                     | بسته                |
| <i>linear</i>                     | خطی                 |
| <i>quadratic</i>                  | درجه دوم            |
| <i>exact</i>                      | کامل                |
| <i>normal</i>                     | قائم                |

|                     |             |
|---------------------|-------------|
| <i>principal</i>    | اصلی        |
| <i>geodesic</i>     | ژئودزیک     |
| <i>binormal</i>     | قائم دوم    |
| <i>diameter</i>     | قطر         |
| <i>conjugate</i>    | مزدوج       |
| <i>arc</i>          | قوس         |
| <i>simple</i>       | ساده        |
| <i>spherical</i>    | کروی        |
| <i>curve</i>        | منحنی       |
| <i>mapping</i>      | نگاشت       |
| <i>sphere</i>       | کره         |
| <i>osculating</i>   | بوسان       |
| <i>pseudosphere</i> | کره نما     |
| <i>tractrix</i>     | کشاننده     |
| <i>frame</i>        | کنج         |
| <i>local</i>        | موضعی       |
| <i>node</i>         | گره         |
| <i>evolute</i>      | گسترده      |
| <i>planar</i>       | مسطح        |
| <i>development</i>  | گسترش       |
| <i>involute</i>     | گسترنده     |
| <i>helix</i>        | مارپیچ      |
| <i>generalized</i>  | تعمیم یافته |
| <i>circular</i>     | مستدیر      |
| <i>helicoid</i>     | مارپیچ گون  |
| <i>discriminant</i> | مبین        |
| <i>asymptote</i>    | مجانِب      |
| <i>striction</i>    | محض         |
| <i>line</i>         | خط          |
| <i>point</i>        | نقطه        |
| <i>coordinates</i>  | مختصات      |

|                          |                 |
|--------------------------|-----------------|
| <i>geodesic polar</i>    | ژئودزیک قطبی    |
| <i>asymptotic</i>        | مجانبی          |
| <i>curvilinear</i>       | منحنی الخط      |
| <i>semigeodesic</i>      | نیمه ژئودزیک    |
| <i>isothermic</i>        | همگرمایی        |
| <i>conoid</i>            | مخروط گون       |
| <i>order</i>             | مرتبه           |
| <i>of contact</i>        | تماس            |
| <i>of smallness</i>      | کوچکی           |
| <i>center</i>            | مرکز            |
| <i>of curvature</i>      | انحناء          |
| <i>area</i>              | مساحت           |
| <i>path</i>              | مسیر            |
| <i>equivalence</i>       | هم ارزی         |
| <i>trajectories</i>      | مسیرها          |
| <i>orthogonal</i>        | قائم            |
| <i>isogonal</i>          | همزاویه         |
| <i>derivative</i>        | مشق             |
| <i>covariant</i>         | کواریان         |
| <i>characteristic</i>    | مشخص            |
| <i>equation</i>          | معادله          |
| <i>parametric</i>        | پارامتری        |
| <i>implicit</i>          | ضمنی            |
| <i>natural</i>           | طبیعی           |
| <i>structural</i>        | نهادی           |
| <i>tangent</i>           | مماس            |
| <i>vector</i>            | بردار           |
| <i>curve</i>             | منحنی           |
| <i>rectifiable</i>       | با طول متناهی   |
| <i>parametric</i>        | پارامتری        |
| <i>parabolic</i>         | سهموی           |
| <i>piecewise regular</i> | قطعه قطعه منتظم |
| <i>asymptotic</i>        | مجانبی          |
| <i>regular</i>           | منتظم           |

|                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| <i>catenary</i>           | منحنی زنجیری         |
| <i>component</i>          | مؤلفه                |
| <i>generator</i>          | مولد                 |
| <i>rectilinear</i>        | مستقیم الخط          |
| <i>field</i>              | میدان                |
| <i>vector</i>             | برداری               |
| <i>imbedding</i>          | نشاننده              |
| <i>meridian</i>           | نصف النهار           |
| <i>point</i>              | نقطه                 |
| <i>rectification</i>      | اصلاح                |
| <i>elliptic</i>           | بیضوی                |
| <i>flat</i>               | تخت                  |
| <i>parabolic</i>          | سهموی                |
| <i>striction</i>          | محض                  |
| <i>singular</i>           | منفرد                |
| <i>umbilical</i>          | نافن                 |
| <i>hyperbolic</i>         | هذلولوی              |
| <i>cusps</i>              | نقطه بازگشت (بازگشت) |
| <i>mapping</i>            | نگاشت                |
| <i>isometric</i>          | ایزومتربیک           |
| <i>spherical</i>          | کروی                 |
| <i>isogonal</i>           | همزاویه              |
| <i>conformal</i>          | همشکل                |
| <i>isoareal</i>           | هم مساحت             |
| <i>representation</i>     | نمایش                |
| <i>parametric</i>         | پارامتری             |
| <i>band</i>               | نوار                 |
| <i>möbius</i>             | موبیوس               |
| <i>connection</i>         | همبندی               |
| <i>geometry</i>           | هندسه                |
| <i>intrinsic</i>          | ذاتی                 |
| <i>edge of regression</i> | بال بازگشت           |

