

جمع چیست؟

● میر شهرام صدر

اعضای یک مجموعه تعریف کنید.

قبل از این که وارد بحث اصلی شویم، سؤالی دیگر را مطرح می کنیم که انگیزه ی اصلی از نگارش این مقاله است. معمولاً وقتی این سؤال را در کلاس درس از دانش آموزان می پرسیم، نسبت به آن اظهار بی اطلاعی می کنند. قبل از پاسخ به این سؤال، ابتدا باید چند مفهوم را برایشان شرح دهیم تا دید دانش آموزان نسبت به عمل بین دو عضو یک مجموعه، باز شود. حال این شما و این هم سؤال!

جمع یعنی چه؟

یعنی این عمل جمع که بین ۲ و ۳ انجام دادیم و گفتیم حاصل آن ۵ می شود. چه معنی دارد؟ برای پاسخ گویی به این سؤال، ابتدا مفهوم تابع را بیان می کنیم.

مفهوم تابع

تکامل مفهوم تابع حدود دو قرن به طول انجامید. دیریکله، ریاضی دان آلمانی (۱۸۰۵-۱۸۵۹ م) در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به صورتی روشن بیان کرد و گفت: « y تابعی از متغیر x در بازه ی $a < x < b$ است؛ به شرطی که هر مقدار x از این بازه، با مقدار معین و مشخص از y متناظر باشد؛ البته این تناظر می تواند به هر ترتیب دل خواهی باشد.»

پیش از این تعریف، برای نخستین بار، مقدار متغیر (تابع) در قرن هفدهم و در نوشته های هندسی فرما (۱۶۵۵-۱۶۰۱ م) و دکارت، ریاضی دان فرانسوی، مطرح شد.

اشاره

از هر کسی سؤال کنید: حاصل $۲+۳$ چند می شود، بلافاصله می گوید: ۵. اگر دوباره از همان شخص پرسید: آیا می توان به جای عمل جمع، بین دو عدد ۲ و ۳ عمل دیگری انجام داد و در این صورت، حاصل چه می شود، با کمی تأمل پاسخ می دهد، به جای عمل جمع، می توان عمل ضرب را بین دو عدد قرار داد و آن را به صورت ۲×۳ نوشت که حاصل آن برابر با ۶ می شود.

اگر این سؤال را دوباره تکرار کنید، ممکن است بگویند، عمل های تفریق و تقسیم را هم می توان بین این دو عدد انجام داد. در نتیجه خواهیم داشت:

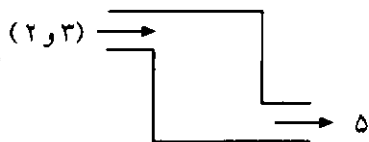
$$۲-۳=-۱$$

$$۲ \div ۳ = \frac{۲}{۳}$$

حال اگر همان سؤال قبلی را دوباره تکرار کنیم که: آیا می توان بین ۲ و ۳ عمل دیگری را انجام داد؟ ناگهان طرف مقابل پاسخ خواهد داد که: «ما فقط چهار عمل اصلی را روی اعداد به کار می بریم و عمل دیگری را نمی شناسیم!»

حق با اوست. در این مقاله سعی خواهیم کرد که مفهوم عمل بین دو عدد (یا دو عضو یک مجموعه) را بیان کنیم. سپس به غیر از چهار عمل اصلی، عمل های دیگری را بین دو عضو یک مجموعه تعریف می کنیم تا شما نیز بتوانید، خودتان عملیات دیگری را بین

برای مثال، اگر دو عدد ۲ و ۳ را وارد ماشین کنیم، در خروجی عدد ۵ را ملاحظه خواهیم کرد.

