

گفت‌وگوهای انتقادی درباره‌ی ریاضیات:

قسمت دوم. نقد و تشویق تحقیقات در ترکیبیات

امیرحسین اکبرطباطبایی، آرش رستگار

پیاده‌سازی و بازنویسی: کاوه قبادی، سامان فرحت

آرش رستگار: $3+3$ ترکیبیات- سه تا نظریه‌ی خوب در ترکیبیات بگویم. به نظر من، نظریه‌ی هایمن بس و این که می‌آید برای کارهای خودش به جز این که trace لاپلاسن را در نظر می‌گیرد و برای کارهای خودش یک trace ناجابجایی تعریف می‌کند که بعداً al کن با این trace ناجابجایی معجزه می‌کند، واقعا برجسته است و یادآوری می‌کنم که هایمن بس جبردان بود، و بعد به خودم یادآوری می‌کنم، این یعنی جبردان. کوین یعنی جبردان. هایمن بس یعنی جبردان. جی پی سر یعنی جبردان. اگر بخواهم از کارهای خوبی که انجام شده صحبت کنم، یک مثال دیگر ارتباطی است که گراف‌های ribbon با سطوح ریمانی دارند و سعی می‌کنند که همه چیز سطوح ریمانی را به زبان آن گراف‌های ریون بیان کنند. البته گراف‌ها در کارهای کانتسویچ incarnation های زیادی دارند، و هیچ‌وقت این گونه نیست که با یکی دوتا گراف کار کنند، و با یک عالمی از گراف‌ها کار می‌کند. این دو مثال. چهار مثال آماده کرده بودم از این که چه چیزهایی در ترکیبیات بوده که از آن خیلی خوشحال هستم، یکی را فراموش کردم. سومی تناظر لنگلندز به پیمان p هست که به سفارش خود ژان پیر سر به وجود آمده است. حالا نوبت می‌رسد به نقد، بگویم که چه چیزهایی باید باشد و نیست. اولاً که چرا ساختارها را مطالعه نمی‌کنید؟ شما باید مورفسم بین آبجکت‌هایتان را تعریف کنید. مورفسم را که تعریف کنید، می‌توان حد گرفت، می‌توان فنومن‌ها را بررسی کرد. مثلاً بلاک دیزاین را در نظر بگیرید، مورفسم بلاک دیزاین مهم است، جمع مستقیم بلاک دیزاین مهم است، آن‌هایی که split نمی‌شوند مهم است و مانند این که دیگر معلوم است چه چیزهایی است. پس اولاً شما باید ساختار را مطالعه کنید و مورفسم‌های بین ساختارها و دنباله‌های مورفسم‌ها را و مورفسم‌های split و nonsplit و... یک عالمه از این چیزها هست که باید مطالعه شود. این یکی. دومی این که شما دیفورمیشن ندارید. در آن ایده فضای پیمان‌های گراف‌ها که من داشتم، درواقع ایده این بود که دیفورمیشن‌های گسسته آبجکت‌های ترکیبیاتی مطالعه شوند، که واقعا چنین تمی در ترکیبیات اصلاً وجود ندارد. سومی این که چرا فکر می‌کنید که ترکیبیات‌دان باید آبجکت‌های متناهی را بررسی کند؟ شما باید همه کاردینالیتهای را بررسی کنید. اگر خوب به شناختن نگاه کنید، می‌بینید که شناختن برای همین کار ساخته شده است که ساختارهای ریاضی را در کاردینالیتهای مختلف بررسی کنید. مثلاً یک سری از حدس‌های جبری هست که محمد گلشنی با یک جبردان بسیار برجسته‌ای به اسم محسن اصغرزاده در مقالاتشان دارند می‌نویسند. و اگر بخواهم بهتر بگویم، شلاح یک ترکیبیات‌دان بزرگ است، به یک معنی. به این معنی، نظریه مجموعه‌ها، همه‌اش جزو ترکیبیات است. خب این که انجام شده است. ولی شما چرا این را از خودتان حساب نمی‌کنید؟ معلوم است چرا، چون می‌شود سرور سرور سرورتان و نمی‌خواهید که کسی سرور سرورتان باشد. نشان به آن نشان که بین کارهای شلاح، کارهای ترکیبیاتی هم هست. همان ساختار شناختی هست که ترکیبیات را انجام می‌دهد. پس چه ترکیبیاتی باید باشد؟ دیفورمیشن گسسته آبجکت‌های ترکیبیاتی، مورفسم‌های

آبجکت‌های ترکیبیاتی که هر کدامشان به یک عالمه ریاضیات منجر می‌شود و سومی هم انجام دادن ریاضیات در تمام کاردینالیتی‌ها، در کاردینالیتی‌های غیرمتعارف، مثل نظریه مجموعه‌ها. انجام دادن ریاضیات در کاردینالیتی‌های غیرمتعارف باید جزو ترکیبیات محسوب شود. و مردم باید انجام بدهند و صلاح و همکارانش انجام می‌دهند. او یک نفری به اندازه یک کشور کار می‌کند. حتی هیچ کسی نیست بگوید آفرین! تو با یک دید و برداشتی بزرگترین ریاضیدان قرن بیستم هستی. از یک جایی بایستیم و نگاه کنیم، این طور هست دیگر. ولی دریغ از یک نفر که قدر صلاح را بداند.

امیرحسین اکبرطباطبایی: توضیحات بیشتر و دقیق‌تر - به به دست شما درد نکند. حالا من می‌خواهم که شما را متوقف کنم و سرعتتان را کمی کاهش بدهم. با سوء استفاده از اتوریته‌ای که به من داده‌اید، می‌خواهم که مخاطبم را هم در نظر بگیرم با این کار. الان اگر یک مخاطب عام یا حتی دانش‌آموخته‌ی ریاضی هم داشته باشیم، این‌ها را که از شما می‌شنود، خوشحال می‌شود، اول یک حسی از توضیحات شما می‌گیرد که این‌ها یعنی چه؟ بعد از شما می‌خواهد که این‌ها را برایش باز کنید چرا که نکاتی که می‌گویید خیلی هم ساده نیستند. بنابراین به نمایندگی از مخاطب فرضیمان از شما می‌خواهم که اول این سه کار خوبی که در ترکیبیات انجام شده و در مرحله‌ی بعد سه تا کاری که باید انجام بشود، را باز کنید. یعنی به شکل اکسپوزیتوری یک توضیح کوچکی به مخاطب مربوطه بدهید که این چیست، و این چه فایده‌ای داشته، و چه کلکی در آن سوار می‌کنند و مثلاً این سرش به آن سرش چه ربطی دارد و چه تکنیک‌هایی به کار برده‌اند. این‌ها را یک ذره باز کنید که مخاطبی که می‌شنود، یک حسی بگیرد، حتی اگر نامتخصص باشد. مثلاً یکی از کارهای انجام‌شده درباره‌ی ترکیبیات نامتناهی صلاح و از این دست کارهاست. این به نظرم تا حدی مشخص است که ترکیبیات نامتناهی مد نظر شما چیست. ولی طبیعتاً مثال‌های دیگری هم هست که آن‌قدرها روشن نیست یا مثلاً در مورد آن سه تا پی انجام نشده، فکر می‌کنم دیفورمیشن اصلاً جایی است که ما باید فرود بیاوریم و کمی درباره‌ی آن حرف بزنیم. آن طور که من فهمیدم، در نظرگاه شما دیفورمیشن نقش کلیدی دارد بالاخص به عنوان کار ریاضیاتی‌ای که انجام نشده است. مدام به آن ارجاع می‌دهید که این ترکیبیات دیفورمیشن‌اش انجام نشده یا در هندسه دیفورمیشن مهم است، در جبر چون میدان صلب است نمی‌شود دیفورمیشن کرد و این‌ها باید عقل داشته باشند و بروند سراغ دیفورمیشن skew-field و... به نظرم این‌ها را اندکی اگر توضیح بدهید، خوب می‌شود و همین‌طور رفت و برگشتی صحبت کنیم و من همین قدر که می‌فهمم که زیاد هم نیست در جایگاه مخاطب بنشینم و سوال بپرسم تا سر در بیاوریم که چیزهای مهم در حواشی این عوالم چیست و همان‌طور که گفتم یک جاهایی سلیقه‌ی خودم را هم اعمال کنم و آن جاهایی که به نظرم بیشتر به درد من مخاطب با اطلاعاتی عمومی از ریاضی می‌خورد، یا مثلاً به لحاظ فلسفی جالب‌تر است و... فرود بیاوریم. در مورد آن مباحثات اولیه درباره‌ی ترکیبیات هم یک سری نکته‌ها هست که من دوست داشتم بپرسم و این‌جا خواهم پرسید. اما نمی‌دانم که کار درست این است که من اول سوالاتم را بپرسم یا شما اول این‌ها را توضیح بدهید. بستگی به فرمت و جزییات و این‌ها دارد. بگذارید من اول سوالم را بپرسم. فکر می‌کنم دست کم یکی از سوالاتم، نسبت به بقیه کمی عمیق‌تر و به ریشه‌ها نزدیک‌تر است تا به کاربردها و تکنیک‌ها. بنابراین منطقی است که اول در مورد این سوال حرف بزنیم. اگر موافق باشید بهتر است که این‌ها را باز کنیم، کلی در این مورد مردم چیز یاد می‌گیرند. حالا من وسط‌هایش می‌خواهم فضولی هم بکنم و بگویم که حالا هرچا خودتان به نظرتان آمد یک چیز اکسپوزیتوری هم معرفی کنید که مخاطب برود آن‌ها را ببیند، و اگر مثلاً سواد لیسانس ریاضی هم داشت، بتواند از مطلب سر در بیاورد. و اما سوالم. یک جایی به قشنگی می‌گویید که وایلز یک ساختمانی معرفی می‌کند که مربوط به یونیورسالیته است و یک سری کانستراکشن و بعد می‌گویید

که وایلز به این می گوید شمارش و این عمیق است و مثلاً گروتندیک به این نمی گوید شمارش، میزور به این نمی گوید شمارش و این را تحسین می کنید که وایلز هرچند که به لحاظ فلسفی آدم عمیقی است، ولی لیدر فیلد نیست، و این خودش یک حرفی است که آدم به این بگوید شمارش. شمارش این همه سال تاریخ دارد. به نظرتان این را ممکن است بخواهید باز کنید؟ این تصمیمش با شماست. ولی این وسط یک حرفی می زنید که شنیدنی است. این حرف را با فونت بولد بخوانید. می گوید که مفهوم شمارش در تاریخ تعمیق شده نسبت به آنی که قبلاً بوده. من از شما می خواهم که اگر ممکن است بیایید کمی درباره ی این تعمیق شده های مفهوم شمارش، یا اگر چند نمونه می شناسید و دوست دارید، یا اصلاً یک نمونه ی اصلی که همین وایلز باشد را به زبان ریاضی، ولی به بیانی عامه فهم، برای ما توضیح بدهید که به چه معنی تعمیق شده و کجاها تعمیق شده و کجاها می شود از این ها پیدا کرد؟ و چرا فکر می کنید این یک سری فن نیست، و یک درک عمیق تری از شمارش به ما می دهد که در ترکیبیات غایب است؟ پس بیایید بگویید که شمارش به چه مفهومی تعمیق شده، ولی هم زمان می خواهم که بحث از یک طرف در ریاضی باقی بماند و از طرف دیگر توجه کنیم که مخاطبمان ممکن است چیز زیادی نداند. درس خوبی خوانده، ولی متخصص هندسه ی جبری و هندسه ی اعداد و هندسه ی حسابی و این ها نیست. با روشی که بلد هستید و با حال فلسفی برای من نابلد توضیح بدهید که بدانم از این بحث چه چیزی می توانم به خانه ببرم.

آرش رستگار: درباره ی دگرذیسی- و اما راجع به دیفورمیشن. حالا که راجع به دیفورمیشن صحبت کردم، کمی هم راجع به هندسه ای که شما دارید می خوانید صحبت می کنم. قبلاً گفتم که به نظر من مفاهیم لوکال و گلوبال و مفاهیم جزء و کل به یک معنایی در ساختار ذهن ما دوگان هستند. یعنی می شود روی یک فضای مدولی حرکت کرد که مفهوم کل برود به جای جزء و جزء برود به جای کل، مثل همان رویایی که دکتر رنجبر مطلق ICTP راجع به بوزونیک فرمیونیک سیمتری داشت. شما در هندسه تان دوست دارید مفاهیم لوکال و گلوبال به همین معنا که هست، یک طوری وجود داشته باشند و این هم خوب است، این هم می شود یک سفارش. حالا ببینیم با این سفارش چه می شود گفت. آگه ما مفهوم لوکال داریم، به این معنی که نقاطی که نزدیک به هم هستند معنی دارند، معنای استعاره اش می شود آبجکت هایی که شبیه به هم هستند، "نزدیک" می شود همان "شبیه" در استعاره ذهن، در آن مقاله دست نویسی که نوشتم هست. بنابراین در واقع یک طوری انگاری که این هندسه ها فضاهای مدولی هستند و با تغییرات کمی، اگر شما آن اشیاء یونیورسال در فایبر را تغییر بدهید و حرکت بدهید، با تغییرات کمی، بقیه آبجکت های نزدیکش را به دست می آورید. آن ها به این معنی به هم نزدیک اند، نه به معنای فاصله. استراکچرشون با دیفورمیشن کمی به دست می آید که آن هم باز می شود به معنای فاصله هم برگرداند، ولی طوری نیست. این را شما می گوید هندسه و خیلی هم چیز خوبیست، تعریف خوبیست، و به همان ایده دیفورمیشن هم مربوط می شود. برای همین من این حرف ها را گفتم و می خواهم راجع به دیفورمیشن صحبت کنم. تاریخ این مسئله این است که مسئله تغییر و ثبوت، و دموکراتیوس و پارمنیدس هست، و مسئله جوهر و عرض است، و این که یک شیء یک چیزهایش ثابت باشد و یک چیزهایش تغییر کند و بعد ما بگوییم چون آن چیزهایش ثابت هستند همان شیء است و چون آن چیزهایش تغییر کرده، دیفرم شده. بنابراین مثلاً دیفورمیشن ساختار مختلط و دیفورمیشن ساختار هموار روی منیفلد شبیه همین می شوند. یعنی یک ساختار توپولوژیک را فیکس می کنید و ساختار دیفرانسیلی مشتق گرفتن را اجازه می دهید حرکت کند. منیفلد تغییر کند و بشود یک منیفلدی که به عنوان یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همان نیست، ولی به عنوان منیفلد توپولوژیک همان است. بعضی وقت ها هم نمی شود این کار را پیوسته انجام داد. مجبوریم جامپ کنیم و بپریم. مثلاً روی کره چهار بعدی

بود که ۸۲ تا ساختار دیفرانسیلی داشتیم که تشکیل گروه می‌دادند؟ این‌جا که نمی‌شود حرکت کرد بینشان و این یک مفهومی از حرکت کردن از یک چیزی به چیزهایی نزدیک آن می‌شود هندسه. و یک جوری این همان مفهوم فضای مدولی است، دیفرمیشن و این نگاه به هندسه. توی گراف‌ها گفتم مثلاً شما یک خانواده از گراف‌ها را در نظر بگیرید، با یک تغییر کوچک موضعی توی گراف، شاید بتوانیم آن گراف را ببریم به یک خانواده گراف نزدیکش، شبیهش، و آن زیر هم یک راسی بگذارید و به راس آن یکی وصل کنید. این هم می‌شود دیفرمیشن گسسته توی مثلاً گراف‌ها، و توی جبر شما یک آبجکت‌هایی دارید که کوشنت می‌گیرید مثلاً از $\mathbb{Z}$ یک عالمه کوشنت می‌گیرید، می‌شود $\mathbb{Z}/p$ ها. می‌توانید بگویید این $\mathbb{Z}/p$ ها که دارم، یک خانواده پیوسته‌ای هستند که همه شان در آن $\mathbb{Z}$ خلاصه می‌شوند و آن $\mathbb{Z}$ یک جوری یونیورسال آبجکت هست برای همین $\mathbb{Z}/p$ ها، یا اگر دوست دارید، برای همین $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ها. این ایده یونیورسال آبجکت توی جبر را خیلی گروتندیک بسطش داده، که چه مجموعه‌هایی از آبجکت‌ها، یونیورسال آبجکت دارند؟ که criteria گروتندیک سخت است ولی شلسینگر criteria لوکال Artinian ring ها را ساده کرده به نام شلسینگر criteria . criteria پریده‌ام هم هست که شبیه شلسینگر هست، ولی برای $\mathbb{Z}$ مدول‌ها کار می‌کند. لازم نیست لوکال آبجکت باشند. مثلاً روی $\mathbb{Z}_p$ باشند یا روی $\mathbb{Q}_p$ باشند، و دیفرمیشان کنید. راجع به دیفرمیشن صحبت کردم، دیفرمیشن در هندسه را مطرح کردم و گفتم که وقتی دیفرمیشن داریم، معمولاً یک فضای مدولی هم داریم و یا یک فضای مدولی موضعی از این دیفرمیشن‌ها داریم و یک فضایی که این دیفرمیشن‌ها را پارامتریزه می‌کند و بعد یک اعتراضی من کردم به ترکیبیات که یک جور دیفرمیشن هندسی پیشنهاد کردم که وجود نداشت، مثلاً برای گراف‌ها، یا برای آبجکت‌های ترکیبیاتی که به یک معنی به هم نزدیک هستند چطور با یک روش گسسته و ساده باید به هم تبدیل بشوند. مثلاً دو تا کلمه را با یک حذف، یا یک حرفی را اضافه کردن در یک جای خاصی، یا جابجا کردن دو حرف همسایه می‌شود به هم تبدیل کرد و از این جور چیزها. ولی یک مفهوم دیفرمیشن دیگر هست که به شمارش برمی‌گردد که من آن را جدا توضیح می‌دهم. آن مفهوم جبریش است که می‌گوید چرا ترکیبیات دان‌ها یونیورسال آبجکت ندارند؟ یعنی چه مثلاً اگر داشته باشند؟ مثلاً دایره‌هایی که گروه‌های $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هستند. یک دایره است و یک گراف n تایی هست، این‌ها همه کوشنت‌های یک یونیورسال آبجکت هستند که $\mathbb{Z}$ باشد. چنین پدیده‌ای در ترکیبیات وجود ندارد که اصلاً به این چیزها فکر کنند. این‌ها را من دوباره راجع به آن‌ها صحبت خواهم کرد. ولی فعلاً که راجع به دیفرمیشن صحبت‌م هست را همین‌جا توقف می‌کنم، و منتظر بازخورد، که ببینم شما از این ایده دیفرمیشن در ترکیبیات اگر رضایت دارید، من باید $3+3$ تا مثال این‌طوری بزنم. یکی را زدم، که اگر رضایت دارید بروم سر بعدی. اگر هم نه که به من بفرمایید که چه چیز را بیشتر توضیح بدهم.

امیرحسین اکبرطباطبایی: توضیحات تکمیلی در باب دگرذیسی- درباره‌ی دگرذیسی هم می‌خواهم حرف بزنم اما قبلش بگویم که شما فرمت من را عوض کردید، که البته هیچ کار بدی هم نکردید، کار خوبی کردید. من پرسیدم که شمارش را اول برای من بگویید که چیست و بعد دیگر موارد را، ولی خوب به نظر شما این توضیح دگرذیسی را ارجح می‌دانید. پس این سوال من درباره‌ی شمارش و تعمیق شدن مفهوم شمارش را نگه دارید تا یک کمی درباره‌ی دیفرمیشن حرف بزنیم و بعد برویم سراغ بعدی. عرضم به حضورتان که این را می‌گویم برای مخاطبی که ما را می‌شنود یا قرار است بعداً بخواند. این توضیحی که شما می‌دهید فوق العاده است، خیلی عالی و خیلی تمیز است. اعتراضتان به ترکیبیات را می‌گویید و باز مثال می‌زنید و اتفاقاً رحم هم نمی‌کنید که همین‌جوری ما خودمان برویم بفهمیم، و برایمان مثال جبری هم می‌زنید که یک کمی ناروشن

است. اما من هنوز حسم این است که این را یک کسی که ریاضی بلد است اما نه خیلی اگر بشنود چه می‌شود؟ احتمالا مثال‌های شما مناسب کسی است که خوب یک چیزهای بیسیکی را می‌داند و خیلی هم لذت می‌برد. من می‌خواهم این گپ را پر کنم و فضولی کنم در کار شما و یک کوچک توضیح بدهم برای کسی که برای اولین بار است که دیفورمیشن می‌شنود که این مفاهیم یعنی چه. من تصورم این است که شما اگر همین‌جوری یک لیسانس ریاضی گرفته باشید، بعید است که مثلاً دیفورمیشن و فضای مدولی و این‌ها به‌گوشتان خورده باشد و احتمالا اگر هم خورده است این مفاهیم باید خیلی ترسناک باشند که وای این‌ها چقدر چیزهای سختی است. بنابراین من توضیحاتی در این موارد خواهم داد و شما هم به عقل ناقص من، یک چیزهای خوبی اضافه می‌کنید در ادامه. پس اجازه دهید من هم یک پنی کوچکی را که دارم این‌جا خرج کنم.

این‌طور که شما توضیح می‌دهید، از دیفورمیشن یک معنی وسیعی‌ای در نظر دارید که خیلی هم خوب است و کار من را آسان می‌کند. بیاید تصور کنیم که یکی از من پرسد که این‌هایی که دکتر رستگار گفت خیلی هم خوب اما دیفورمیشن اصلاً یعنی چه؟ من این‌طور می‌گفتم که رهیافتی در ریاضیات موجود است، مستقل از این که موضوع بحث هندسی باشد یا نباشد، و آن این که ما یک موجود ریاضی را تغییر می‌دهیم و از روی تغییرش است که شروع می‌کنیم به فهمیدنش. بعد شما می‌پرسید که این تغییر چطور باید باشد و خوب این دیگر انواع و اقسام و تنوعی دارد. مثلاً خیلی اوقات ما به تغییرات بی‌نهایت کوچک علاقه داریم که این را رویش تاکید نمی‌کنید. دلیل این علاقه این است که این تغییرات به یک معنی ساده‌اند. در واقع بی‌نهایت کوچک، با این که روشن هم نیست که یعنی چه، می‌شود گفت که مقداری خیلی کوچک است که به توان دو صفر می‌شود و بنابراین تغییر به اندازه‌ی اپسیلون مجبور می‌شود که خطی باشد و این خطی بودن یعنی ساده بودن. و من سر در می‌آورم از این تغییر خطی، و این کمک می‌کند که من بفهمم که مثلاً این شی را یک ذره جابه‌جا کنم چه اتفاقی برایش می‌افتد و در اسکیل بزرگتر هم آرام آرام این کمکم بکند که بفهمم در واقع چه اتفاقی می‌افتد. اما توجه کنید که تغییرات بینهایت کوچک فقط یک نوع از تغییر است. در حالت کلی من یک ساختار به شما می‌دهم. این شی می‌تواند یک شی هندسی باشد یا نمی‌دانم یک جبر باشد، یک گروه باشد، یک حلقه باشد، یک ساختار ترکیبیاتی باشد، گراف باشد یا هر چیزی. نکته این است که این شی در خانواده‌ی زندگی می‌کند و شی در این خانواده است که تغییر می‌کند و این تغییر هم باید برحسب یک پارامتری باشد. این پارامتر، می‌تواند یک عدد حقیقی باشد، یک ساختاری باشد مثلاً گاهی این پارامتر یک حلقه است. مثلاً شی شما می‌تواند یک سری خم باشد که با پارامتر t پارامتری شده است یا مثلاً صفرهای یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح در حلقه‌های مختلف باشد که با حلقه‌ی پس‌زمینه پارامتری شده است. بعد برحسب این پارامتر این شی تغییر می‌کند. حالا فضای مدولی مساله فضای همه‌ی این اشیاست یعنی نقاط فضای مدولی متناظر است با این اشیا. بنابراین فضای جدید یک جور فضای حالت است. همه‌ی امکانات آن‌جا هست و به‌طور خاص شی مورد نظر من هم آن‌جا قرار دارد. بعد اشیا یعنی نقاط آن فضا به هم تبدیل می‌شوند. آن تبدیل شدن، آن هندسه‌ای که آن داخل هست، آن توپولوژی و چسبی که آن داخل هست، آن تغییر که آن داخل هست در فضای مدولی، قرار است که تغییرهای این اشیا من را معنی کند، و بعد من می‌فهمم که چه اتفاقی دارد بین این‌ها می‌افتد و از طریق این تغییرات شی مورد نظرم را می‌شناسم. این معنای تغییر روشن است مفهومی وقتی که ما هندسی فکر می‌کنیم، خیلی از لحاظ شهودی روشن است دیگر که خم داریم، و نمی‌دانم شی هندسی داریم، و حالا یکی هم ممکن است مجردتر باشد، یک ساختمان مثلاً، یک ساختار منیفلد دیفرانسیل‌پذیر که شما هم مثال می‌زنید. آن یک کم سخت‌تر می‌شود فهمش به لحاظ شهودی، ولی به هر حال این‌طوری می‌شود فهمید که همیشه یک موجوداتی هستند به هر

حال، که برحسب یک پارامتری تغییر می کنند. بعد شما از شی صلب هم حرف می زنید. شی صلب جانوریست که دیفورم نمی شود، یعنی یک مقدار اندکی، کوچولو که می خواهید تغییرش بدهید این تغییر نمی کند. خیلی سفت می ایستد همان جایی که هست. مثلاً در هندسه ی دیفرانسیل یک مثال فوق العاده داریم که وقتی که شما روی فلان منیفلد مثلاً هفت تا ساختمان مختلف دیفرانسیل دارید خوب حالا چه تغییری را می خواهید بدهید بین این ساختارها؟ این ها می پرند روی هم دیگر و تغییر نرمی به آن معنا موجود نیست این جا. حالا یکی ممکن است از شما بپرسد که بیرون از هندسه چه اتفاقی می افتد. مثلاً گروه را چه طوری می خواهید حرکت بدهید. من یک کم تخفیف می دهم و به جای گروه جبرها را در نظر می گیرم. شما ممکن است برای اولین بار که شنیده باشید دیفورمیشن چیست خوشتان بیاید بگویید چقدر قشنگ گفت و دستش درد نکند. خوب حالا جبر را شما دیفورم کنید اصلاً بینم چطور می خواهید جبر را دیفورم کنید. برای این کار فرض کنید آن ساختمان جمعی جبر را من ثابت نگه داشته ام و می خواهم ضرب جبر را عوض کنم، منتها نرم عوض کنم، به این معنی که من آن یک ضرب را که شما به من دادید می خواهم به یک خانواده گسترش بدهم. آن خانواده دارد تغییر می کند، به خاطر این من توانایی این را پیدا می کنم که جبرم را تکان بدهم، و وقتی جبرم را یک ذره تکان بدهم شروع می کنم به فهمیدن این که این جبرم چطور رفتار می کند. حالا من باید یاد بگیرم یک جبری را که به من داده اید به یک خانواده گسترش بدهم و این تمرینی است که باید مخاطب ما بنشیند و به آن اندکی فکر کند، واقعاً مفرح است. فرض کنید a و b دو عضو در جبر ماست و ما می خواهیم ضرب جدیدی برایشان تعریف کنیم که همان ضرب قدیمش باشد به اضافه ی یک مقداری بینهایت کوچک. مثلاً این مقدار مضربی بی نهایت کوچک از مقداری است مثلاً $f(a,b)$ که بر حسب a و b متغیر است. این شکل جنرال خطی تغییر دادن یک ضرب است دیگر. خوب بعد این ضرب که نباید هر ضربی باشد، باید مثلاً شرکت پذیر باشد. حالا اگر شرکت پذیری ضرب جدید را بنویسم، این تبدیل می شود به شرکت پذیری ضرب قدیمی به اضافه ی یک رابطه که روی تابع f باید باشد. این خوشمزه است که یکی بنشیند بنویسد. حالا باید گفت که از بین این ضرب ها چه زمانی دو ضرب را یکی می گیرم. جواب این است که وقتی که یک تبدیلی باشد، مثلاً یک بایجکشن جبری، که یکی را به آن یکی تبدیل کند. بعد می شود این ضرب ها را نسبت به این همسانی در نظر گرفت. حالا کاری ندارم و یک ارتباطاتی به کوهمولوژی و این ها دارد این بحث که ممکن است مخاطب متخصص تر شنیده باشد. به هر حال این جور می شود این ضرب را تکان داد. حالا اگر من یک جبر به شما بدهم این که این جبر صلب باشد یعنی این ضرب جدید را که بنویسم با آن تابع f و این ها هیچ اتفاقی نمی افتد. همین طوری می افتد روی خودش، نمی توانم تکانش بدهم خیلی اوقات. اما اگر صلب نباشد، شروع می کند به تکان خوردن. شبیه آن چیزهایی که شما دوست دارید و مثال می زنید، که مثلاً دیویژن رینگ را داریم و این ها، شروع می کنند آرام تکان خوردن. وقتی یک چیزی آرام تکان می خورد یک حسی به ما می دهد همان طوری که شما گفتید، که درست است این ها جبر هستند، ولی هندسه ای هم این جا در کار است. پس هر جایی که یک چیزی آرام تکان می خورد، بوی هندسه می آید. این ها را من سعی کردم که به زبان ساده تری توضیح بدهم. مقدمات کلماتی که به کار می برید این طرف و آن طرف را دارم سعی می کنم که باز کنم. بعد یک چیزی را جواب می دهید که سوال خوبی است. می گوید که خیلی خوب، من حالا یک شی گسسته دارم، همین الان این همه منبر رفتید که تغییر مهم است، حالا اگر مثلاً هفت تا امکان داشتید و این ها شما چه کار می خواهید بکنید با شی گسسته؟ گسسته چطور تغییر می کند و این ها؟ و آنی که نگفتید این است که یک وقت هایی هست که اشیا دیفورم می شوند با یک مقادیری که پارامتر عددی نیست و جواب همین جاست. مثلاً روی یک ساختاری تکان می خورند، مثل همین فایبریشنی که مثال می زنید. و آن مواقع می شود خیلی حرف ها زد. مثلاً یک نمونه اش این است که یک مجموعه یا