## واژه نامه انگلیسی به فارسی

|                               |                  |
|-------------------------------|------------------|
| <i>absolute</i>               | مطلق             |
| <i>derivative</i>             | مشتق             |
| <i>differential</i>           | دیفرانسیل        |
| <i>addition</i>               | جمع              |
| <i>angle</i>                  | زاویه            |
| <i>arc</i>                    | قوس              |
| <i>length</i>                 | طول              |
| <i>parameter</i>              | پارامتر          |
| <i>area</i>                   | مساحت            |
| <i>of a surface</i>           | یک سطح           |
| <i>preserving mapping</i>     | نگاشت ... نگهدار |
| <i>asymptote</i>              | مجانِب           |
| <i>asymptotic</i>             | مجانِبی          |
| <i>coordinates</i>            | مختصات           |
| <i>direction</i>              | راستای           |
| <i>line</i>                   | خط               |
| <i>binomial</i>               | دو جمله ای       |
| <i>vector</i>                 | بردار            |
| <i>canal</i>                  | کانال            |
| <i>surfaces</i>               | سطوح             |
| <i>catenary</i>               | منحنی زنجیری     |
| <i>catenoid</i>               | زنجیرگون         |
| <i>center</i>                 | مرکز             |
| <i>of curvature</i>           | انحنای           |
| <i>of normal curvature</i>    | انحنای قائم      |
| <i>of osculating sphere</i>   | کره بوسان        |
| <i>of principal curvature</i> | انحنای اصلی      |

|                         |                 |
|-------------------------|-----------------|
| <i>characteristic</i>   | مشخص            |
| <i>circle</i>           | دایره           |
| <i>of curvature</i>     | انحنای          |
| <i>of latitude</i>      | عرض جغرافیایی   |
| <i>circular</i>         | مستدیر          |
| <i>helix</i>            | مارپیچ          |
| <i>collinear</i>        | همخط            |
| <i>vectors</i>          | بردارهای        |
| <i>commutator</i>       | تعویضگر         |
| <i>of vector fields</i> | میدانهای برداری |
| <i>component</i>        | مؤلفه           |
| <i>of a tensor</i>      | یک تانسور       |
| <i>of a vector</i>      | یک بردار        |
| <i>conformal</i>        | همشکل           |
| <i>mapping</i>          | نگاشت           |
| <i>conjugate</i>        | مزدوج           |
| <i>diameter</i>         | قطر             |
| <i>directions</i>       | راستاهای        |
| <i>net</i>              | تور             |
| <i>connection</i>       | همبندی          |
| <i>conoid</i>           | مخروط گون       |
| <i>contact</i>          | تماس            |
| <i>contraction</i>      | انقباض          |
| <i>of a tensor</i>      | یک تانسور       |
| <i>contravariant</i>    | کنتراواریان     |
| <i>tensor</i>           | تانسور          |
| <i>vector</i>           | بردار           |
| <i>coordinate</i>       | مختص            |
| <i>line</i>             | خط              |
| <i>coordinates</i>      | مختصات          |
| <i>asymptotic</i>       | مجانمی          |
| <i>curvilinear</i>      | منحنی الخط      |
| <i>isothermic</i>       | همگرمایی        |
| <i>semigeodesic</i>     | نیمه ژئودزیک    |

|                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| <i>covariant</i>         | کوواریان             |
| <i>derivative</i>        | مشتق                 |
| <i>vector</i>            | بردار                |
| <i>cross product</i>     | ضرب خارجی            |
| <i>curvature</i>         | انحنای               |
| <i>gaussian</i>          | گاوسی                |
| <i>geodesic</i>          | ژئودزیک              |
| <i>integral</i>          | انتگرال              |
| <i>mean</i>              | میانگین              |
| <i>normal</i>            | قائم                 |
| <i>sectional</i>         | مقطعی                |
| <i>tensor</i>            | تانسور               |
| <i>vector</i>            | بردار                |
| <i>curve</i>             | منحنی                |
| <i>asymptotic</i>        | مجانبی               |
| <i>parabolic</i>         | سهموی                |
| <i>parametric</i>        | پارامتری             |
| <i>piecewise regular</i> | قطعه قطعه منتظم      |
| <i>rectifiable</i>       | با طول منتهای        |
| <i>curvilinear</i>       | منحنی الخط           |
| <i>coordinates</i>       | مختصات               |
| <i>cusp</i>              | نقطه بازگشت (بازگشت) |
| <i>cycloid</i>           | چرخزاد               |
| <i>cylindrical</i>       | استوانه ای           |
| <i>surface</i>           | سطح                  |
| <i>developable</i>       | گسترده               |
| <i>development</i>       | گسترش                |
| <i>differential</i>      | دیفرانسیل            |
| <i>absolute</i>          | مطلق                 |
| <i>exterior</i>          | برونی                |
| <i>manifold</i>          | چندگونا              |
| <i>structure</i>         | ساختمان              |
| <i>direction (s)</i>     | راستا(های)           |

|                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| <i>asymptotic</i>             | مجانبی          |
| <i>conjugate</i>              | مزدوج           |
| <i>principal</i>              | اصلی            |
| <i>discriminant</i>           | مبین            |
| <i>dot product</i>            | ضرب نقطه ای     |
| <i>edge of regression</i>     | یال بازگشت      |
| <i>elliptic</i>               | بیضوی           |
| <i>point</i>                  | نقطه            |
| <i>envelope</i>               | پوش             |
| <i>equation</i>               | معادله          |
| <i>implicit</i>               | ضمنی            |
| <i>natural</i>                | طبیعی           |
| <i>parametric</i>             | پارامتری        |
| <i>evolute</i>                | گسترده          |
| <i>exterior</i>               | برونی           |
| <i>differential</i>           | دیفرانسیل       |
| <i>differential form</i>      | فرم دیفرانسیل   |
| <i>closed</i>                 | بسته            |
| <i>exact</i>                  | کامل            |
| <i>linear</i>                 | خطی             |
| <i>quadratic</i>              | درجه دوم        |
| <i>first fundamental form</i> | اولین فرم اساسی |
| <i>flat</i>                   | تخت             |
| <i>point</i>                  | نقطه            |
| <i>focal</i>                  | کانونی          |
| <i>surface</i>                | سطح             |
| <i>form</i>                   | فرم             |
| <i>exterior differential</i>  | دیفرانسیل برونی |
| <i>first fundamental</i>      | اولین... اساسی  |
| <i>second fundamental</i>     | دومین... اساسی  |
| <i>formula</i>                | فرمول           |
| <i>free</i>                   | آزاد            |
| <i>vector</i>                 | بردار           |