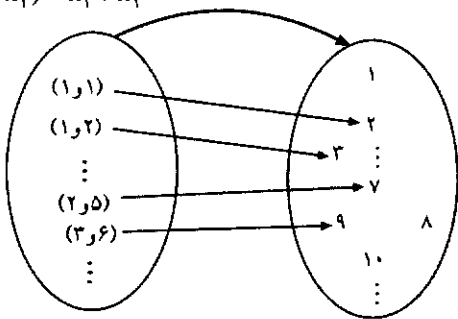


$$f(2, 3) = +(2, 3) = 2 + 3 = 5$$

این ماشین را تابع جمع یا ماشین جمع می‌نامیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. اگر هر دو عدد طبیعی x_1 و x_2 وارد ماشین جمع شوند، آن‌گاه از خروجی یک عدد طبیعی بیرون می‌آید که برابر با $x_1 + x_2$ است. در نتیجه، عمل جمع روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک تابع است. یعنی برای هر $(x_1, x_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ، یک عدد طبیعی به صورت $(x_1 + x_2) \in \mathbb{N}$ وجود دارد که متناظر با آن است. بنابراین، تابع جمع را روی $\mathbb{N}$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} +: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ +(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{cases}$$



$$f(1, 1) = +(1, 1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(1, 2) = +(1, 2) = 1 + 2 = 3$$

⋮

$$f(2, 5) = +(2, 5) = 2 + 5 = 7$$

$$f(3, 6) = +(3, 6) = 3 + 6 = 9$$

⋮

به طور کلی، تابع جمع را روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی می‌نامیم. عمل دوتایی در مجموعه‌ی A ، به ازای هر زوج مرتب از مجموعه‌ی $A \times A$ ، طبق دستور (ضابطه‌ی تابع) عضوی منحصر به فرد از A را مشخص می‌کند.

عمل دوتایی

تعریف: هر تابع $f: A \times A \rightarrow A$ را یک عمل دوتایی روی A می‌گوییم. یعنی عمل دوتایی f روی A ، به هر زوج مرتب (x, y) از $A \times A$ ، عضو منحصر به فرد $z = f(x, y)$ از A را نسبت می‌دهد. مثال: مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟
ب) آیا عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

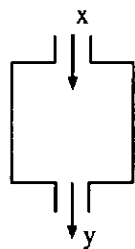
برای مثال، دکارت در کتاب هندسه‌ی خود، مفهوم تابع را به عنوان «تغییر عرض در نتیجه‌ی تغییر طول» بررسی می‌کند.

در قرن هجدهم، یوهان برنولی (۱۷۴۸-۱۶۶۷م) دیدگاه جدیدی را نسبت به تابع مطرح می‌کند. او می‌گوید: «تابع دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر در نظر می‌گیرد.»

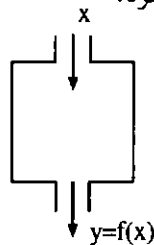
در سال ۱۷۴۸، لئونارد اویلر، شاگرد یوهان برنولی، نماد f (Function) را برای تابع در نظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح کرد:

«تابع یک متغیر عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.» همان‌طور که ملاحظه کردید، تعریف تابع به صورت امروزی بین ریاضی‌دانان رایج نبود، بلکه همه‌ی آنان تصویر ذهنی مشترکی از این مفهوم داشتند. بهتر است برای بیان مفهوم تابع، از آن تصور ذهنی استفاده کنیم و مانند آن‌ها با مفهوم تابع درگیر شویم.

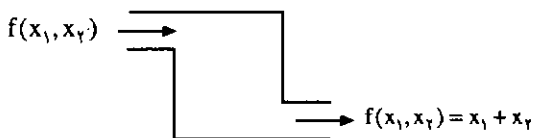
این تصور چنین بود که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند؛ به طوری که یک x را از ورودی می‌گیرد و تنها یک مقدار y از خروجی بیرون می‌دهد. پس می‌توان ابتدا از مدل زیر برای بیان مفهوم تابع استفاده کرد:



چون ماشین f عملی را روی x انجام می‌دهد، می‌توان عمل انجام‌شده روی x را با $f(x)$ نمایش داد. بنابراین می‌توان در خروجی به جای y از نماد $f(x)$ استفاده کرد.