گروه، مثلاً گاهی روی یک ساختاری تغییر می‌کند، لزوماً آن ساختار حتماً یک پارامتر مثلاً حقیقی یا جبری نیست. این دست ما را باز می‌کند که ما مفهوم تغییر را گسترش بدهیم، مفهوم دیفورم را گسترش بدهیم، حالا دیفورم کم و زیاد باید روشن بشود. یعنی چه یک کم؟ مطلبی است این. خیلی اوقات ما کارهایی که می‌خواهیم بکنیم، یک ذره یک ذره می‌کنیم، کوچولو کوچولو می‌کنیم، این همان دیفورمیشن کوچولوست. خوب این در ترکیبیات کجاست؟ این چیزها را مطالعه نمی‌کنند و باید بکنند. یعنی از نان شب واجب‌تر است این‌ها. مثلاً من یک ساختمان ترکیبیاتی به شما می‌دهم. یک استرینگ اصلاً. مثالان خیلی خوب است. یک استرینگ در نظر بگیرید و من اضافه می‌کنم که این استرینگ خیلی بلند است مثلاً ۵۰۰ حرف در آن هست از a و b. دو تا از این استرینگ‌ها را در نظر بگیرید. من یکی را دیفورم شده‌ی دیگری می‌گویم وقتی که کوچک تغییر کند، یعنی کوچک بودن این‌جا، مثلاً می‌گیرم دو حرف در آن تغییر کند یا یک حرف تغییر کند. همان یک حرفش عوض می‌شود خوب، بعد با این یک حرف یک حرف عوض کردن من به هر چیزی می‌توانم برسم و این‌ها. خوب همه‌ی این استرینگ‌هایی که با تغییراتی که به دست می‌آید، این‌جا می‌شود همه‌ی استرینگ‌ها. یک فضای مدولی دارم و دیفورمیشن کوچک هم داریم. آیا ترکیبیات‌دان مطالعه می‌کند همچنین چیزی را؟ آیا این فضای استرینگ‌ها را با این دیفورمیشن کوچکش به عنوان یک خانواده مطالعه می‌کند؟ تجربه‌ی کج و معوج و بی‌مزه‌ی من در ترکیبیات می‌گوید که می‌کنند، ولی به هیچ دردی نمی‌خورد. آن کاری که باید بکنند را نمی‌کنند. برمی‌گردیم به آن‌هایی که آن‌جا گفتید. من فقط شرح و تفصیل دادم مثال‌هایتان را و کلمه‌های کلیدی‌ای را که بارها قرار است در ادامه استفاده کنید، در شکل جنرال، بدون جزئیات فنی، یعنی به عنوان یک امر شهودی توضیح دادم. مثل فضای مدولی و دیفورمیشن. من تصورم این است که مردم که یک جبری پاس کرده‌اند و می‌شود انتظار داشت گروه بدانند، حلقه بدانند، مدول بدانند، حالا دیگر یک کم منیفلد و این‌ها شنیده باشند، نمیدانم از این چیزها، ولی شاید دیفورمیشن نشنیده باشند و امیدوارم این چیزی به مخاطب یاد بدهد که اصلاً شما خودت اگر دانشجویی از فردا یاد بگیری به اشیا به عنوان عضوی از یک خانواده نگاه کنی. فکر کنی که چه طور می‌شود این شی را دیفورم کرد در این خانواده. این فضولی را بکنی وقتی به جاهای مختلف می‌روی. و یا اصلاً حتی بروی مثلاً سرچ کنی در مورد دیفورمیشن تئوری. در مورد جبر اگر کارت جبر است دیفورمیشن در جبر را یاد بگیری و از این دست کارها. من یک مطلب دیگر را هم اضافه کنم و آن هم درباره‌ی فایبریشن. یک جایی هم قبلاً گفته بودم که فایبریشن مهم است. من این فایبریشن را هم بنشانم در همین بحث دیفورمیشن. شما هم همین‌جوری می‌گویید. فرض کنید که ما دو تا فضا داریم. فضا به معنای وسیع کلمه. دو تا موجود داریم، دو تا هرچی. که یکی این پایین است، یکی آن بالاست و یک نگاشت از بالایی به پایینی موجود است. پایینی را فرض کنید که یک سری نقطه دارد و بین نقاط هم مسیرهایی است که به هم وصل می‌کند این‌ها را و بر اساس همین مسیرهاست که این پایین یک معنایی از تغییر وجود دارد. مثلاً فضای پایینی می‌تواند اعداد حقیقی باشد یا مسیرهای پیوسته که نقاط را به هم وصل می‌کنند. آیا این شی پایینی می‌تواند گسسته باشد؟ بله. کافی است یک سری رأس داشته باشیم با یک سری خط جهت‌دار که رئوس را به هم وصل می‌کنند. یعنی آن شی آن زیر یک گراف جهت‌دار باشد. یا مثلاً آن شی پایینی می‌تواند یک کتگوری باشد. بستگی دارد دیگر. بعد نقش شی بالایی چیست؟ گفتیم که یک نگاشت داریم از بالایی به پایینی. بنابراین بالای هر نقطه‌ای از این پایینی یک فایبر هست که در واقع تصویر وارون نگاشت مربوطه است. بنابراین وقتی نقاط این پایین تغییر می‌کنند فایبر بالای آن هم تغییر می‌کند. حالا ما می‌خواهیم این تغییر فایبر نرم هم باشد. این یعنی چه؟ بسته به کانتکست‌های مختلف این نرم بودن معانی مختلفی می‌دهد. در توبولوژی می‌توان توابع پیوسته از فضای بالایی به پایینی را در نظر گرفت یا یک فضای پوششی یا یک همسان‌ریختی موضعی را. در کتگوری تئوری

هم از فایبریشن می‌توانیم حرف بزنیم که ایده‌اش این است که تغییر فایبر بر حسب نقاط پایینی باید فانکتوریال باشد و بسیار مثال دیگر. حالا این چه مربوط است به دیفورمیشن؟ روشن است دیگر. ربطش این است که این هم یک روش فرمال کردن تغییر است. در واقع دو جور نگرش به تغییر وجود دارد که به هم مربوطند. یعنی یک جور می‌شود هر دیفورمیشنی را به عنوان یک فایبریشن دید و برعکس. این طور که، اگر من شی متغیری بر حسب یک پارامتری دارم، حالا عدد است، نمی‌دانم همین گراف است، هرچه که هست، می‌توانم آن را به منزله‌ی یک فایبریشن ببینم. چطور؟ راهش این است که من همه‌ی ساختارها را برای همه‌ی پارامترها کنار هم جمع کنم و که بشود شی بالایی و شی پایینی باشد دنیای پارامترها و نگاشت هم هر نقطه‌ی بالایی را بیاورد رو پارامتری که رویش واقع شده. انگار که همه‌ی تغییر را به شکل استاتیک ببینم. مثلاً به یک تابع روی اعداد حقیقی نگاه کنید. شما می‌توانید به این تابع دو جور نگاه کنید. یکی به عنوان عددی حقیقی که دارد بر حسب یک عدد حقیقی دیگری که پارامتر مربوطه باشد تغییر می‌کند. یک جور دیگر هم می‌توانید نگاه کنید. به عنوان یک سری نقطه در صفحه که نمودار تابع است. دارد می‌گوید بالای هر نقطه‌ی $\mathbb{R}$ فلان نقطه نشسته است. این نمودار می‌شود فایبریشن متناظر تابع. اساساً این دو تا رهیافت با هم معادل هستند. به جای این که بگویید دیفورمیشن کجاست، می‌گویید فایبریشن کجاست؟ این هم کلمه‌ی فایبریشن، که اگر بعداً استفاده کردیم، مخاطب یک ایده‌ای داشته باشد که یعنی چه. حالا شما می‌توانید پرسید که چرا در ترکیبیات فایبریشن نداریم؟ چرا مثلاً یک گراف بالای گراف دیگر به عنوان فایبرش بررسی نمی‌شود؟ حالا بعدتر درباره‌ی مورف‌ها و چیزهای دیگر می‌خواهید حرف بزنید. که ربط وثیقی هم دارد به این حرف‌ها، مخصوصاً در مورد یونیورسال آبجکت‌ها هم می‌خواهید حتماً حرف بزنید. که چه بهتر، ولی قبل از آن قول دادید که درباره‌ی شمارش حرف بزنید، که خیلی حرف شنیدنی‌ای باید باشد، و من مخاطب فرضی‌مان را تشویق می‌کنم، از جمله خودم را، و بشارت می‌دهم که الان یک چیز هیجان‌انگیزی خواهد شنید. معذرت خواهی هم می‌کنم که من این حرف‌هایی که شما هزار سال است بلدید را دارم برای خودتان تکرار می‌کنم. فقط برای این که اگر بعداً یک کسی خواست این‌ها را پیاده کند، این‌ها هم آن‌جا باشند، که مخاطب مربوطه وحشت نکند که این‌ها دیگر دارند خیلی چیزهای سختی می‌گویند. اصلاً کار من نیست، من می‌روم خانه!

آرش رستگار: برنامه‌ی لنگلدز به پیمانہ p- دولین و دولین-سر دوتا مقاله بودند که به مدولار فرم‌های وزن دو نمایش گالوایی نسبت دادند و این مدولار فرم‌هایی که eigenform اپراتورهای هکه بودند، تصویر فروبنیوس المنت‌های گروه گالوا، آن مقادیر ویژه را می‌داد و کاملاً با توجه به ویژگی multiplicative expansion تصویر فروبنیوس مدولار فرم را مشخص می‌کرد. از طرف دیگر تیت به خم‌های بیضوی نمایش گالوا نسبت داده بود و سر این‌ها را مطالعه کرده بود و یک پدیده عجیبی بود که برای هر p یک نمایش گالوایی داشتیم که در $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ فرود می‌آمد. همه این‌ها به یک شی خم بیضوی روی $(\mathbb{Q})$ نسبت داده می‌شدند ولی هیچ نمایش گالوایی روی $GL_2(\mathbb{Q})$ وجود نداشت که با توسیع پایه از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{Q}_p$ همه آن نمایش گالواها را بدهد. خم بیضوی را که به پیمانہ p می‌بردید، نمایش گالوا می‌رفت به پیمانہ p و مدولار فرم هم، همنهشتی بین مدولار فرم‌ها، نمایش گالوایی که به پیمانہ p یکی بودند را به دست می‌داد. این که به پیمانہ p یکی باشند، یعنی نمایش‌های روی $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ را مزدوجش کنید، در یک ضریب ضرب کنید، که برود به $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ و بعد ببریدش به پیمانہ p ، برای اعداد اول p مناسب. برای هر p یک نمایش گالوایی داریم. پس نمایش گالوا به پیمانہ p شد همان همنهشتی بین فرم‌های مدولار. بنابراین همنهشتی یک موجود

نظریه اعدادی، به این نمایش گالوا به پیمانه p ربط پیدا کرد، و سر حدس زد که، هر نمایش گالوا به پیمانه p از کل گروه گالوا روی $\mathbb{Q}_p$ را می‌شود برد به $GL_2(F_p)$ چون به پیمانه p هست، که تحویل ناپذیر باشد، و فرد باشد، فرد یعنی این که تصویر کامپلکس کانجوگیشن در گروه گالوا ۱- باشد، چنین چیزی حتماً از یک مدولار فرمی می‌آید. حتی دقیق‌تر، حدس زد که این مدولار فرم از چه وزنی و از چه سطحی هست، که به اولی می‌گویند حدس ضعیف سر و به دومی می‌گویند حدس قوی سر و مردم خیلی زود نشان دادند که اگر از یک مدولار فرمی بیاید، می‌توان با همنهشتی‌ها کاری کرد که از همان وزن و سطحی که باید هم مدولار فرم وجود داشته باشد. اصلش این بود که یک مدولار فرم وجود دارد. این حدس سر بود، ولی خب لنگندز می‌گفت هر موتیوی مدولار است. هر نمایش گالوایی که از یک موتیو بیاید، مدولار است و می‌زور و فانتن هم از روی نظریه هاج p -adic حدس‌هایی زدند که دقیقاً چه نمایش گالوایی از موتیوها می‌آید، و برنامه لنگندز هم که اصلاً راجع به نمایش‌های گالوایی بود، که می‌گفت چه نمایش‌های گالوایی از نمایش‌های اتومورفیک می‌آیند؟ که اصلاً در حالت میدان تابعی هم ثابت شد. سرگفت که بگویید نمایش گالوا به پیمانه p از چه اتومورفیک فرم‌هایی می‌آیند؟ و به زبان کلی اتومورفیک فرم‌ها ترجمه‌اش کنید. وقتی ترجمه کردید، این‌ها اگر مدولار شدند، و از یک مدولار فرمی آمدند، باید همنهشتی آن مدولار فرم‌ها را بررسی کنیم. مانند اعداد که به پیمانه p در نظر می‌گیرید، می‌شود F_p ، و می‌گویید ترکیبیات است، کلاس‌های همنهشتی فرم‌های مدولار موجوداتی متناهی هستند، ترکیبیاتی هستند. موجوداتی روی F_p هستند. بنابراین نمایش گالوا به $GL_2(F_p)$ به مدولار فرم‌های به پیمانه p ربط پیدا می‌کنند. نظریه اعداد است، ولی ترکیبیات است دیگر، نظریه اعداد متناهی. خود گروه گالوا هم بخواهید بگویید که ترکیبیات نیست، یک حدی از گروه‌های فرامتناهی است دیگر. حتی اگر بخواهید برایش معادله هم بنویسید، می‌شود نمایش گروه‌ها و نمایش گروه‌های متناهی و آنها هم مسأله ترکیبیاتی هستند. بنابراین نمی‌شود گفت که این مسأله ترکیبیاتی نیست. در آخرین مقاله‌ای که حدس سر را برای totally real field، یک عده‌ای در سال ۲۰۰۹ فرمول‌بندی کردند، بعد از این که حدس سر برای $\mathbb{Q}$ اثبات شد، این‌ها آمدند به زبان برنامه لنگندز هم ترجمه کردند. البته نه گروه ریداکتیو دل‌خواه، ولی در این جهت تلاش‌هایی شده است. این یک کار خوب بوده که من تجلیلش می‌کنم، و به نظرم می‌شود آن را در بستر ترکیبیات قرار داد. قسمتی از نظریه اعداد است، ولی به نظر من تفکر ترکیبیاتی می‌تواند نقشی داشته باشد.

آرش رستگار: تریس لاپلا سین روی گراف- درخت‌هایی که متریک دارند و رویشان تریس لاپلا سین را مطالعه می‌کنند، و اصلاً آن نظریه گراف که آنالیز تویش دارد به طور کلی. مثلاً مثل رامنوجان گراف که L -تابع وابسته به آن گراف‌ها از فرضیه ریمان پیروی می‌کند، و مثلاً فیلیپس و سرنگ یک خانواده نامتناهی از رامنوجان گراف‌ها مثال زدند، این به نظرم نظریه، گراف تئوری محترمی است. چرا که مثلاً درخت‌ها می‌توانند مدل خوبی از یک فضای هذلولوی باشند. هذلولوی به معنای گروموف. مطالعه فضاهای هذلولوی یک چنین مدلی می‌شود برایش داد، چون این‌ها شبیه فضای هذلولوی هستند. یا مثلاً گراف شما متناهی است که L -تابع‌شان خواص خوبی را دارد، پوشش جهانی که در نظر بگیریم، یک درخت می‌شود که L -تابعش خصوصیات خوبی دارد که شما دوست دارید، مثل فرضیه ریمان و ... دارد. به سیستم‌های دینامیکی مربوط می‌شود. مثلاً این که تابع زتا که هندسی تعریف می‌شود مشابه تابع‌های زتای نظریه اعداد است، برایش خیلی چیزها ثابت می‌کنند، با تابع زتای گراف‌ها برایش ثابت می‌کنند. و از ایرانی‌ها دکتر شهریار

مختاری شرقی را می‌شناسم که با هایمن بس کار کرد، ولی خب ریاضیات را رها کرد. از ایرانی‌های داخل ایران کسی که خیلی جدی آنالیز روی گراف انجام بدهد، یعنی بفهمد چه سوالاتی مهم هستند، و چرا مهم هستند، و به سوال‌های مهم فکر کنند، به نظرم کسانی هستند که آنالیز روی گراف انجام می‌دهند، ولی کارهایشان را نگاه نکرده‌ام ببینم که چقدر پختگی فلسفی دارد، ولی خب عموماً توی ایران آدم‌ها به قسمت‌های مختلف ریاضیات سرک نمی‌کشند که آن‌طوری این پختگی را به دست بیاورند. اصولاً کارشان این نیست. و یا به کاربرد اقبال دارند که پس دغدغه‌های محض ندارند.

آرش رستگار: مورفیسم بین اشیای ترکیبیاتی- مثلاً شما یک طرح بلوکی را در نظر بگیرید. مثلاً در آن عدد باشد. مثلاً یک سودوکو. حالا شما به جای یک تا ۹ یک سری طرح بلوکی دیگر بگذارید که این طرح بلوکی‌هایی که جای یک تا ۹ می‌گذارید، هر کدام اعداد متفاوتی باشند و با هم اشتراک نداشته باشند، یا نمادهای متفاوتی باشند. باز هم می‌شود یک طرح بلوکی. این یک چیزی شبیه جمع مستقیم است مثلاً، و مفهوم مورفیسم و کوشنت تویش دارد. حالا شما همچنین چیزی را از این بلاک دیزاین‌هایی که، مثلاً به جای اعداد یک تا ۹ سودوکو بذارید. سودوکوی اولیه را از ۱۰ تا ۱۸ بگذارید و دومی را از ۱۹ تا ۲۷ بگذارید و الی آخر. بعد آن وقت یک سودوکوی جدید می‌دهد که ۸۱ در ۸۱ است. یک دانه از این مربع‌های ۱۰ تا ۱۸ را عوض کنید و یک چیز دیگر بگذارید. یک سودوکوی دیگر ۱۰ تا ۱۸ بگذارید. باز هم می‌شود یک سودوکوی بزرگ ولی مورفیسم این‌ها، کوشنت‌اش معلوم نیست که چه می‌شود. آها، این در واقع مورفیسم نیست، یک اپراد است که n تا سودوکو می‌گیرد و در جایشان می‌گذارد، ولی این در تصویر آن اپراد قرار نمی‌گیرد. اگر یک دانه از سودوکوها را مثلاً ۱۰ تا ۱۸ را با دست عوض کنیم. بنابراین می‌بینیم مفهوم مورفیسم بالاخره تعریف می‌شود و این یک ذره هم بیش‌تر از آن است. شما می‌توانید آن سودوکوهای ۱۰ تا ۱۸ را، ۱۹ تا ۲۷ و این‌ها را یک سودوکوی خاص بگذارید طوری که آن وقت کوشنت بشود تعریف کرد، دایرک سام و این‌ها بشود تعریف کرد. وقتی مورفیسم داشته باشیم حد داریم، پروآبجکت داریم. شما می‌توانید ببینید اصلاً چه خصوصیتی به آن پروآبجکت می‌توانند هل داده بشوند؟ چه خصوصیتی نسبت به مورفیسم خوش رفتارند و غیره.

آرش رستگار: درباره‌ی شمارش- عرض شود که مفهوم شمارش به مفهوم اندازه‌گیری تبدیل شد. بعداً اعداد گویا هم در اندازه‌گیری مهم شدند و در فیزیک می‌گویند ما، اعداد گویا اگر به درد ما می‌خورند، حاصل اندازه‌گیری اعداد گویاست. پس به $\mathbb{R}$ چکار دارید؟ اگر $\mathbb{R}$ داریم، پس $\mathbb{Q}_p$ ‌ها هم باید باشند. پس هر کار با $\mathbb{R}$ می‌کنید باید با $\mathbb{Q}_p$ هم بتوانیم بکنیم. برای همین میان توابعی روی فضاها p -نقش در نظر می‌گیرند و شخصی هست به اسم دولگاچف مثلاً می‌آید و فیزیک می‌سازد این‌جا و اندازه p -نقش می‌گیرد. ولی این‌ها فضاها توابعی با مقادیر در $\mathbb{C}$ را در نظر می‌گیرند، و زمان را هم نمی‌توانند p -نقش کنند. کسی نتوانسته زمان را p -نقش کند. من یک شاگرد قدیمی دارم که الان استادم شده و داریم راجع به این با هم کار می‌کنیم. شما اگر به زمان و فلسفه زمان علاقه‌مندید من یک کتاب و تعدادی مقاله در این باره دارم، ولی انتظار زیادی را نباید از مقالات من داشته باشید. در استانداردهای شما مقالات من یک چیزی در حد همان وبلاگ‌نویسی است. عرض شود، بعداً شمارش تبدیل شد به این که به ساختارهای ریاضی ناوردای عددی نسبت بدهند و با این کار یک هایلرکی درست می‌کردند، و بعد گفتند اصلاً خودمان هایلرکی درست می‌کنیم. از یک منیفلد یک نگاشتی تعریف کنیم به $\mathbb{R}$ که باید چیزهایی که کوچک‌تر مساوی با یک عدد هستند، فشرده باشد. بعد

کم کم شمارش تبدیل به معنای احصاء شد. یعنی این که شما کاملاً بگویید، آن شیء را توصیف کنید و بسازید آن را. احصاء، حالا با متناهی عدد بسازید آن را، آن یک چیز است، با متناهی داده بسازیدش، آن یک چیز است، که بعدش مفهوم جبری بودن دوروف پدیدار شد، و جبرهای متناهی تولید شده و متناهی نمایش داده شده. این ها همه از مفهوم شمارش می آیند. عرض شود که، بعد گفتند یک ناوردایی را نسبت بدهیم که احصاء کند و کاملاً آن شیء را مشخص کند. با عدد که نمی شود این کار را کرد، و گروتندیک گفت ما در حالت های رویه های هذلولوی می توانیم با فاندامنتال گروپ ساختار حسابی و هندسی را احصاء کنیم. کسی نمی داند تعمیم هذلولوی به ابعاد بالاتر چه می شود. ولی من فکر می کنم بدانم. راجع به متمم خم های جبری از درجه بزرگتر مساوی سه که در فضای افکنشی دو بعدی می نشینند و این که گروه بنیادی حسابی، وقتی چنین چیزی در میدان متناهی تولید شده در نظر بگیریم، این متمم را به طور یگانه تعیین می کند، من حدس هایی دارم. راجع به این که هذلولوی های بُعد های بالاتر چه باید باشند، با توجه به گروه هذلولوی در تئوری گروموف و تعمیمش به گروه های فرامتناهی من حدس هایی دارم. و این که ایده هذلولوی و پوشش جهانی و فضای پوششی جهانی کار نمی کنند را من مشککش را حل کردم. که مثلاً برای فضای مدولی زیگل کار نمی کند، و خارج قسمت هایش با گروه بنیادی هایش مشخص نمی شود. عرض شود که، حالا حرف من این بود راجع به وایلز، که گروتندیک می آید یک خانواده ای از اشیاء را در یک شیء جهانی، یونیورسال آبجکت خلاصه می کند، و این هم یک جور احصاء کردن است. ایده میزور این بود که دوتا چیزی که می خواهیم متناظر کنیم، دو طرف شیء جهانی، یونیورسال آبجکت به وجود بیاوریم و ببینیم که اشیاء یکرخت هستند، آبجکت ها ایزومورف هستند. و این طور بین آن ها تناظر یک به یک برقرار کنیم. سهم وایلز این بود که چون $R=T$ که R دگرذیسی جهانی، یک نوع جبر جهانی هست، که در آن $R=T$ وایلز این کار را انجام داد. یعنی پیشنهاد میزور را انجام داد. و دیگر این که اسم آن را گذاشت: شمردن.

امیرحسین اکبرطباطبایی: درباره ی این مجموعه- به به چقدر متن دست پری است. عرضم به حضورتان که من این فرمان را از این به بعد اجرا می کنم، اگر یادم بماند و عقلم کار کند البته. ظاهراً ما کاری که داریم می کنیم این است که سرک می کشیم به هر گوشه ی ریاضیات. فعلاً راس هایش و بعد یال هایش. حوالی آن ها حرف می زنیم در آن موارد. و یک چیزهایی را باز می کنیم که این به عنوان یک پکیج کلی که یک ساختمانی هم بعداً باید به آن داده بشود که این جا و آن جا خواندنش برای کسی که یک لیسانس ریاضی یا گاهی فوق لیسانس ریاضی دارد خیلی مفید خواهد بود. من کاری که سعی دارم بکنم در این مصاحبه با شما این است که این چیزهایی که می گوئید را باز بکنم. این ها بعضی وقت ها زیادی تخصصی است و خیلی براد ویو است و خیلی پیش نیاز و این ها می خواهد و بعد detailed و این ها هم نیست به اندازه ی کافی. من می توانم خودم را بگذارم جای دانشجوی مربوطه که این بی نوا این وسط گیج می شود. آن طور که باید استفاده نمی کند. و فکر می کنم من همین طوری نقش شارح را باید حفظ کنم. می خواهم بیایم در مورد این نکات جدیدتان هم حرف بزنم. در نقش شارح من به این حرف هایی که شما می زنید کانتکست اضافه می کنم. آن قدر که عقل خودم می رسد. حالا شما هر قدر که به نظرتان کم گفتم و اشتباه گفتم حتماً اصلاح می کنید. ولی فکر می کنم باید به این ها کانتکست اضافه کنیم. گاهی تعریف اضافه کنیم. حرف ریاضی بزنیم مثلاً. بگوییم تعریف این را در نظر بگیرید یا تعریفی را بگوییم داریم غلط می گوئیم اصلاً به خاطر این که سخت است. ولی این نسخه ی جیبی این است که شما در نظر می توانید بگیرید. هدف این کارهایی که دارم می کنم این جا این است.