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| <i>fundamental form</i>  | فرم اساسی   |
| <i>first</i>             | اولین       |
| <i>second</i>            | دومین       |
| <i>generator</i>         | مولد        |
| <i>rectilinear</i>       | مستقیم الخط |
| <i>generalized</i>       | تعمیم یافته |
| <i>indicatrix</i>        | شاخص        |
| <i>helix</i>             | مارپیچ      |
| <i>geodesic</i>          | ژئودزیک     |
| <i>curvature</i>         | انحنای      |
| <i>line</i>              | خط          |
| <i>normal</i>            | قائم        |
| <i>polar coordinates</i> | مختصات قطبی |
| <i>torsion</i>           | تاب         |
| <i>helicoid</i>          | مارپیچ گون  |
| <i>helix</i>             | مارپیچ      |
| <i>generalized</i>       | تعمیم یافته |
| <i>hyperbolic</i>        | هذلولوی     |
| <i>point</i>             | نقطه        |
| <i>identity</i>          | اتحاد       |
| <i>imbedding</i>         | نشاننده     |
| <i>immersion</i>         | جادهنده     |
| <i>implicit</i>          | ضمنی        |
| <i>equation</i>          | معادله      |
| <i>indicatrix</i>        | شاخص        |
| <i>generalized</i>       | تعمیم یافته |
| <i>integral</i>          | انتگرال     |
| <i>curvature</i>         | انحنا       |
| <i>intrinsic</i>         | ذاتی        |
| <i>geometry</i>          | هندسه       |

|                     |               |
|---------------------|---------------|
| <i>property</i>     | خاصیت         |
| <i>involute</i>     | گسترنده       |
| <i>isoareal</i>     | هم مساحت      |
| <i>mapping</i>      | نگاشت         |
| <i>isogonal</i>     | همزاویه       |
| <i>mapping</i>      | نگاشت         |
| <i>trajectory</i>   | مسیر          |
| <i>isometric</i>    | ایزومتريک     |
| <i>mapping</i>      | نگاشت         |
| <i>isothermic</i>   | همگرمایی      |
| <i>coordinates</i>  | مختصات        |
| <i>latitude</i>     | عرض جغرافیایی |
| <i>line</i>         | خط            |
| <i>asymptotic</i>   | مجانبي        |
| <i>coordinate</i>   | مختص          |
| <i>of curvature</i> | انحناء        |
| <i>of striction</i> | محض           |
| <i>local</i>        | موضعی         |
| <i>frame</i>        | کنج           |
| <i>localized</i>    | مقید          |
| <i>vector</i>       | بردار         |
| <i>longitude</i>    | طول جغرافیایی |
| <i>loxodrome</i>    | خط مایل       |
| <i>manifold</i>     | چند گونا      |
| <i>analytic</i>     | تحلیلی        |
| <i>differential</i> | دifferانسيل   |
| <i>mapping</i>      | نگاشت         |
| <i>conformal</i>    | همشکل         |
| <i>gaussian</i>     | گاوسی         |
| <i>isoareal</i>     | هم مساحت      |
| <i>isogonal</i>     | همزاویه       |
| <i>isometric</i>    | ایزومتريک     |

|                       |                |
|-----------------------|----------------|
| <i>spherical</i>      | کروی           |
| <i>mean curvature</i> | انحنای میانگین |
| <i>meridian</i>       | نصف النهار     |
| <i>metric</i>         | متری           |
| <i>form</i>           | فرم            |
| <i>tensor</i>         | تانسور         |
| <i>minimal</i>        | مینیمال        |
| <i>surface</i>        | سطح            |
| <i>mixed product</i>  | ضرب مختلط      |
| <i>natural</i>        | طبیعی          |
| <i>equation</i>       | معادله         |
| <i>parameter</i>      | پارامتر        |
| <i>node</i>           | گره            |
| <i>non-orientable</i> | جهت ناپذیر     |
| <i>surface</i>        | سطح            |
| <i>normal</i>         | قائم           |
| <i>curvature</i>      | انحنای         |
| <i>principal</i>      | اصلی           |
| <i>plane</i>          | صفحه           |
| <i>to a surface</i>   | به یک سطح      |
| <i>order</i>          | مرتبه          |
| <i>of contact</i>     | تماس           |
| <i>of smallness</i>   | کوچکی          |
| <i>orientable</i>     | جهت پذیر       |
| <i>manifold</i>       | چند گونای      |
| <i>surface</i>        | سطح            |
| <i>orientation</i>    | جهت            |
| <i>osculating</i>     | بوسان          |
| <i>circle</i>         | دایره          |
| <i>plane</i>          | صفحه           |
| <i>sphere</i>         | کره            |

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| <i>parabola</i>         | سهمی       |
| <i>semicubical</i>      | نیمه مکعبی |
| <i>parabolic</i>        | سهموی      |
| <i>curve</i>            | منحنی      |
| <i>point</i>            | نقطه       |
| <i>parallel</i>         | موازی      |
| <i>displacement</i>     | تغییر مکان |
| <i>surfaces</i>         | سطوح       |
| <i>parallelism</i>      | توازی      |
| <i>parameter</i>        | پارامتر    |
| <i>natural</i>          | طبیعی      |
| <i>parametric</i>       | پارامتری   |
| <i>curve</i>            | منحنی      |
| <i>representation</i>   | نمایش      |
| <i>path</i>             | مسیر       |
| <i>point</i>            | نقطه       |
| <i>elliptic</i>         | بیضوی      |
| <i>flat</i>             | تخت        |
| <i>hyperbolic</i>       | هذلولوی    |
| <i>of rectification</i> | اصلاح      |
| <i>of striction</i>     | محض        |
| <i>parabolic</i>        | سهموی      |
| <i>singular</i>         | منفرد      |
| <i>polar</i>            | قطبی       |
| <i>line</i>             | خط         |
| <i>principal</i>        | اصلی       |
| <i>curvature</i>        | انحنای     |
| <i>direction</i>        | راستای     |
| <i>normal</i>           | قائم       |
| <i>projection</i>       | تصویر      |
| <i>stereographic</i>    | گنجنگار    |
| <i>product</i>          | ضرب        |
| <i>exterior</i>         | برونی      |
| <i>mixed</i>            | مختلط      |