اکنون به این سؤال پاسخ می‌دهیم که جمع یعنی چه؟
تابعی مانند ماشین زیر را در نظر بگیرید؛ به طوری که از ورودی آن دو عدد x_1 و x_2 وارد ماشین می‌شوند. سپس ماشین عملی به نام جمع را روی x_1 و x_2 انجام می‌دهد. عمل انجام‌شده روی x_1 و x_2 را با نماد $f(x_1, x_2)$ یا $+(x_1, x_2)$ نمایش می‌دهیم. از خروجی ماشین عددی بیرون می‌آید که حاصل جمع $x_1 + x_2$ است.



حل

الف) ابتدا $A \times A$ را تشکیل می دهیم:

$$A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$$

$$= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$$

اکنون عمل ضرب معمولی را روی هر زوج مرتب (x, y) از $A \times A$ اعمال می کنیم. بنابراین داریم:

$$x(-1, -1) = (-1) \times (-1) = 1 \in A$$

$$x(-1, 0) = (-1) \times 0 = 0 \in A$$

$$\vdots$$

$$x(1, 1) = 1 \times 1 = 1 \in A$$

ملاحظه می کنیم که برای هر (x, y) از $A \times A$ ، داریم:

$$x(x, y) = x \times y = z \in A$$

در نتیجه، عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است، یا مجموعه A نسبت به عمل ضرب معمولی بسته است. تذکر: اگر عملی روی مجموعه A یک عمل دوتایی باشد، آن گاه مجموعه A نسبت به آن عمل دوتایی بسته است. ب) برای این منظور، عمل جمع معمولی را روی هر زوج مرتب (x, y) از $A \times A$ اعمال می کنیم:

$$+(-1, -1) = (-1) + (-1) = -2 \notin A$$

چون به یک مثال نقض رسیدیم، پس عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی نیست. به عبارت دیگر، مجموعه A نسبت به عمل جمع بسته نیست.

خلاصه

برای این که نشان دهیم، تابع f روی مجموعه A یک عمل دوتایی است، مراحل زیر را انجام می دهیم:

مرحله ی اول: مجموعه $A \times A$ را تشکیل می دهیم. مرحله ی دوم: تابع f را روی هر زوج مرتب $(x, y) \in A \times A$ اعمال می کنیم. در صورتی که همواره حاصل $z = f(x, y)$ عضوی از A باشد، آن گاه f روی A یک عمل دوتایی است. تذکر: اگر حتی یک مثال نقض پیدا شود که $z = f(x, y)$ عضوی از A نباشد، آن گاه f روی A یک عمل دوتایی نیست. مثال: آیا عمل تفریق و عمل تقسیم روی مجموعه ی اعداد صحیح یک عمل دوتایی است؟

عمل تفریق روی Z یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x, y) \in Z \times Z$ داریم:

$$f(x, y) = -(x, y) = x - y \in Z$$

اما عمل تقسیم روی Z یک عمل دوتایی نیست، زیرا: $(2, 3) \in Z \times Z$ ؛ در حالی که:

$$f(2, 3) = \div(2, 3) = \frac{2}{3} \notin Z$$

همان طور که گفتیم ذکر یک مثال نقض برای رد کردن دوتایی

بودن عمل تقسیم کافی است.

سؤال: به نظر شما عمل تقسیم روی چه مجموعه ای عمل دوتایی است؟

فعالیت ۱. مجموعه ی $A = \{1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. یک عمل روی A تعریف کنید.

مرحله ی اول: مجموعه $A \times A$ را تشکیل دهید.

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (3, 3)\}$$

مرحله ی دوم: تابعی از $A \times A$ در A تعریف کنید؛ برای مثال:

$$(1, 1) \xrightarrow{f} 1$$

$$(1, 2) \xrightarrow{f} 1$$

$$(1, 3) \xrightarrow{f} 1$$

$\vdots$

$$(3, 2) \xrightarrow{f} 3$$

$$(3, 3) \xrightarrow{f} 3$$

ضابطه ی این تابع را می توان به صورت $f(x, y) = x$ در نظر گرفت. در نتیجه، تابع با ضابطه ی $f(x, y) = x$ یک عمل دوتایی روی A است.

