

یک مسئله چند راه حل

● مهدی منیری بیدگلی

دبیر ریاضی شهرستان چادگان

چندی پیش، یکی از دانش آموزان مسئله ای را مطرح کرد که با روش ها و ابزارهای متفاوت قابل حل است و لذا می توان آن را در پایه های گوناگون تحصیلی مطرح کرد. در مقاله ی حاضر، چند راه حل متفاوت برای این مسئله ارائه شده است. شما نیز بکوشید راه های دیگری برای حل آن بیابید.

مسئله: در شکل (۱)، مساحت قسمت هاشور خورده را بیابید.

مسئله ها قلب ریاضیات هستند و حل مسئله، قلب یادگیری ریاضی است. فایده ی حل یک مسئله از چند راه متفاوت چیست؟ می دانیم حل یک مسئله از چند راه متفاوت، نوعی مطالعه ی ریاضیات است و مطالعه ی ریاضیات، دستگاه ذهن را توسعه می دهد. پس حل یک مسئله با چند روش، ذهن را فعال می کند و باعث بروز ابتکار و خلاقیت می شود.

$$\frac{1}{2} GH \times FG$$

می‌دانیم $FG = 1$ و $FH = 2$. پس از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$GH = \sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث FHG برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

در این صورت مساحت $\frac{1}{4}Z$ به دست می‌آید: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{1}$ و

از آن‌جا مساحت Z برابر است با $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

حال دستگاه مقابل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 8 \\ 2x + z = 2\pi \\ z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه، مقادیر زیر برای x و y به دست می‌آیند:

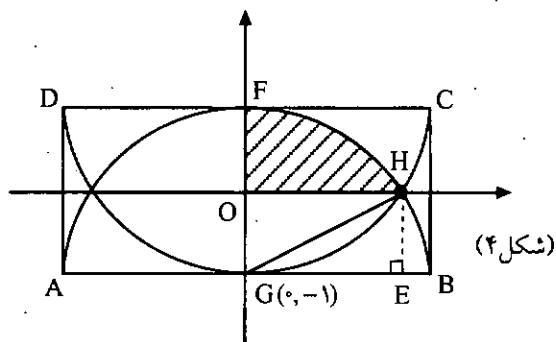
$$x = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad y = 4 - \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

پس، مساحت قسمت هاشور خورده برابر است با:

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

روش دوم

در این روش، مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز مستطیل قرار می‌دهیم (شکل ۴).



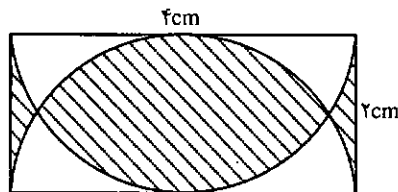
سطح محصور بین محورهای مختصات، با مساحت $\frac{1}{4}Z$ برابر

است و به منظور محاسبه‌ی آن، طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$GE = \sqrt{GH^2 - EH^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a = x_H = \sqrt{3}$$

هم چنین معادله‌ی منحنی FH را می‌نویسیم. مرکز این دایره

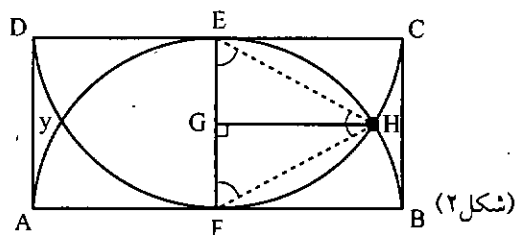
نقطه‌ی $G(0, -1)$ و شعاع ۲ است. پس خواهیم داشت:



(شکل ۱)

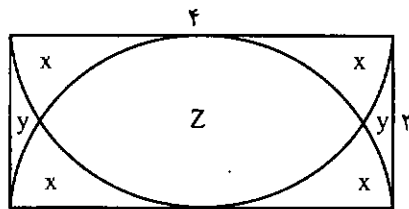
روش اول

با توجه به تقارن موجود در شکل ۱، مسئله را حل می‌کنیم. ابتدا قسمت‌های گوناگون شکل را نامگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم:



(شکل ۲)

در مورد کل مساحت شکل، رابطه‌ی $4x + 2y + z = 8$ در مورد نیم دایره‌ها، رابطه‌ی $2x + z = 2\pi$ را می‌توان نوشت. حال از خواص قطاع دایره و مساحت آن استفاده می‌کنیم. قطاع EFH را از نیم دایره‌ی AEB در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



(شکل ۳)

اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی GHF را از مساحت قطاع EFH کم کنیم، مساحت $\frac{1}{4}Z$ به دست می‌آید که راهگشای حل مسئله است.

