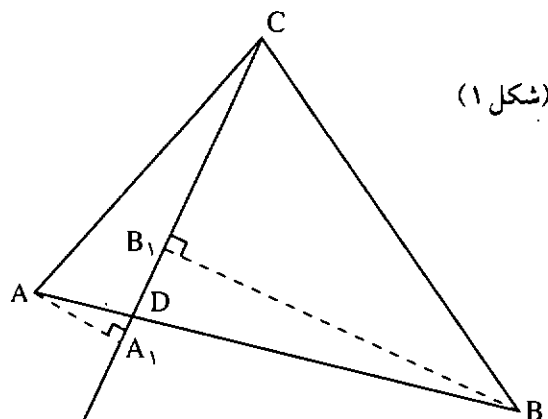


یک قضیه و چند نتیجه

ابراهیم دارابی

$$\begin{aligned} (1), (2) &\Rightarrow \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle DCB} = \frac{DA}{DB} \cdot \frac{BC}{AC} \\ &\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle DCB} \end{aligned}$$

اثبات کامل است.



در حالت خاص که نقطه‌ی D پای نیمساز باشد، داریم:
 $\sin \angle ACD = \sin \angle DCB$

و از آنجا:

قضیه‌ی اصلی: در هر مثلث مانند ABC برای هر نقطه مانند D واقع بر ضلع AB و متمایز از A و B، رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle DCB}$$

اثبات: بر حسب این که نقطه‌ی D بین A و B و یا خارج آن باشد، دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: فرض کنیم، مطابق شکل ۱ نقطه‌ی D بین A و B باشد. عمودهای AA₁ و BB₁ را بر خط شامل CD فرود می‌آوریم. در مثلث‌های AA₁C و BB₁C می‌توان نوشت:

$$\sin \angle ACD = \frac{AA_1}{AC}, \quad \sin \angle DCB = \frac{BB_1}{BC}$$

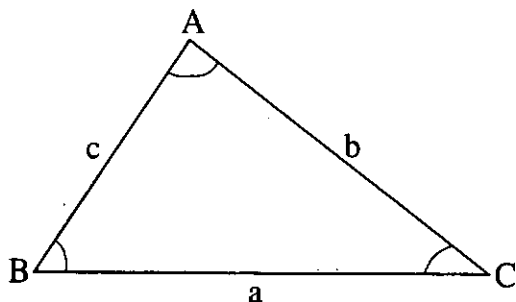
از تقسیم طرفین این دو تساوی بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle DCB} = \frac{AA_1}{BB_1} \cdot \frac{BC}{AC} \quad (1)$$

از تشابه مثلث‌های ADA₁ و BDB₁ داریم:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{DA}{DB} \quad (2)$$

از مقایسه‌ی تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

که این تساوی، همان قضیه ی نیمساز در مثلث ABC است که با آن آشنایی داریم.

حالت دوم: فرض می کنیم مطابق شکل، نقطه ی D خارج پاره خط AB و در امتداد آن باشد (شکل ۲). مانند حالت اول داریم:

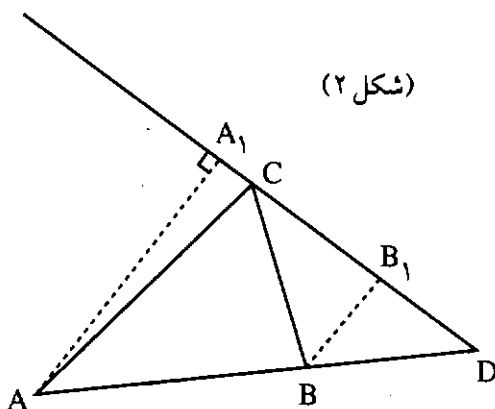
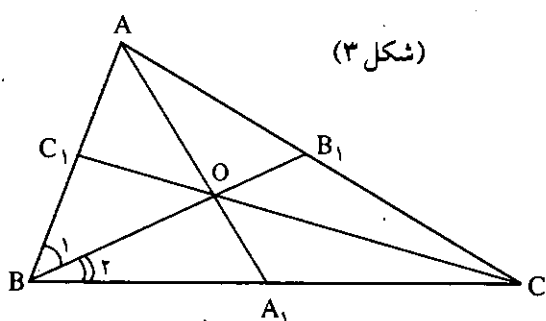
$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AD}{BD} \quad (1)$$

در مثلث های AA_1C و BB_1C می توان نوشت:

$$\sin \angle ACD = \sin \angle ACA_1 = \frac{AA_1}{AC}$$

$$\sin \angle DCB = \frac{BB_1}{CB}$$

۱. هر یک از میانه های مثلث توسط میانه های دیگر به نسبت ۲ بر ۱ با شروع از راس تقسیم می شوند.
مطابق شکل (۳) در مثلث ABC میانه های AA_1 و BB_1 و CC_1 در نقطه ی O یکدیگر را قطع کرده اند. بنابر قضیه ی اصلی، در مثلث ABA_1 داریم:



$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} \cdot \frac{\sin \angle B_1}{\sin B_1}$$

