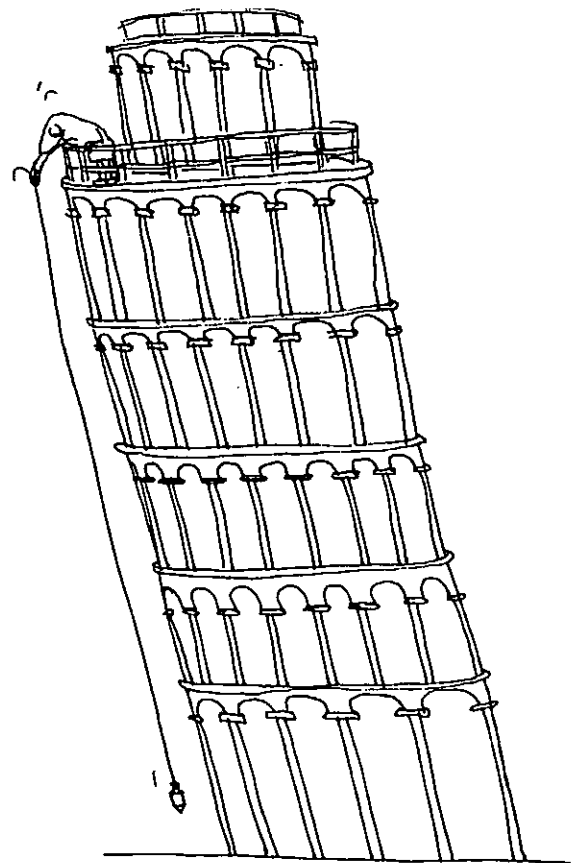


یک مسأله ساختمانی هندسه فضایی

● پرویز شهریاری



حل. c را خط راست مجهول می‌گیریم. صفحه‌ای را که از خطهای راست a و c می‌گذرد α ، و صفحه‌ای را که از خطهای راست b و c می‌گذرد، β می‌نامیم.

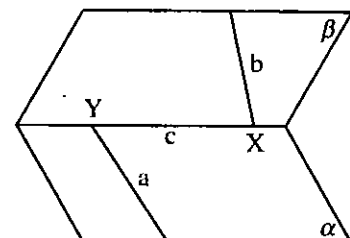
چون M روی خط راست c ($M \in c$) و c فصل مشترک دو صفحه α و β ($c = \alpha \cap \beta$) است، پس نقطه M ، به هر دو صفحه α و β تعلق دارد ($M \in \beta$ و $M \in \alpha$). بنابراین، اگر مسأله جواب داشته باشد، داریم $c = \alpha \cap \beta$ ، که در آن $\alpha = (M, a)$ و $\beta = (M, b)$. روی شکل (۱)، خط راست مجهول c ، خطهای راست a و b را، بترتیب، در نقطه‌های y و x قطع کرده است.

به بررسی جواب بپردازیم. دیدیم خط راست مجهول، روی فصل مشترک دو صفحه α و β است (ولی از این جا نمی‌توان نتیجه گرفت که، خط راست مجهول، تنها به کمک صفحه‌های α و β به دست می‌آید؛ خواهید دید، مسأله راه حل دیگری هم دارد). این، به معنای آن است که، هر خط راستی که بجز فصل مشترک دو صفحه α و β انتخاب شود، نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد. α و β نمی‌توانند بر هم منطبق باشند؛ زیرا خطهای راست a و b متناظرند و نمی‌توانند روی یک صفحه قرار گیرند. بجز این $M \in \alpha \cap \beta$ ، یعنی $\alpha \cap \beta$ ، خط راست مورد نظر است. از این جا نتیجه می‌شود که مسأله بیش از یک جواب ندارد. البته ممکن است a موازی c یا b موازی c درآید که، در این صورت، مسأله

مسأله‌های ساختمانی ساده‌ای در هندسه فضایی وجود دارند که در بسیاری از مسأله‌های پیچیده‌تر به آنها برخورد می‌کنیم. در این گونه مسأله‌ها، هم تجسم فضایی شکل و هم رسم آنها در روی صفحه، اهمیت جدی دارد، و هر دو جنبه، علاوه بر اطلاع از قانونهای رسم، به تمرین نیازمندند.