می‌دانیم مثلث EFH متساوی‌الاضلاع است (چرا؟). لذا اندازه‌ی هر زاویه‌ی آن 60° درجه است. چون مساحت قطاع مورد نظر برابر با $\frac{1}{2}R^2\theta$ است که در آن θ بر حسب رادیان است، لذا داریم:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی FHG برابر است با:

F_1 و E_1 برابر 30° درجه هستند. پس مساحت قطاع های نام برده را می یابیم:

$$S_{FBH} = S_{EHC} = \frac{\pi}{3}$$

چون طبق قضیه ی فیثاغورس $GH = \sqrt{3}$ است، مساحت مثلث متساوی الاضلاع EFH نیز برابر است با $\sqrt{3}$. بنابراین:

$$4 - y = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \Rightarrow y = 4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

حال طبق شکل ۱ می توان نوشت:

$$y + x = 4 - \pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

و در نهایت مساحت Z به دست می آید که برابر است با:

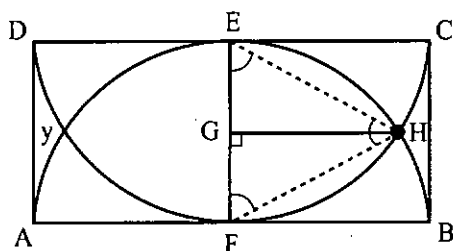
$$\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

با تمام این یافته ها، مساحت قسمت هاشور خورده در شکل ۱ به دست می آید:

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

روش چهارم

از تقارن موجود در شکل استفاده می کنیم و می دانیم مانند شکل ۶، مساحت قسمت Z تشکیل شده است از مساحت یک لوزی و مساحت چهار قطاع اطراف آن (شکل ۶). برای یافتن مساحت لوزی، ابتدا از مثلث قائم الزاویه ی EGH که مساحتش ربع مساحت لوزی است، داریم:



(شکل ۶)

چون EH شعاع دایره است، پس $EH = 2$ و لذا از قضیه ی فیثاغورس به دست می آوریم:

$$GH^2 = EH^2 - EG^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow GH = \sqrt{3}$$

پس نصف قطر بزرگ لوزی به دست می آید. در این صورت

$$KH = 2GH = 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4-x^2} - 1$$

با استفاده از انتگرال داریم:

$$S_z = \int_a^b y dx = 4 \int_a^b (-1 + \sqrt{4-x^2}) dx$$

$$= 4 \int_a^b -1 dx + 4 \int_a^b \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= -4a + 4 \int_a^b \sqrt{4-x^2} dx \quad (1)$$

با تغییر متغیر $x = 2 \sin \theta$ انتگرال اخیر را محاسبه می کنیم:

$$\int_a^b \sqrt{4-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[\frac{2\pi}{3} + \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال با جای گذاری در رابطه ی ۱ داریم:

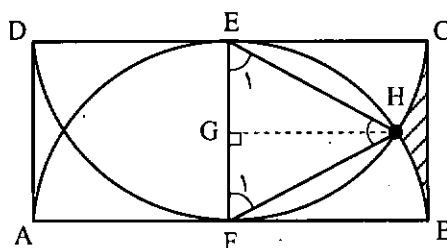
$$S_z = -4\sqrt{3} + 4 \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

در ادامه، همانند روش اول، دستگاه معادلات را حل می کنیم

$$\text{و مقدار } 2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ را می یابیم.}$$

روش سوم

از تقارن موجود در شکل استفاده می کنیم و می دانیم مجموع مساحت قطاع های EHC و FHB، به علاوه ی مساحت مثلث متساوی الاضلاع EFH برابر است با $4 - y$ (مقدار y همان مساحت قسمت هاشور خورده در شکل ۵ است).