|                                |                 |
|--------------------------------|-----------------|
| <i>scalar</i>                  | اسکالر          |
| <i>pseudo sphere</i>           | کره نما         |
| <i>radius</i>                  | شعاع            |
| <i>of curvature</i>            | انحنای          |
| <i>rectification</i>           | اصلاح           |
| <i>point</i>                   | نقطه            |
| <i>rectifying</i>              | اصلاحی          |
| <i>plane</i>                   | صفحه            |
| <i>rectilinear</i>             | مستقیم الخط     |
| <i>generator</i>               | مولد            |
| <i>ruled surface</i>           | سطح خط دار      |
| <i>ruling</i>                  | خط جاری         |
| <i>second fundamental form</i> | دومین فرم اساسی |
| <i>sectional</i>               | مقطعی           |
| <i>curvature</i>               | انحنای          |
| <i>semicubical</i>             | نیمه مکعبی      |
| <i>parabola</i>                | سهمی            |
| <i>semigeodesic</i>            | نیمه ژئودزیک    |
| <i>coordinates</i>             | مختصات          |
| <i>simple</i>                  | ساده            |
| <i>arc</i>                     | قوس             |
| <i>singular</i>                | منفرد           |
| <i>point</i>                   | نقطه            |
| <i>sphere</i>                  | کره             |
| <i>osculating</i>              | بوسان           |
| <i>spherical</i>               | کروی            |
| <i>curve</i>                   | منحنی           |
| <i>mapping</i>                 | نگاشت           |
| <i>stereographic</i>           | گنجنگار         |
| <i>projection</i>              | تصویر           |
| <i>striction</i>               | محض             |
| <i>line</i>                    | خط              |

|                            |               |
|----------------------------|---------------|
| <i>point</i>               | نقطه          |
| <i>structural</i>          | نهادی         |
| <i>equation</i>            | معادله        |
| <i>summation</i>           | جمع‌بندی      |
| <i>convention</i>          | نماد          |
| <i>index</i>               | اندریس        |
| <i>surface</i>             | سطح           |
| <i>canal</i>               | کانال         |
| <i>developable</i>         | گسترده‌نی     |
| <i>minimal</i>             | مینمال        |
| <i>of revolution</i>       | دوار          |
| <i>ordinary</i>            | معمولی        |
| <i>regular</i>             | منتظم         |
| <i>ruled</i>               | خط‌دار        |
| <i>tangent</i>             | مماس (ی)      |
| <i>developable surface</i> | سطح گسترده‌نی |
| <i>vector</i>              | بردار         |
| <i>tensor</i>              | تانسور        |
| <i>contravariant</i>       | کنتراواریان   |
| <i>covariant</i>           | کوواریان      |
| <i>metric</i>              | متری          |
| <i>torsion</i>             | تاب           |
| <i>geodesic</i>            | ژئودزیک       |
| <i>tractrix</i>            | کشاننده       |
| <i>trajectories</i>        | مسیرهای       |
| <i>isogonal</i>            | همزاویه       |
| <i>orthogonal</i>          | قائم          |
| <i>triply orthogonal</i>   | سه متعامد     |
| <i>system</i>              | دستگاه        |
| <i>umbilical</i>           | نافن          |
| <i>point</i>               | نقطه          |

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| <b><i>vector</i></b>        | بردار (ی) |
| <b><i>covariant</i></b>     | کواریان   |
| <b><i>field</i></b>         | میدان     |
| <b><i>free</i></b>          | آزاد      |
| <b><i>localized</i></b>     | مقید      |
| <b><i>mixed product</i></b> | ضرب مختلط |

## فهرست راهنما

|                                             |                                            |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| <i>identity</i>                             | اتحاد                                      |
| <i>of Bianchi</i>                           | بیانچی، ۳۶۱                                |
| <i>of Ricci</i>                             | ریچی، ۳۶۱                                  |
| <i>of Jacobi</i>                            | ژاکوبی، ۳۵۵                                |
| <i>curvature</i>                            | انحناء                                     |
| <i>principal</i>                            | اصلی، ۳۲۴، ۳۳۰                             |
| <i>integral</i>                             | انتگرال، ۲۸۹                               |
| <i>curcle of</i>                            | دایره، ۶۶                                  |
| <i>geodesic</i>                             | ژئودزیک، ۲۴۵، ۲۷۷                          |
| <i>radius of</i>                            | شعاع، ۶۶                                   |
| <i>normal</i>                               | قائم، ۲۹۶                                  |
| <i>gaussian</i>                             | گاوسی، ۱۹۸، ۲۱۰، ۳۰۳، ۳۰۶، ۳۲۵، ۳۶۲        |
| <i>sectional</i>                            | مقطعی، ۳۶۶                                 |
| <i>mean</i>                                 | میانگین، ۳۰۳، ۳۲۵                          |
| <i>of a curve</i>                           | یک منحنی، ۶۴، ۱۰۹                          |
| <i>geodesic curvature</i>                   | انحنای ژئودزیک، ۳۴۵، ۲۷۷                   |
| <i>vector of</i>                            | بردار، ۲۴۳                                 |
| <i>gaussian curvature</i>                   | انحنای گاوسی، ۱۹۸، ۲۱۰، ۳۰۳، ۳۰۶، ۳۲۵، ۳۶۲ |
| <i>expressed through first</i>              | بیان شده به وسیلهٔ اولین                   |
| <i>fundamental form</i>                     | فرم اساسی، ۲۱۱                             |
| <i>integral curvature</i>                   | انتگرال انحناء، ۲۸۹                        |
| <i>summation index (dummy index)</i>        | اندیس جمع‌بندی (اندیس ظاهری)، ۱۶۱          |
| <i>contraction of a tensor</i>              | انقباض یک تانسور، ۲۲۱                      |
| <i>O,o(symbols)</i>                         | او (علامت)، ۲۵                             |
| <i>first fundamental form (metric form)</i> | اولین فرم اساسی (فرم متریک)، ۱۷۲           |
| <i>of the ellipsoid</i>                     | بیضی‌گون، ۱۷۶                              |
| <i>of the torus</i>                         | چنبیره، ۱۷۶                                |
| <i>of the catenoid</i>                      | زنجرگون، ۱۷۵                               |