یک هوا ریاضی روی زمین تر. می‌خواهم حال اکسپوزیتوری آن حفظ بشود که وقتی که این را می‌خوانید یک ایده‌هایی داشته باشید که کجا باید دنبال چه چیزی بگردید. در واقع داریم یک اطلس درست می‌کنیم که خلاصه هم باشد. یعنی حالا یواشکی فرض می‌کنیم که گروه بلدید، رینگ بلدید، فیلد بلدید، بگم گالوا خوف نمی‌کنید، فضای توپولوژیک بلدید. این چیزها را بلدید. یک چیزهایی هم فرض می‌کنم که بلد نیستید. مثلاً تصور می‌کنم که حالا دیفورمیشن آن‌چنان هم دانسته نیست ایده‌اش. یا تصور می‌کنم مثلاً فرم مدولار آن‌چنان چیز دانسته‌ای نیست حالا. یک چیزی شنیده‌اند. یک کمی هم وحشت‌آور است این جور چیزها. تابع زتای روی گراف‌ها مثلاً. این‌ها خیلی چیزهای خوبی است، خیلی بین رشته‌ای است و گوشت خیلی جدی دارد. خیلی هم دور نیست که بشود آن را تبدیل کرد به زبان کسی که خیلی وارد نیست. بعضی‌هایش اما زیادی سخت است. این نسخه‌ای که این بالا پیچیدید برای لنگلندز پیمان‌ه‌ی p. این را من اصلاً نمی‌توانم و به عهده نخواهم گرفت که این را ترجمه کنم به زبانی که اندکی از آن را یک آدم عابری بفهمد در ریاضی. من فکر می‌کنم که این یک پروژه‌ی خیلی شاخصی می‌شود. من اگر دانشجو بودم و همچنین چیزی دم دست من بود، خدا را بنده نمی‌شدم. دارم فرض می‌کنم که حالا همین فرمانی را که داریم می‌رویم، با همین فرمت و جدیت و این‌ها، حفظ کنیم. در مورد یک عالم چیز حرف می‌زنیم، همه چیز را هم پوشش نمی‌دهیم. در مورد یک عالم چیز حرف می‌زنیم که خرده‌حرف‌هایی پیشرفته است. به بهانه‌ی آن‌ها یک عالم مفاهیم را هم تعریف می‌کنیم. من این وسط دارم می‌آیم وسط حرف شما، و مثلاً این‌ها را تعریف می‌کنم. می‌گویم این است و این نیست. این طور مخاطب هم این‌ها را به زبانی مقدماتی شنیده است و هم گوشت مطلب را دیده. این‌ها به شکل غیرمستقیم آدم تربیت می‌کند. همان طوری که فکر می‌کنم که شما خیلی دوست داشتید همیشه، از اولین روزی که برگشتید به تهران، که دانشجویها کاش همه این جوری بشوند. حالا این پیشنهاد من که این مجموعه را تبدیل کنید به یک کتابی پر از تعریف ریاضی، و اما همه اکسپوزیتوری. گاهی هم نه نمی‌ترسید. مثلاً یک بخش کوچکی را باز می‌کنید، که آقا من اصلاً می‌خواهم جدی ریاضی بگویم. بلدی بخوان. اگر نه نترس و برو به بخش بعدی. اشکالی ندارد. یعنی من همه‌ی زورم را دارم می‌زنم که این‌هایی که شما می‌گویید و پیشرفته است، ریاضی هم هست، دسترس‌پذیر هم باشد برای مخاطب. شما پنجاه سال است که دارید با دانشجو سر و کله می‌زنید. و بهتر از من می‌دانید که دانشجوی معمولی، می‌گوید من ضعیف هستم و این حرف‌ها را بر نمی‌دارد. این از بحث خیلی طولانی بی دلیل من.

امیرحسین اکبرطباطبایی: بازخورد به آنالیز روی گراف. خب من می‌روم سراغ این نکاتی که شما گفتید و باز کردید و درباره‌اش حرف می‌زنم. درباره‌ی برنامه‌ی لنگلندز که قبل‌تر هم گفتم که من این را به عهده نمی‌گیرم چون کار سختی است. ولی قول می‌دهم بعدتر که رسیدیم به نظریه‌ی اعداد، آن جا من بیایم ببرسم و یک بحث عریض و طولی درباره‌ی فرم مدولار و اهمیتش بکنیم حتماً. ولی فعلاً به عهده نمی‌گیرم این را. چنین کاری شدنی نیست به نظرم. ولی می‌رویم سراغ آنالیز روی گراف که بسیار انتخاب خجسته‌ای است حقیقتاً. من خیلی خوشحالم که درباره‌ی آنالیز روی گراف، شما یک توضیحاتی می‌دهید که خیلی قشنگ است و فکر می‌کنم یک عالم چیز مهم اینجا هست. متن کوچکی است این ظاهراً. مثلاً چهار دقیقه حرف زدید شما و این چهار دقیقه را مثلاً می‌شود به اندازه‌ی دو ساعت باز کرد و درباره‌اش حرف زد. حالا من یک ذره‌اش را به عهده می‌گیرم به عنوان شارح و یک کم این مفاهیم بیسیکی که اینجا استفاده می‌کنید را باز می‌کنم. فکر می‌کنم کسی که فوق لیسانس ریاضی هم گرفته باشد لزوماً این طرف بارش نخورده و چه

بد. حتی اگر ترکیبیات هم خوانده باشد ممکن است این‌ها را نشنیده باشد که بدتر. راجع به آنالیز روی گراف حرف می‌زنید. درباره‌ی گراف‌های رامنوجان حرف می‌زنید که خانواده‌اش را فلیپس و سارنک و این‌ها درست کردند. در مورد خیلی چیزها حرف می‌زنید. درباره‌ی تابع زتای ریمان حرف می‌زنید روی یک گراف. درباره‌ی لاپلاس و این‌ها حرف می‌زنید. درباره‌ی طیف گراف و اسپکتورال گراف تئوری حرف می‌زنید. درباره‌ی این که طیف گراف چرا باید به درد بخورد و چرا جالب است و این‌ها حرف می‌زنید. ولی خیلی به نظرم این غیر قابل نفوذ است برای عابر پیاده در ریاضی. بنابراین من می‌خواهم که مبسوط این‌ها را شرح و بسط بدهم. این بحث عریض و طویلی است و من هم زیاد بلد نیستم که بخوام منبر بروم. اگر شما دوست داشتید هر جایش را بیایید پر کنید. ولی آن قدری که عقل ناقص من می‌رسد یک کم شرح می‌دهم.

اول می‌خواهم درباره‌ی لاپلاس حرف بزنم. اولین بار اگر کسی بشنود لاپلاس روی گراف و این‌ها را، ممکن است پرسد چرا قیمة را می‌ریزی توی ماست. این چه ترکیب غریبیست و چه نامربوط به نظر می‌آید. بعید هم نیست این لاپلاس را اصلا یادش نباشد و این که لاپلاس اصلا چه بود و اگر هم یادش باشد چون تعریف عجیب و غریبی دارد خیلی هم معلوم نیست لاپلاس را درست فهمیده باشد راستش. بنابراین من درباره‌ی خود لاپلاسن یک کم حرف بزنم و بعد نسخه‌ی گسسته‌اش و درباره‌ی این که ربطش به گراف و این‌ها چیست. اول یادآوری کنم که لاپلاس چیست. تعریف لاپلاس را شما می‌دانید. فرض کنید که یک تابع f داریم از فضای حقیقی n متغیره مثلاً صفحه، به اعداد حقیقی که به هر نقطه مقداری عددی نسبت می‌دهد. مثلاً به هر نقطه‌ای از صفحه دمای آن نقطه را نسبت می‌دهد. بعد لاپلاس این f می‌شود مجموع همه‌ی مشتق دوم های f نسبت به x_i ها. این تعریفش است. ولی خوب آدمی‌زاد این طوری است که این چیست و چه جوری مثل آدم بفهمیم این را. شهود پشت تعریف این است که لاپلاس f که خودش یک تابع اسکالری است به یک نقطه‌ی صفحه مجموع تغییری که تابع در حوالی آن نقطه می‌کند را نسبت می‌دهد. یعنی می‌گوید که تابع f که روی یک گوی کوچک اطراف p در جهت‌های مختلف، می‌تواند تغییر کند، چه قدر تغییر می‌کند نسبت به اینی که در آن نقطه هست. عرض کنم به خدمت شما حالا اگر می‌خواهید ببینید که من دروغ نمی‌گویم و این تعریف واقعا این کاری را که می‌گویم می‌کند، یک خط یک بعدی را در نظر بگیرید. فرض کنید h خیلی کوچکی دارید و به اندازه‌ی این مقدار، مثلاً در دو جهت نقطه‌ی x جابجا شده‌اید. مجموع تغییر تابع f می‌شود $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$. حالا بسط تیلور را برای هر دو جمله‌ی اول این مجموع بنویسید. می‌بینید که جمله‌ی مربوط به مشتق اول حذف می‌شود و اولین جمله‌ی ناصفر می‌شود $2^{\frac{1}{2}} f''(x)h$. پس در حد ضریب $2^{\frac{1}{2}}h$ مشتق دوم می‌شود مقدار تغییر تابع f در حوالی نقطه‌ی x . این مشتق دوم در یک بعد همان لاپلاس است. حالا همین را برای دو بعد بنویسید و به مقدار h در چهار جهت حرکت کنید. مقدار تغییر می‌شود $f(x+h,y)+f(x-h,y)+f(x,y+h)+f(x,y-h)-4f(x)$. مجدداً بسط تیلور را برای هر چهار جمله‌ی اول بنویسید. دوباره مشتقات اول حذف می‌شوند. این بار اما مشتقات مرتبه‌ی دوم مرکب از x و y هم حذف می‌شوند چون در هر جمله تغییر در یک راستا صفر است. پس می‌ماند لاپلاسن ضرب در مقداری بر حسب $2^{\frac{1}{2}}h$. این شد توضیح لاپلاس به عنوان مجموع تغییر تابع در حوالی یک نقطه. حالا چرا لاپلاس به درد می‌خورد؟ لاپلاس به درد می‌خورد به این خاطر که خیلی وقت‌ها کمیت اسکالری داریم روی مثلاً صفحه که می‌خواهیم پایدار باشد. یعنی مجموع تغییرش صفر باشد حوالی نقاط. خوب این یعنی لاپلاس باید صفر باشد. این توابع پایدار خودش اسم دارند. به این‌ها می‌گویند توابع هارمونیک که خودشان به توابع

مشتق‌پذیر مختلط یعنی همان توابع تحلیلی ارتباط دارند. این را من می‌خواهم متصل کنم به آن چیزی که قبلاً شما گفتید، که دکتر شهشاهی به ما یاد داده که می‌شود یک لئیس را در نظر گرفت و پرسید خب تابع تحلیلی روی این لئیس چه می‌شود؟ جواب این است که می‌شود تابعی که مقدارش در یک نقطه با میانگینش در اطراف آن نقطه مساوی است. خب این همان هارمونیک بودن است. برگردیم به داستان لاپلاس. خب عجیب نیست که این لاپلاس سر و کله اش در معادلات دیفرانسیل هم پیدا بشود. شما معادله‌ی گرما یا معادله‌ی شرودینگر را در نظر بگیرید. بارها سر و کله‌ی این لاپلاس به عنوان تابع پتانسیل پیدا می‌شود و بعد خب دوست داری به یک تعادلی رسیده باشی و مثلاً لاپلاسین صفر باشد یا اگر هم در حالت تعادل نیستی می‌خواهی تغییرات شکل مشخصی داشته باشند و مثلاً مضربی از خود تابع باشند. این یک سری از معادلات دیفرانسیل به ما می‌دهد که در مطالعه‌ی پدیده‌های فیزیکی موج و ... ظاهر می‌شود و مجبور می‌شوی بنویسی و حل کنی و آن تابع را پیدا کنی. تابعی که تغییرش این‌طور است مثلاً. حالا این به ما مربوط نیست. چیزی که به ما مربوط است این است که این لاپلاس چیز خوشمزه‌ای است و به درد می‌خورد.

خب حالا نسخه‌ی گسسته‌ی این لاپلاس چه می‌شود؟ وقتی ما یک چیزهای مهمی در ریاضی داریم خب این‌ها باید مشابه گسسته هم داشته باشند. نسخه‌ی گسسته این‌ها هم خب جایش در ترکیبیات است. توجه کنید که جهت حرف زدن من از آنالیز به ترکیبیات است. یعنی من آنالیز بلدم می‌گذارم زیر بغلم می‌آیم در ترکیبیات که آقا این جا این‌ها را پیاده کن. دارم ایمپورت می‌کنم به ترکیبیات و این ایمپورت یکی از مسائل مورد علاقه‌ی شماست و این مثال هم برای همین است و من این‌طور می‌فهمم. خب حالا باید این لاپلاس را ایمپورت کنیم. اتفاقاً ایمپورتش خیلی آسان می‌شود. مثلاً شما فکر کن یک گراف داری. چرا گراف؟ خب من می‌خواهم نقاطی داشته باشم و جهتی که بتوانم روی آن حرکت کنم و مجموع این تغییرات را اندازه بگیرم. حالا این گراف می‌تواند وزن‌دار باشد که مقدار تغییر هم معلوم باشد، می‌تواند چندگانگی داشته باشد، یعنی ساده نباشد و ولی اصل حرف این است که من یک تابع دارم روی رئوس یک گراف. حالا لاپلاس این تابع می‌شود مجموع مقداری که تابع تغییر می‌کند در اطراف یک نقطه. یعنی می‌شود جمع مقدار تابع روی همه‌ی همسایه‌های آن نقطه منهای مقدار آن در همان نقطه ضرب در تعداد همسایه‌ها. مثلاً وقتی لاپلاس من صفر است، یعنی که مقدار تابع روی یک راس می‌شود میانگین مقادیرش در همسایگی‌هایش. حالا یک چیزی که دغدغه‌ی شما هم حتما هست و دست کم دغدغه‌ی من است، این است که ما مریض نیستیم که مفاهیم را ببینیم نسخه‌ی فلان شکل آن‌ها چه می‌شود برای فضولی. که خب حالا یک تئوری دیروز یاد گرفتم، امروز دبه کردم که شکل گسسته‌ی این چه می‌شود. بله! این تمرین خوبی است برای این که آدمی‌زاد یک تئوری را یاد بگیرد، که تمرین کند که فلان تئوری نسخه‌ی گسسته‌اش چیست. اگر آن زیر را عوض کنم، چه می‌شود؟ اگر پیوسته‌اش کنم چه می‌شود و غیره. ولی به عنوان یک کار پژوهشی ریاضی همیشه این کار درستی نیست و ما آزار نداریم که تئوری‌ها را جا به جا کنیم. این کارها را می‌کنیم چون هدفی را دنبال می‌کنیم. از جمله اهدافی که این‌جا داریم دو نمونه بگویم. اول این که تغییر کمیت‌ها منحصر به فیزیک نیست و علوم کامپیوتر هم مملو است از موجودات متغیر. مثلاً اطلاعات در یک شبکه چیزی است که تغییر می‌کند. خب این تغییرات طبیعتاً گسسته‌اند و عجیب نیست که نسخه‌ی گسسته‌ی آن چه در فیزیک سر و کله‌اش پیدا می‌شود را در علوم کامپیوتر هم لازم داشته باشیم. مثلاً معادله‌ی گسسته‌ی شرودینگر و گرما و ... را. پس نسخه‌ی گسسته‌ی این مفاهیم مربوط به تغییرات به ما کمک می‌کند تغییرات

گسسته را بفهمیم. و اما نمونه‌ی دوم. اینجا نگاهمان دوگان نگاه قبل است. ابزارهای پیوسته را می‌آوریم در دنیای گسسته نه چون می‌خواهیم درباره‌ی تغییرات گسسته حرف بزنیم بلکه برای این که اصلاً می‌خواهیم درباره‌ی خود گراف حرف بزنیم یعنی دغدغه‌ی ترکیبیاتی محض داریم. یکی ممکن است پرسد چرا باید این به درد بخورد اصلاً؟ جواب من این است که به درد می‌خورد چون در نسخه‌ی توپولوژیک آن هم به درد می‌خورد. اجازه دهید این مطلب را کمی باز کنم. در قسمت‌های قبل دیدیم که یک روش مطالعه‌ی یک موجود ریاضی تغییر دادن یا دیفورم کردن آن است. شی را در زادگاه طبیعیش تکان می‌دهیم و از آن تکان خوردن می‌فهمیم که این شی چگونه موجودی است. یک راه دیگر هم برای شناخت اشیا وجود دارد که دوگان روش اول است. در این روش اجازه می‌دهید کمیتی روی شی تغییر کند و بعد به واسطه‌ی این تغییر ساختار شی مشخص می‌شود. این روش اصولاً برای یک فضای هندسی کاربرد دارد. یک کمیتی را روی فضا تغییر می‌دهید و با نگاه کردن به کمیت‌ها فضا را می‌فهمید. این چیز است که ما برای فهم دنیای فیزیکی هم استفاده می‌کنیم. این که من بخواهم فیزیک عالم را بفهمم تنها راه عملی من اندازه‌گیری است. اندازه‌گیری یعنی اینکه کمیتی روی فضا دارم و از لنز تغییرات آن کمیت است که فضای آن زیر را می‌فهمم. در هندسه‌ی محض هم همین طور است. مثلاً یک منفی‌دلی من به شما می‌دهم. شما می‌آیید و توابع اسکالر روی این منیفلد را در نظر می‌گیرید و با مطالعه‌ی این توابع شروع می‌کنید به فهمیدن شکل آن منیفلد. همین کار را در نسخه‌ی گسسته‌اش هم می‌شود کرد. من به شما یک گراف می‌دهم و شما می‌خواهید راجع به شکل این گراف یک چیزهایی بفهمید. یک راهی که این گراف را بفهمم این است که کمیت‌هایی روی این گراف داشته باشم که این‌ها تغییر کنند و از تغییر این‌ها و رفتار این‌ها من آمار گرافم را در بیاورم. یک نمونه‌ی این روش می‌شود همین لاپلاس که حرفش را زدیم که اندازه می‌گیرد که چه قدر یک تابعی دارد تغییر می‌کند در اطراف هر نقطه‌ای. این جا یک عالم مطلب هست. مثلاً اگر مقدارویژه‌های این لاپلاس را به عنوان یک اپراتور بنویسیم، یک عالم ارتباط هست بین این مقادیر ویژه و ساختمان گراف. اگر غلط یادم نیاید قضیه معروف کیلی تعداد درخت‌ها روی n راس را می‌شمارد و تعمیمی هم دارد که می‌آید تعداد درخت‌هایی که می‌پوشانند یک چیزی را می‌شمارد. برای تعمیم دادن و اثبات خود قضیه‌ی کیلی می‌شود از مقادیر ویژه‌ی لاپلاسن گراف استفاده کرد. یک عالم پدیده مربوط به گراف هست، راجع به همبند بودنش و ... که ارتباط وثیقی دارد به حیطه‌های مربوط به لاپلاس اپراتور روی این گراف. این هم توضیح عریض و طویل من درباره‌ی لاپلاس و فلسفه‌ی این که چرا ما باید نظریه‌ای را منتقل کنیم مثلاً از آنالیز به ریاضیات گسسته. لاپلاسن مثال خوبی است که به ما یاد بدهد چرا ما باید تئوری‌هایمان را بیاوریم به نسخه‌ی گسسته و این چه کمکی به مطالعه‌ی موجودات گسسته می‌کند.

امیرحسین اکبرطباطبایی: درباره‌ی گراف‌های رامانوجان- من می‌خواهم اندکی هم در مورد گراف‌های رامانوجان حرف بزنم. نمی‌خواهم قصه‌ی عریض و طویلی تعریف کنم. به نظرم به عنوان یک مثال برای ما بس است. این را این جوری بخوانیم که خوب است که یک کلمه بگوییم که گراف رامانوجان چیست. در حدی که به گوش انسان بخورد. خود تعریف گراف رامانوجان بر اساس مقدار ویژه‌های ماتریس وقوع گراف است و گفتنش لطفی ندارد و شهودی به ما نمی‌دهد که چرا این‌ها گراف‌های جالبی هستند. به جای این کار من یک طور دیگر قصه را تعریف می‌کنم. اول این را بگوییم که در نظریه‌ی گراف خیلی اوقات ما به گراف‌هایی علاقه داریم که همبندی خیلی قوی‌ای دارند. حالا این یعنی چه؟ یعنی تعداد همسایه‌های هر مجموعه از

رئوس به نسبت خود مجموعه بزرگ است یا به تعبیر دیگر با اضافه کردن مرز هر مجموعه از رئوس آن مجموعه به اندازه‌ی قابل توجهی اکسپند می‌شود. برای صورت‌بندی این مفهوم یک گراف را c -اکسپندر گویند هرگاه برای هر مجموعه‌ی A از رئوس با تعداد رئوسی کمتر از نصف رئوس گراف، تعداد همسایه‌های A حداقل c برابر تعداد اعضای A باشد. حالا برای همبندی قوی‌تر بدیهی است که ما می‌خواهیم این مقدار c را ماکسیم کنیم یعنی گراف‌هایی داشته باشیم که برای آن‌ها این c تا جای ممکن بزرگ باشد. فرض کنید که ما خودمان را به گراف‌های d -منتظم محدود کنیم که d مقداری ثابت است. آن وقت یک قضیه‌ای هست که یک کرانی برای c بر حسب d مشخص می‌کند که این مقدار همبندی از یک حدی بیشتر نمی‌شود و آن حد به مقدار ویژه‌های ماتریس وقوع گراف مربوط است. به هر حال یک کران طبیعی آن‌جا هست. حالا گراف رامنوجان گرافی d -منتظم است که c آن ماکزیمم کران ممکن را می‌گیرد. یعنی بهترین اکسپندر ممکن است. این اکسپندر خوب داشتن خیلی چیز مهمی است در نظریه‌ی گراف. بالاخص در علوم نظری کامپیوتر خیلی عجیب سر و کله اش پیدا می‌شود. ساختن خانواده‌هایی از گراف‌ها که c -اکسپندر باشند و c هم نسبتاً بزرگ باشد کار آسانی نیست. حدس‌هایی وجود دارد و یک ارتباط عمیق و وثیقی هم دارد به حدس ریمان روی گراف‌ها. حالا در حالت گراف‌های رامنوجان فیلیپس و سارنک یک خانواده از این گراف‌های رامنوجان که بهترین اکسپندر هستند ساخته‌اند که مبنایش نظریه‌ی اعداد است. این هم درباره‌ی گراف‌های رامنوجان.

امیرحسین اکبرطباطبایی: درباره‌ی مورفیزم و حد- می‌خواهم از شما بخواهم یک وجه منفی از ترکیبیات را که از آن حرف زدیم برایم باز کنید و آن هم فقدان مورفیزم در ترکیبیات است به شکلی که عرض می‌کنم. می‌گوییم که مورفیزم کجاست در ترکیبات؟ این همه ساختار در ترکیبات داریم و این ساختارها مورفیزم می‌خواهد. چرا مورفیزم می‌خواهد؟ خب تجربه‌ی ریاضی ما در قرن گذشته نشان داده که اگر مورفیزم از خود ساختار مهم‌تر نباشد حداقل به همان اندازه مهم است و دلیل شهودیش هم این است که تغییرات یک ساختار که توسط مورف‌ها دیده می‌شود به ما چیزهایی درباره‌ی خود ساختار یاد می‌دهد. بنابراین صلاح این است که وقتی از یک شی ریاضی حرف می‌زنیم، یک مفهوم معقولی از مورفیزم بین آن اشیا هم داشته باشیم. بعد من می‌آیم جای شما می‌نشینم و دو کلمه غری می‌زنم که خیلی اوقات موجودات ترکیباتی ما اصلاً هیچ نوع مورفیزی بینشان ندارند. مثلاً طرح‌های بلوکی مورفیزمش کجاست؟ دست کم من ندیده‌ام و شاید هم من بلد نیستم. اما به نظر می‌رسد که در ترکیبیات اکثر اوقات از مورفیزم یک کلمه هم حرف نمی‌زنیم و اگر هم که حرف می‌زنیم، مثلاً در کیس گراف، این مورفیزم‌ها اهمیت خاصی ندارند در نظریه یا دست کم آن قدر که باید باشد ندارند. ما که فقط نمی‌خواهیم مورفیزم داشته باشیم که حوصله‌مان سر رفته. حالا که اشیایی داریم مورفیزم هم داشته باشیم. این مورفیزم قرار است به ما کمک بکند. حالا من می‌خواهم که شما یک فایده‌ی مورفیزم را به سلیقه‌ی خودتان در ساختارهای ترکیباتی یا همین گراف توضیح بدهید. گراف باشد حتی بهتر است چون کمی ساده‌تر است. مثلاً فرض کنید من کار به تجربه‌ی ریاضی بشری ندارم چرا که اگر شما به اندازه‌ی کافی از تجربه‌ی ریاضی قرن قبل بدانید حدستان همیشه این است که مورفیزم لازم است. ولی فرض کنید من به این تجربه دسترسی ندارم و می‌خواهید برای اولین بار به من بفهمانید که مورفیزم مهم است نه به این دلیل که تاریخ این طور می‌گوید که به این خاطر که یک کارهایی را واقعاً نمی‌شود بدون مورفیزم صورت داد یا اگر هم بشود نتیجه‌ی کار شلوغ و کثیف می‌شود. یک

کارهایی که آدمی زاد دوست دارد بکند، مثل همین لیمیت و پروآبجکت و این ها که مثال می‌زنید و خوب است به نظرم. خیلی به نظرم پتانسیل این را دارد که بعد بگویید من مورفسم ندارم و این ها را درباره اش نمی‌توانم مثل آدم حرف بزنم. چه می‌دانم مثلاً می‌توانید بگویید که درباره‌ی زیر گراف می‌توانیم بدون مورفسم هم حرف بزنیم، اما درباره‌ی خارج قسمت گراف ها بهتر است که مورفسم داشته باشیم تا کار تمیزتر در بیاید. می‌خواهم یک جایی فرود بیایم و درباره‌ی مورف در مسئله‌هایی ملموس حرف بزنیم شبیه کاری که در مورد آنالیز روی گراف کردیم مثلاً. بگذارید اصلاً این طور بپرسم. اگر بخواهم یک بهانه ای بدهم دستتان که کدام طرفی بروید، من می‌گویم که حالا که شما فکر می‌کنید که پرو آبجکت خانواده ای از گراف‌های متناهی مهم است همان طور که گروه پرو فاینایت مهم است، بیایید من را درباره‌ی این اهمیت قانع کنید. بگویید چه چیزی به لحاظ شهودی یا فنی این جا هست که مهم است. اصلاً این گذر به لیمیت قرار است برای من چه کار کند که همین الان با دست نمی‌توانم بکنم؟ این چه فایده‌ای می‌تواند داشته باشد؟ بعد از این مطلب استفاده کنید و من را راضی کنید که خب این کارها مورفسم لازم دارد و باید مورفسم بین موجودات را تعریف کنیم دیگر. حالا ببینید که با من چه قدر موافقید که آیا بمانیم روی همین مساله یا نه؟ بعد یکی یکی عوض کنیم جایمان را و برویم جاهای دیگر هم.

آرش رستگار: درباره‌ی نیاز ریاضیات متناهی به ریاضیات نامتناهی. دکتر محمد گلشنی برای من تعریف کرده بود. اسمش یادم نیست. می‌گفت دنباله‌ی اعداد صحیح را در نظر بگیرید و با یک عدد شروع کنید. آن اعداد را در مبنای 2 بنویسید. بعد یک بسطی می‌شود از توان‌های 2 با یک ضرایبی که صفر و یک هستند. به جای 2 بگذارید 3، هر عددی شد آن را منهای 1 کنید در همان مبنای 3. بعد به جای 3 بگذارید 4، بعد منهای 1 کنید. بعد دوباره بسط در مبنای 4 را در نظر بگیرید و به جای 4 بزارید 5 و بعد منهای 1 کنید. به جای توان‌های 4 می‌گذارید توان‌های 5. با این روش بعد از متناهی مرحله به صفر می‌رسید. با هر عددی هم شروع کنید. ثابت شده که این با اصول پئانو ثابت نمی‌شود و شما حتماً برای اثبات چنین حکمی که یک حکمی راجع به تناهی هست به کاردینالیتی‌های خیلی خیلی بزرگ نیاز دارید. حالا من نمی‌فهمم محمد می‌گفت اوردینال امگا به توان امگا و الی آخر، به همچنین چیزی احتیاج دارید. فکر کنم این آن مثالی است که شما را خوشحال کند یا این نوع را دنبالش می‌گشتید.