(شکل ۵)

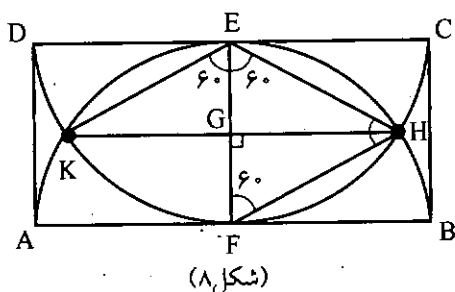
چون مثلث FEH متساوی الاضلاع است، پس اندازه ی هر زاویه ی آن 60° درجه است. در این صورت، متمم های زاویه های

محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشور خورده برابر با

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ به دست خواهد آمد.}$$

روش ششم

می توانیم برای محاسبه ی مقدار z از قضیه ی کسینوس ها استفاده کنیم. در شکل ۸، مثلث KEH را در نظر بگیرید. می خواهیم مانند روش چهارم، از مساحت لوزی و چهار قطاع اطراف آن استفاده کنیم. ولی این بار برای پیدا کردن قطر بزرگ لوزی، به قضیه ی کسینوس ها متوسل می شویم. مثلث EFH متساوی الاضلاع است و طبق تقارنی که در مسئله وجود دارد، زاویه ی KEH برابر 120° درجه خواهد بود.



حال داریم: $KH^2 = EK^2 + EH^2 - 2EK \cdot EH \cdot \cos 120^\circ$

$$KH^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$$

هم چنین مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، به روش زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \text{مساحت قطعه ی } EH &= \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

بنابراین مساحت لوزی برابر با $2\sqrt{3}$ و مساحت تمام قسمت z

$$z = \text{مساحت لوزی} + 4S_{EH} = 2\sqrt{3} + 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

خواهد شد. حال می توانیم مانند قسمت های قبل به محاسبه ی مقادیر x و y پردازیم و بعد از محاسبه ی این مقادیر، مساحت قسمت

$$\text{هاشور خورده مساوی } 2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ به دست می آید.}$$



۱. برگزیده مسائل هندسه، گروهی از ریاضی دانان شوروی. ترجمه ی عادل ارشقی.

انتشارات رسا.

۲. رشد آموزش ریاضی.

$$\text{مساحت قطاع } EFH \text{ به مرکز } F \text{ بنابراین،} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، برابر است با:

$$S_{EH} = \frac{2\pi}{3} - S_{EFH} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲، مساحت قسمت z به صورت زیر محاسبه می شود:

$$z = \text{مساحت لوزی} + 4S_{EH} = 2\sqrt{3} + 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

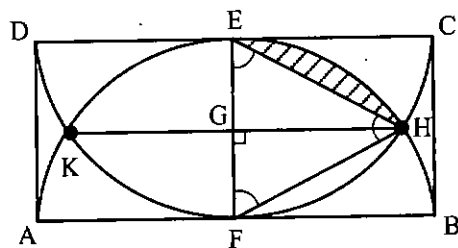
پس $z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$. حال می توانیم از روابط موجود در

روش اول، نسبت به محاسبه ی مقادیر x و y اقدام کنیم. بعد از محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشور خورده برابر با

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ به دست خواهد آمد.}$$

روش پنجم

در این روش نیز مانند روش های قبل، تمام مسئله، یافتن مقدار z است. یک راه دیگر برای یافتن مقدار z به این صورت است که: مساحت ربع دایره به مرکز E که در شکل زیر ECF نام گذاری شده است را بیابیم و مساحت های قطاع EHC و مثلث EGH و سطح GFH را از آن کم کنیم.



(شکل ۷)

برای این منظور داریم:

(مساحت قطاع EHC + مساحت مثلث EGH) - مساحت ربع

دایره = مساحت سطح GFH

پس:

$$S_{GFH} = \pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{4}z = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

حال مانند روش اول، مقادیر x و y را محاسبه می کنیم. بعد از