قرار می دهیم:

$$BC=a, AC=b, AB=c$$

از آن جا نتیجه می شود:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin B_1}{\sin B_1} \quad (1)$$

بنابر قضیه سینوس ها داریم:

$$\begin{cases} \Delta ABB_1 \Rightarrow \frac{\sin B_1}{b} = \frac{\sin A}{BB_1} \\ \Delta BCB_1 \Rightarrow \frac{\sin B_1}{b} = \frac{\sin C}{BB_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin B_1}{\sin B_1} = \frac{\sin A}{\sin C} \quad (2)$$

از مقایسه ی تساوی های ۱ و ۲ نتیجه می شود:

از تقسیم طرفین دو تساوی بر یکدیگر نتیجه می شود:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle DCB}$$

دانش آموزان می دانند که سه میانه ی مثلث، در نقطه ی تقارشان با چه نسبتی به دو قسمت تقسیم می شوند و با اثبات آن هم آشنایی دارند. در این جا با استفاده از قضیه ی سینوس ها، هم تعیین می کنیم که میانه های مثلث با چه نسبتی یکدیگر را قطع می کنند، و هم این که هر یک از سه ارتفاع و سه نیمساز مثلث، در نقطه ی تقارشان با چه نسبتی به دو قسمت تقسیم می شوند.

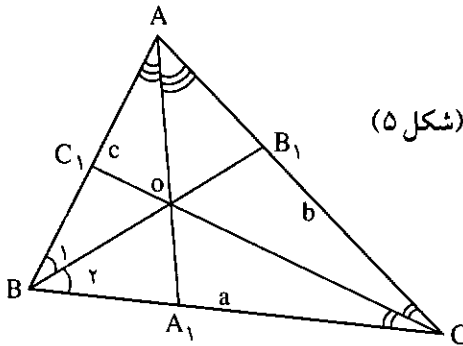
قضیه سینوس ها: در هر مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

در تساوی های بالا به جای کسینوس زاویه، قدر مطلق کسینوس آن را قرار می دهیم.

۳. هر یک از نیمسازهای مثلث، توسط نیمسازهای دیگر به چه نسبتی تقسیم می شوند؟

برای تعیین این نسبت ها در مثلث ABC، مطابق شکل (۵) نیمسازهای AA₁ و BB₁ و CC₁ را رسم می کنیم. فرض می کنیم، نقطه ی تلاقی آن ها نقطه ی O باشد. در مثلث ABA₁ بنابر قضیه ی اصلی داریم:



$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} \cdot \frac{\sin B_1}{\sin B_2}$$

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \sin B_1 = \sin B_2$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} \quad (1)$$

بنابر خاصیت نیمساز در مثلث ABC می توان نوشت:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BA_1}{BA_1 + A_1C} = \frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow BA_1 = \frac{ac}{b+c} \quad (2)$$

اگر در تساوی ۱ به جای BA₁ از تساوی ۲ مقدار قرار دهیم، نتیجه می شود:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$$

به طریق مشابه ثابت می شود:

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{\gamma c}{a} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = \gamma \left(\frac{c}{\sin C} \cdot \frac{\sin A}{a} \right) = \gamma$$

زیرا بنابر قضیه ی سینوس ها داریم:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

به طریق مشابه ثابت می شود:

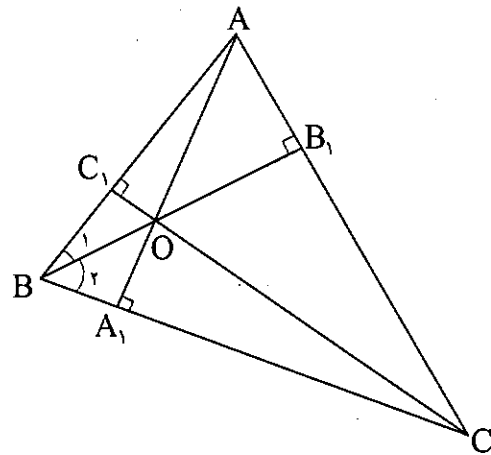
$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \gamma$$

۲. هر یک از ارتفاع های مثلث، توسط ارتفاع های دیگر

به چه نسبتی تقسیم می شوند؟

برای تعیین این نسبت ها، مثلث ABC را مطابق شکل (۴) در نظر می گیریم و فرض می کنیم، سه ارتفاع AA₁ و BB₁ و CC₁ در آن، یکدیگر را در نقطه ی O قطع کرده باشند. بنابر قضیه ی اصلی در مثلث ABA₁ می توان نوشت:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} \cdot \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \quad (1)$$



در مثلث ABA₁ داریم:

$$BA_1 = AB \cdot \cos B$$

همچنین:

$$\sin B_1 = \cos A, \sin B_2 = \cos C$$

اگر این مقادیر را در تساوی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{\cos A}{\cos B \cdot \cos C}$$

به طریق مشابه ثابت می شود:

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{\cos B}{\cos A \cdot \cos C}$$

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{\cos C}{\cos A \cdot \cos B}$$

اگر یکی از زاویه های مثلث منفرجه باشد، در آن صورت