- of surfaces of revolution* سطوح دوار، ۱۷۴  
*of the hyperbolic paraboloid* سهمی گون هذلولوی، ۱۷۶  
*of the sphere* کره، ۱۷۴  
*of the pseudosphere* کره نما، ۱۷۵  
*of the helicoid* مارپیچ گون، ۱۷۵
- Bertrand, curves of** برتران، منحنیهای، ۸۴  
**vectors** بردارها  
*free* آزاد، ۲  
*curvature* انحنای، ۲۴۳  
*of geodesic curvature* انحنای ژئودزیک، ۲۴۳  
*of normal curvature* انحنای قائم، ۲۴۳  
*addition of* جمع، ۳  
*Darboux* داربوت، ۷۲  
*cross product (vector product)* ضرب خارجی (ضرب برداری)، ۸  
*mixed product of* ضرب مختلط، ۹  
*dot product (scalar product)* ضرب نقطه ای (ضرب اسکالر)، ۵  
*binormal* قائم دوم، ۵۹  
*contravariant* کنتراواریان، ۲۱۷  
*covariant* کوواریان، ۲۱۷  
*localized* مقید، ۲  
*collinear* همخط، ۳
- natural (arc) parameter** پارامتر طبیعی (قوس)، ۳۹  
**envelope** پوش  
*of a family of curves* یک خانواده از منحنیها، ۱۱۱  
*of a two-parameter family* یک خانواده دوپارامتری  
*of surfaces* از سطوح، ۱۴۷  
*of a one parameter family* یک خانواده یک پارامتری  
*of surfaces* از سطوح، ۱۴۰  
*of a one parameter family* یک خانواده یک پارامتری  
*of planes* از صفحات، ۱۴۴

- geodesic* ژئودزیک، ۲۵۹، ۳۴۸
- of a connection (torsion tensor)* یک همبندی (تانسور تاب)، ۳۵۹
- tensors* تانسورها
- contraction of* انقباض، ۲۲۱
- addition of* جمع، ۲۲۱
- Riemann - Christoffel* ریمان - کریستوفل، ۲۹۴
- multiplication of* ضرب، ۲۲۱
- contravariant* کنتراواریان، ۲۱۷
- covariant* کوواریان، ۲۱۷
- metric* متری، ۲۲۵، ۲۲۰
- components of* مؤلفه‌های، ۲۱۶
- type of* نوع، ۲۱۷
- curvature tensor (Riemann - Christoffel tensor)* تانسور انحنا (تانسور ریمان - کریستوفل)، ۲۹۵
- as an operator  $R(x,y)$*  به عنوان عملگر  $R(x,y)$ ، ۳۶۰
- projection* تصویر
- stereographic* گنجنگار، ۲۳۵
- Lambert's* لامبرت، ۲۳۹
- Mercator's* مرکاتور، ۲۳۷
- commutator of vector fields (Poisson bracket)* تعویضگر میدانهای برداری (کروشه پواسن)، ۳۵۴
- parallel displacement (transport)* تغییر مکان موازی (انتقال)
- on a surface* بر یک سطح، ۲۷۵
- in riemannian manifolds* در چند گونا‌های ریمانی، ۲۹۵
- contact* تماس
- of curve and plane of sphere* منحنی و صفحه یا کره، ۵۰
- of curves* منحنیها، ۴۲
- parallelism of Levi - Civita* توازی لوی - سیویتا، ۲۷۵
- conjugate net* تور مزدوج، ۳۱۴
- immersion* جادهنده، ۱۳۰، ۳۷۰
- addition* جمع

|                                                |                                      |
|------------------------------------------------|--------------------------------------|
| <i>of vectors</i>                              | بردارها، ۳                           |
| <i>of tensors</i>                              | تانسورها، ۲۲۱                        |
| <i>orientation</i>                             | جهت                                  |
| <i>of the space</i>                            | فضا، ۶                               |
| <i>of a manifold</i>                           | یک چندگونا، ۱۳۹                      |
| <i>of a surface</i>                            | یک سطح، ۱۳۷                          |
| <i>cycloid</i>                                 | چرخزاد، ۴۵، ۴۹                       |
| <i>manifold</i>                                | چندگونا                              |
| <i>analytic</i>                                | تحلیلی، ۱۳۰                          |
| <i>orientable</i>                              | جهت پذیر، ۱۳۹                        |
| <i>differential</i>                            | دیفرانسیل، ۱۲۹                       |
| <i>riemannian</i>                              | ریمانی، ۲۲۵                          |
| <i>ruling (rectilinear generator)</i>          | خط جاری (مولد مستقیم الخط)، ۱۴۵، ۱۵۳ |
| <i>geodesic lines (geodesics)</i>              | خطوط ژئودزیک (ژئودزیکها)، ۲۵۰        |
| <i>in a riemannian manifold</i>                | در یک چندگونای ریمانی، ۲۹۵           |
| <i>lines</i>                                   | خطها                                 |
| <i>of curvature</i>                            | انحناء، ۳۳۸، ۳۴۳                     |
| <i>polar</i>                                   | قطبی، ۶۷                             |
| <i>loxodrome</i>                               | مایل، ۱۸۰                            |
| <i>asymptotic</i>                              | مجانبی، ۳۱۹                          |
| <i>of striction</i>                            | محض، ۱۵۵                             |
| <i>coordinate</i>                              | مختص، ۱۲۲                            |
| <i>intrinsic properties</i>                    | خواص ذاتی، ۲۴۲                       |
| <i>osculating circle (circle of curvature)</i> | دایره بوسان (دایره انحناء)، ۶۶       |
| <i>in the plane</i>                            | در صفحه، ۹۶                          |
| <i>triply orthogonal system</i>                | دستگاه سه متعامد، ۳۴۴                |
| <i>circles of latitude</i>                     | دوائر عرض جغرافیایی، ۱۲۵             |
| <i>second fundamental form</i>                 | دومین فرم اساسی، ۱۸۹                 |
| <i>of the ellipsoid</i>                        | بیضی گون، ۱۹۲                        |
| <i>of the torus</i>                            | جنبه، ۱۹۲                            |