آرش رستگار: درباره‌ی نیاز ریاضیات گسسته به ریاضیات پیوسته. شما مشتق و انتگرال را که در فرمت فاینایت دیفرنس در نظر می‌گیرید، مشتق می‌شود $f(n+1)-f(n)$ تابع تفاضل، ورژن گسسته‌اش. انتگرال هم ورژن گسسته‌اش می‌شود مجموع. این که انتگرال مشتق چه می‌شود، می‌شود یک جمع تلسکوپی که می‌شود آخری منهای اولی. انتگرال مشتق می‌شود $f(b)-f(a)$ و برعکسش هم همین‌طور. شما وقتی ورژن پیوسته را می‌فهمی، انتگرال و مشتق و خط مماس را می‌فهمی، برمی‌گردی ورژن گسسته را می‌فهمی، می‌بینی ای بابا من که اصلاً نفهمیده بودم. فکر کردم این یک جمع و تفریق و یک تلسکوپی و این‌ها بوده. همه هندسه داستان و آن روند تغییر و ارتباط بین مفهوم مساحت و مفهوم خط مماس و این‌ها و پرسپکتیوی که به ریاضیات گسسته می‌دهد، بعد از این که ما آنالوگ پیوسته‌اش را پیدا کردیم است که می‌فهمیم. قبلاً که نمی‌فهمیدیم. یعنی ما ریاضیات گسسته را خیلی وقت‌ها نمی‌توانیم و آن قدر ذهنمان تجرد ندارد که در آن حقایق پیوسته را ببینیم. حالا جالب این است که بسط تیلور پیوسته را اولین بار لایبنیتس نوشته و بسط تیلور گسسته را اولین بار نیوتن نوشته. جل الخالق.

آرش رستگار: راجع به اهمیت مورفیسم و دگردیسی در ترکیبیات- بگذارید مثال مورفیسم و دگردیسی را با هم بزنم. فرض کنید من می‌خواهم در مورد مورفیسم‌های پوشا صحبت کنم. شما مورفیسم‌های پوشا را با متناهی تا کلبس کردن می‌توانید درست کنید. یعنی راس‌های مجاور را می‌توانید کلبس کنید. به همچنین چیزی بگویید یک حرکت. و وقتی شما یک گراف و دو تا راس همسایه‌اش را کلبس می‌کنید بیاید گراف اولی را به گراف دومی مپ کنید. هر رأسی به رأس متناظرش و زیرش هم یک راس بگذارید که این‌ها به هم مپ بشوند و حالا مدولار اسپیس همه گراف‌های ممکن را در نظر بگیرید و در آن نگاه کنید که با کلبس شدن در آن چه جوری از گراف اولیه رسیدیم به گرافی که هدف گراف مورفیسم ماست. از گراف مبدأ رسیدیم به گراف مقصد با یک تعدادی کلبس کردن. بعد که این کار را کردیم، عرض شود که، یک سری یال را کلبس کردیم، می‌بینید که روش‌هایی که کلبس‌ها به شما می‌دهند یک روش نیست. یعنی به جورهای مختلفی می‌توانید آن کلبس‌ها را انجام بدهید و بنابراین آن مورفیسم شما یک مسیری یا چندین مسیر که روی مدولار اسپیس می‌رود را آن بگیرید که از گراف مبدأ به گراف مقصد می‌روند. بعد می‌شود فهمید این مسیرها به هم می‌روند یا که نمی‌توانند به هم بروند، که بعد می‌شود همان ایده هموتوپي تئوری و بعد به ما می‌گوید: ای بابا اگر ما بخواهیم کتگوری تئوری را پیوسته کنیم، به جای مورفیسم باید یک چیزی شبیه هموتوپي بگذاریم و بعد می‌گوییم عجب درسی ما از این مورفیسم‌های گراف‌ها گرفتیم. درسی فلسفی که تازه به درد معمولی‌مان هم نخورد. راجع به لیمیت اگر بخواهم مثال بزنم، بگذار آن را جدا بزنم.

آرش رستگار: درباره‌ی اهمیت حد در ترکیبیات- این قسمت درباره اهمیت لیمیت گرفتن در آبجکت‌های متناهی است. این اولاً تکنیکال است اما اشکالی ندارد، شما خیلی وقت‌ها در کتگوری وقتی یک فانکتوری نمایش‌پذیر می‌شود توسط اعضای همان کتگوری نمایش‌پذیر نیست. با یک پروآبجکت نمایش داده می‌شود و خیلی وقت‌ها در همان پروکتگوری هم همان فانکتورها را در نظر بگیرید، دیگر توسط پروآبجکت نمایش‌پذیر نیست. بنابراین یک ذره پیچیده است به زبان دانشجو بخواهم یک مثال بزنم که متوجه بشود. شما گروه متناهی می‌خوانید، گروه گالوا هم که ایده‌ی گروه متناهی از آن‌جا آمده می‌خوانید و سوال این است که همه این گروه‌های متناهی که گروه گالوای یک توسیعی هستند را بخواهیم با هم مطالعه کنیم، چه کار کنیم. خب مورفیسم‌های بینشان و لیمیت‌های بینشان را در نظر بگیریم که بشود گروه گالوای $\mathbb{Q}$ و با $\mathbb{Q}$ مطالعه اش کنیم. خب چه کاری است. دانه دانه مطالعه کنیم. اصلاً خیلی وقت‌ها مسائلی هستند که شما می‌جبورید بروید روی میدان بزرگتر. اگر هی بروید روی میدان بزرگتر که معلوم هم نیست چه قدر بزرگتر و هر دفعه روی هر مثالی فرق می‌کند، نمی‌توانیم مسئله را حل کنیم. پس مجبوریم به زبان گالوا Q_p یا $\mathbb{Q}$ فکر کنیم. می‌برویم به توسیع با گروه گالوای بزرگتر. اگر نخواهید این جوری فکر کنید، نمی‌خواهید نظریه اعداد انجام بدهید. بیس اکستنشن یک تکنیک مهمی است که کار را ساده می‌کند. حالا می‌کند، یکی بگوید که این که شد نظریه اعداد، گروه متناهی، یا گروه گالوا، و این‌ها ترکیبیات نیست که. یک چیز ترکیبیات بگو. عرض شود که حدس abc شنیدید؟ می‌گوید که اگر $a+b$ بشود c، صحیح مثبت باشند، c که ماکسیمم a و b و c کوچکتر مساوی با C اندیس اپسیلون ضرب در رادیکال abc به توان یک به علاوه اپسیلون است. رادیکال abc هم حاصل ضرب پرایم‌هایی که c، b، a را عاد می‌کنند. خب این حدس معادل یک حدس ویتا می‌شود که روی الجبرایک کرو هست، ولی بعد که می‌خواهیم آن را با این معادله و این را با آن معادله مقایسه کنیم، می‌بینیم که باید نامتناهی تا مثلاً خم‌های فرما، که برای n به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند را

استفاده کنیم. حدس ویتا را باید بی‌نهایت بار ثابت کنید تا بتوانید a, b, c کانجتر رو ثابت کنید. خب این نشان می‌دهد حقیقتی راجع به نامتناهی تا الجبریک کرو وجود دارد که در همچین نامساوی‌ای خلاصه شده است. خب پس این یک مثالی است که یک چیزهایی به زبان متناهی بیان می‌شوند و کامپلکسیتی آن‌ها اینفینیت است و باید با لیمیت گرفتن و با اینفینت فکر کردن آن‌ها را فهمید. الان باز می‌گویید مثال خوبی نیست و بگذارید ببینم چه مثالی می‌توانم بزنم. عرض شود که در ترکیبیات بخواهیم حد بگیریم، راستش من از دکتر خسروشاهی پرسیدیم یک ریفر کرد به یک کتابی که یکی از نویسندگان هایش لوواس بود. راجع به حد گراف‌ها، ولی به همان معنای آنالیزی. اصلاً متوجه آن چیزی که من می‌گویم حد، به معنای جبری یعنی چه نبودند. ولی حد به معنای آنالیزی، لوواس به احتمال خیلی زیاد گراف تئوری استفاده کرده بود و یک کتاب نوشته بود. یعنی این که یک گرافی شما نقاطش را یک جورهایی حد بگیرید و گراف‌های دیگری را درست کنید. حد به معنی هندسی. این هم اگر دوست ندارید و حتماً باید جبری باشد، چه دیگر می‌توانم بگویم جبری باشد. شما $\mathbb{Z}$ تقسیم بر $n\mathbb{Z}$ را بخواهید بفهمید، موجودات ترکیبیاتی هستند دیگر. لیمیتش را می‌گیرید. باید $\mathbb{Z}$ هت را بفهمید که حاصل ضرب $\mathbb{Z}_p$ هت هاست.

آرش رستگار: درباره‌ی اهمیت توپولوژی روی اشیای فرامتناهی - داشتم می‌گفتم که شما لیمیت $\mathbb{Z}$ تقسیم بر $n\mathbb{Z}$ ها را می‌گیرید می‌شود $\mathbb{Z}$ هت. خب می‌پرسید ما با $\mathbb{Z}$ تقسیم بر $n\mathbb{Z}$ ها کار می‌کردیم دیگر، چه کاری است با $\mathbb{Z}$ هت کار کنیم. همین سوال برای اشیای متناهی هم جوابش می‌تواند ولید باشد. این‌ها اشیای متناهی هستند. آن لیمیتش را که $\mathbb{Z}$ هت می‌گیرید، آن یک جوری یک موجود نامتناهی است. اون $\mathbb{Z}$ هت یک کاسه شده همه $\mathbb{Z}$ تقسیم بر $n\mathbb{Z}$ هاست. مثلاً شما می‌توانید GL_n یک $\mathbb{Z}$ هت را در نظر بگیرید. یا GL_n یک $\mathbb{Z}_p$ هت را در نظر بگیرید. که لیمیت $\mathbb{Z}$ تقسیم بر p به توان $n\mathbb{Z}$ هاست. این یک توپولوژی دارد. کوفاینایت توپولوژی دارد و این توپولوژی باعث می‌شود که مطالعه اش راحت‌تر بشود. مطالعه یک کاسه همه آن موجودات متناهی راحت‌تر بشود. شبیه این در گروه گالوا هم هست. گروه گالوا یک پروفاینایت توپولوژی دارد. دیسکریت توپولوژی گروه‌های متناهی گالوا لیمیتش یک توپولوژی به اسم کرول توپولوژی، اگر اشتباه یادم نباشد روی گروه گالوا می‌گذارد که باعث می‌شود این پروفاینایت گروه‌ها، توپولوژی گروپ باشند. خب بعد توپولوژی می‌آید در کار. یعنی حتی به معنای غیرجبری، حتی به معنای هندسی آنالیز می‌آید در کار. به چه درد می‌خورد. بگذار این جور بگویم، به این درد می‌خورد به طور خلاصه. ما یک بحث‌هایی قدیمی فکری با شما داشتیم که در آن‌جا من راجع به این صحبت می‌کردم که، با شما نداشتیم، با دکتر محمد گلشنی داشتیم و از شما هم پرسیدم، که ما خیلی وقت‌ها می‌خواهیم یک چیزی را ثابت کنیم، نمی‌توانیم محاسبه کنیم راجع به موجوداتی که می‌خواهیم آن چیز را ثابت کنیم. ولی یک زیرمجموعه چگال آن‌ها هست که آن‌جا می‌توانیم محاسبه کنیم. قضیه را ثابت کنیم. بعد با حدگیری در حالت‌های کلی قضیه را ثابت کنیم. همین اتفاق هم برای این موجودات متناهی می‌افتد. وقتی که لیمیت می‌گیریم، آن‌جا فمیلی به معنای توپولوژی معنی پیدا می‌کند، بعد می‌توانید از یک کارهایی که می‌توانید بکنید بستر بگیرید و این کارها را روی بسترش هم انجام بدهید. یک مثال دیگر که الان یادم آمد گفتم بستر. می‌خواهم ببینم می‌توانم زورچون کنم این‌جا بگویم راجع به تین گروپ. زیرگروه‌های خطی که چگال نیستن با زاریسکی توپولوژی. حالا من می‌توانم بگویم زاریسکی توپولوژی یک چیز کاملاً کامبینیتورال است. حالا بگذار فشار نیاورم اگر یکی

گفت تو اگر می‌خواهی فشار بیاوری این را انجام بدهی، یک دفعه بگو اسم من آرش رستگار نیست. امیرحسین اکبر طباطبایی است. اون هم می‌شود گفت. بنابراین بگذار فشار نیاورم.

آرش رستگار: فورستنبرگ و قضیه واندرواردن- یک مثال از کار خوبی که در ترکیبیات انجام شده باشد، یک قضیه وجود دارد به اسم واندرواردن که می‌گوید که اگر اعداد طبیعی را با متناهی تا رنگ، رنگ کنیم، همیشه یک رنگی وجود دارد که تصاعد حسابی نامتناهی به طول دلخواه دارد. این یک قضیه‌ی ترکیبیاتی است که با نظریه‌ی رمزی هم اثباتش می‌کنند. ولی فورستنبرگ یک مکتبی دارد که می‌آیند روی اعداد صحیح یک توپولوژی متهم متناهی می‌گذارند و بعد یک سیستم دینامیکی به آن نسبت می‌دهند و با آن ایده سیستم‌های دینامیکی و قضایایی که راجع به میژرها و این‌ها دارند، و میژرهایی که به طور طبیعی تعریف می‌کنند، این قضیه را ثابت می‌کنند و این خیلی کار بزرگی است. این نگاه که شما از توپولوژی استفاده کنید و بعد از هندسه ایده بگیرید در مورد اشیائی که گسسته‌اند، یا حتی متناهی‌اند، یا قضایایی که برای اثبات آن‌ها ریاضیات متناهی کفایت می‌کند. این خیلی پروژه بزرگی بوده و کار فورستنبرگ و شاگردهایش خیلی موفق بوده است. ما که دانشجویان کارشناسی بودیم، علاقه‌مان نظریه اعداد بود، ولی با دکتر شهشهایی درس‌های سیستم‌های دینامیکی می‌گذراندیم، هم حقیقی و هم مختلط. دکتر شهشهایی برای این که ما را تشویق کند، کتاب فورستنبرگ را داد بخوانیم. ولی آخرش ما به سیستم‌های دینامیکی که به آن معنای سیلورمن باشد، مثلاً در نظریه اعداد، علاقه‌مند شدیم. این هم از یک کار خوب انجام شده.

آرش رستگار: یک اشکال فلسفی روش انجام ترکیبیات در عصر ما- عرض شود که یک کاری که در ترکیبیات انجام نمی‌شود و فلسفی است، مربوط به ایده‌هایی که از شاخه‌های دیگر ریاضیات می‌آید نیست. فلسفی است. این کار این است که این‌ها می‌گویند این شیء‌های ما مهم هستند. به خاطر علوم کامپیوتر این‌جوری هستند. علوم کامپیوتر همچنین سوالاتی دارد. ما می‌گوییم بسیار خوب. مثلاً می‌گوییم گراف، می‌گویند گراف اینترنت مهم است. می‌گوییم باشد. می‌آیند راجع به رنگ آمیزی گراف کامپلیمنت n رأسی صحبت می‌کنند. بعد می‌کنند دو بخشی. بعد می‌کنند سه بخشی. بعد شما مگر نگفتید علوم کامپیوتر مهم است اصلاً با این گراف‌ها دارید چه کار می‌کنید؟ اگر گراف‌هایتان مهم هستند خوب بگویید این گراف‌هایتان چرا مهم هستند. و اگر می‌گویید این گراف‌ها چرا مهم هستند، باید بگویید رنگ آمیزی این گراف‌ها چرا مهم هستند. نمی‌توانیم بگوییم ما اول برای گراف‌های پنج رأسی و شش رأسی و ده رأسی می‌خواهیم فکر کنیم، تا بعد نوبت برسد به گراف اینترنت. نه این‌جوری نمی‌شود ریاضی انجام داد. ما را گول زنید و خودتان را هم گول زنید. شما باید دلیل داشته باشید. چرا یک مفهومی رلونت است؟ چرا مطالعه‌اش مهم است؟ این دلیل‌ها لازم نیست بیرون ریاضی باشد. می‌تواند داخل ریاضی باشد. مثلاً بگوییم این مفهوم اگر خوب فهمیده بشود، فلان مفهوم که من قبلاً توضیح دادم، چرا مهم می‌شود و یا بهتر و راحت‌تر فهمیده می‌شود. ولی خوب این سیستم می‌خواهد دیگر. چه سیستمی می‌خواهد؟ هایرارکی می‌خواهد. چه جور هایرارکی؟ مثل روش ریاضی انجام دادن اقلیدس. ریاضی که شما از یک سری اصول موضوعه، در طبقه اول یک سری قضایا اثبات می‌کنید و از آن قضایا در طبقه دوم و یک سری قضایای دیگر، و طبقه سوم همین‌طور. بعد بعضی وقت‌ها این طبقات می‌توانند یکی دوتا جابه‌جا بشوند. خیلی هم دقیق نیست. اول بریم آن قضیه را ثابت

کنیم، بعد از روی آن برویم آن قضیه را ثابت کنیم و مانند این. این که بگوییم چه چیزی در ریاضی مهم است، مطالعه اش عین همین روش اقلیدس است، که شما خیلی دوست دارید بدانید رده بندی گروه های ساده متناهی چرا مهم هستند؟ رده بندی گروه های حل پذیر متناهی چرا مهم هستند؟ اصلا رده بندی همه گروه های متناهی چرا مهم هستند؟ خوب اگر شما بگویید که یک سری گروه ها پیدا می کنیم که یک سری ناورداها از آن ها پیدا می کنیم، بعد می رویم جدول مان را نگاه می کنیم، می بینیم که سه تا گروه بیشتر نیست که آن خواص را داشته باشند و آن گروه ها را خواصشان را مطالعه می کنیم، می بینیم ای بابا آن گروه ما فقط یکی از این ها می تواند باشد. اگر می خواهیم بگوییم که کاربرد رده بندی همه گروه های متناهی همچنین چیزی است و بدانیم که ریاضی این جوری انجام نمی دهند. این که شما بیایید رده بندی کنید، لیست کنید و از روی لیستتان ببینید کدام کدام است، این همان طور انجام دادن ریاضیات و نفهمیدن آن است. خوب است بدانید اثبات شیمورا-تانیاما-ویل در حالت کلی هم همین جوری بوده که در آخر مثال هایی بوده که از روی جدول های مدولار فرم و الپتیک کروهایی که می دانستند مدولار هستند، همه الپتیک کروهایی روی $\mathbb{Q}$ مدولار را ثابت کردند. این فهمیدن نیست. بعد که اثبات کیسین و تیلور و وایلز آمد، باعث شد اوضاع بهتر شود. الان هم کسی هنوز نمی داند آن تعریف شیمورا، که هر الپتیک کروی روی $\mathbb{Q}$ چرا باید یک خم مدولار به آن مپ شود؟ هیچ کس نمی داند و همه اصلا فراموش کردند. نشان به آن نشان که در فانکشن فیلد، الپتیک کروهایی مدولار به این معنی شیمورایی اصلا مطالعه نمی شوند. گالوا رپرزنٹیشن های اسوشییتد به الپتیک کروهایی مطالعه نمی شوند. آن جا می دانید هر گالوا رپرزنٹیشن مدولار است و گالوا رپرزنٹیشن اسوشییتد به مدولار را کار داریم و اصلا الپتیک را فراموش کردید، در صورتی که آن جا هم معنی دارد. خوب این چه کاریست؟ چرا ما باید نفهمیم هر الپتیک کروی روی $\mathbb{Q}$ یک مدولار کروی به آن مپ می شود؟ باید مستقیم بفهمیم. نمی فهمیم. بحثمان را باید ببریم دور کوه دماوند و از آن طرف بیاییم بکنیم در دهانمان. چرا؟ این چه جور ریاضی انجام دادنی است؟ این طوری نظریه اعداد انجام دادن هم درست نیست، چه برسد به ترکیبیات انجام دادن. بنابراین شما باید بفهمید چی مهم است و چرا مهم است و یک نظام هیرارکی داشته باشید. الان در ریاضیات در عصر حاضر همچنین چیزی مکتوب نیست. این ها سینه به سینه حمل می شود و باید از کله گنده ها پرسید چی مهم است و چرا مهم است. در آخر هم می گوید آندره وی گفته فلان چیز مهم است. کوتیشن می آورد مثل سارنک که می گوید آندره وی این را گفت و آندره وی آن را گفت. خوب تو چه می گویی. و آندره وی مُرد. بلکه اشتباه کرد. باید آندره وی باشد و از خودش دفاع کند. وقتی نیست، تو باید بگویی چه چیز مهم است و چرا مهم است. نمی شود از کردیت کسی قرض بگیری.

امیرحسین اکبرطباطبایی: قضیه ی گودشتاین و امثال آن- من می خواهم که اول درباره ی این مثالی که از دکتر گلشنی نقل می کنید یک کمی حرف بزنم. حالا این جا از قضا شما وارد شدید به حوزه ی تخصصی من که می شود حساب به معنی منطقی کلمه، یعنی مثلاً مطالعه ی حساب های مرتبه ی اول و فرگمنت هایش و استقرای نامتناهی مربوطه و غیره. این قضیه ای که می گوید به آن می گویند قضیه ی گودشتاین و مثال خیلی خوشمزه ای است از ارتباط متناهی و نامتناهی. من یادم است که درسی می دادم درباره ی نظریه ی اثبات حساب در دانشگاه تهران. بعد آن جا درباره ی اثبات ناپذیری همین موضوع به عنوان یک مثال خیلی خوشمزه حرف می زدیم. باز هم هست از این مثال ها. همین مثال یک شکل خیلی حماسی تری هم دارد که درباره ی جنگ بین هرکول و هیدراست. دقیق یادم نیست و اگر بگوییم ممکن است اشتباه بگوییم ولی می توانید به

راحتی در ویکی‌پدیا پیدایش کنید. داستان این است که هیدرا یک درختی است که هر جایی از آن را که قطع می‌کنید مثلاً به یک سبکی، هیدرا از آن نقطه یک نقطه می‌آید پایین‌تر، ولی دوباره همان مقداری که بریدید، سر درمی‌آورد، یعنی خیلی زیاد سرهای جدید پیدا می‌کند در هر مرحله. اما خب عمقش یکی کم می‌شود و بعد قضیه این است که اگر چه که ظاهراً دارد خیلی بزرگ می‌شود، شبیه این عدد که می‌گویید وقتی ما دو را می‌کنیم سه، سه را می‌کنیم چهار و غیره، خیلی بزرگ می‌شود، ولی در نهایت هرکول موفق می‌شود که هیدرا را بکشد یعنی درخت می‌رسد به ریشه. اینجا هم مثل مثال شما، این حکم که می‌رسیم به ریشه مستقل از حساب پتانو است. حالا برای این رسیدن به ریشه اثبات‌های مختلفی هم هست و اثبات معقولش هم همین‌طور است که می‌گویید. یعنی با استفاده از اوردینال‌هاست و اثبات خیلی آسانی هم است. اثبات این است که این پروسه‌ای که توضیح دادیم اگر متناظرش کنیم با اوردینال‌ها یک پروسه‌ی اکیدا نزولی است و در نتیجه متوقف می‌شود. حالا البته در مثال شما یک کم دقیق‌تر باید می‌گفتیم صورت قضیه را. پروسه این است که اعداد را باید به شکل قوی در پایه‌ی مثلاً دو، سه، چهار و غیره بنویسید. به شکل قوی یعنی این که مثلاً فرض کنید عدد را بنویسید در پایه‌ی چهار، بعد توان‌هایی که استفاده کرده‌اید را هم در پایه‌ی چهار بنویسید و پایه‌های آن را و الی آخر. بعد در مرحله‌ی بعد همه‌ی آن چهارها را باید بکنیم پنج و به همین صورت ادامه بدهیم. بعد ایده خیلی ساده است. می‌گوید همه‌ی این پایه‌ها را بکنید امگا یعنی کوچکترین اوردینال نامتناهی. همه‌ی این چهار و پنج و این‌ها را بکنید امگا، یعنی فراموش کنید که دارید عوضش می‌کنید. بعد به راحتی می‌توانید ببینید که در واقع این دنباله‌ای که دارید درست می‌کنید یک دنباله‌ی نزولی اکید اوردینالی است و در نتیجه پس از متناهی مرحله می‌رسد به صفر. به خاطر این که اوردینال‌ها خوش‌ترتیبند. حالا اوردینال‌هایی که دارید روی آن کار می‌کنید چه اوردینال‌هایی هستند؟ خب طبق نحوه‌ی ساختشان این‌ها کوچک‌ترند از امگا به توان امگا به توان امگا به تعداد نامتناهی. به این اوردینال می‌گویند اپسیلون صفر. بنابراین در اثباتمان داریم از خوش‌ترتیبی یا معادلاً استقرا استفاده می‌کنیم روی اوردینال‌های زیر اپسیلون صفر و این استقرا اثبات‌ناپذیر است در حساب پتانو. چرا؟ چون اگر اثبات‌پذیر می‌بود می‌توانستیم به کمکش سازگاری حساب را ثابت کنیم. اما قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل می‌گوید که نمی‌توانیم سازگاری حساب را در خود حساب ثابت کنیم. حالا البته که صرف این که به این استقرا احتیاج داریم دلیل نمی‌شود که بدون آن نتوانیم قضیه‌ی گوشتاین را ثابت کنیم. اما می‌شود ثابت کرد که کلاً نمی‌توانیم آن را ثابت کنیم که خودش یک داستان دیگری است. از این مثال‌ها هست و کم هم نیست. ولی با این که فیلد خود من هم هست، اما من اصلاً خوشحال نیستم از این مثال. علت هم این است که من طی این مثال‌هایی که الان زدید، یک چیزی فهمیدم که می‌خواهم چیزی به فرمت کارمان (از رهبری هم سوء استفاده می‌کنم) اضافه کنم و آن این است که یک عالم کاربرد از چیزهای مختلف این طرف و آن طرف هست اما من آن‌هایی را دنبالشان هستم که مهم باشند، آن‌هایی که یک حال ستون طوری داشته باشند. یک چیز اتفاق یک گوشه‌ای که فنی است، یک چیزی که ده تا چیز با هم قاطی می‌شود، نباشد. حالا قابل فهم باشد برای مردم، ولی یک حال ستونی هم داشته باشد که بشود روی آن یک چیزی بنا کرد. خیلی عظیم باشد. یک جور نگرش باشد تا یک قضیه. یک جور شبیه دیفورمیشن باشد یا فایبریشن یا انتقال آنالیز به نظریه‌ی گراف. این‌ها به نظرم یک ستون‌های کلی هستند که به ما چیزهای مهمی یاد می‌دهند. بنابراین این قضیه را به عنوان استفاده‌ی نامتناهی در دنیای متناهی می‌خواهم که قبول نکنم. یعنی می‌خواهم یک ماشین عریض و طویل جدی‌تری بدهید. چیزی که یک تئوری نامتناهی را به جدیت منتقل کند به دنیای متناهی. یک دانش جدی

به من منتقل کند. شبیه این که بگویید بین یک آنولوژی مهم آن جا هست که از آن من استفاده می‌کنم و دیتا را از بینهایت می‌آورم به متناهی. نه فقط یک تکنیک یا یک ابزارک. مثلاً در مورد دیفورمیشن که فکر می‌کنید یا در مورد فهمیدن فرم گراف، بر اساس تغییر اسکالر رویش ما داریم یک چیز عمیقی را آن وسط لمس می‌کنیم و این جا من این حس را ندارم. به نظر من باید چیزی پیدا کنید که واقعا یک چیز عمیقی را لمس کند. حالا پیدا کردن این خودش کاری است. البته که این مثال شما مثال خوبی است و این جور کارها مفرحند، ولی بعضی چیزها به نظر من مفرح است اما عمیق نیست و من این مثال را این طور می‌یابم. یک عالم تئوری عریض و طویل در حساب هست در این باره، ولی خب دلیل نمی‌شود که این مطلب عمیق باشد. این از سلیقه‌ی من حقیر دریاری استفاده از اوردینال در اثبات کردن چیزهایی دریاری موجودات متناهی. نکته‌ی آخر هم این که آن مطلبی را هم که می‌گویید کاردینال بزرگ نیاز است، متاسفانه این طور نیست. این اوردینال اپسیلون صفر آن چنان بزرگ نیست و در واقع شماراست. بنابراین جای خالی یک مثال عمیق از ظهور نامتناهی در دنیای متناهی را هنوز من نگه می‌دارم در لیستمان.