سؤال: آیا شما می توانید عمل های دوتایی دیگری را روی A تعریف کنید؟

دیدیم که عمل های جمع معمولی و ضرب معمولی روی $\mathbb{N}$ عمل های دوتایی هستند. اعمال دوتایی دیگری را می توان روی $\mathbb{N}$ تعریف کرد که معمولاً آن ها را با علامت های $*$ ، $\oplus$ ، $\odot$ ، و نظایر آن نمایش می دهیم. در این صورت به جای $f(x, y)$ می توان $x * y$ یا $x \odot y$ را نوشت.

برای مثال عمل $x * y = 2x + y + 1$ روی مجموعه ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ، وقتی عمل $*$ روی (x, y) اثر می کند، حاصل آن یعنی $2x + y + 1$ یک عدد طبیعی است.

اما عمل $x \oplus y = x - y + 1$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست؛ زیرا برای زوج مرتب $(2, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ طبق عمل $\oplus$ می توان نوشت:

$$\oplus(2, 3) = 2 \oplus 3 = 2 - 3 + 1 = 0 \notin \mathbb{N}$$

همان طور که ملاحظه می کنید $(2, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ، اما: $\oplus(2, 3) \notin \mathbb{N}$. پس عمل $\oplus$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست یا مجموعه ی اعداد طبیعی نسبت به عمل $\oplus$ بسته نیست.

مثال: عمل $*$ را روی مجموعه ی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} *: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ *(x, y) = [x, y] \end{cases}$$

منظور از $[x, y]$ همان ک.م.م دو عدد x و y است. آیا $*$

روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است؟

حل: بله، زیرا برای هر $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ داریم:

$$*(x, y) = [x, y] \in \mathbb{N}$$

برای مثال می توان نوشت:

$$*(15, 6) = 30 \in \mathbb{N}$$

$$*(2, 3) = 6 \in \mathbb{N}$$

$$*(a, a) = a \in \mathbb{N}$$

مثال: مجموعه ی اعداد گنگ نسبت به عمل جمع و ضرب معمولی بسته نیست، زیرا برای مثال:

$$(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \cup \mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c$$

این در حالی است که:

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \notin \mathbb{Q}^c$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{Q}^c$$

فعالیت ۲. آیا جمع و ضرب معمولی روی هریک از مجموعه های Z ، Q و $\mathbb{R}$ عمل های دوتایی هستند؟

مثال: فرض کنیم: $A = \{1, 2\}$. آیا دو عمل اجتماع و اشتراک روی مجموعه ی توانی A (مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های A که آن را با نماد $P(A)$ نمایش می دهیم)، عمل های دوتایی هستند؟
حل: واضح است که:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

مرحله ی اول: $P(A) \times P(A)$ را تشکیل می دهیم:

$$P(A) \times P(A) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{2\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \emptyset), (\{2\}, \{1\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \emptyset), (\{1, 2\}, \{1\}), (\{1, 2\}, \{2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\})\}$$

مرحله ی دوم: اکنون اگر هریک از عمل های اجتماع یا اشتراک را در هریک از زوج های مرتب مجموعه ی $P(A) \times P(A)$ اعمال کنیم، ملاحظه خواهید کرد که حاصل آن در مجموعه ی $P(A)$ قرار دارد. بنابراین مجموعه ی $P(A)$ نسبت به عمل های اشتراک و اجتماع بسته است.

برای مثال:

$$\cup(\{1\}, \{2\}) = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \in P(A)$$

$$\cup(\emptyset, \{1\}) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\} \in P(A)$$

$$\cap(\{2\}, \{1, 2\}) = \{2\} \cap \{1, 2\} = \{2\} \in P(A)$$

$$\cap(\{1\}, \{2\}) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset \in P(A)$$

فعالیت ۳: عمل های اجتماع و اشتراک را روی بقیه ی زوج های مرتب مجموعه ی $P(A) \times P(A)$ اعمال کنید.