- in coordinate free notations*  
*of the catenoid*  
*of surfaces of revolution*  
*of the sphere*  
*of the pseudosphere*  
*of the helicoid*  
*differential*  
*exterior*  
*absolute*  
*of a vector - valued function*
- directions*  
*principal*  
*asymptotic*  
*conjugate*  
*principal directions*  
*orthogonality of*  
*at a point of a surface*  
*of a conic*  
*asymptotic directions*  
*at a point of a surface*  
*of a conic*  
*of a curve*  
*conjugate directions*  
*at a point of a surface*  
*of a conic*
- angle*  
*between vectors*  
*between coordinate lines*  
*between surfaces*  
*between curve and surface*  
*between curves*  
*on a surface*
- درنماهای فارغ از مختصات، ۳۶۴  
 زنجیرگون، ۱۹۲  
 سطوح دوار، ۱۹۱  
 کره، ۱۹۰  
 کره‌نما، ۱۹۲  
 مارپیچ گون، ۱۹۲  
 دیفرانسیل  
 برونی، ۳۸۷، ۳۸۴  
 مطلق، ۲۷۱، ۲۹۲  
 یک تابع برداری، ۲۶
- راستاها  
 اصلی، ۳۳۲، ۳۲۷، ۳۳۳  
 مجانبی، ۵۵، ۳۰۰، ۳۱۷، ۳۳۵  
 مزدوج، ۳۱۱، ۳۳۴  
 راستاهای اصلی  
 تعامد، ۳۲۷  
 در یک نقطه از سطح، ۳۲۲  
 یک مخروطی، ۳۳۵  
 راستاهای مجانبی  
 در یک نقطه از سطح، ۳۰۰، ۳۱۷  
 یک مخروطی، ۳۳۵  
 یک منحنی، ۵۵  
 راستاهای مزدوج  
 در یک نقطه از سطح، ۳۱۱  
 یک مخروطی، ۳۳۳
- زاویه  
 بین بردارها، ۵  
 بین خطوط مختص، ۱۷۸  
 بین سطوح، ۱۴۰  
 بین منحنی و سطح، ۱۴۰  
 بین منحنیها، ۴۷  
 بر یک سطح، ۱۷۷

|                                       |                                    |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| <i>catenoid</i>                       | زنجیرگون، ۱۲۶                      |
| <i>geodesics (geodesic lines)</i>     | ژئودزیکها (خطوط ژئودزیک)، ۲۹۵، ۲۵۰ |
| <i>differential structure</i>         | ساختمان دیفرانسیل، ۱۲۹             |
| <i>surfaces</i>                       | سطوح                               |
| <i>cylindrical</i>                    | استوانه‌ای، ۱۵۲                    |
| <i>of constant gaussian curvature</i> | با انحناى گاوسى ثابت، ۲۶۲          |
| <i>orientable</i>                     | جهت پذیر، ۱۳۷                      |
| <i>non - orientable</i>               | جهت ناپذیر، ۱۳۷                    |
| <i>ruled</i>                          | خط دار، ۱۴۵، ۱۵۳                   |
| <i>of revolution</i>                  | دوار، ۱۲۵                          |
| <i>canal</i>                          | کانال، ۱۴۲                         |
| <i>focal</i>                          | کانونی، ۳۴۵                        |
| <i>developable</i>                    | گسترده‌نى، ۱۴۹، ۲۳۱                |
| <i>isometry with plane</i>            | ایزومتري با صفحه، ۲۳۱              |
| <i>ordinary</i>                       | معمولى، ۱۱۸                        |
| <i>regular</i>                        | منتظم، ۱۲۰                         |
| <i>parallel</i>                       | موازی، ۳۰۴                         |
| <i>minimal</i>                        | مینیمال، ۳۰۸                       |
| <i>parabola</i>                       | سه‌می                              |
| <i>semicubical</i>                    | نیمه مکعبی، ۳۴                     |
| <i>Dupin's indicatrix</i>             | شاخص دوپن                          |
| <i>as a limit of sections</i>         | به عنوان حد مقاطع، ۳۳۶             |
| <i>generalized</i>                    | تعمیم یافته، ۳۳۷                   |
| <i>radius</i>                         | شعاع                               |
| <i>of curvature</i>                   | انحنا، ۶۶                          |
| <i>of normal curvature</i>            | انحنای قائم، ۲۹۶                   |
| <i>plane</i>                          | صفحه                               |
| <i>rectifying</i>                     | اصلاحی، ۵۹                         |
| <i>osculating</i>                     | بوسان، ۵۰                          |
| <i>normal</i>                         | قائم، ۵۹                           |