امیرحسین اکبرطباطبایی: هندسه‌ی جبری در دنیای گسسته- عرضم به حضورتان که این دریاری ریاضیات گسسته است، در واقع نیازش به ریاضیات پیوسته که می‌شود در جواب به مباحثات قبلی. نکات خوشمزه‌ای می‌گوییم و اصلاً حالا این در آن سته‌تایی‌ها نیست واقعا، ولی خودش همین جوری خالی، حرف مهمی است که ما گاهی در دنیای گسسته، به خاطر گسستگی، یک میزانی از نابینایی داریم، کور هستیم نسبت به دیدن یک چیزهایی. شاید بشود تصور کرد برعکسش هم درست باشد و بگذارید یک چند خطی در این باره حرف بزنم و بعد برگردم سر حرف شما. حرفم این است که در دنیای پیوسته هم کوری‌هایی داریم که باید گسسته فکر کنیم تا آن‌ها را بفهمیم و مثالم هم از قضا همین مثال شماست. همین حساب دیفرانسیلی که درست می‌کنیم و دست انداختنش به بینهایت کوچک‌ها. انگار که داریم فضا را گسسته می‌کنیم، خرد می‌کنیم به بازه‌های بینهایت کوچک. این جا می‌نویسیم و حد می‌گیریم. انتگرال را می‌کنیم یک سری جمع متناهی، می‌فهمیم آن را و بعد در یک عمل حدگیری به دست می‌آوریم نتیجه‌مان را. این طرفش خب داریم متناهی یا گسسته را راحت‌تر می‌فهمیم. در واقع پیوسته را فرومی‌کاهیم به گسسته که شروع کنیم فهمیدن این که چه جوری دارد کار می‌کند. در آنالیز این بازی با اپسیلون و این‌ها و ریداکشن آن‌ها به یک جور ساختمان گسسته، کار معمولی است که کمک می‌کند به فهم ما. حالا بگذارید برگردیم به حرف شما. خب شما می‌گویید ما از پیوستار یک درکی داریم مستقلاً. آن درک می‌تواند کمک کند و چون این جا دیتای بیشتری نسبت به دنیای گسسته موجود است، ساختمان‌های بیشتری هم هست و در نتیجه ما یک چیزهایی را می‌بینیم که قبلاً نمی‌دیدیم. یا آن طور که باید نمی‌دیدیم یعنی اهمیتشان را نمی‌فهمیدیم. گاهی ساختار وقتی می‌آید به دنیای گسسته بخشی از آن تریویالایز می‌شود و اصلاً دیده نمی‌شود. خب این حرف حساب است. حالا نمی‌دانم صحیح است که از این فرصت سوء استفاده کنم و بحث جدیدی باز کنم یا آن را بگذارم آن وقتی که رسیدیم سراغ هندسه. ولی شاید هم وقتش است همین جا فضولی‌ام را بکنم. بگذارید تلاشم را بکنم. اگر جواب نداد و حس کردیم که نابه‌جاست، آن وقت شما من را راهنمایی می‌کنید که بگذارید وقتی رسیدیم به هندسه.

بگذارید این طور شروع کنم. ما به هزار و یک دلیل به صفرهای یک خانواده از چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{R}$ علاقه داریم. سهمی می‌کشیم، هذلولی می‌کشیم، درجه این‌ها را زیاد می‌کنیم و این خم‌ها و رویه‌ها موجودات

مورد علاقه‌ی ما هستند. شما می‌توانید نمودار آن‌ها را بکشید و ببینید که چه شکلی دارند. مثلاً درکی نسبت به تیزی یک گوشه‌ای پیدا کنید. تیزی به این معنا که مثلاً نشود یک خط مماسی به نمودار کشید در آن نقطه یا چند خط مماس موجود باشد. اگر بخواهم یک نمونه مثال زده باشم روی R^2 ، مثلاً $x^2 - y^2$ را در نظر بگیرید. صفرها می‌شوند خط نیمساز ربع اول سوم و چهارم دوم. و این‌ها روی صفر با هم در مبدا برخورد می‌کنند. آن‌جا ما یک چهار شاخه‌ای داریم که این بنده خدا هیچ معنی مماس درست درمانی در آن نیست. شاید این را یک درجه زیاده‌تر می‌کردم که دو تا سهمی به هم می‌خوردند، که یک خمیدگی‌ای هم داشت حتی بهتر بود، چون این‌جا مماس‌ها خود خط‌ها هستند و یک کم گیج می‌شود آدم. به هر حال در آن نقطه دو تا خط به هم می‌خورند و دو مماس موجود است. کل حرفم این است که می‌شود نمودار را کشید و رفتار هندسی را دید. حالا تصور کنید که صفرهای چند جمله‌ای را بخواهیم در یک میدان متناهی پیدا کنیم. صفرها را روی میدان مثلاً p عضوی در نظر می‌گیریم، یا p^n عضوی در نظر بگیریم و غیره. حالا این دیگر واقعاً گسسته است. برای این که در میدان متناهی تعداد صفرها هم متناهی است. انگار من یک مشت، 12 تا نقطه مثلاً، پاشیده باشم روی صفحه. خب من هندسه را نمی‌بینم این‌جا. آن نظمی را که روی اعداد حقیقی می‌بینم، این‌جا نمی‌بینم. درست است؟ از شما یک سوال می‌پرسم. به من بگویید چطور انتقال نگاه هندسی به این دنیای گسسته چیزهای مهمی درباره‌ی همین چند تا نقطه‌ی متناهی به ما یاد می‌دهد. خودم می‌توانم فضولی کنم و یک چیزهایی بگویم. ولی اول بگذارید از شما پرسم که چطور ماشین عظیم هندسه می‌آید ما را این‌جا نجات می‌دهد و اصلاً هندسه این‌جا چطور در جریان است. این پدیده‌ی شگفت‌انگیزی است که روی چند تا نقطه روی یک صفحه هندسه‌ای داریم. این هندسه چه طوری در جریان است که ما آن را نمی‌بینیم؟ چه طوری ماشین هندسه را از پیوسته بیاوریم این‌جا؟ خب این نظریه اعداد است به وضوح و شاید چنین چیزی جایش در ترکیبات نباشد. ولی مثال بدی هم نیست از انتقال عظیم ماشینی از پیوسته به گسسته. اگر به نظرتان حرف حساب می‌زنم، بیاید این را باز کنید که چطور هندسه را، هندسه‌ی جبری را مخصوصاً، منتقل می‌کنیم به گسسته. فکر می‌کنم جذاب باشد شنیدن این.

امیرحسین اکبرطباطبایی: درباره‌ی مورفیزم و حد- چند تا از این موضوعات را می‌خواهم این‌جا جمع کنم به جز آن اشکال فلسفی. اجازه دهید نکاتی بگویم. درباره‌ی مورفیزم و دگرذیسی حرف می‌زنیم و یک مثال خوشمزه می‌زنید درباره‌ی این که دیفورمیشن گراف چه می‌تواند باشد. اول از یک تغییر کوچک شروع می‌کنید و آن این است که مثلاً یک یال در گراف را کِلِپس کنیم یا مثلاً یک یال اضافه کنیم، یک راس اضافه کنیم و از این دست. و احتمالاً تغییر یک گراف دنباله‌ای از این تغییرات کوچک است. در واقع انگار جواب من را این جور بدهید که مورفیزم برای صورت‌بندی این تغییرات است که مهم است. تو مگر نمی‌خواهی تغییر ایجاد کنی. هر وقت که بخواهی تغییر ایجاد کنی در ساختار مورد نظرت، نیاز به مورفیزم داری. اگر مورفیزم نداشته باشی، جهان دیسکریت می‌شود. اشیاء همین طور لخت و عور می‌افتند این طرف و آن طرف. به هم ربطی ندارند. تغییری نیست در جهان. وقتی تغییری نیست، فهم هر کدام از این اشیاء برگردی خودش است و این هم دلیل این که مورفیزم این قدر مهم شده. مثلاً فرض کنید من یک گروه به شما بدهم و قرار باشد که مورفیزم‌های گروه به جاهای دیگر یا از جاهای دیگر به این گروه را در نظر بگیریم. خب من چه طوری این گروه را بفهمم؟ من باید یا خودش را بگیرم یا اعضایش را بردارم ببینم چه می‌فهمم. خب البته ما می‌رویم زیرگروه‌های این گروه را هم می‌گیریم، خارج‌قسمت‌های آن را هم می‌گیریم و از این دست

کارها. اما این‌ها یعنی دارم این گروه را تغییر می‌دهم. ساختارهایش را کلمپس می‌کنم. یک ساختارش را فراموش می‌کنم. این‌ها دیفورمیشن‌های کوچک و بزرگی است که من بالاخره نیاز دارم برای فهم گروه اما دارم آن‌ها را از داخل گروه کنترل می‌کنم و کاری به بیرون گروه ندارم. مساله این است که همیشه این طور نیست که هر شی ریاضی را شما بتوانید از داخل آن آمار همه چیزش را در بیاورید. اینترکشن آن با بقیه مهم است. این رفتار اجتماعی شی است که مهم است. رفتار اجتماعی شی را چه طوری بدون مورفیزم می‌خواهید بفهمید؟ همه‌ی رفتار اجتماعی شی در داخل آن که کد نمی‌شود و اگر هم بشود لزوماً طبیعی نیست کار کردن با آن. این از اهمیت مورفیزم.

بعد شما این‌جا یک چیزی می‌گویید که خیلی خوشمزه است. وقتی شما مورف دارید، ساده‌تر بگوییم، وقتی شما مفهوم تغییر را دارید، طبیعتاً تغییر بین تغییرها را هم دارید و این یعنی سروکله‌ی هموتوپي مثل هر جایی که تغییراتی در همه‌ی لول‌ها داریم پیدا می‌شود. خب یکی می‌گوید آقا هموتوپي اصلاً پیدا بشود. هموتوپي به چه دردی می‌خورد؟ مگر مسخره‌بازی است که ما هر چیزی را که دیدیم استفاده بکنیم؟ خب آن یک بحث دیگر است. اجازه دهید قصه‌ی هموتوپي را جدا کنم و به آن برگردم. مطمئن هم نیستم که این‌جا چه قدر پر فایده است، ولی حرف بدی نیست. حالا اگر بخواهم بمانم در همین قصه‌ی مورف‌ها یکی از فوائد داشتن مورف بحث حد است. حالا این‌جا شما از نمایش‌پذیرها حرف می‌زنید که کمی فنی است. من با بیانی ساده‌تر بگویم. آن این است که شما یک سری آبجکت دارید که به نظر می‌آید که تقریب‌های یک چیزی هستند. اما آن چیز بزرگتر در دسترس شما نیست. شما فقط تقریب‌هایش را دارید. برای این که مساله را نزدیک کنم به ذهن شما می‌توانید فکر کنید به یک گروه نامتناهی. زیرگروه‌های متناهی تولید شده‌اش یا اصلاً زیرگروه‌های متناهی‌اش را در نظر بگیرید. این‌ها به یک معنی دسترس‌پذیر هستند. اما خود گروه نامتناهی از دسترس بیرون است. یک نمونه دیگر می‌توانید به اعداد گویا فکر کنید که دسترس‌پذیرند. حالا این‌ها گاهی میل می‌کنند به یک سمتی و مدام نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند به یک چیزی که مثلاً رادیکال دو است و از دایره‌ی دسترس بیرون است. بعد شما می‌خواهی چه کار کنی؟ کاری که می‌توانی بکنی این است که جهانت را بزرگتر کنی تا این اشیا را هم اضافه کنی. حالا من می‌خواهم کمی شیطننت کنم و کار بزرگتری را بر عهده بگیرم. خود پروآبجکت و ایندآبجکت را موتیویت کنم به جای حد. بگوییم که مثلاً می‌خواهم جواب این سوال را بدهم که دکتر رستگار حرف‌هایی که می‌زند و می‌گوید که پروآبجکت چه می‌شود یعنی چه؟ چرا نمی‌گوید لیمیت چه می‌شود؟ چرا نمی‌گوید کولیمیت چه می‌شود؟ نمی‌گوید حد؟ این‌ها چه می‌شود؟ آقا شما چه کار به پروآبجکت داری؟ هر حدی نمی‌شود و حتماً باید پرو باشد؟ این چرا مهم است؟ که من الان توضیح می‌دهم. اصلاً موتیویشن جدی این‌جاست. عرض به حضورتان که برگردید به اعداد گویا. فرض کنید که ما در اعداد گویا زندگی می‌کنیم. گفتم گاهی این‌ها میل می‌کنند به یک‌جا که آن یک‌جا مثلاً رادیکال دو است که گویا نیست. اگر زرنگ باشید شما می‌توانید مچ من را بگیرید. بگویید که صبر کنید ببینم، اگر رادیکال دو در دنیای تو نیست خب پس این‌ها در واقع به جایی میل نمی‌کنند. تو از کجا می‌فهمی که این‌ها دارند میل می‌کنند به یک جایی؟ صرف این که بفهمید که دارد میل می‌کند به چیزی آن بیرون یعنی به آن بیرون دسترسی دارید. یک چیزی میل می‌کند به یک جایی آن بیرون، من چه طوری می‌فهمم؟ این جوری می‌فهمم که رفتارش رفتار کسی است که دارد میل می‌کند. از همین داخل می‌فهمم و با آن بیرون کار ندارم. این طوری است که از یک جایی به بعد می‌فهمم که این فاصله‌اش با خودش هی دارد کوچک و کوچک‌تر می‌شود. شرط کوشی دارد.

من ذهنم بر این است که چرا این قدر دارند زیادی جمع می‌شوند یک جایی. حالا آن جا را من نمی‌بینم چون در دنیای من نیست. ولی می‌بینم این‌ها خیلی دارند به یک سمتی حرکت می‌کنند. دور هم جمع می‌شوند. مشکوک است قضیه. انگار یک سوراخی چیزی بوده باشد آن جا که ما نمی‌بینیم. در توان فهم ما نیست. حالا بیایید سراغ گراف. وقتی ما مورفیزم داریم یعنی داریم تغییر می‌کنیم. این گراف‌ها تغییر می‌کنند. هی تغییر می‌کنند. تغییر می‌کنند به سمتی که نتیجه‌اش در دنیای ما نیست. چه‌طوری بفهمم به یک سمتی که موجود نیست دارند تغییر می‌کنند؟ این‌طوری که اگر مثلاً در دو جهت مختلف در تغییراتم حرکت کنم، نتایج آن دو تغییر را می‌توانم در آخر جمع کنم روی یک چیز بزرگتر که خودش حاصل تغییر از شی اولیه است. این نشان می‌دهد که این طور نیست که این‌ها دارند دل‌بخوایی در مسیرهای مختلف تغییر می‌کنند. این یعنی این‌ها همه تقریب‌های ما از یک چیزی هستند. این شیء باید آن‌جا باشد اما غایب است. من باید بروم آن شی را پیدا کنم. درباره‌اش حرف بزنم. حقیقتی آن‌جا هست که ما آن را نمی‌بینیم. آن شی پروآبجکت است. یک جا می‌گوییم که این پروآبجکت توپولوژی دارد. توپولوژی خیلی مهم نیست و تنها به من کمک می‌کند که آن شی بیرون از دسترس را نمایش بدهم به زبان آدم. این اهمیت پروآبجکت بود. شما گروه گالوا را مثال می‌زنید. گروه گالوای نامتناهی این طور حاصل می‌شود که همه‌ی گروه‌های گالوای زیرتوسیع‌های متناهی به یک سمتی دارند حرکت می‌کنند. حالا شما فرض کن نامتناهی نداری، ولی داری می‌بینی این‌ها همه به یک طرفی دارند حرکت می‌کنند، جمع می‌شوند دور هم به یک سمتی. خب آدم عاقل می‌رود اول آن سمت را پیدا می‌کند و می‌آورد مطالعه می‌کند.

حالا این همه حرف پشت سر ترکیبات دان می‌زنیم، من گفتم این بنده‌ی خدا شاید واقعا پروفاینایت گراف‌ها را مطالعه کرده باشد. رفتم دیدم که بله کرده و اتفاقاً داریم این‌ها را. درباره‌اش خیلی هم کار کرده‌اند. ولی درباره‌ی ارتباطش با عمل گروه و این‌ها کار می‌کنند. ترکیبات محض نیست. بنابراین اگر چه هست، یک کوچک هم حرف زده شده راجع به آن، ولی به عنوان کاری ترکیباتی نمی‌شود در نظرش گرفت. برای این که حرفمان عادلانه باشد باید بگوییم که دست کم در کیس گراف مورف را دارند. ولی آن طوری فکر نمی‌کنند در مورد مطلب. مشکل این است. مشکل این نیست که این‌ها مورف را تعریف نکرده‌اند. گاهی هم مفاهیم را تعریف کرده‌اند، اما نه آن طوری که در مثلاً جبر ما با مورف کار می‌کنیم، بعد با پروآبجکت کار می‌کنیم و این‌ها. این‌ها آن طوری نگاه نمی‌کنند. حالا یک ذره مورف و این‌ها دارند، ولی اساساً دیسکریت نگاه می‌کنند، به این معنی که شبکه‌ی اشیای ریاضی‌شان به هم وصل نیست.

در مورد واندرواردن هم می‌خواهم بگویم که اگرچه که این هیجان‌انگیز است اما به درد کار من نمی‌خورد. خیلی فنی است و از ستون‌ها نیست. خیلی اتفاقی است. مگر بشود نشان داد که اهمیت بالقوه‌ی ذاتی‌ای در مبانی دارد که از این آدم درباره‌ی نقشه‌ی ریاضیات چیزی یاد بگیرد. در غیر این صورت مجبورم که این را هم وتو کنم. این حرف ما را تمام می‌کند.

آرش رستگار: صورت پیوسته‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها به مثابه‌ی جزئی از علم ترکیبیات کجاست؟- شما که همه حرف‌های انتقادی را زدی. من نمی‌دانم دیگر. اول گفتم خب بروم بخوابم. گفتم نمی‌شود که همیشه خوابید. بروم لم بدهم، دیگر کاری ندارم. بعد گفتم بازنشست بشوم. خلاصه همه مسئولیت‌های سخت انتقاد از جامعه‌ی ریاضی را شما به عهده گرفتید. من فکر کنم بروم یک چلوکباب بخورم، آن

جاستیفاید تر است. من باز هم در مورد اعداد و فلسفه‌شان یک فکری دارم. این‌ها را یک مروری می‌کنم. داشتم راجع به این استعاره‌هایی که توی حساب پایه هست. فکر می‌کردم که یک استعاره این است که عدد همان گردایه است. یک استعاره بعدی این است که عدد همان ساختمان است، که بعداً منجر می‌شود به ساختار بودن عدد. یک استعاره دیگر است می‌گویند که عدد حاصل اندازه‌گیری است که به آن می‌گویند استعاره خط‌کش. یک استعاره دیگر است که لیکاف و نونیس به آن توجه نکرده‌اند. آن کار خیام است که می‌گوید عدد نسبت است. یک استعاره دیگر هم هست که می‌گویند که عدد حرکت روی یک بازه است. البته این متعلق به خیام است که البته در غرب می‌گویند متعلق به بمبلی است، نیمه دوم قرن شانزدهم. ولی در اثبات خیام از حل معادلات درجه سوم وجود دارد. حتی فکر کنم در تمدن هند هم در کارهای آریاباهاتا وجود داشته باشد. می‌شود قرن چهارم میلادی به گمانم. این استعاره‌ها به ما آمیزه‌های استعاره‌ای را می‌دهد. یعنی این که عدد هم گردایه است به معنای استعاره‌ای، هم ساختار، هم اندازه‌ی یک پاره خط، پس هم ناورد است، هم نسبت، هم حرکت می‌کند. به چه چیزهایی در ریاضیات عالی اشاره می‌کند؟ یکی آمیزه ساختار-حرکت است. یک آمیزه استعاری هست که به دگردیسی ساختارهای ریاضی اشاره می‌کند. یک آمیزه، گردایه-حرکت است، این به حرکت پیوسته مجموعه‌ها اشاره دارد. که در نظرم به نظریه مجموعه‌ها اصلاً وارد نشده به زعم من. این یعنی چه؟ یعنی بازه‌های بسته زیر مجموعه هم می‌توانند پیوسته حرکت کنند. چرا مجموعه‌ها نمی‌توانند پیوسته حرکت کنند؟ این اشکال دارد. مفهوم مجموعه ما بر بنیادهای گسسته بنیان‌گذاری شده. برای همین نظریه مجموعه‌ها ترکیبیاتی است. گردایه باید بتواند پیوسته حرکت کند. چون ما نباید گردایه از اشیاء را در نظر بگیریم. می‌توانیم گردایه از نقاط هندسی را در نظر بگیریم. گردایه‌ای از آبجکت‌هایی که دارند دیفورم می‌شوند را در نظر بگیریم. این می‌شود آمیزه‌ی گردایه-حرکت. آمیزه‌ی گردایه-ساختار می‌گوید: هر ساختار هم یک گردایه است که ما فراتر از این رفتیم. وقتی نظریه‌ی رسته‌ها را ساختیم، فراتر از نظریه‌ی مجموعه‌ها رفتیم. یک آمیزه داریم که آمیزه سه تاییست. یکی آمیزه‌ی ساختار-نسبت. گردایه-نسبت که این‌ها می‌گویند که، ببخشید هنوز به سه تایی نرسیدم، آمیزه‌ی ساختار-نسبت. گردایه-نسبت می‌گوید همان‌طور که عدد نسبت دو تا چیز است، ساختارها هم باید نسبی مطالعه بشوند. مجموعه‌ها هم باید نسبی مطالعه بشوند. این را نمی‌دانم احتمالاً وارد نظریه‌ی مجموعه‌ها شده باشد. یعنی شما یک دانه مجموعه را نباید مطالعه کنید. نگاشت بین مجموعه‌ها را باید مطالعه کنید. خب این می‌شود همان فلسفه‌ی گروتندیک. آمیزه‌ی حرکت-ساختار که می‌گفت دگردیسی ساختار ریاضی مطالعه می‌کنیم. آمیزه‌ی حرکت-نسبت-ساختار می‌گوید حتی ساختارهای نسبی‌مان را هم ما باید دیفورم کنیم. این‌ها در کارهای لیکاف و نونیس نیستند. این‌ها ایده‌های خودم هستند. پس می‌گویند ساختارهای نسبی را هم ما باید دیفورم کنیم. یعنی نه فقط مجموعه‌ها باید پیوسته بتوانند تغییر کنند، بلکه نگاشت بین مجموعه‌ها هم باید پیوسته تغییر کنند. نگاشت بین ساختارها هم پیوسته تغییر کنند. مانند این می‌شد نکات دیگری در مورد فلسفه‌ی عدد گفت، که راجع به این که چرا نظریه مجموعه‌ها ترکیبیات است، و ورژن پیوسته‌اش چه می‌شود حرف خواهم زد.

آرش رستگار: تجلی هندسه در دنیای متناهی- خیلی کوتاه من اگر بتوانم بگویم هندسه‌ی جبری روی میدان متناهی یعنی چه. یک قدم که راه بروم، یکی که باسواد باشد مثل شما، می‌گویند که عه، تو فقط همین را فهمیدی؟ این چه بود که گفتی؟ ولی حالا طوری نیست که من از بی‌سوادی اصلاً نمی‌ترسم. این فقط

چیزی جز نمایش حقیقت نیست. ولی اتفاقاً هندسه‌ی جبری روی میدان متناهی یکی از آن مثال‌هایی است که لیمیت است، چون روی F_p که کفایت نمی‌کند، شما باید بروی روی بستر F_p . یعنی می‌گوییم همه پدیده‌های هندسی آنالوگ به پیمان p دارند. یعنی این که روی بستر F_p آنالوگ پیدا می‌کنند. نمونه‌اش هم که بدیهی است. اینترسکشن تئوری است. خب ما اینترسکشن تئوری را روی بستر F_p داریم. اگر روی F_p یا F_{p^n} هر جا بگیریم، آن اشتراک‌هایمان که ممکن است آپیر نشوند، ولی خب همیشه بالاخره یک کوفیشنت‌هایی داریم روی یک میدان به اندازه‌ی کافی بزرگی. آن واریته‌های متناهی خاص، آن‌ها اشتراک‌هایشان را میدان بزرگی که به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، نسبت به آن مساله‌ی خاص، کارمان را راه می‌اندازد، ولی خب اگر بخواهید پدیده را برای همه واریته‌ها ببینید مثلاً.

امیرحسین اکبرطباطبایی: نگاه هندسی به شی گسسته. این می‌شود در واکنش به تجلی هندسه در دنیای متناهی. شما به درستی می‌گویید که وقتی یک میدان متناهی بگیرید، این جواب نمی‌دهد و فول فورس هندسه را این‌جا نمی‌شود دید. به خاطر این که ریشه‌های همه‌ی معادله‌ها موجود نیست و بستر جبری ندارید. یک عالم چیز هست که ما به ازاء ندارد که بد می‌شود. حرف بسیار درستی است. بعد انسان می‌رود در بستر جبری، برای این که این اتفاقات نیفتد. کما این که شما روی $\mathbb{R}$ هم کمی کج و کوله می‌زنید به اصطلاح شما. مخصوصاً مثال اینترسکشن خیلی عالی است. شما باید بروید روی $\mathbb{C}$ اگر می‌خواهید هندسه درست کنید. آن‌جا که درست همه چیز اندازه باشد، کم نباید نقطه. این‌جا مساوی‌ها می‌شود نامساوی، تقارن‌ها به هم می‌ریزد، کار بد می‌شود، که حرف درستی است. حالا من یک چیز دیگر مد نظر بود. من حرفم این است که بالاخره من این‌جا دعوایم سر متناهی است، پدیده‌ای که واقعا متناهی است در ذاتش. ما نمی‌بینیم ظاهر هندسه‌ایش را. حالا من نمی‌گویم همه‌ی هندسه این‌جا تجلی می‌کند که نمی‌کند. می‌گویم این‌جا در بین مثلاً این دوازده تا نقطه که من پاشیده‌ام روی صفحه، تو عمراً نمی‌بینی که این‌ها اکت هندسی دارند. حالا من یک کم تخفیف بدهم، اجازه می‌دهم برویم در بستر جبری یا در توسیع متناهی بنشینیم، حالا مثلاً برویم روی $F_p(x)$ و $F_q(x)$. بعد آن‌جا شما قشنگ دستتان باز می‌شود که آنالوژی را بیاورید و یک عالم چیز خوب به ما یاد بدهید. حالا انشاءالله این بماند وقتی که می‌خواهیم در مورد هندسه حرف بزنیم که هندسه چه کارها که برای ما نمی‌کند. ولی این‌جا من هدفم این بود که یک مثال جیبی پیدا کنم از یک جانوری گسسته که در آن هندسه پنهان شده. حالا قبول دارم آن زیادی سخت است. خودم هم الان چیزی ندارم در ذهنم. ولی خب چیزهای خوبی می‌شود این‌جا دید. مثلاً اسپکتروم $\mathbb{Z}$ هست. درست است که متناهی نیست، ولی خب یک سری نقطه‌ی از هم جداست. در واقع اعداد اول را چیده‌ایم پشت سر هم به اضافه‌ی صفر که یک جور نقطه‌ی حدی شماست. من همین‌طوری این را به شما بدهم، این ظاهراً فقط سری اعداد اول است. گسسته است و فاقد معنای هندسی. اما بعد من ادعا می‌کنم این را این‌طوری نگاه نکن. این‌جا یک سری اتفاقات هندسی می‌افتد. به این خاطر آن را نمی‌بینی که چشم‌ت گسسته می‌بیند. این‌ها را با توپولوژی معمولش درک می‌کنی که نشسته‌اند در فاصله از هم در خط اعداد حقیقی. نمی‌بینی آن چیزهایی را که باید ببینی. به خاطر این که خب آدم عاقل به فضا به عنوان فضایی هاسدورف فکر می‌کند، نه غیر هاسدورف. خب حالا بگذارید من سؤال را تخفیف بدهم. حالا اگر متناهی پیدا کردید، خب فیه المراد. اگر پیدا نکردید، بیایید برای ما یک مثال بزنید، یک چیزی را که انسان در اسپکتروم $\mathbb{Z}$ ، که گسسته تا نقطه‌اند، می‌تواند ببیند اگر لنز هندسه را گذاشته باشد، یعنی از هندسه‌ی روی اعداد مختلط بلند کرده باشد آورده

باشد این جا. تصور می‌کنم که حالا هزار تا مثال می‌شود زد. یک مثال خوشمزه و تپلی بزنید. چه می‌دانم مثلاً توپولوژی. مثال خیلی ضعیفش این است که یک توپولوژی این جا هست. بنابراین یک چسبی این جا زندگی می‌کند که همان توپولوژی زاریسکی است. شما آن را نمی‌بینید. اگر لژتان را عوض نکنید بروید لژ هندسی به فرض، نمی‌بینید. خب حالا این ها ضعیف است. این پایین مایین ها می‌پلکد. یک کم می‌توانید بهترش کنید، لوکالیزیشن را بیاورید. ببینید من وقتی تقسیم می‌کنم، به چیزی که مضرب پی ندارد، دارم چه کار می‌کنم. دارم عدد صحیح را تعبیر می‌کنم به یک تابع روی اعداد اول و اگر آن عدد مضرب پی نباشد یعنی در نقطه‌ی پی صفر نیست. حالا وقتی تقسیم می‌کنم بر اعدادی فاقد مضرب پی، انگار دارم با توابع گویایی کار می‌کنم که در نقطه‌ی پی تعریف شده‌اند. این ها خوشمزه‌ترش می‌کند، ولی یک هوا تپل‌تر از این ببینید می‌توانید مثال بزنید؟ یک مثال عامه‌فهم بزنید که ببینید چه قدر خوشگل شد، ولی شما نمی‌فهمیدید وقتی هندسی نگاه نمی‌کردید. گاهی هندسه به گسسته، یک روحی عطا می‌کند که قبلاً ندارد. حالا ببینید از این ها پیدا می‌کنید که یک هوا عمیق‌تر از این بحثی که من درباره‌ی زاریسکی و این ها کردم باشد. به عنوان نظریه اعداددان در دست و بالتان چیز خوب پیدا می‌کنید؟ اسپکتروم $\mathbb{Z}$ که دیگر رفیق فاب شماس است! این هم از سفارش جدید هندسه. من می‌خواهم کمی بیایم پایین اما حرف جالب هم داشته باشم. یک کم خواسته‌ی سختی است. حالا به هر حال این هم شد شماره‌ی پنجاه و نه.