نکته: فرض کنیم A مجموعه ی ناتهی و $P(A)$ مجموعه ی توانی A باشد. در این صورت، عمل های اجتماع و اشتراک روی $P(A)$ عمل هایی دوتایی هستند.

مثال: در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه ی مفروض دوتایی است یا خیر؟

الف) $S = Z$; $a \oplus b = a + b^2$

ب) $S = Z$; $a \odot b = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b}$

ج) $S = \{1, -2, 3, 2, -4\}$; $a \otimes b = |b|$

حل:

$$\oplus: Z \times Z \rightarrow Z$$

$$\oplus(a, b) = a + b^2$$

الف)

برای هر $(a, b) \in Z \times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$\oplus(a, b) = a \oplus b = \left(\underset{\in Z}{a} + \underset{\in Z}{b^2} \right) \in Z$$

در نتیجه عمل $\oplus$ روی Z دوتایی است.

$$\odot: Z \times Z \rightarrow Z$$

$$\odot(a, b) = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b}$$

ب)

برای $(-3, 5) \in Z \times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$\odot(-3, 5) = -3 \odot 5 = \frac{(-3)^2 + 2(-3)(5) + 5^2}{-3 - 5}$$

$$= \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \notin Z$$

بنابراین، عمل $\odot$ روی Z دوتایی نیست.

$$*: S \times S \rightarrow S$$

$$*(a, b) = |b|$$

ج)

برای $(2, -4) \in S \times S$ ، داریم:

$$*(2, -4) = 2 * (-4) = |-4|$$

$$= 4 \notin S$$

لذا عمل $*$ روی S دوتایی نیست.

فعالیت ۴. فرض کنیم $M_{2 \times 2}$ مجموعه ی ماتریس های مربعی 2×2 با درایه های حقیقی باشند. بررسی کنید آیا عمل های جمع و ضرب ماتریس ها روی $M_{2 \times 2}$ عمل های دوتایی هستند یا خیر؟ راهنمایی:

$$M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

نشان دهید:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \in M_{2 \times 2}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \in M_{2 \times 2}$$

تا این جا متوجه شدیم که به جز چهار عمل اصلی روی اعداد، می توان عمل های دوتایی دیگری را تعریف کرد. اکنون لازم می دانیم شمارا با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می دانید که عدد صفر عضوی اثر عمل جمع اعداد است؛ یعنی: $a + 0 = 0 + a = a$.

هم چنین واضح است که عدد ۱ عضوی اثر عمل ضرب معمولی اعداد است؛ به طوری که: $a \times 1 = 1 \times a = a$.
 اکنون این سؤال پیش می آید که عضوی اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases} \oplus Z \times Z \rightarrow Z \\ \oplus(a, b) = a + b - 1 \end{cases}$$

برای این منظور، عضوی اثر یک عمل دوتایی را روی مجموعه‌ی مفروض A به صورت زیر بیان می کنیم.

عضوی اثر

فرض کنیم که * روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد. اگر برای هر $a \in A$ ، عضو منحصر به فردی مانند $e \in A$ موجود باشد، به طوری که:

$$a * e = e * a = a$$

در این صورت e را عضوی اثر عمل دوتایی * روی مجموعه‌ی A می گوئیم.

قضیه: عمل دوتایی * را روی مجموعه‌ی A در نظر بگیرید. ثابت کنید عضوی اثر این عمل دوتایی منحصر به فرد است. اثبات (برهان خلف): فرض کنیم e_1 و e_2 هر دو عضوی اثر عمل * روی مجموعه‌ی A باشند (فرض خلف). در این صورت چون e_1 عضوی اثر عمل * است، داریم:

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \quad (1)$$

از طرفی e_2 هم عضوی اثر عمل * است. پس داریم:

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 \quad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می گیریم که: $e_1 = e_2$. در نتیجه، فرض خلف باطل و عضوی اثر عمل * روی A منحصر به فرد است. مثال: عضوی اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases} \oplus Z \times Z \rightarrow Z \\ \oplus(a, b) = a + b - 1 \end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e \in Z$ عضوی اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \oplus(a, e) &= \oplus(e, a) = a \\ \oplus(a, e) &= a \Rightarrow a \oplus e = a \\ &\Rightarrow a + e - 1 = a \Rightarrow e = 1 \in Z \end{aligned} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} \oplus(e, a) &= a \Rightarrow e \oplus a = a \Rightarrow e + a - 1 = a \Rightarrow e = 1 \in Z \end{aligned} \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می کنیم که $e = 1$ منحصر به فرد است. پس e عضوی اثر این عمل دوتایی روی Z است. برای مثال ملاحظه می کنیم:

$$\begin{aligned} 4 \oplus 1 &= 4 + 1 - 1 = 4 \Rightarrow 4 \oplus 1 = 4 \\ -7 \oplus 1 &= -7 + 1 - 1 = -7 \Rightarrow -7 \oplus 1 = -7 \end{aligned}$$

مثال: آیا عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد Q^+ عضوی اثر

دارد؟

حل: اگر $e \in Q^+$ عضوی اثر عمل تقسیم روی Q^+ باشد، آن گاه داریم:

$$+(a, e) = +(e, a) = a$$

$$+(a, e) = a \Rightarrow a + e = a \Rightarrow \frac{a}{e} = a \Rightarrow e = 1 \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$+(e, a) = a \Rightarrow e + a = a \Rightarrow \frac{e}{a} = a \Rightarrow e = a^2 \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می کنیم که عضوی اثر منحصر به فرد نیست، پس عمل تقسیم روی Q^+ عضوی اثر ندارد. مثال: عضوی اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases} * Q^+ \times Q^+ \rightarrow Q^+ \\ *(a, b) = \frac{ab}{y} \end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e \in Q^+$ عضوی اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a, e) = *(e, a) = a$$

$$*(a, e) = a \Rightarrow \frac{ae}{y} = a \Rightarrow e = y \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$*(e, a) = a \Rightarrow \frac{ea}{y} = a \Rightarrow e = y \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می کنیم، $e = y$ منحصر به فرد و عضوی اثر عمل * روی Q^+ است.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} *: (Z - \{1\}) \times (Z - \{1\}) \rightarrow (Z - \{1\}) \\ *(m, n) = m + n - mn \end{cases}$$

الف) عضوی اثر این عمل را بیابید.

ب) معادله‌ی $5 = 2 * (3 * x)$ را حل کنید.

حل:

الف) فرض کنیم $e \in (Z - \{1\})$ عضوی اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a, e) = *(e, a) = a$$

$$*(a, e) = a \Rightarrow a * e = a$$

$$\Rightarrow a + e - ae = a$$

$$\Rightarrow e(1 - a) = 0 \xrightarrow{a \neq 1} e = 0 \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$*(e, a) = a \Rightarrow e * a = a$$

$$\Rightarrow e + a - ea = a \Rightarrow e = 0 \quad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می گیریم که $e = 0$ منحصر به فرد است. پس عضوی اثر این عمل دوتایی است.

$$a * a' = a' * a = e$$

در این صورت a' را عضو متقابل a نسبت به عمل دوتایی $*$ روی مجموعه A می‌گوییم.
مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} *: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ *(a, b) = a + b + 2 \end{cases}$$

(الف) عضوی اثر این عمل را بیابید.

(ب) عضو متقابل هر عضو مانند $a \in \mathbb{R}$ را بیابید.

(ج) معادله $x * (3 * 2)' = 3$ را حل کنید.

حل:

(الف) اگر e عضوی اثر این عمل باشد، داریم:

$$a * e = e * a = a$$

$$a * e = a \Rightarrow a + e + 2 = a \Rightarrow e = -2 \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$e * a = a \Rightarrow e = -2 \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e = -2$ منحصر به فرد و عضوی اثر این عمل دوتایی است.