|                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| <i>product</i>                  | ضرب                            |
| <i>scalar (dot)</i>             | اسکالر (نقطه‌ای)، ۵            |
| <i>of vector by scalar</i>      | بردار در اسکالر، ۵             |
| <i>vector</i>                   | برداری، ۸                      |
| <i>exterior</i>                 | برونی، ۳۷۶، ۳۸۰                |
| <i>tensor</i>                   | تانسوری، ۲۲۱                   |
| <i>cross (vector)</i>           | خارجی (برداری)، ۸              |
| <i>mixed</i>                    | مختلط، ۸                       |
| <br><i>longitude</i>            | <br>طول جغرافیایی، ۱۲۴         |
| <i>arc length</i>               | طول قوس، ۳۷                    |
| <br><i>latitude</i>             | <br>عرض جغرافیایی، ۱۲۴         |
| <i>Christoffel symbols</i>      | علامت کریستوفل                 |
| <i>transformation of</i>        | تبدیل، ۲۰۶                     |
| <i>of first kind</i>            | نوع اول، ۲۰۳                   |
| <i>of second kind</i>           | نوع دوم، ۲۰۲                   |
| <br><i>form</i>                 | <br>فرم                        |
| <i>first fundamental</i>        | اولین .... اساسی، ۱۷۲          |
| <i>second fundamental</i>       | دومین .... اساسی، ۱۸۹          |
| <i>exterior differential</i>    | دیفرانسیل برونی، ۳۷۱، ۳۷۵، ۳۸۰ |
| <i>metric</i>                   | متری، ۱۷۲                      |
| <i>fundamental form</i>         | فرم اساسی                      |
| <i>first</i>                    | اولین، ۱۷۲                     |
| <i>second</i>                   | دومین، ۱۸۹                     |
| <i>formula</i>                  | فرمول                          |
| <i>Taylor's</i>                 | تیلور، ۱۹، ۲۴                  |
| <i>generalized Gauss-Bonnet</i> | گاوس — بونه تعمیم یافته، ۲۸۷   |
| <i>formulas</i>                 | فرمولها                        |
| <i>of Bonnet - Kovalevsky</i>   | بونه — کووالفسکی، ۲۶۰          |
| <i>of Frenet</i>                | فرنه، ۶۳، ۹۴                   |
| <i>of Codazzi</i>               | کودازی، ۲۰۸                    |
| <i>of Gauss</i>                 | گاوس، ۲۰۳، ۲۰۸                 |

|                                                          |                                           |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| <i>of Gauss - Bonnet</i>                                 | گاوس — بونه، ۲۸۳                          |
| <i>of Weingarten</i>                                     | وینگارتن، ۲۰۳                             |
| <i>Frenet's formulas</i>                                 | فرمولهای فرنه، ۶۳                         |
| <i>for the plane</i>                                     | برای صفحه، ۹۴                             |
| <i>exterior differential forms</i>                       | فرمهای دیفرانسیل برون، ۳۷۱، ۳۷۵، ۳۸۰      |
| <i>closed</i>                                            | بسته، ۳۸۴، ۳۸۷                            |
| <i>linear</i>                                            | خطی، ۳۷۱                                  |
| <i>quadratic</i>                                         | درجه دوم، ۳۷۵                             |
| <i>exact</i>                                             | کامل، ۳۸۴، ۳۸۷                            |
| <i>normal</i>                                            | قائم                                      |
| <i>principal</i>                                         | اصلی، ۵۹                                  |
| <i>to a surfaces</i>                                     | به یک سطح، ۱۳۴                            |
| <i>geodesic</i>                                          | ژئودزیک، ۲۴۵                              |
| <i>binormal</i>                                          | قائم دوم، ۵۹                              |
| <i>conjugate diameter</i>                                | قطر مزدوج                                 |
| <i>of a conic</i>                                        | یک مخروطی، ۳۳۴                            |
| <i>theorem</i>                                           | قضیه                                      |
| <i>fundamental ... of curve theory</i>                   | اساسی نظریه منحنیها، ۷۹                   |
| <i>of Euler</i>                                          | اولر، ۳۲۹                                 |
| <i>of Bonnet (fundamental theorem of surface theory)</i> | بونه (قضیه اساسی نظریه سطوح)، ۲۱۴         |
| <i>of Rodrigues</i>                                      | ردریگوز، ۳۲۴                              |
| <i>of Schur</i>                                          | شور، ۳۶۶                                  |
| <i>of Gauss</i>                                          | گاوس، ۲۱۰                                 |
| <i>of Meusnier</i>                                       | مونیه، ۲۹۹                                |
| <i>of Joachimsthal</i>                                   | یوشیم اشتال، ۳۴۲                          |
| <i>fundamental theorem</i>                               | قضیه اساسی                                |
| <i>of surface theory (Bonnet theorem)</i>                | نظریه سطوح (قضیه بونه)، ۲۱۴               |
| <i>of curve theory</i>                                   | نظریه منحنیها، ۷۹                         |
| <i>Gauss - Bonnet theorem</i>                            | قضیه گاوس — بونه، ۲۸۳                     |
| <i>generalized</i>                                       | تعمیم یافته، ۲۸۷                          |
| <i>simple arc</i>                                        | قوس ساده، ۲۹                              |
| <i>Poisson bracket (commutator of vector fields)</i>     | کروشه بواسن (تویضگر میدانهای برداری)، ۳۵۴ |

- spherical* کروی  
*curves* منحنیهای، ۹۱  
*image of a tangent vector* نقش یک بردار مماس، ۳۰۰  
*mapping (gaussian mapping)* نگاشت (نگاشت گاوسی)، ۱۹۸  
*sphere* کره، ۱۲۴، ۱۲۸، ۱۷۴، ۱۹۰  
*osculating* بوسان، ۸۷  
*pseudosphere* کره نما، ۱۲۶، ۱۷۵، ۱۹۲  
*tractrix* کشاننده، ۴۸  
*Frenet's frame (frenet's trihedron)* کنج فرنه (سه وجهی فرنه)، ۵۹  
*local frames* کنجهای موضعی، ۳۸۸
- Node* گره، ۱۰۶  
*evolutes* گسترده ها  
*planar* مسطح، ۱۰۱  
*of a surface (focal surface)* یک سطحی (سطح کانونی)، ۳۴۵  
*of a curve* یک منحنی، ۷۵  
*development of a curve on the plane* گسترش یک منحنی بر صفحه، ۲۷۰  
*involute* گسترنده، ۷۸
- helix* مارپیچ، ۳۴، ۴۹، ۶۱، ۷۱  
*generalized* تعمیم یافته، ۸۳  
*circular* مستدیر، ۳۴، ۴۹، ۶۱، ۷۱  
*helicoid* مارپیچ گون، ۱۲۷، ۱۷۵، ۱۹۲  
*discriminant* مبین  
*of the first fundamental form* اولین فرم اساسی، ۱۷۳  
*of the second fundamental form* دومین فرم اساسی، ۱۸۹  
*asymptote* مجانب  
*of a conic section* یک مقطع مخروطی، ۳۳۵  
*of a curve* یک منحنی، ۵۲  
*of a planar curve* یک منحنی مسطح، ۱۰۳  
*striction* محض  
*line* خط، ۱۵۵  
*point* نقطه، ۱۵۵  
*coordinates* مختصات