آرش رستگار: هندسه‌ی پنهان در موجودات متناهی یا گسسته- این در مورد هندسه پنهان در اشیاء متناهی یا حالا با تخفیف گسسته. مثالی که زدید اسپک $\mathbb{Z}$ چه هندسه‌ای در خودش پنهان دارد، خب اولین چیزی که به ذهن ما می‌آید، نظریه آراک洛夫 هست، ولی پرسپکتیو نظریه آراک洛夫 را ما از هندسه گرفتیم. آمدم این جا پیاده کردیم. اگر بخواهم بگویم که این جا ساختاری باشد که بعد ما با هندسه بهتر بفهمیم آن را، آره همین آنالوژی اعداد اول و گراف هاست که ما دوگانی آرتین-وردیر را داریم که روی اتال کوهمولوژی اسپک اوکی‌ها هست. می‌بینیم یک پوانکاره دوالیتی بعد سه دارد. بعد می‌بینیم این ها پس باید شبیه گرہا باشند. بعد یک دنیای بزرگی از این اطلاعات را پیدا می‌کنیم، از جمله این که می‌فهمیم که نماد لژاندر، آنالوگ لینکینگ نامبر گرہ هاست. اصلاً کتابهای زیادی این جا نوشته شده. حالا نماد لژاندری که قانون تقابل مربعی ما راجع به آن نوشته شده. شما خودتان ببینید که این چه عظمتی است وقتی بخواهد این آنالوگ یک کانسپتی در گرہا باشد. ولی شما می‌گفتید که ما مثلاً متناهی تا نقطه را بپاشیم توی صفحه. به نظر من آن باز آبجکت متناهی نیست. چرا؟ یک عالم ساختار هندسه در آن دارد. مثلاً من، این مثال را، داشتیم توی پارک با محمد راه می‌رفتیم، فکر می‌کردم هم‌زمان که پارک قیطریه درخت‌هایی در محوطه‌اش بود، ما نگاه که می‌کردیم، شکل و قیافه درخت‌ها با هم فرق داشت. کلفتی‌شان، رنگشان، زاویه‌هایشان، شکلشان باهم فرق داشت. ما به این فکر کردیم که خب این ها که از پشت هم رد می‌شوند، مکان نسبی‌شان نسبت به چشم ما عوض می‌شود. این یک عالم داده است. ما ده قدم راه برویم و به این درخت‌ها نگاه کنیم، این داده‌ها را رکورد کنیم، بعد بگوییم که شما آن ساختار هندسی جا گرفتن درخت‌ها را بازسازی کنید، کلی اطلاعات به ما می‌دهد. چیزهای دیگری هم می‌شود گفت. مثلاً شما متناهی تا نقطه داشته باشید، یک عالم مسائل که در ترکیبیات هندسی مطرح می‌شود آن جا وارد می‌شود. مثلاً در آنالیز هم همین طور. ففرمن با همکارانش سه تا مقاله سری هم دارد که متناهی تا نقطه در فضای R^n می‌آیند، اصلاً به طور کنونیک یک تابع نسبت می‌دهند که مثلاً جواب یک معادله دیفرانسیل خاصی باشد، یا جواب یکتای یک دیفورمیشن

پرابلمی باشد که وریشن آن پرابلم باشد. از این چیزها خیلی زیاد داریم. وقتی چند تا نقطه در صفحه باشند، ساختار آن صفحه یک عالم چیز هندسی به شما می‌دهد که به نظرم خیلی‌هایش هم در ترکیبیات هندسی وارد شده باشد. مثلاً شما کاشی کاری ورونوی را داری که مثلاً راجع به کاشی کاری ورونوی بعدهای بینهایت یک چیزی به نظرم رسید: تز دکترای کسری علیشاهی. ولی من فکر می‌کنم این تعداد متناهی نقطه در صفحه که آبجکت متناهی نیست. آبجکت متناهی چه می‌شود؟ آبجکت متناهی مثلاً بگوییم یک گراف است یا چیزی شبیه به آن. بگویید هندسه‌اش چیست؟ من قبلاً راجع به موتیو وابسته به گراف یا L -تابع یک گراف و این‌ها صحبت‌هایی کردم. حتماً منظور شما این نبوده. پس آبجکت هندسی متناهی اگر احجام افلاطونی را مثلاً، یا مجموعه‌های محدب را بگوییم، آن‌ها هم که توی فضا است. اگر بگوییم یک بلاک دیزاین مثلاً آبجکت هندسی متناهی کنارش است، خب شما به یک نوعی گروه اتومورفیسم‌هایش که یک گروه متناهی است، که لزوماً جابه‌جایی نیست. من راجع به این که یک گروه ناجابه‌جایی، چرا یک آبجکت هندسی است و نه یک آبجکت جبری صحبت کردم. و این که موجودات ناجابه‌جایی را باید دیفورم کرد و مطالعه کرد. گروه‌های ناجابه‌جایی هم شما می‌توانید ترجمه‌اش کنید به زبان توابع. مثلاً به زبان کوانتوم گروپ و این‌ها. بعد آن‌جا دیفورم‌شان کنید. بنابراین این‌ها هم باز چیزهای تعریف شده‌ای هستند. فکر نمی‌کنم این‌ها منظور شما باشد از آبجکت هندسی متناهی. اگر من بگوییم یک فضای متریک متناهی هست، شما باز هم می‌توانید امبدش کنید توی یک R^n ای. باز همان حرف‌هایی که در R^n امبد کردید را بزنید. یا بیاید مثل یک گراف در نظرش بگیرید. یونیورسال کاورش را در نظر بگیرید. یونیورسال کاورش یک فضای متریکی می‌شود که آن‌هم کلی مطالعه شده. باز هم فکر نمی‌کنم این آن چیزی باشد که منظور شماست. هرچه، مثلاً یک فضای توپولوژی متناهی هم به نظرم دیگر این بی‌مزه می‌شود. دیگر آن چیزی که شایسته مطالعه باشد، و شما هندسه‌ی کنارش را بخواهید در بیاورید نمی‌شود. بنابراین نمی‌دانم که این مثال‌هایی هم که زدم، می‌دانم که خواسته شما را برآورده نمی‌کند، ولی یک موجود متناهی که کلی هندسه پشتش باشد و ما توی آن دنیای متناهی آن هندسه را ببینیم، بیرون از این مثال‌ها که گفتم، فعلاً که تخیلم کار نمی‌کند. ولی خب یک چیز دیگر هم که قبلاً گفتم هم تکرار می‌کنم دیگر. متناهی تا نقطه در صفحه خودش یک شکل است. ما باید بتوانیم به عنوان یک عدد با آن برخورد کنیم. آن حساب ذاتی هم که در درک در یک نگاه سریع در آن هست، آن‌هم این موجود را در خودش دارد. بنابراین باید ببینیم. نمی‌دانم بهتر از این من چه می‌توانم خدمت شما بگویم.

امیرحسین اکبرطباطبایی: در واکنش به هندسه و گسستگی- این در واکنش به هندسه و ارتباطش با گسسته است. عرضم به حضورتان، این مثال‌ها که می‌زنید بعضی‌هایشان خیلی خوب است. بعضی‌هایشان کمتر خوب است. ولی همه‌شان ویژگی مشترکی دارند. آن این است که این‌ها زیادی advanced هستند. نمی‌شود آوردش پایین. یعنی من فکر کردم به این مثال‌هایی که آوردید، جز آن مثالی که در مورد درختان می‌زنید در پارک که خیلی عجیب است که این حجم داده را اگر جایی ذخیره کنیم و بعد سعی کنیم که درکش کنیم. من این را این‌طوری تعبیر می‌کنم که این حجم از داده را اگر شما یک جا بنویسید، به عنوان داده‌های عددی، هیچ نظمی در آن دیده نمی‌شود. مگر این که شما بلد باشید این را هندسی ببینید. شوخی عالم این است که از طنز روزگار، من مقدمه‌ی کوچکی، یک چند صفحه نوشتن آن موقع که می‌خواستم درس ریاضیات ساختارگرایانه به زعم گروتندیک را شروع کنم. بعد برای این که برای عام توضیح بدهیم ما این‌جا چه کار

می‌کنیم، چه فیلی هوا می‌کنیم، مثالی می‌زنم. مثلاً فرض کنید یک شی سه بعدی را جایی آویزان کرده‌اید. از جهات مختلف به آن نور می‌تابانید. از سه طرف دیتا را ریسو می‌کنید. دیتا را می‌نویسید. خب این دیتا خیلی چیزها را به شما یاد می‌دهد. آن جا مثال می‌زنم که چه چیزهایی می‌تواند به شما یاد بدهد. ولی این داده هیچ وقت نمی‌شود آن تصویر واقعی. صرفاً به این دلیل که در آن دیتاهای نامربوطی هست. اشتباه می‌شود فهمید. حالا به هر حال جز این یک مثال شما که مردم می‌توانند بفهمند، من فکر می‌کنم بقیه دیگر زیادی سخت هستند. هیجان انگیزترینشان به نظرم آن که بشود برای انسان دو پا توضیح داد، ارتباط نماد لژاندر با آن لینکینگ نامبر گره‌هاست، که آن را هم من نمی‌دانم چه‌طوری می‌شود باز کرد؟ بدون دسترسی مثلاً به اقال کوهمولوژی و این‌ها، تعریف درست حسابی ازش داد، یک حسی ازش داد. حالا اگر هم بشود هم خیلی یاد نمی‌دهد که ورود فکر پیوسته به گسسته چه‌ها به ما یاد می‌دهد. باید خیلی عمیق بشویم در آن تا چیزی یاد بگیریم. من امیدم این بود که شما یک چیزهایی ساده، نه خیلی عمیق و این‌ها، که نمی‌توانستیم قبلاً ببینیم به ما یاد می‌دادید. حالا یک مثال دیگر هم می‌زنید. می‌گویید که گروه و این‌ها هست که باید در مورد آنها هم در هندسه حرف بزنیم. که گروه را که ناجابه‌جایی است، مثلاً باید شی هندسی دید. احتمالاً برعکس گروه آبلای که شی‌ای جبری است. این به نظرم حرف عمیقی در آن هست. اصلاً یک جا دعوا برمی‌گردد به مقایسه‌ی هموتوپای تایپ و استیبل هموتوپای تایپ در شکل بینهایت، ولی من عقلم نمی‌رسد راستش که چه بگویم که مخاطب عام استفاده بکند. این جا من امیدم این بود چیز ساده‌تری باشد، از این دست که آخر این هم کمی مجرد است شاید. که مثلاً شما اگر نظریه‌ی حلقه بخوانید، چرا حلقه‌ی موضعی باید مهم باشد. همین‌طوری فرض کنید سر کلاس هستید. کسی برای اولین بار به شما نظریه‌ی حلقه‌ها یاد می‌دهد. یادآوری می‌کنم حلقه‌ی موضعی حلقه‌ای است که تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد. بعد استاد شما حلقه را موضعی‌سازی می‌کند. وقت می‌گذارد روی موضعی حرف زدن. خب نادانی مگر؟ چرا حلقه با یک ایده‌آل ماکسیمال باید مهم باشد؟ تا وقتی نگاه هندسی نداریم، که واقعا روتین تدریس این مطلب هم همین است، ما مطلب را نمی‌فهمیم. اصلاً چون این نظریه را دولوپ نکردند قبل این که ببینند یک ربط هندسی دارد. راستش خودم حالا همچنین فکری هم نکردم که ببینم چیزی به ذهنم می‌رسد یا نه. ولی امید داشتم چون این جا منطقه‌ی ثروتمندی است، خیلی غنی است، این ارتباط هندسه با اعداد و هم‌زمان با جبر، شاید بشود مثال خیلی خوبی پیدا کرد. حالا اگر هم پیدا نشود، اشکالی ندارد. بالاخره بعضی وقت‌ها سعی می‌کنیم موفق نمی‌شویم. این‌ها ایرادی ندارد. حالا من یک کم بعداً می‌آیم یک جمع بندی می‌کنم که تا الان از ترکیبیات چه چیزهایی بلدیم. آیا این کافی است، یا باید از این طرف و آن طرف سعی کنیم فشار بدهیم. یکی از این درهایی که ول کردیم را برویم باز کنیم. یک نکته‌ی دیگر هم درباره‌ی این استعاره‌های مختلف از اعداد است که شما معرفی می‌کنید. آن‌ها هم مهمند، ولی بحث فعلی ما نیستند. یکی از چیزهای دیگری که مهم است، این هموتوپای مربوط به گراف‌هاست که به آن می‌گویند هموتوپای گسسته. این هم چیز بامزه‌ای است، ولی باز مطمئن نیستم در مورد آن حرف زدن چه‌قدر خوب است. باید یک کم فکر کنم. چیزهایی که می‌گوییم، ارتباط به تابع زتا دارد. بعد باید بگوییم تابع زتا روی گراف چیست. نمی‌دانم باید بگذاریم یک وقتی که یک فصل در مورد زتا حرف بزنیم. چون این‌ها یک جورهایی ایده‌های مادر هستند، یعنی زتا همه جا سر و کله‌اش پیدا می‌شود، هموتوپای هم مداوماً پیدا می‌شود. این‌ها چیزهایی نیست که وابسته به یک فیلد خاصی باشد، یا می‌شود یک دری انتخاب کنیم و از آن جا شروع کنیم. بالاخره از یک جا باید شروع کرد. نمی‌دانم باید یک کم فکرها را جمع کنم ببینم باید چه کار کنیم. حالا شما اگر باز به ذهنتان رسید مثالی شبیه این اهمیت

موضعی بودن یک حلقه برایمان مثال بزنید. چیزهایی از این دست که یک کم عمیق هم هستند، فقط شروع یک نظریه نیستند. از این جور دیدن‌ها که ما در نظریه‌ی اعداد نمی‌دیدیم، ولی با هندسه‌ی حسابی شروع کردیم به دیدن. ولی با فرض این که بشود این را منتقل کرد به مخاطب عام. حالا انشاءالله پیدا می‌کنیم چنین چیزی را.

آرش رستگار: هندسه‌ی پنهان- این که من در موجودات متناهی یک مثال هندسه‌ی پنهان بزنم و خیلی هم پیشرفته نباشد، راستش این تمرین یک ذره سختی است برایم، که از ریاضیات پیشرفته استفاده نکنم، ولی خوب باید بتوانم جواب بدهم. این مسئله‌ای نیست که احساس کنم از حد توانایی‌هایم فراتر است. بنابراین باز هم تلاش می‌کنم، ولی باز برای تمرین، یک مثال از هندسه‌ی پنهان می‌زنم. این دفعه پنهان در طبیعت که بگویم اصلاً هندسه‌ی پنهان یعنی چه؟ این مثال از لئوناردو داوینچی است، نابغه بزرگ. عجیب این که این چرا چنین نابغه‌ای به ریاضیات کشیده نشده؟ این را هم که بگویم، شما می‌گویید چرا کشیده شده، نمی‌دانم. می‌گوید که درخت‌ها شاخه‌هایشان که تقسیم می‌شود، به نظر می‌آید در خیلی از درخت‌ها زاویه‌شان یک چیزی تو مایه‌های ۹۰ درجه است. این آبرویشان را جناب لئوناردو داوینچی به اشتباه سعی کرده که ببیند. چرا؟ گفته که ببینید اولاً که شاخه‌ها گرد هستند. دوماً آوندهایی که توی شاخه‌ی اصلی است، وقتی دوشاخه می‌شود، این‌ها تقسیم می‌شوند. یک عده می‌روند این طرف و یک عده می‌روند آن طرف. بنابراین مساحت شاخه اصلی باید مجموع مساحت‌های شاخه‌های فرعی باشد. بنابراین مربع شعاعشان یا مربع قطرشان، مجموع آن مربعات قطر است. بنابراین قطرهای این‌ها در قضیه فیثاغورس صدق می‌کنند. بنابراین شاخه‌ها باید به این سمت گرایش داشته باشند که زاویه‌شان تقریباً ۹۰ درجه باشد. بعد خوب بایولوژیست‌ها می‌روند در درخت‌های مختلف اندازه می‌گیرند، نمودار می‌کشند. بعد می‌گویند خوب این شاخه‌ها اگر کمتر از ۹۰ درجه یا بیشتر از ۹۰ درجه است، دلیل بیولوژیکش چیست؟ آیا درخت ریزش دارد، شاخه‌ها شکسته‌اند؟ یا از این چیزهای عمیق‌تر از تخیل من. و این یک پدیده‌ای فقط در ریاضیات نیست، یا ریاضیات پنهان در طبیعت نیست، یا هندسه‌ی پنهان در طبیعت یا هندسه‌ی پنهان در ترکیبیات نیست. یک پدیده‌ای در مورد حقیقت شناخت انسان داریم که تو یک کلمه‌ای در نهج البلاغه این‌طور ازش یاد شده. می‌گوید حضرت علی که دفائن العقول، یعنی عقل ما در آن دفینه دارد. چیزهایی هست که عقلمان به آن می‌رسد، ولی زیر خاک است. باید زیر خاک را بکنیم که در بیاید. همچنین پدیده‌ای در شناخت انسان وجود دارد. این‌طور نیست که هر چه می‌فهمیم، در عقلمان دم دست باشد. بعضی‌هایش هم در عقلمان هست، ولی پر زحمت و زیرخاکی و این‌ها. حالا آن گفته دفائن العقول، چرا زحمت را گفته دفن کردن. خوب شغلش چاه حفر کردن بوده. سال‌های زیادی چاه آب حفر می‌کرده. با سختی‌اش همیشه مواجه بوده. یکی از سخت‌ترین شغل‌هاست دیگر. کشاورزی سخت‌ترین شغل است. از آن سخت‌تر کسی است که زمین را می‌کند. یعنی کسانی که مثلاً قنات درست می‌کنند، چاه می‌کنند. این‌ها شغلشان از کشاورزی هم سخت‌تر است. حالا یک نفر موقعی که نیاز دارد برای زمینش چاه می‌کند، بعد تمام می‌شود، می‌گوید چه قدر سخت بود. چه سال سختی بود، یا چه ماه سختی بود. یکی هست شغلش اصلاً کندن چاه است. آن کسی که شغلش کندن چاه است در شناخت هم ورزیده می‌شود. به جایی می‌رسد که به دفائن العقول فکر می‌کند. حالا از ریاضی نمی‌خواهم دور بشوم، همین کار را می‌شود در ریاضیات متناهی انجام داد. حالا به نظر من یک ذره آدم به جای این که بگوید ترکیبیات متناهی، چون آن وقت یک مزه‌ای دارد از مزه فهم

ترکیبیات دان‌ها، آدم بگوید از ریاضیات متناهی و بی‌نیم دفاانش چیست؟ هندسه‌ی پنهانش چیست؟ حالا من به این فکر می‌کنم.

آرش رستگار: هندسه‌های تصویری متناهی - یک مثالی از این که یک موجود متناهی وقتی که شما هندسه‌ی پشتش را می‌بینید، چه قدر بهتر می‌فهمیدش، به نظرم رسید. ولی خیلی مثال بدیهی و شناخته شده‌ای است. ولی خب آن کاری را که شما می‌خواهید، فکر می‌کنم به خوبی انجام می‌دهد. صفحه‌های تصویری متناهی خصوصیات ترکیبیاتی دارند، که این خصوصیات ترکیبیاتی در بعد دو، مثال‌های غیر هندسی هم دارد. ولی در ابعاد بالاتر همه‌شان از صفحه‌های تصویری روی میدان‌های متناهی می‌آیند. بنابراین جا دارد که ما بگوییم هندسه‌ی پنهان. آن مسأله‌ی ترکیبیاتی، هندسه‌ی فضاها، تصویری است. واقعا هم به ما شهود می‌دهند. آن هندسه‌ی فضاها، تصویری و ارتباطاتشان و نگاشت‌های بینشان و ساختار هندسی‌شان که ما با چشم می‌بینیم، تخیل می‌کنیم، راجع به این که با آن موجودات ترکیبیاتی چه کارهایی می‌توانیم بکنیم، به ما خیلی حرف می‌زنند. فکر کنم این، آن مثال خواسته‌ی هندسه‌ی پنهان در یک شیء متناهی شما را برآورده می‌کند.

امیرحسین اکبرطباطبایی: هندسه‌ی تصویری، جبر و طرح‌های بلوکی - یک چند تا نکته‌ی خیلی پراکنده به عqlم می‌رسد. من هم ذهنم می‌رود همان جایی که ذهن شما می‌رود اساسا. یعنی همین هندسه‌های متناهی. اصلا به طور خاصی هندسه‌ی تصویری متناهی. حالا نکاتی که به عقل من می‌رسد، یک بخشی از آن، کارهایی است که انجام شده. یک بخش دیگر هم هست که به نظر جالب است، ولی اگر بخواهیم انجام بدهیم، خیلی هم جالب در نمی‌آید. خیلی خام است یعنی باید با مقدار زیادی نمک مصرف بشود. ولی حالا من سعی می‌کنم که یک چیزهای معقولی بگویم. اول این که، خب همه‌ی ما می‌دانیم که هندسه‌ی تصویری دو بیان مختلف دارد. اولی بیان سینتیک یا اصل موضوعی است. اول فرض می‌کند که دو گونه موجود در هندسه وجود دارد، یعنی خط و نقطه. بعد هم اصولی وضع می‌کند درباره‌ی وقوع نقطه‌ها روی خط‌ها. مثلا اصلی داریم که می‌گوید که از هر دو نقطه یک و تنها یک خط می‌گذرد. یا اصلی داریم که می‌گوید هر دو خطی در یک و تنها یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند که خب این دومی مختص هندسه‌ی تصویری است و مثلا در هندسه‌ی آفین اتفاق نمی‌افتد. بیان دوم اما همان است که معمولا آن را بلدیم یعنی بیان آنالیتیک یا تحلیلی. این جا نقطه در واقع خطی است که از مبدأ می‌گذرد. خط هم اصولا همان خط است ولی از مبدأ نمی‌گذرد. این دو تا نحوه مختلف برخورد با هندسه‌ی تصویری است. همین وضعیت را مثلا با هندسه‌ی اقلیدسی، هذلولوی و بیضوی هم داریم. حالا این بحث به ترکیبات چه ربطی دارد؟ ربطش در آن نسخه‌ی سینتیک هندسه است. این اساسا درست است که ما به آن هندسه می‌گوییم، ولی اگر دقت کنید می‌بینید که هیچ چیز نیست جز یک سری دیتا درباره‌ی یک رابطه‌ی دومی بین دو سری موجود گسسته. بنابراین این دنیای هندسی شما یک شی گسسته‌ی ترکیبیاتی است. حالا مثلا می‌شود نقطه‌ها را نقطه فرض کرد و خط‌ها را زیرمجموعه‌هایی از این نقاط. وقوع هم عضویت نقطه در مجموعه باشد. بنابراین یک سری زیرمجموعه از یک مجموعه داریم. این مجموعه‌ی نقاط لزوما متناهی نیست اما اگر باشد، آن وقت هندسه‌ی ما می‌شود هندسه‌ی متناهی. آن وقت این جانوری که دست شماست می‌شود یک موجود ترکیبیاتی. بعد نمونه‌هایی داریم که بلدیم. مثلا صفحه‌ی فانو، یک صفحه‌ی تصویری متناهی است. حالا از این دو تا بیان که در هندسه‌ی تصویری دیدیم می‌شود برای موجودات دیگر ترکیبیاتی هم

استفاده کرد. انگار مثلا من دارم می گویم که یک نسخه ی جدیدی از تعبیر دکارت شاید وجود داشته باشد برای ترکیبیات. تا قبل از دکارت ما با یک موجود هندسی طرفیم، دکارت به ما یاد می دهد که می توانیم برای این ها مختصات بگذاریم. به آنی که مختصات می گذاریم با یک موجود جبری طرف هستیم و کار آسان تر می شود. حالا من ادعا نمی کنم که همیشه می شود این کار را کرد، ولی شاید هم بشود. مثلا همین آنالیز روی گراف که بحثش را کردیم. به فرض که شما کمیت های روی گراف را مطالعه می کنید. کمیتی که به هر راس یا یال گراف مقدار نسبت می دهد، وزن نسبت می دهد، فلان را نسبت می دهد. در واقع کاری که دارد می کند این است که دارد روی آن موجود متناهی مختصات گذاری می کند. بعد تغییر مختصات را مطالعه می کند. همان طور که شما یک شی هندسی را اگر به من بدهید من روی آن مختصات می گذارم، بعد کمیت های مختلف را مثلا x, y و z را که از هر نقطه می گیرم، شما می توانید تعبیر کنید به توابع که از شکل می روند به مثلا $\mathbb{R}$. روی یک گراف هم وضع همین طور است. توابعی داریم که از گراف می روند به $\mathbb{R}$. یعنی می خواهم بگویم که خیلی هم بعید نیست چنین کاری. این رهیافت دکارتی به ترکیبیات. حالا می توانید تصور کنید که چه قدر هم پرفایده ممکن است باشد این فکر. به هندسه ی ماقبل دکارت و مابعد دکارت فکر کنید. می بینید که با جبری سازی هندسه یک دفعه چه درهائی باز می شود به رویمان. یکدفعه هندسه ی اقلیدسی اصل موضوعی تبدیل می شود به یک ماشین عظیمی که جبر در آن آزاد کرده است. حالا چیزی که می گویم این است که این ایده ی مختصات گذاری چیز خوبی است برای ترکیبیات. حالا در کیس هندسه ی متناهی، ما یک چیزهای بیشتری بلدیم. بگذارید قصه اش را بگویم. فرض کنید که من به شما یک میدان می دهم، مثلا متناهی، بعد شما روی این میدان متناهی می توانید هندسه ی تصویری بنویسید با همان سبک تحلیلی. چون میدان متناهی است، همه چیز هم متناهی است. تعداد نقطه ها و خط ها و غیره. یک هندسه ی تصویری می توانیم بنویسیم یعنی یک مدلی بنویسیم که نقطه و خط و وقوع را معنی کنیم به طوری که آن اصول که حرفش را زدیم در آن مدل درست باشد. حالا خیلی خوب می شد اگر مطمئن می شدیم که هر هندسه ی تصویری متناهی هم دقیقا یکی از این ها است. این حکم برای ابعاد سه و بالاتر از آن درست است اما در بعد دو یعنی برای صفحه دیگر درست نیست. در صفحه ما هندسه تصویری های هم داریم که از این جا نیامده اند. اگر اشتباه یادم نباشد، فکر کنم به آن هایی که از این مسیر تحلیلی می آیند می گویند دزارگین و آن یکی ها نان دزارگین هستند، و دزارگین برمی گردد به اسم دزارگ و قضیه ای هست به اسم قضیه ی دزارگ و این هندسه های تحلیلی دقیقا همان هایی هستند که آن قضیه را ارضا می کنند، اگر اشتباه نکرده باشم. حالا این را تصحیح می کنیم با دکتر رستگار، اگر اشتباه بگویم. حالا شما این جزئیات را فراموش کنید. فرض کنید که این ها واقعا یکی هستند، حالا بعد بالاتر را در نظر بگیرید یا دزارگین ها را در بعد دو در نظر بگیرید. حالا چون قضیه ی دزارگ یک قضیه ی ترکیبیاتی تر است که با وقوع و این ها می توان نوشت، این یکسانی دو بیان هندسه در واقع یکسانی جبر با موجوداتی ترکیبیاتی است. در یک طرف یک موجود ترکیبیاتی داریم که درباره ی زیرمجموعه های یک مجموعه ی متناهی است. آن طرف هم یک میدان متناهی داریم. بنابراین یک کانکشن برقرار کردیم بین میدان ها و هندسه ها، یعنی من نسخه ی ترکیبیاتی میدان را که موجودی جبری است پیدا کردم. یک میدان متناهی را من می توانم یک بیان دیگری ازش پیدا کنم که آن صفحه ای است که روی میدان واقع شده. این موجود ترکیبیاتی است، در واقع ترکیبیاتی کردم جبر متناهی را و بعد خب شما این جا می توانید فضولی کنید که این پلی که درست کردید چه قدر اجازه می دهد که جبر را منتقل کنید به ترکیبیات؟ مطمئن نیستم که چقدر می شود این کار را کرد یا اصلا به درد می خورد یا نه. حالا مثلا شما آن

طرف در میدان‌ها مثلا توسیع میدان دارید. اگر نتوانید یک معادله را حل کنید در یک میدانی، میدان را توسیع می‌دهید. خوب کم و بیش معادل هندسی-ترکیبیاتی آن شبیه این است که مثلا یک نقطه‌ای که یک کاری را باید برآورده می‌کرده موجود نیست، مثلا یک اشتراکی که باید موجود نیست. و در نتیجه من شی ترکیبیاتی را بزرگ می‌کنم تا آن نقطه پیدا بشود. به این شکل ممکن است که بشود منتقل کرد یک میزانی از نظریه‌ی توسیع میدان‌ها را به این طرف. مثلا می‌شود فکر کرد که تئوری گالوا این طرف چه می‌شود در مقایسه با آن طرف. می‌شود این‌جا فکر کرد که تبدیل‌های صفحه به صفحه را بررسی کنیم که یک صفحه‌ی کوچک‌تری را ثابت نگه می‌دارد. باید دید دیگر. نمی‌دانم. می‌خواهم بگویم که جبر معادلی دارد این طرف. یعنی یک پلی است بین جبر و بعضی موجودات ترکیبیاتی.