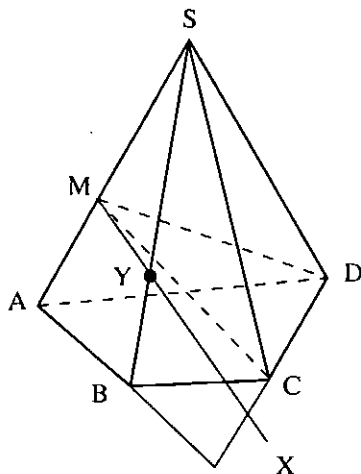
مسأله‌هایی را که در این جا آورده‌ایم، در اغلب کتابهای درسی پیدا می‌شوند و شاید از ساده‌ترین مسأله‌های هندسه فضایی باشند؛ ولی گمان می‌رود که توجه به آنها، بتواند برای تسلط بر مسأله‌های فضایی مفید باشد.

مسأله ۱. از نقطه مفروض M ، خط راستی بگذرانید که دو خط راست متناظر a و b را قطع کند. در ضمن، نقطه M متعلق به خطهای راست a و b نیست.



شکل ۱

است. از نقطه M خط راستی بگذرانید که خطهای راست SB و CD را قطع کند.



شکل ۳

حل. همان طور که در حل مسأله ۱ دیدیم، خط راست مجهول، تنها می تواند، فصل مشترک دو صفحه $\alpha = (MSB)$ و $\beta = (MCD)$ باشد. برای به دست آوردن این خط راست، کافی است نقطه برخورد خط راست CD را با صفحه α به دست آوریم (شکل ۳). ساختمان به این ترتیب انجام می شود:

$$X = (CD) \cap (MSB) ; (AB) \cap (CD) = X \quad (۱)$$

(۲) خط راست مورد نظر است.

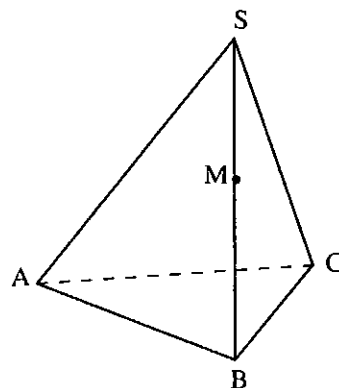
این مسأله، راه حل دیگری از مسأله ۱ را به ما تلقین می کند. فرض کنید صفحه α از نقطه M و خط راست a بگذرد و خط راست b صفحه α را در X قطع کند. خط راست مجهول (MX) است، اگر $(MX) \cap a \neq \emptyset$. روی شکل ۱، $(MX) \cap a = Y$. برای این که نقطه X را پیدا کنیم، کافی است صفحه دلخواه γ را از خط راست b بگذرانیم. اگر d فصل مشترک دو صفحه γ و α باشد، آن وقت $X = b \cap d$.

در مسأله ۲، $a = (SB)$ ، $b = (CD)$ ، $\alpha = (MSB)$ ، $\gamma = (ABCD)$ ، $d = (AB)$ باید به دو نتیجه ای که ناشی از دو روش راه حل برای مسأله ۱ است، توجه کنیم:

۱. اگر مسأله ۱ جواب داشته باشد، آن وقت $c = \alpha \cap \beta$ خط راست مجهول است.

۲. اگر مسأله ۱ جواب داشته باشد، آن وقت $c = (MX)$ خط راست مجهول است که، در آن $X = b \cap d$ این دو نتیجه یکدیگر را نقض نمی کنند؛ زیرا $\alpha \cap \beta = (MX)$.

جواب ندارد.



شکل ۲

ممکن است تصور فضایی این راه حل، برایتان دشوار باشد و نتوانید در ابتدا، موقعیت متقابل خطهای راست a، b و c و صفحه های α و β را مجسم کنید. در این صورت، می توانید برای خودتان یک مدل مقوایی بسازید یا، مثلاً نقطه M و خطهای راست a و b را روی یک چهاروجهی مشخص کنید (مثل چهاروجهی SABC در شکل ۲). باید خط راستی را بیابیم که از نقطه M بگذرد و دو خط راست SA و BC را (که متناظرند) قطع کند. بسادگی می توان متوجه شد که SB، همان خط راست مجهول است. ویژگیهای این خط راست را روشن کنیم: فصل مشترک دو صفحه SAB و SBC است؛ یعنی فصل مشترک دو صفحه α و β است؛ به نحوی که α ، از نقطه M و خط راست SA، و β از نقطه M و خط راست BC می گذرند.