(ب) اگر a' عضو متقابل عدد $a \in \mathbb{R}$ باشد، داریم:

$$a * a' = a' * a = e$$

$$a * a' = e \Rightarrow a + a' + 2 = -2 \Rightarrow a' = -4 - a \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$a' * a = e \Rightarrow a' + a + 2 = -2 \Rightarrow a' = -4 - a \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $a' = -4 - a$ منحصر به فرد و عضو متقابل عدد $a \in \mathbb{R}$ نسبت به عمل دوتایی $*$ است.

(ج)

$$\begin{aligned} x * (3 * 2)' &= 3 \Rightarrow x * (3 + 2 - 2)' = 3 \\ &\Rightarrow x * (3)' = 3 \end{aligned}$$

چون $a' = -4 - a$ ، پس $(3)' = -4 - 3 = -7$. در نتیجه داریم:

$$x * (3)' = 3 \Rightarrow x * (-7) = 3 \Rightarrow x + (-7) + 2 = 3 \Rightarrow x = 8$$

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه M مفروض دوتایی است یا خیر؟ در صورتی که عمل دوتایی باشد، عضوی اثر و متقابل هر عضو مانند a را به دست آورید.

(الف) $S = \mathbb{Z}$; $a * b = ab^2$

(ب) $S = \mathbb{Z}$; $a * b = \frac{a}{a^2 + b^2}$

(ج) $S = \mathbb{Z}$; $a * b = a + b - ab$

(د) $S = \mathbb{R}$; $a * b = \sqrt{a}$

$$2 * (3 * x) = 5$$

(ب)

$$\Rightarrow 2 * (3 + x - 3x) = 5 \Rightarrow 2 * (3 - 2x) = 5$$

$$\Rightarrow 2 + (3 - 2x) - 2(3 - 2x) = 5$$

$$\Rightarrow 5 - 2x - 6 + 4x = 5 \Rightarrow x = 3$$

فعالیت ۵. آیا عمل تفاضل (تفریق) روی مجموعه $\mathbb{Z}$ دارای

عضوی اثر است؟

فعالیت ۶. عضوی اثر هر یک از عمل‌های دوتایی زیر را روی

مجموعه M مفروض بیابید.

(الف) مجموعه M ماتریس‌های 2×2 با عمل دوتایی

جمع ماتریس‌ها.

راهنمایی: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ ، در صورتی که

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

عضوی اثر عمل جمع ماتریس‌ها باشد، داریم:

$$A + E = E + A = A$$

(ب) مجموعه M ماتریس‌های 2×2 با عمل دوتایی ضرب

ماتریس‌ها.

راهنمایی: از رابطه E زیر ماتریس E را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

(ج) هرگاه A یک مجموعه باشد، مجموعه A توانی با عمل

اشتراک.

راهنمایی: اگر $E \in P(A)$ عضوی اثر عمل اشتراک باشد،

برای هر $B \in P(A)$ ، باید داشته باشیم: $B \cap E = E \cap B = B$

اجازه بدهید در این قسمت شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم.

می‌دانید که اگر a یک عدد حقیقی باشد، $-a$ عضو متقابل (قرینه‌ی)

a نسبت به عمل جمع اعداد است؛ به طوری که:

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

هم چنین واضح است که با شرط $a \neq 0$ ، عدد $\frac{1}{a}$ عضو متقابل

(معکوس) عدد حقیقی a نسبت به عمل ضرب معمولی اعداد است؛ یعنی:

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1 \quad (a \neq 0)$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو متقابل عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases} \oplus: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ \oplus(a, b) = a + b - 1 \end{cases}$$

برای این منظور مفهوم عضو متقابل را به این صورت بیان می‌کنیم.

عضو متقابل

فرض کنیم $*$ روی مجموعه A یک عمل دوتایی با عضوی اثر

e باشد. اگر برای هر $a \in A$ ، عضو منحصر به فردی مانند $a' \in A$

موجود باشد، به طوری که:

۱. نخستین درس در جبر مجرد. ترجمه‌ی دکتر مسعود فرزاد. مرکز نشر دانشگاهی.

۲. مباحثی در جبر. ترجمه‌ی دکتر علی اکبر عالم‌زاده. مؤسسه‌ی نشر علوم نوین.