حالا می‌شود این ارتباط را جدی‌تر هم گرفت. این دفعه برای یافتن بیان ترکیبیاتی اشیای خمیده‌ی هندسی به جای اشیای صافی مثل صفحه. مثلا مجموعه‌های جبری که موجود مورد علاقه‌ی ما در هندسه‌ی جبری هستند، ریشه‌های چندجمله‌ای و این‌ها را ببریم آن طرف و تبدیل کنیم به پدیده‌های ترکیبیاتی. حالا ممکن است فکر کنید که من دارم حرف‌های بیخود می‌زنم و این‌ها یک کم زیادی دور از ذهن هستند. واقعا این‌طور نیست. یک بخشی از هندسه‌ی متناهی وجود دارد که دقیقا برای همین کار است. ولی آن طوری که شایسته و بایسته است به نظرم نیست. یک سری نکات دارد. مثلا می‌توانید پرسید آن طرف در هندسه‌ی جبری تحلیلی شما مقاطع مخروطی یا چه می‌دانم معادله‌ی درجه دوم و ریشه‌هایش را دارید، این طرف چه دارید؟ یادم نیست جزئیاتش را. نسخه‌ی ضعیفش را فکر کنم می‌گویند اوبال. بعد نسخه‌های قوی‌ترش را می‌گویند آرک. ایده این است که معادل خم درجه‌ی دو یک زیرمجموعه از نقطه‌هاست که هر خطی آن را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند. در ذهنتان یک بیضی تصور کنید. هر خطی آن را در حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند چون درجه‌ی معادله‌اش دو است. بعد می‌شود یک اکسیوماتی‌زیشن نوشت برای این خم‌ها. اینجا یک قضیه‌ی معروفی هست که من یادم رفته که کی ثابت کرده. قضیه می‌آید و این مقاطع مخروطی را رده‌بندی می‌کند به شکل ترکیبیاتی. برای درجه‌های بیشتر از دو چه؟ این یک توئیستی دارد که مجموعه‌ی جبری اینجا خیلی خوش تعریف نیست. دلیلش هم این است که چون فضای من متناهی است، هر مجموعه‌ای جبری است و بنابراین من اگر بگویم مجموعه‌های جبری را می‌خواهم مطالعه کنم، این یعنی دارم همه زیرمجموعه‌ها را مطالعه می‌کنم. بنابراین یک سطحی از محدودیت باید ایجاد کرد یا مثلا پارامتریک بررسی کرد. این پارامتریک کردن هم رهیافت معمول گذر از نامتناهی به متناهی است مثلا در رمزی تئوری نمونه‌اش را می‌شود دید. حالا به هر حال حرفمان این است که هندسه‌ی جبری را می‌توانیم تا حدی به ترکیبیات محض منتقل کنیم. حالا ممکن است بگویید که خوب انگار دارید هندسه را دو جور مطالعه می‌کنید. سینتتیک و غیرسینتتیک. بالا برویم، پایین بیاییم مطلب همان هندسه است. چه لزومی دارد که من بیایم این کارها را بکنم، بعد بیایم بفروشم به عنوان ترکیبیات؟ این‌جا من می‌توانم فضایی پیدا کنم و درباره‌ی بلاک‌دیزاین حرف بزنم که دکتر رستگار مدام به آن اشاره می‌کند. چرا این بلاک‌دیزاین این‌قدر مهم است؟ برای این که بلاک‌دیزاین تعمیم طبیعی هندسه‌ی تصویری است. این طوری به آن نگاه کنید که هندسه‌ی تصویری به شما می‌گوید که هر دو خطی دقیقا یک‌جا برخورد می‌کنند و هر دو نقطه‌ای دقیقا یک خط ازشان رد می‌شود. همین‌ها شرط‌های بلاک‌دیزاین است برای پارامترهای خاصی. یادم نیست دقیق، ممکن است که اشتباه بگویم، ولی مثلا شما یک سری زیرمجموعه را برداشتید از مثلا یک سائزی بعد

می‌خواهید که هر دو تای آن‌ها دقیقا یک نقطه در اشتراک آن‌ها باشد. در کیس فضای تصویری سائز شما دو است که قرار است هر دو نقطه‌ای یک خط را معلوم کنند دقیقا. که این یک حالت خاص بلاک‌دیزاین است. این ارزش دارد که از آن الهام بگیریم. ما از هندسه‌ی تصویری که از هندسه‌ی جبری ترجمه کردیم به ترکیبیات می‌توانیم الهام بگیریم، ببینیم این‌جا چه چیزهایی مهم است. مثلا اگر این یک تعمیم از هندسه است، معادلات دیوفانتی این‌جا چه می‌شوند؟ این ساختارهای دیوفانتی چه چیزهایی هستند در بلاک‌دیزاین که باید جالب باشند؟ یا برعکس ما هندسه را به کمک مختصات نوشتیم و دیدیم که یک میدان آن پشت است. حالا بلاک‌دیزاین را چه طوری می‌شود به آن مختصات داد؟ آیا می‌شود آن را بُرد آن طرف و تحلیلی‌اش کرد؟ من دارم الهام می‌گیرم برای چیزی که خود ترکیبات کار هم دوست دارد. اتفاقا به حق هم دوست دارد بلاک‌دیزاین و این‌ها را. عملا ما می‌دانیم که این‌ها به درد می‌خورد در کورکتینگ کُد و این‌طور بحث‌ها، بحث‌های به درد بخور و روی زمین و ...

نکته‌ی دیگری که این‌جا می‌خواهم به آن اشاره کنم حضور پارامتر است. دکتر رستگار هم به حق اصرار می‌کنند که موجود هندسی را باید در خانواده‌اش مطالعه کرد که حرف درستی است. این‌جا هم یک جور خانواده در کار است. اول یک غری بزنم که در مطالعه‌ی این کونیک‌ها همه چیز خیلی حساس است به کاردینال. می‌پرسند که چند تا از این کونیک‌ها با فلان شرط وجود دارد یا مثلا ماکزیمم کاردینال این چه می‌تواند باشد؟ از این چیزهایی که در ترکیبیات شمارشی معمول است. چیزی که بد است این است که این‌ها ساختمانند و ارزش مطالعه‌ی ساختاری دارند. من برای این که دفاع کنم که مشکلی با خود شمارش ندارم، شما ببینید در خود هندسه‌ی جبری هم وقتی میدان متناهی و این‌ها دارید، دوست دارید بدانید چند تا نقطه روی خم شما واقع شده. این را می‌شمارید. این مهم است. حدس وی که معادل حدس ریمان در دنیای جبری است بر اساس همین شمردن و این‌هاست. بنابراین شمردن مهم است. منتها ساختمان هم مهم است. یعنی تمام هندسه‌ی جبری که در مورد شمردن در کیس متناهی نیست. در ترکیبیات هم ساختمان‌ها، نگاشت‌های بینشان و این‌ها باید مهم باشند. این از این. حالا برگردیم به مطالعه کردن اشیا در خانواده‌هایشان که دکتر رستگار هم خیلی دوست دارند. یک خانواده‌ی خیلی طبیعی که بلاک‌دیزاین‌ها دارند همین پارامترهای سائز است. پارامتری که وقتی دو است می‌شود هندسه‌ی تصویری. آن پایین تعداد اشتراک این‌ها که من آلان درست یادم نیست، وقتی می‌رود بالا چیزهای مختلفی می‌شود. این خانواده احتمالا خانواده‌ی معقولی است. به شما چیزهای جالبی یاد می‌دهد که حالت خاصش را در هندسه یاد گرفتی. از آن‌جا حدس می‌زنی که بزرگ‌ترهایش را چه ببینی. برداری بیاوری این‌جا مطالعه کنی.

یک نکته‌ی دیگر که به همین بهانه‌ی بلاک‌دیزاین باید بگویم درباره‌ی راززدایی در ریاضیات است. یعنی رازگشایی از اتفاقاتی که رمزآلودند. این یک رهیافت گروتندیکی است به ریاضیات. که هرچیزی باید در ساده‌ترین حالت ممکنش باشد بدون هیچ تریکی. نسخه‌ی المپیادی آن این است که بدون خط اضافه، مسئله‌ها باید حل شوند، خیلی باید تمیز و گام‌ها همه بدیهی باشد. البته که شما باید در آخر چیزی نابدهی را اثبات کنید اما فقط و فقط گام‌های بدیهی را بردارید در مسیرتان به سمت امر نابدهی. اگر شما چیزی را دیدید راز آلود که سر و کله‌اش همه‌جا پیدا می‌شود و خیلی عجیب مسائل را حل می‌کند باید از خودتان پرسید برای چه. یک توضیح عمیق‌تری باید باشد. مثلا دارید نظریه‌ی اعداد کار می‌کنید. یک دفعه سر و کله‌ی تابعی پیدا می‌شود به اسم زتای ریمان که تابعی است با مقادیر مختلط. این چیست؟ این چه کار به

عدد دارد؟ بعد می‌بینی که از این‌ها یکی برای وارسته هم درست کرده‌اند، یکی هم برای گراف، اصلاً هرکی می‌آید می‌بینی که زتای خودش را دارد. این مشکوک است. یعنی شما باید پرسید که این فرم‌ها و سری‌ها چه هستند؟ برای چه سر و کله‌شان این‌جا پیدا شده است. هر کدام هم به درد یک کار می‌خورد. اگر این رازآلود است که هست، شما باید سعی کنید که به آن جواب بدهید. اگر نمی‌توانید معنی‌اش این است که یک چیزی را متوجه نمی‌شوید. ممکن است که ریاضیات در دوره‌ی شما هم هنوز نفهمیده باشد، ولی باید بروید دنبالش که سعی کنید بفهمید که این راززدایی بشود ازش. مثلاً برنامه‌ی لنگلندز را می‌شود تبدیل کرد به تلاش برای راززدایی از این حضور زتای ریمان. حالا این چه ربطی به بلاک‌دیزاین دارد؟ این‌جا ما یک راززدایی کوچک می‌توانیم بکنیم. شما اگر در دانشگاه ترکیبیات خوانده باشید، بعید نیست که بارتان به بلاک‌دیزاین خورده باشد. این‌ها اکثراً ساختنشان سخت است. اما بعد به طور معجزه‌آسایی به شما یاد می‌دهند که اگر یک میدان متناهی داشته باشید می‌توانید به سادگی بلاک‌دیزاین تولید کنید. می‌بینید مثلاً اگر پارامتر مربوطه توان یک عدد اول باشد طراحی آسان می‌شود به این دلیل که برای توان‌های اول میدانی متناهی با آن اندازه موجود است. این‌جا جایی است که قرار است جبر و ترکیبیات به هم کمک کنند. اما این کلک استفاده از میدان متناهی یک حالت مرموزی دارد. اگر برای بار اول دیده باشیدش، یک جور غریبی است. می‌پرسید که این چه طوری از ناکجا آمد به کمک ما این‌جا؟ به نظر یک زرنگی خیلی خاصی است، خط اضافه‌ی عجیبی است. اما معجزه‌ای در کار نیست. همان‌طور که دیدیم میدان متناهی، نسخه‌ی تحلیلی هندسه‌ی تصویری است که خودش حالت خاص بلاک‌دیزاین است. این تعجب ما شبیه این است که ما در یونان باستان باشیم و با این مقاطع مخروطی به نحوی مطلقاً هندسی کار کنیم و بعد بر ما معلوم بشود که معادله‌های درجه دو که می‌نویسیم، کار ما را این‌جا خیلی راه می‌اندازد. خب الان ما می‌دانیم که این‌جا هیچ معجزه‌ای در کار نیست. دلیلش این است که این‌ها همان نسخه‌ی جبری-تحلیلی مقاطع مخروطی هستند. به نظر از هم خیلی فاصله دارند اگر به آن فکر نکرده باشیم. ولی این همان است که لباسش را عوض کرده. در واقع پوینت این آنالوژی‌ها هم همین است که وقتی لباس عوض می‌شود، توانایی‌ها زیاد می‌شوند. آن وقت کارهای دیگری می‌توانیم بکنیم که آسان نیست دیدنشان این‌جا. این‌جا هم همین است. ساختمان میدان در واقع آن پشت‌قائم شده است، شما ساختمان میدان را نمی‌بینید. من می‌کشمش بیرون، شما میدان را می‌بینید. جمع و ضربی هست که قبلاً نمی‌دیدید، که این خب یک‌هو کمک بزرگی به شما می‌کند، جمع و ضربی که می‌شود حتی تقسیم کرد. نعمت بزرگی است داشتن چنین جبری.

و در نهایت. چند مدت است که یک قصه‌ی بلند دارم که هی می‌گویم بگویم یا نگویم. اما حالا که دکتر رستگار می‌گویند ببندیم ترکیبیات را شاید بد نباشد یک کم راجع به آن حرف بزنم. آن هم هموتوپي گسسته است. در کیس قبلی دکتر رستگار به آن اشاره می‌کند. این هم چیز جالبی است که هم کاربرد بامزه‌ای دارد، هم وصل می‌شود به ریاضیات اصیل بالا. حالا نمی‌دانم که این چه قدر کار می‌کند. ذاتش به نظر می‌رسد که از جنس مسخره‌بازی‌های معمول نیست. کار درست درمانی است. بهتر است من یک کم فکر کنم ببینم که آیا ما به اندازه‌ی کافی حرف‌های به درد بخور مختلف زدیم یا نه؟ چون وقتی حرف می‌زنی، به نظر خودت زیاد می‌آید، ولی وقتی می‌روی دنبال ریشه، می‌بینی مایه‌ی آن زیاد نبوده است. بعد راجع به هموتوپي صحبت می‌کنیم.

امیرحسین اکبرطباطبایی: مقدمه‌ای بر هموتوپي توپولوژیک- هنوز ما در ترکیبیات هستیم و من می‌خواهم کمی درباره‌ی نظریه‌ی هموتوپي در شکل گسسته‌اش، یعنی دیسکریت هموتوپي تئوری، نسخه‌ی گسسته شده و به ترکیبیات آمده‌ی هموتوپي تئوری حرف بزنم. و فکر می‌کنم که این یک مثال خوبی هم هست. حالا به دلایلی. یکی این که یک ریاضیات خوبی را بر می‌دارد و می‌آورد شکل گسسته‌اش را دولوپ می‌کند که در راستای چیزهایی است که داریم می‌گوییم که باید تا یک حدی نسخه‌ی خوب ریاضیات در شکل گسسته‌اش موجود باشد. دو این که این درس‌های خوبی درش هست که می‌توانیم درباره‌اش حرف بزنیم. مثلاً یک درس خیلی خوبش این است که دارد به ما می‌گوید که چه طوری به کمک آنالوژی باید فکر کنیم، نه همین طوری مستقیم یک مفهومی را از یک جاکپی کنیم به جای دیگر. این یعنی سعی کنیم پل درست کنیم. گاهی پل‌های مستقیم امکان‌پذیر نیست، در این کیس هست البته. و بعد یک درس دیگر هم دارد و آن به کمک آنالوژی فکر کردن است و آن این که گاهی با دیدن آنالوگ یک چیز، بوی این می‌آید که این موجودات یک جدّ مشترک دارند. باید درباره‌ی این جدّ مشترک حرف بزنیم. بعد ببینیم خب ما این را وقتی تعمیم می‌دهیم، یک جدّی را درست می‌کنیم. این جدّ‌های دیگر هم باید به دردی بخورد. درباره‌ی این حرف بزنیم یک کم. حالا به لحاظ تاریخی این جور نیست. این‌ها این طور دیده نمی‌شود. به لحاظ فلسفی، می‌توانیم این‌ها را این جوری بچینیم که درسی به ما بدهد. در نهایت با یک چیز خوشگل به درد بخوری که همه جانبه است سروکار داریم. آن وقت می‌رسیم به آن مسئله‌ی راززدایی که این راز ایجاد می‌شود که چرا این جد مشترک آن قدر مهم است؟

من تصورم این است که هموتوپي تئوری یک مقداری پیشرفته است. معمول این است که این یک درس ارشد است و به همین خاطر درباره‌ی هموتوپي یک کوچولو می‌خواهم توضیح بدهم و فرض نکنم که دانسته است. برای این که بی‌مزه هم نباشد یک فنی می‌زنم. این را در یک کانتکست بزرگ‌تری توضیح می‌دهم. اما قبلش یک سری شلوغ‌کاری‌های فلسفی بکنم. قبلاً ما درباره‌ی دیفورمیشن حرف زدیم اگر یادتان باشد و درباره‌ی مثلاً آنالیز روی گراف. به بهانه‌ی دیفورمیشن یک شی گسسته دو تا ایده مطرح شد در مورد شناختن اشیای ریاضی که الان در موردش حرف می‌زنیم. اول فرض کنید که موجوداتی که می‌خواهید مطالعه کنید یک خانواده‌ی بزرگ تشکیل می‌دهد و شامل موجودات پیچیده‌ای است. مثلاً همه‌ی موجودات توپولوژیک یا همه‌ی خانواده‌هایی از جبرهای به فلان فرم را در نظر بگیرید. بعد فرض کنید که یک زیرخانواده هم هست که متشکل است از موجوداتی ساده‌تر که قابل فهم‌ترند و ما بیشتر می‌شناسیم آن‌ها را یعنی راحت‌تر می‌شود با آن‌ها کار کرد. در کیس فضای توپولوژیک، بسته به کاربردهایی که دارد، این اشیای ساده می‌توانند چیزهای مختلفی باشند. مثلاً یک بازه‌ی بسته یا یک مربع یا یک مکعب یا همه مکعب‌مربع‌های n -بعدی و این‌ها. این‌ها همه‌ی توان‌های n هستند که n بازه‌ی بسته‌ی صفر تا یک است. توی نظریه گراف، این اشیای ساده‌تر می‌توانند یک یال باشند یا یک رأس. یک راس یک ذره کم است، چون دیتای کافی ندارد. باید دیتای یالی هم داشته باشیم. یا مثلاً برای منیفلد که یک رویه‌ی خمیده است شی ساده خط حقیقی $\mathbb{R}$ است، و الی ماشاءالله مثال می‌شود آورد. حالا فرض کنید که می‌خواهیم یک موجود ریاضی نه لزوماً ساده را در این خانواده مطالعه کنیم. دو جور رهیافت هست در مطالعه شی داده شده. گاهی ما نگاشت‌هایی که از اشیای ساده به داخل این موجود می‌روند را مطالعه می‌کنیم. گاهی نگاشت‌هایی که از این موجود می‌روند بیرون به داخل آن موجودات ساده. در واقع اینترکشن موجودات ساده را با این شی داده شده مطالعه می‌کنیم. آن

وقت‌هایی که نگاشت‌ها می‌روند به داخل X انگار ما داریم X را مطالعه می‌کنیم با لنز موجودات ساده. گاهی برعکس نگاشت‌هایی که از X می‌رود بیرون را در نظر می‌گیریم که می‌شود کمیت‌های ساده روی X . مثلاً، برای این که مثال بزنم، فکر کنید مثلاً شما یک گرافی دارید. اگر من بگویم همه نگاشت‌هایی که از یک نقطه یا یال می‌رود به گراف را مطالعه کنیم، دارم به شما می‌گویم که همه‌ی رئوس و همه‌ی یال‌هایش را دارم در نظر می‌گیرم. بین چه می‌توانی به من بگویی. انگار شکافته باشم گراف را. حالا شما ممکن است بگویی نه خب این کم است، مثلاً مثلث‌هایش را هم به من بگو. این می‌شود همه مثلث‌هایی که نگاشت می‌شود داخل گراف. همه مثلث‌هایش را هم می‌خواهم. بسته به این که چه کار داری، به میزانی از اطلاعات نیاز داری و یک مقداری اطلاعات برمی‌داری و کارت را انجام می‌دهی. بعضی وقت‌ها هم برعکس، که از فضا می‌رویم بیرون. مثلاً فضای توپولوژیک را در نظر بگیرد. نگاشت‌هایی که از این فضای توپولوژیک می‌رود به $\mathbb{R}$ می‌شود کمیت‌هایی که روی آن فضا هست. به کمک کمیت‌ها که مبنای آنالیز است ما می‌توانیم فضا را بشناسیم. مثلاً یک نمونه همان آنالیز روی گراف است. مثلاً گراف را می‌گیرم، کمیت‌های روی آن را در نظر می‌گیرم. مختصات‌گذاری اساساً چنین کاری است. یک وقتی هم نگاشت‌هایی می‌آیند داخل که مثال آن دیفورمیشن است. نگاشت‌ها از کجا می‌آیند؟ یک خانواده. مثلاً یک خانواده از جبرها. اشیای آن خانواده می‌شود پارامتر تغییر. این دو جور نگاه کردن را باید هی در ذهن داشته باشیم. هموتوپي تئوری از جنس نگاشت‌هایی است که داخل می‌روند. قصه‌ی هموتوپي را معمولاً این‌طور نمی‌گویند. می‌گویند در مورد این است که نگاشت‌ها را نرم به هم تغییر بدهیم. سوراخ‌ها را بشناسیم و این‌ها. حرف غلطی هم نیست، ولی اینی که من دارم می‌گویم صحیح‌تر و قابل تعمیم‌تر است. این کلیات را در نظر بگیرید، حالا باید برویم سراغ جزئیات هموتوپي در کانتکست توپولوژی. فرض کنید یک فضای توپولوژیک پیچیده داریم. بعد می‌گویم بیا یک اندازه‌ای از این سر در بیاوریم. دیتایش را بکشیم بیرون. درباره‌اش حرف بزنیم و باید ببینم نگاشت‌هایی که داخل این می‌روند، از کجا بروند خوب است. مثلاً از بازه‌ی بسته صفر و یک بروند به داخل فضا. هر چنین نگاشتی یک مسیر پیوسته است که از یک جایی شروع می‌شود و در داخل X می‌رود به نقطه‌ای دیگر. وقتی می‌گوییم همه نگاشت‌ها را در نظر بگیریم، می‌گوییم خب فضای توپولوژیک X را به من داده‌اید، اما من ازش سر در نمی‌آورم. ولی همه‌ی مسیرهای در آن را اگر بتوانم ازش سر در بیاورم، یک مقدار اطلاعات ازش به دست می‌آورم. شما ممکن است پرسید خب چه به دست می‌آوری آن وقت؟ مثلاً این که آیا این فضا همبند مسیری است یا نه را می‌شود این‌طور فهمید. اگر مثلاً من دو تا نقطه پیدا کنم در این فضا که هیچ مسیری بینشان نباشد، در واقع ناهمبند مسیری است. در حدّ همبندی مسیری‌اش می‌توانم بفهمم فضا را. اما خب همبندی مسیری چیز بی‌نمکی است، ولی خب این هم یک چیزی است دیگر. اما اطلاعات بیشتری در مسیرها هست، به شرطی که قول بدهیم در یک سطح بالاتری هم حرف بزنیم و آن سطح بالاتر یعنی که مربع‌ها را هم بگذاری من دخیل کنم. یعنی نه فقط نگاشت‌هایی که از صفر و یک می‌روند به فضا بلکه نگاشت‌هایی که از مربع به فضا می‌روند را هم دخیل کنیم. آن وقت صفر بعدی‌ها نقطه‌اند، یک بعدی‌ها مسیرند و دوبعدی‌ها مربع. توجه کنید که تصویر مربع در فضا می‌تواند موجود خمیده‌ای باشد. و حالا یک چیزهای بیشتری را هم می‌توانم بگویم. مثلاً می‌توانم درباره‌ی سوراخ‌های فضا به شما اطلاعات بدهم. حالا یعنی چه؟ مثلاً فرض کنید که یک صفحه را در نظر بگیریم و وسطش یک سوراخ بزرگ باشد. این سوراخ را می‌توانم کپچر کنم با همین دیتای مسیرهایی که می‌آیند داخل. چه‌طوری؟ دو تا نقطه اطراف سوراخ بگذاریم در داخل فضا. یک مسیر از بالای سوراخ برود از این نقطه به آن و یک مسیر دیگر از پایین سوراخ. این دو