|                                                       |                                       |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| <i>geodesic polar</i>                                 | ژئودزیک قطبی، ۲۵۶                     |
| <i>asymptotic</i>                                     | مجانبی، ۳۲۱                           |
| <i>curvilinear (gaussian)</i>                         | منحنی الخط (گاوسی)، ۱۲۱               |
| <i>semigeodesic</i>                                   | نیمه ژئودزیک، ۲۵۳، ۱۸۳                |
| <i>isothermic</i>                                     | همگرمایی، ۱۸۳                         |
| <i>curvilinear coordinates (gaussian coordinates)</i> | مختصات منحنی الخط (مختصات گاوسی)، ۱۲۱ |
| <i>transformation of</i>                              | تبدیل، ۱۲۲                            |
| <i>asymptotic</i>                                     | مجانبی، ۳۲۱                           |
| <i>semi geodesic</i>                                  | نیمه ژئودزیک، ۱۸۳                     |
| <i>isothermic</i>                                     | همگرمایی، ۱۸۳                         |
| <i>conoid</i>                                         | مخروط گون، ۱۲۸                        |
| <i>order</i>                                          | مرتبه                                 |
| <i>of contact</i>                                     | تماس، ۵۰، ۴۲                          |
| <i>of smallness</i>                                   | کوچکی، ۲۵                             |
| <i>center</i>                                         | مرکز                                  |
| <i>of curvature</i>                                   | انحناء، ۶۶                            |
| <i>of principal curvature</i>                         | انحنای اصلی، ۳۴۵                      |
| <i>of normal curvature</i>                            | انحنای قائم، ۳۰۰                      |
| <i>of osculating sphere</i>                           | کره بوسان، ۸۹                         |
| <i>area of a surface</i>                              | مساحت یک سطح، ۱۸۴                     |
| <i>path (parametric representation of a curve)</i>    | مسیر (نمایش پارامتری یک منحنی)، ۳۰    |
| <i>equivalence</i>                                    | هم ارزی، ۳۲                           |
| <i>trajectories</i>                                   | مسیرها                                |
| <i>orthogonal</i>                                     | قائم، ۱۷۹                             |
| <i>isogonal</i>                                       | همزاویه، ۱۷۹                          |
| <i>covariant derivative (absolute derivative)</i>     | مشتق کوواریان (مشتق مطلق)، ۲۷۳، ۳۵۶   |
| <i>Euler - Poincaré characteristic</i>                | مشخص اویلر - پوانکاره، ۲۹۱            |
| <i>structural equations</i>                           | معادلات نهادی، ۳۸۹                    |
| <i>equations of a surface</i>                         | معادلات یک سطح                        |
| <i>parametric</i>                                     | پارامتری، ۱۲۰                         |
| <i>implicit</i>                                       | ضمنی، ۱۳۱                             |
| <i>equations of a curve</i>                           | معادلات یک منحنی                      |
| <i>parametric</i>                                     | پارامتری، ۲۹                          |

|                                          |                                     |
|------------------------------------------|-------------------------------------|
| <i>implicit</i>                          | ضمنی، ۱۰۴                           |
| <i>natural</i>                           | طبیعی، ۷۹                           |
| <i>implicit equation</i>                 | معادلهٔ ضمنی                        |
| <i>of a surface</i>                      | یک سطح، ۱۳۱                         |
| <i>of a curve</i>                        | یک منحنی، ۱۰۴                       |
| <i>tangent</i>                           | مماس (ی)                            |
| <i>vector</i>                            | بردار، ۵۹                           |
| <i>to a differential manifold</i>        | بریک چندگونی دیفرانسیل، ۱۷۰         |
| <i>to a surface</i>                      | بریک سطح، ۱۶۷                       |
| <i>to a curve</i>                        | بریک منحنی، ۵۹                      |
| <i>as a derivation</i>                   | به عنوان یک اشتقاق، ۱۷۰             |
| <i>line to a curve</i>                   | خط ... بریک منحنی، ۴۴               |
| <i>developable surface</i>               | سطح گسترده‌نی، ۲۷۰، ۳۱۳             |
| <i>plane to a surface</i>                | صفحه ... بریک سطح، ۱۳۴، ۱۳۹         |
| <i>curve</i>                             | منحنی                               |
| <i>rectifiable</i>                       | با طول متناهی، ۳۷                   |
| <i>parametric</i>                        | پارامتری، ۳۳                        |
| <i>on a surface</i>                      | بریک سطح، ۱۶۶                       |
| <i>parabolic</i>                         | سهموی، ۱۹۴                          |
| <i>piecewise regular</i>                 | قطعه قطعه منظم، ۳۲                  |
| <i>asymptotic (asymptotic line)</i>      | مجانبی (خط مجانبی)، ۳۱۸             |
| <i>regular of class <math>C_n</math></i> | منتظم از کلاس $C_n$ ، ۳۳            |
| <i>catenary</i>                          | منحنی زنجیری، ۶۶، ۷۸                |
| <i>curves on a surface</i>               | منحنیهای بریک سطح، ۱۶۶              |
| <i>curves of Bertrand</i>                | منحنیهای برتران، ۸۵                 |
| <i>components</i>                        | مؤلفه‌ها                            |
| <i>of a vector</i>                       | یک بردار، ۱۱، ۱۶۷، ۲۱۶              |
| <i>of a tensor</i>                       | یک تانسور، ۲۱۷                      |
| <i>rectilinear generator (ruling)</i>    | مولد مستقیم الخط (خط جاری) ۱۴۵، ۱۵۳ |
| <i>vector fields</i>                     | میدانهای برداری                     |
| <i>on a manifold</i>                     | بریک چندگونا، ۳۵۳                   |
| <i>on a surface</i>                      | بریک سطح، ۲۷۱                       |

*imbedding*

نشانده، ۱۳۰