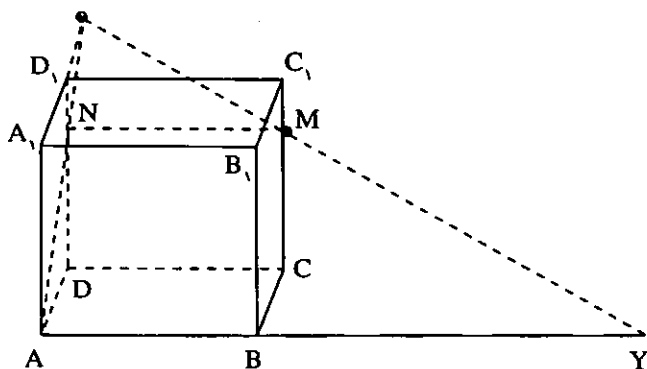
وقتی راه حل مسأله را بررسی می کنید، پاسخ دادن به این پرسشها اهمیت جدی دارد:

۱. از کجا نتیجه می شود، که مسأله بیش از یک جواب ندارد؟
۲. با چه شرطی، مسأله جواب دارد؟
۳. با این که خط راست c، به عنوان فصل مشترک دو صفحه α و β همیشه وجود دارد، ممکن است مسأله جواب نداشته باشد. چرا؟

۴. آیا ممکن است با مفروض بودن نقطه M و خطهای راست a و b، مسأله جوابی نداشته باشد؟

برای این که حل مسأله ۱ را بهتر بفهمیم، خوب است چند بار به راه حل کلی مراجعه کنیم، و سپس خودمان مسأله های مشخصی برای آن طرح کنیم. مانند:

مسأله ۲. هرم SABCD و نقطه M روی یال SA داده شده



شکل ۶

حل. اگر از راه حل دوم مسأله ۱ استفاده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که خط راست مجهول MX است شکل (۶) که در آن

$$X = (A_1 D_1) \cap (MBA)$$

برای رسم، به این ترتیب، عمل می‌کنیم:

$$: N \in (DD_1) : (AN) = (MBA) \cap (AA_1D_1D) \quad (1)$$

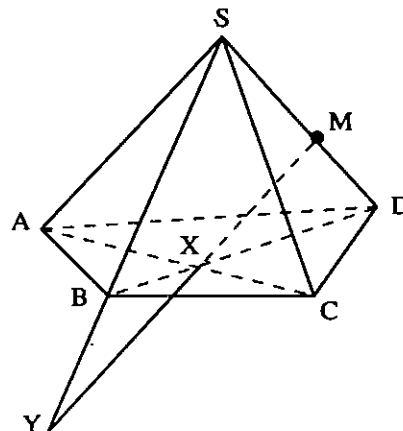
$$: X = (A, D_1) \cap (MBA) : X = (AN) \cap (A, D_1) (2)$$

(۳) MX خط راست مجهول است.

روی شکل ۶ $(MX) \cap (AB) = Y$ ، $(MX) \cap (A_1D_1) = X$

با هر انتخاب نقطه M بین C و C_1 ، مسأله جواب دارد.

مسألة ۳. هرم SABCD مفروض است. از نقطه M واقع بر یال SD خط راستی بگذرانید که خطهای راست SB و AC را قطع کند.



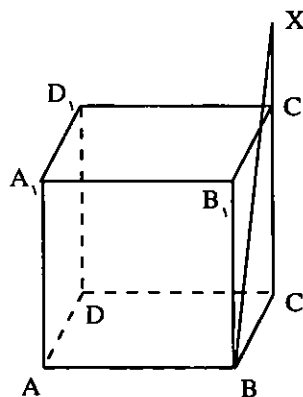
شکل ۴

حل. برای یافتن خط راست مجهول، کافی است نقطه برخورد خط راست AC با صفحه (SBD) را پیدا کنیم.

نقطه $X = (AC) \cap (BD)$ را به دست می آوریم (شکل ۴).

در این صورت $X = (AC) \cap \alpha$ و MX خط راست مجهول است. البته با شرط $(MX) \cap (SB) \neq \emptyset$.

مسأله ۴. مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطه $M \in [B_1 C_1]$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطه M بگذرد و خطهای راست AB و CC_1 را قطع کند.



مکملہ

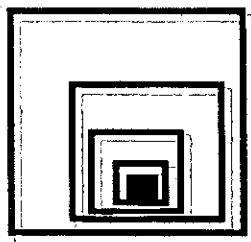
حل. MB خط راست مورد نظر است (شکل ۵). در واقع

$$(MB) \cap (AB) = B, (MB) \cap (CC_1) = x$$

مسألة ٥. مكعب مستطيل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطة

$M \in [CC_1]$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطه M بگذرد و خطهای راست AB و A_1D_1 را قطع کند.

مسائل مسابقه‌ای



۱- ۶ مهره آبی و ۱۱ مهره سفید وجود دارد، به چند طریق می‌توانیم این مهره‌ها را در یک ردیف از راست به چپ کنار هم قرار دهیم، هرگاه بخواهیم بلافاصله بعد از هر مهره آبی لااقل یک مهره سفید قرار داشته باشد.