تا مسیر را اجازه دارم از آن‌ها حرف بزنم. این دو تا مسیر یال‌های هیچ مربعی نیستند. یک مربع، اگر در فضا باشد می‌افتد روی این سوراخ. هیچ مربعی توی فضا نیست به خاطر این که آن مربع را هر طور بگذارم می‌افتد روی این سوراخ. ولی اگر فضا سوراخ نداشت، آن وقت من هر دو تا مسیری که می‌نوشتیم بین این دو تا نقطه، می‌شد دو ضلع یک مربع در نظر گرفت. حالا می‌شود این استدلال را تعمیم داد و تعداد سوراخ‌های فضا را هم شمرد. این چیز مهمی است، چون به ما یاد می‌دهد بین فضاها تفکیک قائل شویم. یعنی بدون این که همه‌ی اطلاعات فضا را داشته باشیم، می‌توانیم بعضی فضاها را از هم تفکیک کنیم. مثلاً از این جا می‌فهمیم که هیچ همسانریختی‌ای بین یک دایره‌ی توخالی و یک دایره‌ی توپر موجود نیست. برای این که دایره‌ی توپر را همیشه می‌توان مربع‌هایش را پُر کرد اما دایره‌ی توخالی را نمی‌شود. این مبنای یک چیزی است که به آن می‌گویند توپولوژی جبری. حالا این رهیافت را در نظر بگیرید. یک جور دیگر هم این را می‌فروشند به ما. می‌گویند مربع خودش چیست؟ مربع یک بازه است ضرب در یک بازه. یک بازه را بکنید مسیر و یک بازه‌ی دیگر را بکنید زمان. بعد آن وقت یک طوری می‌شود که من یک عالمه مسیر دارم می‌نویسم. همین‌طور دارند به هم تبدیل می‌شوند. از آن مسیری که آن طرف مرز است، روی مربع آرام آرام حرکت می‌کنم و می‌رسم به این طرف مرز. بنابراین معادلاً می‌گویند سوراخ را می‌شود این‌طوری فهمید که نبودن سوراخ در فضا یعنی که هر دو مسیر با انتهای مساوی را می‌توان به هم تبدیل کرد. مبنای هموتوپي تئوری در توپولوژی در واقع این فکر است که اگر همه‌ی مسیرها را که شما در نظر بگیرید، این‌ها واقعا تشکیل گروه هم می‌دهند. این که مسیرها را می‌شود گذاشت پشت سر هم. نمی‌خواهم دیگر پیچیده کنم کار را. حالا یک کسی می‌تواند به شما بگوید که خب شما که این حرف‌ها را در توپولوژی گفتی، قشنگ هم گفتی، به ما یاد دادی که می‌شود سوراخ‌های فضا را با آن کپچر کرد. خب گراف هم مگر فضای توپولوژیک نیست یک جورهایی؟ گراف هم چند تا نقطه است که با چند تا خط به هم وصل هستند. فضای لاغر مردنی و نحیفی است، چون اشیای دو بعدی در آن نیستند. همه یک بعدی اند. اما بالاخره این یکجور فضا است. آیا همان فکرها این جا کار نمی‌کند؟ جواب این است که بله کار می‌کند. خیلی هم خوب کار می‌کند. شما دو تا کار می‌توانی بکنی. یکی این که بگویی که بیایید گراف را وانمود کنیم که یک فضای توپولوژیک است و بعد درباره‌اش حرف بزنیم. یعنی چه کار می‌کنیم؟ خب یک سری نقطه هستند و یک سری خط که به هم وصلند. گراف را هم ساده و بدون جهت در نظر بگیریم که کار آسان باشد. یک سری نقطه و خط هستند که به هم وصلند. شما بیایید نقطه‌ها را بکشید. فرض کنید آن خط‌ها مسیرهای پیوسته‌اند. یک هو می‌شود یک فضای توپولوژیک. شکل فرمال مطلب این است که یک سیمپلکس نسبت می‌دهیم به گراف. دوره‌می‌اش این است که گراف را می‌نشانیم در R^n . خیلی خب این می‌شود گراف شما که به فضای توپولوژیک تبدیل شده. بعد می‌گویی الان من می‌توانم در مورد مسیرها در این فضا حرف بزنم. مسیرهای پیوسته آن را و سوراخ‌هایش را هم می‌توانم پیدا کنم، این خوب است. خوب است ولی خیلی هم خوب نیست. چرا؟ برای این که وقتی که شما می‌خواهی یک گراف را مطالعه کنی، دوست داری اطلاعاتی که از آن می‌گیری هنوز از جنس گراف باشد. مثلاً هر دو مسیر بین دو نقطه از دو جای مختلف وسطش سوراخ است. در توپولوژی، گراف پر از سوراخ است اما ما فقط سوراخ‌های گسسته را می‌خواهیم. با گذر به توپولوژی داریم آن خط‌کشی‌ها را، تکه‌تکه شدن گراف را نمی‌بینم و این بد است. ما می‌خواهیم به لحاظ گسسته سوراخ را پیدا کنیم. چرا باید سوراخ گسسته پیدا کنم؟ برای این که این سوراخ گسسته می‌شود فقدان یک سری دیتای گسسته. بگذارید به سراغ تاریخ برویم. تئوری هموتوپي گسسته را اولین بار اتکین درست کرده،

وقتی درباره‌ی سیستم‌های دینامیکی و این‌ها حرف می‌زده. ایده این است که شما فرض کنید نقطه‌ها اعضای یک دپارتمان هستند و کامیونیتی‌های دو نفره و سه نفره و این‌ها را در موجودی گسسته ضبط و ثبت کنیم. نتیجه البته گراف نیست، چون گراف فقط یال بین دو عضو دارد. شما فرض کنید یک ابرگراف است، به این معنی که نقطه و خط و مثلث و موجودات دوبعدی و سه‌بعدی دارید که یعنی اعضای دپارتمان و کمیته‌های چند نفری. حالا سوراخ این‌جا یعنی من فلان کمیته را که باید ندارم. می‌خواهم فقدان این موجودات گسسته را بررسی بکنم. بنابراین نمی‌خواهم از دایره‌ی امور گسسته خارج بشوم. می‌خواهم این کارها را بکنم و همه را گسسته بکنم. احتیاج به آنالوژی دارم. یعنی باید یاد بگیرم در توپولوژی چه کار کردم. ادایش را در بیابانم این‌جا. حالا ممکن است نتیجه یکی بشود بعضی وقت‌ها. مثلاً می‌بینیم اینجا یکی می‌شوند در کیس‌هایی. اما در سطوح پیچیده‌تر و در جاهای مختلف می‌بینیم که معلوم نیست نتیجه‌ها یکی بشود. این به عنوان مقدمه‌ای بر هموتوپي تئوری این‌جا باشد. بعد درباره‌ی این که این نسخه‌ی گسسته را چه طور بنویسیم حرف می‌زنم.

امیرحسین اکبرطباطبایی: هموتوپي گسسته. قرار شد آنالوگ هموتوپي تئوری توپولوژیک را برای گراف‌ها و در دنیای گسسته پیدا کنیم. کمی هم حرف زدیم که این به چه دردی می‌خورد. این کار اما فایده‌های دیگری هم دارد. فقط این‌ها نیست. خیلی مبهم یادم است، مثلاً به هر ماتروئید می‌شود گرافی نسبت داد. می‌خواهی این خانواده از گراف‌ها را رده‌بندی کنی، هموتوپي گسسته آن‌جا به طور طبیعی به عنوان ابزار ظاهر می‌شود. به عنوان یک مثال دیگر، یک نسخه‌ی دیگر همین هموتوپي گسسته هم برای گراف‌های جهت‌دار وجود دارد که به تابع زتای ریمان روی گراف مربوط می‌شود.

هموتوپي گسسته را حالا باید چطور تعریف کنیم؟ قبل از این یک نکته‌ای را هم درباره‌ی هموتوپي توپولوژیک بگویم. یک نکته‌ای که هست، این است که اگر قرار باشد بخشی از اطلاعات فضای توپولوژیک را بگیریم، مثلاً مسیرها را و در حد وجود مربع‌های بینشان حرف بزنیم، بعضی فضاها با بعضی دیگر یکی می‌شوند. مثلاً یک صفحه‌ی کامل با یک نقطه هیچ فرقی نمی‌کند. این که در صفحه هر دو مسیری را می‌شود نرم به هم تبدیل کرد، انگار همه چیز را بشود کِلِپس کرد در یک نقطه. اصطلاحاً می‌گویند این طور فضاها کانتراکتیبل هستند، یعنی می‌شود آن را کانتراکت کرد به یک نقطه. بنابراین این اطلاعات مسیرها و مربع‌ها فقط بخشی از اطلاعات فضا است و یکی بودن این اطلاعات خیلی ضعیف‌تر از وجود هم‌ئومورفیسم بین دو فضا است. برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر می‌شود این ابعاد را زیاد کرد و مکعب‌های ابعاد بالاتر را هم در نظر گرفت. ما سوراخ‌های دو بعدی را با مربع‌هایی که نمی‌توانند فاصله‌ی دو مسیر را پر کنند اندازه می‌گیریم. در ابعاد بالاتر من مربع‌ها را در نظر بگیرم به جای مسیرها و مکعب‌هایی که نمی‌توانند بین دو مربع را پر کنند را بررسی می‌کنم. آن وقت دارم سوراخ‌های سه بعدی را در نظر می‌گیرم. مثلاً اگر یک صفحه داشته باشیم و وسطش سوراخ باشد، این سوراخ بعد بالاتر ندارد. وقتی من یک فضا داشته باشم که از وسطش یک کره را بردارم حالا یک سوراخ بعد بالاتر دارم مثلاً. می‌خواهم بگویم این قصه را می‌شود به ابعاد بالاتر هم برد و درباره‌ی هموتوپي مرتبه‌ی دو و سه و ... حرف زد. می‌شود گفت چه وقت‌هایی دو تا فضا در همه‌ی سطوح یکی هستند. یعنی این که هر چه قدر این مربع‌های مرتبه‌ی بالاتر را هم در نظر بگیریم، این دو فضا فرق نداشته باشند. یک عالم این‌جا می‌شود حرف زد که چه اطلاعاتی هست که در این سطح دیده می‌شود.

حالا برگردم سراغ گرافم. اگر من بخواهم آنالوژی به کار ببرم، این طوری است که برای این که این حرف‌ها را بتوانیم برای گراف بزنیمن من به یک بازه احتیاج دارم تا از مسیر بتوانم حرف بزنیمن. بعد به مربع و مکعب و این‌ها نیاز دارم. پس باید یک ضرب هم داشته باشم که از بازه مربع و مکعب بسازم. یک جزئیاتی هم این وسط باید داشته باشم برای این که این‌ها گروه تشکیل بدهند. مثلاً این که بازه را بشود به هر اندازه تقسیم کرد به بازه‌ها. خب بازه که به نظر روشن است و باید یک یال باشد. دو رأس که یک خط بینشان است. اما یک یال را نمی‌شود تقسیم کرد. پس بازه را چه در نظر بگیریم. خب روشن است که بازه را باید یک مسیر نامتناهی از هر دو طرف در نظر بگیریم. یعنی خود $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید، مثلاً با خط‌هایی بین نقاط پشت سر هم. این یک گراف است. یک همچنین چیزی در نظر بگیرید. خب ضرب چه؟ ضرب را هم بگیرید ضرب معمول دو گراف دیگر. مثلاً من اگر دو تا یال داشته باشم ضرب می‌شود مربعی که قطرهایش را نکشیده‌اید. سه بعدی هم می‌شود تصور کنید و الی ماشاءالله. حالا من ضرب را دارم، بازه هم دارم. می‌ماند توابع بین گراف‌ها که به کمک آن بتوانم تصاویر بازه را در گراف به عنوان آنالوگ مسیر در نظر بگیرم. خب نگاشت بین دو گراف تابعی است از رئوس به رئوس که متصل به هم‌ها را ببرد به متصل به هم‌ها اما بعضی وقت‌ها هم بتواند دو تا چیز متصل به هم را کلیس کند به یک نقطه. پس دو تا چیز که متصل به هم هستند می‌روند به دو تا چیز که یا متصلند به هم یا منطبق بر هم. این برای این است که گاهی مسیرتان بتواند مکث کند. حالا هر نگاشتی را از این بازه‌ی دراز من به درون گراف در نظر بگیرید در واقع یک مسیر است به همان معنی معمولش، منتها بعضی وقت‌ها هم مکث می‌کند. مثلاً گام به گام می‌رود. یک جاهایی می‌ایستد دوباره راه می‌افتد. همان‌طور که انتظار از یک مسیر معمول داریم. اگر این کلیس را نگذارم، آن وقت هیچ وقت مسیر نمی‌ایستد. واضح است که مسیرم خوشگل نمی‌شود. حالا می‌توانم از هموتوپي هم حرف بزنیمن. چه طوری؟ می‌گویم یک گراف را در نظر بگیرید و دو مسیر مختلف بین دو نقطه. می‌بینم این مسیرها را می‌شود با نگاشتی از یک مربع که ضرب بازه در بازه است پر کرد یا نه. اگر عادت نداشته باشید این‌طور فکر کنید، این مربع شما را گیج می‌کند. برای این که ساده‌ترش کنم، بگذارید معادل دیگرش را بگویم. گفتم هموتوپي را می‌شود یک مربع دید یا تصور کرد یک مسیر را نرم تبدیل می‌کنیم به یک مسیر دیگر. دو تا مسیر در گراف داریم. یکی را بالا و یکی را پایین تصور کنید. پایینی یک لحظه‌ی اول دارد. بالایی هم یک لحظه‌ی اول دارد. پایینی یک لحظه‌ی دوم دارد و بالایی هم یک لحظه‌ی دوم. الی لحظه‌ی n -ام. این که مسیر بالا به شکلی نرم به پایینی تبدیل می‌شود یعنی این که لحظه‌ی اولشان به هم وصل است، لحظه‌ی دومشان به هم وصل است و الی آخر. این یعنی هموتوپي. الآن من می‌توانم سوراخ‌های گسسته را در نظر بگیرم. می‌توانم بازی کنم با این. مثلاً همان‌طور که آن‌جا صفحه در حد هموتوپي یک نقطه بود، این‌جا اگر من یک ستاره داشته باشم با یک نقطه هیچ فرق نمی‌کند. می‌شود آرام آرام این ستاره را جمع کرد روی نقطه. دوره‌ای به طول سه یا چهار را هم می‌شود به یک نقطه کاهش داد که دیدنش سخت است. اما از دوره‌ای به طول پنج به بالا داستان شروع می‌شود. آنی که این‌جا معادل سوراخی است که نمی‌شود پرش کرد، از پنج شروع می‌شود. این یک تفاوتی است که اگر گراف را بکنید فضای توپولوژیک نمی‌بینید. یک فرق بی‌مزه‌ای است، اما در بعد یک تنها فرق معنی‌دار بین این نسخه‌ی گسسته و نسخه‌ی توپولوژیک همین است. حالا می‌شود درباره‌ی سوراخ‌های مرتبه‌ی بالاتر هم حرف زد. همان‌طور که گفتم می‌شود از بُعدهای بالاتر هم حرف زد و پرسید در آن بُعد بالاتر چه چیزهایی مثل هم هستند که آن سخت‌گیرانه‌تر است. حالا چرا همین کارها را نتوانستیم با کلک "تبدیل کن به فضای توپولوژیک" بکنیم؟ می‌توانستیم این سه و چهار را نبینیم اگر بعد یک بود و

بعد این ها یکی هستند. یک قضیه ای هست که می شود این ها را به هم تبدیل کرد. کافی است نمودار گراف را بکشید در فضای حقیقی و هر جا گراف مثلث یا مربع داشت را یک مربع و مثلث توپر بگذارید آن جا و سوراخ را بپوشانید. آن وقت هموتوپي توپولوژیک این فضا معادل هموتوپي گسسته ی گراف داده شده می شود. بنابراین شما می توانید بگویید این همه مسخره بازی درآوردی و این همه زبان ریختی که آنالوژی مهم است. خب بیا این که همان است. به خاطر سه و چهار معامله را به هم نزن. درست می گوید. اما در ابعاد بالاتر قصه فرق می کند. در ابعاد بالاتر آنی نسخه طبیعی است که بر اساس آنالوژی نوشتیم. باز هم می شود یک فضای طبیعی به گراف نسبت داد، که الان نمی گویم چیست. به امید این که یک هموتوپي در این بشود هموتوپي گسسته ی گراف که واقعا یک پل مستقیمی بزینم بین توپولوژی و گراف. این پل سال ها باز بود. اصلا آسان نبود. چون اساسا این دو تا با هم یک فرقی هائی می کنند. خب تازگی ها یکی دو سالی است که ثابت شده. دست کم دو نفری ثابت کردند. می خواهم بگویم این بدیهی نیست که این دو تا یکی هستند یا می شود به هم تبدیلیشان کرد. گاهی این پل ها را می شود ساخت و گاهی نمی شود. مهم این است شما آنالوژی را یاد گیری و بیای مستقل دلوپ کنی.

امیرحسین اکبرطباطبایی: آنالوژی و راززدایی در هموتوپي- من درباره ی هموتوپي توپولوژیک و هموتوپي گسسته و ارتباط بین این ها که خب کار آسانی نبوده حرف زدم. و این که آنالوژی ارجح است به تبدیل مستقیم. چون تبدیل کردن یک سری junk اضافه می کند که کار را گاهی آسان می کند اما تصویر و فهم را مخدوش می کند. گاهی هم اصلا تبدیل ممکن است طبیعی نباشد و کار را سخت تر هم بکند. کار معقولی هم نیست. وقتی به شما یک کانتکست گسسته داده اند، گسسته مسائلات را حل کن. چرا باید تبدیل کنی به چیز دیگر؟ نگاه کن بین آن جا چه کار کردی. ایده را بیاور، نه نتیجه را. حالا اگر شما زرنک باشید بو می برید که این فکر خوبی است. اگر یک موجود ریاضی در هر خانواده یا کتگوری از موجودات ریاضی را به من بدهید، اصلا جبر یا حلقه بدهید، خوب است که توپولوژیک درباره اش فکر کنم و دنبال هموتوپي و سوراخ بگردم. برای این کار باید یک چیزی داشته باشم عین بازه که بشود تقسیمش کرد. بعد یک ضرب طبیعی هم می خواهم که بتوانم بازه های مراتب بالاتر درست کنم. بعد اگر نگاشت هائی که از این مکعب ها می روند به داخل شی مورد نظر در نظر بگیرم می رسم به هموتوپي ها. می توانم این ایده را بیرم این طرف و آن طرف استفاده کنم. این فکر تراز اولی است حقیقتا. فکر خیلی خوبی است. یک نمونه ی نابدیهی که می شود این را استفاده کرد، در دنیای هندسه ی جبری است. این جا می توانم سوراخ های یک وارپته را اندازه بگیریم. منتها کاری که باید بکنیم این است که به طور محض جبری فکر کنیم. از بحث قبل درس گرفته باشیم و کار بد را نکنیم که بخواهیم به زور یک وارپته را بکنیم یک فضای توپولوژیک و بیرم آن جا فکر کنیم درباره اش. باید آنالوژی را برداریم بیاوریم. آنالوژی، یعنی آقا شما در همه ی سطوح همان طور فکر کن که در آن دیسکورس فکر می کنی. یعنی آن جا گسسته فکر می کردی، این جا باید جبری فکر کنی. مثلا در هندسه ی جبری بحث صفرهای چند جمله ای است و همه چیز جبری است. پس بازه و ضرب و نگاشت و سوراخ هایت همه باید جبری باشند. حالا آیا واقعا می شود از این کارها در هندسه ی جبری کرد؟ بله. نقش بازه را این جا کی باید بازی می کند؟ خط آفین. خب این جا سرو ته دار و این ها نیست بازه. مثلا فرض کنید همه کارهایتان را دارید روی یک میدان F می کنید پس این F بازه ی شماس است. ضرب هم همان ضرب معمولی است. نگاشت هایتان هم البته باید نگاشت های جبری بین وارپته های روی F باشد. همه حرف هائی که من این جا

زدم را دوباره باید بنویسید. حالا شما دارید سوراخ‌های جبری را در موجودات جبری پیدا می‌کنید. این اگر خیلی در شکل درستش که درباره‌ی اسکیم است به جای وارپته نوشته بشود، با اساسا همین ایده، یک جور هموتوپي تئوری حاصل می‌شود که به آن موتیویک هموتوپي تئوری می‌گویند. این موتیو هم ربط دارد به چیزی که از موتیو ممکن است شنیده باشید، از آن‌هایی که گروتندیک پیدا کرده و مثلا وئودسکی دولوپ کرده و برایش فیلدز هم گرفته.

حالا شما ممکن است بگویید اگر این هموتوپي همه جا ظاهر می‌شود خوب برویم شکل ابسترکت این بحث‌ها را بنویسیم و یک تئوری مادر درست کنیم. این هم فکر خوبی است. یک شی در نظر بگیرید در یک کتگوری که باید مطالعه شود. مثل گراف و فضای توپولوژیک که داشتیم. بعد ببینید چه زمانی یک شی رفتاری دارد که انگار یک بازه است. به آن شی می‌گویند یونیت آبجکت. حالا ضرب هم که داشته باشی، می‌توانی آن تئوری بزرگ را بنویسی. طبیعتا لاغر و این‌ها می‌شود. برای این که جنرال داری می‌نویسی. یک عالم شرط‌های مختلف باید بگذاری و جورهای مختلفی هم می‌توانی بنویسی. برای این که به شما نشان بدهم که جورهای مختلف می‌شود نوشت، یکی این است که می‌گویی آبجکت برای این که نقش بازه را داشته باشد، باید فلان ویژگی‌ها را داشته باشد. یکی می‌گوید این ویژگی‌ها زیاد است و دست و دل باز انتخاب شده، یک جورهایی دستی است. یکی دیگر می‌گوید این ضرب و این‌ها که می‌گویید بیخود است. شما کافی است به من همه‌ی مکعب‌های از هر بعد را یکجا بدهید. دیگر لازم نیست بازه را بدهید و بعد ضرب را بدهید. یکی ممکن است بگوید: چرا مکعب را به من می‌دهید؟ که بعد باید نگاشت‌هایی از مکعب به شی را بگیرم. شما باید همان نگاشت‌ها را مستقیم بدهید. یعنی بگویید آقا ما به این‌ها می‌گوییم مسیر در شی و به این‌ها می‌گوییم مربع در شی و غیره.

حالا البته من این را بهانه کردم و بحث خیلی ریاضیات گسسته نداشت، ولی خوب این حرف مهمی است. ممکن است بگویید آقا این هموتوپي ابزار خوبی است و اتفاقی نیست، چون نداشتن دیتا را به شما نشان می‌دهد. حالا معمول این است با نسخه‌های آسان‌تر از این نداشتن دیتا را اندازه می‌گیرند. ولی نداشتن دیتا مهم است که یک چیزهایی که باید موجود نیست. شما این نداشتن را می‌توانی اندازه بگیری. مثلا شما یک موجود گسسته دارید که بلاک دیزاین نیست چون یک ذره غلط است. سوال این است که چه چیز نمی‌گذارد این بلاک دیزاین بشود؟ چه قدر با یک بلاک دیزاین واقعی فاصله دارد؟ این‌ها را می‌شود اندازه گرفت دیگر. این ایده‌های هموتوپي تئوریکال که فقدان ساختار را اندازه بگیریم و ماشین برایش داشته باشیم و معنی به آن بدهیم مهم است. این کار خیلی مهمی است که باید ریاضی‌دان گسسته یاد بگیرد موجودات گسسته را که مطالعه می‌کند این‌ها را هم در نظر بگیرد. حالا گراف خیلی تابلویک موجود هندسی است، ولی بعضی‌هایشان موجود هندسی هم نیستند. این باید یاد بگیرد فکر کند که این نداشتن دیتا را چطور اندازه بگیرد. مثلا در داده‌های بزرگ به این فکر می‌کنند که شکل دیتا مهم است. سوراخ‌های دیتا را اندازه می‌گیرند. دقیقا با همین تکنیک. مثلا خیلی هم می‌فروشد که آخ ما داریم چه دانشی را هوا می‌کنیم و این‌ها. خلاصه همین فکر را برده آن‌جا اپلای کرده. این مهم است که شما فکرها را یاد بگیری و ببری جای دیگری استفاده بکنی بر اساس آنالوژی.

حالا آخرین چیزی که می‌خواهم بگویم این است که حالا که این هموتوپیک فکر کردن این قدر چیز خوبی است و این طرف و آن طرف به درد می‌خورد، باید حتما چیز عمیقی باشد. بنابراین باید از ظهور مداومش راززدایی کرد. این کافی نیست که ما سوراخ‌ها را پیدا می‌کنیم یا فقدان یک ساختار را اندازه می‌گیریم. این خوب است، اما هیچ معنی فلسفی عمیقی ندارد که آن قدر این طرف و آن طرف ظاهر بشود. این یعنی که بگویم هموتوپیک تکنیک خیلی خوب است. اما امروزه می‌دانیم که این تنها یک تکنیک نیست. یک جور نگرش است و این نگرش موجی به راه انداخته که دارد همه‌ی ریاضیات را درمی‌نوردد. بنابراین باید پی برد که راز این مطلب چیست. برای این راززدایی باید برگردم به همان هموتوپیک کلاسیک. می‌گویم بین هموتوپیک کلاسیک را می‌شود یک جور خاص جالبی خواند. فرض کنید نقطه‌های یک فضا موجوداتی هستند و مسیرهای بین دو نقطه اثبات‌ها و شاهد‌های مختلفی هستند که این دوتا چیز یکسانند. اگر مسیری بین دو نقطه نباشد این دو چیز نامساویند. اما اگر مسیری باشد و نقاط مساوی باشند آن وقت ممکن است اثبات‌های مختلفی از این تساوی موجود باشد یعنی ممکن است مسیرهای مختلفی در فضا بین دو نقطه موجود باشد. حالا خود این اثبات‌های مختلف از تساوی دو چیز می‌توانند مساوی باشند یا نباشند. مربع‌هایی که بین دو مسیر را پُر می‌کنند اثبات‌های مساوی بودن این دو تا روش مختلف اثبات خواهند بود و اگر سوراخی آن وسط باشد یعنی این دو اثبات واقعا مختلفند. در هر سطحی اگر دو اثبات مساوی‌سازی یکسان باشند اثبات تساوی آن‌ها خودش موجودی از مرتبه‌ی بالاتر است و الی آخر. حالا شما ممکن است از اثبات مساوی بودن خوشتان نیاید و بگیرید آیدنتیفیکیشن، که دوتا شی در ریاضی یکی هستند. اما اشیا به شیوه‌های مختلفی می‌توانند آیدنتیفای بشوند. مثل دو تا مثلث را در فضای اقلیدسی می‌شود به روش‌های مختلفی چرخاند و گذاشت روی هم. حالا دو روش ممکن است با هم یکسان باشند یعنی یکی را بشود به دیگری به شکلی هندسی تبدیل کرد یا نه. برای یک مثال دیگر می‌توانید به عبارت‌های جبری فکر کنید. آن وقت روش‌های محاسباتی مختلفی می‌توانند وجود داشته باشند که نشان دهند این دو عبارت یکسانند. حالا ممکن است این دو روش اساسا یکسان باشند و خود این مطلب یک اثباتی می‌خواهد. حالا چرا هموتوپیک مهم است؟ چون هموتوپیک دارد این ایده را کپچر می‌کند که ما یک اشیایی داریم و یک ایزومورفیسم‌هایی داریم بین این‌ها و یک ایزومورفیسم‌هایی بین ایزومورفیسم‌ها و همین طور تا بی‌نهایت. و آن کانتکت ابسترکت که می‌گویم در آن هموتوپیک بنویسیم چیزی نیست جز نظریه‌ای درباره‌ی همه‌ی این ایزومورفیسم‌ها یا به تعبیر دیگر چیزی نیست جز یک نظریه درباره‌ی تساوی. این، راز این است که چرا هموتوپیک تئوری همه جا ظاهر می‌شود. ما هر دیسکورسی که در ریاضی برداریم، یک مفهوم یکسانی آن پشت هست که ما در حد آن در نظر می‌گیریم همه چیز را. گاهی لازم است و مجبور می‌شویم یکسانی بین این یکسانی‌ها را هم در نظر بگیریم. آن‌ها هم برای ما به دلایلی مهم هستند مثلاً. اگر شما از یک جایی به بعد این یکسانی‌ها را در نظر نگیرید، آن دیگر سلیقه‌ی شماست، ولی عجیب نیست اگر قرار باشد که وقتی تساوی گسسته‌ی دو گراف یا تساوی جبری دو گروه را داشتیم تساوی گسسته بین تساوی‌های گسسته‌ی گراف‌ها یا تساوی جبری بین تساوی‌های جبری گروه‌ها را هم داشته باشیم و غیره. خلاصه این که هموتوپیک تئوری همه جا هست چون تساوی همه جا ظاهر می‌شود و هموتوپیک تئوری فهم تساوی در همه‌ی سطوح است. حالا سوراخ چیست؟ یک سوراخ دوبعدی دارد نمایندگی می‌کند که این دو تا چیز که با هم مساوی‌اند به دو شکل مختلف با هم مساوی می‌شوند و همین طور برای سوراخ‌های مراتب بالاتر. سوراخ، در واقع فقدان تساوی است. خیلی طول کشید که مردم فهمیدند در ریاضی آیدنتیفیکیشن و مورفیسم و این‌ها مهم است. فقط اشیا

مهم نیستند. آیدنتیفیکیشن‌های بینشان هم مهم است که ما را بُرد به کتگوری تئوری. امروزه ما یاد می‌گیریم به دلایل عدیده‌ای، به لحاظ فنی در ریاضی، آیدنتیفیکیشن مراتب بالاتر هم مهم است که ما را رسانده به هاپرکتگوری تئوری. این نسخه هاپر نگاه کردن به همه چیز، سر و کله‌اش این جور جاها پیدا می‌شود. هموتوپي تئوری، مثال آموزنده‌ای از آنالوژی است، از گسترش دادن مفاهیم است، از پیدا کردن نظریه‌ی مادر است. و وقتی که حضورش زیاد شد مثال خوبی از راززدایی است. وقتی شما آن راز را درباره آیدنتیفیکیشن فهمیدید، یک‌هو دنیایتان بزرگ می‌شود. تا قبل آن از نوتر و دیگران یاد گرفتیم وقتی جبرها مهم هستند، هم‌ریختی‌های بینشان هم مهم است. این یک حرف است. این که یاد بگیری که وقتی اشیای ریاضی را مطالعه می‌کنی، آیدنتیفیکیشن‌های بینشان هم مهم است و آیدنتیفیکیشن‌های بین آن‌ها الی آخر امر دیگری است. این هم از این قصه‌ی من.