

یک الگوریتم برای حل

معادله درجه ۳^(۱)

● علی عمیدی

این مقاله ترجمه‌ای است از مجله:

The mathematical gazette july 1995



رابطه (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$K_1 X + K_2 = \lambda + \mu + 3(\lambda\mu)^{\frac{1}{3}}(\lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}}) \quad (3)$$

X را از رابطه (۲) پیدا کرده در رابطه (۳) قرار می‌دهیم:

$$K_1 X + K_2 = K_2 - K_1 \frac{P}{\sqrt[3]{r}} + K_1(\lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}})$$

از مقایسه روابط (۳) و (۴) داریم:

$$\lambda + \mu = K_2 - K_1 \frac{P}{\sqrt[3]{r}} \text{ و } \lambda\mu = K_1^2 / 27$$

حال $K_2 = K_2 - K_1 \frac{P}{\sqrt[3]{r}}$ و $K_2 = K_1^2 / 27$ انتخاب می‌کنیم.

بنابراین λ و μ ریشه‌های معادله $Z^2 - K_2 Z + K_2 = 0$

می‌باشند به طوری که: $\lambda + \mu = K_2$ و $\lambda\mu = K_2$

دو حالت در نظر می‌گیریم: حالت اول را $K_2^2 - 4K_2 \geq 0$

و حالت دوم $K_2^2 - 4K_2 < 0$ بگیریم، در حالت اول خواهیم

داشت:

$$\mu = \frac{K_2 - \sqrt{K_2^2 - 4K_2}}{2} \text{ و } \lambda = \frac{K_2 + \sqrt{K_2^2 - 4K_2}}{2}$$

اما با در نظر گرفتن $K_5 = \lambda^{\frac{1}{3}}$ و $K_6 = \mu^{\frac{1}{3}}$ و با استفاده از

$$\text{رابطه «۲» داریم: } X = K_5 + K_6 - \frac{P}{\sqrt[3]{r}}$$

در حالت دوم: $D = \sqrt{4K_2 - K_2^2}$ می‌گیریم. پس

$$\mu = \frac{1}{\sqrt[3]{r}}(K_2 - Di) \text{ و } \lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{r}}(K_2 + Di)$$

و

$$\lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}} = ((K_2 + Di)/\sqrt[3]{r})^{\frac{1}{3}} + ((K_2 - Di)/\sqrt[3]{r})^{\frac{1}{3}}$$

این مقاله روش پیدا کردن ریشه حقیقی برای یک معادله

درجه «۳» را با استفاده از ریاضیات پیشرفته ارائه می‌دهد.

معادله $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ که در آن $a \neq 0$ در نظر بگیرید،

با تقسیم دو طرف این تساوی بر a داریم:

$$X^3 + \frac{b}{a}X^2 + \frac{c}{a}X + \frac{d}{a} = 0 \quad \text{که در آن}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = P \\ \frac{c}{a} = Q \\ \frac{d}{a} = R \end{cases}$$

$$X^3 + PX^2 + QX + R = 0$$

$$(X + \frac{P}{\sqrt[3]{r}})^3 = \frac{P^3}{\sqrt[3]{r}}X + \frac{P^2}{\sqrt[3]{r}} - QX - R$$

طرفین را مکعب کامل می‌کنیم:

$$(X + \frac{P}{\sqrt[3]{r}})^3 = (\frac{P^3}{\sqrt[3]{r}} - Q)X + (\frac{P^2}{\sqrt[3]{r}} - R)$$

با قرار دادن $K_2 = \frac{P^3}{\sqrt[3]{r}} - R$ و $K_1 = \frac{P^2}{\sqrt[3]{r}} - Q$ نتیجه

$$X + \frac{P}{\sqrt[3]{r}} = (K_1 X + K_2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{می‌شود:}$$

حال λ و μ را طوری می‌یابیم که:

$$(K_1 X + K_2)^{\frac{1}{3}} = \lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$X + \frac{P}{\sqrt[3]{r}} = \lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}} \quad (2) \quad \text{اما}$$

که در آن $K_r = 2$; $K_f = 8/27$, $K_r^2 - 4K_f > 0$
 $K_1 = 2$; $K_r = 4$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) داریم: $X = 0.7692293$
 امتحان: $X^3 + 3X^2 + X - 3 = 0$
 مثال (۲):

$$10X^3 - 30X^2 + 20X - 1 = 0$$

$$K_1 = 1; K_r = \frac{-9}{10}; K_r = \frac{1}{10}; K_f = \frac{1}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D_r < 0 \\ K_r > 0 \end{cases}$ ، با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$X = 2/0.468805$$

$$10X^3 - 30X^2 + 20X - 1 = 3 \times 10^{-10} \quad \text{امتحان:}$$

$$X^3 + 3X^2 - X - 1 = 0 \quad \text{مثال (۳):}$$

$$K_1 = 4; K_r = 2; K_r = -2; K_f = \frac{64}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D_r < 0 \\ K_r < 0 \end{cases}$ با استفاده از رابطه (۸) داریم:

$$X = 0.6751308$$

$$X^3 + 3X^2 - X - 1 \approx 0 \quad \text{امتحان:}$$

مثال (۴):

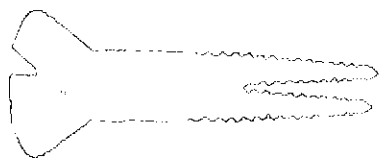
$$9X^3 + 9X^2 - 7X - 3 = 0 \Rightarrow X^3 + X^2 - \frac{7}{9}X - \frac{1}{3} = 0$$

$$K_1 = \frac{10}{9}; K_r = \frac{10}{27}; K_r = 0; K_f = \frac{1000}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D_r < 0 \\ K_r = 0 \end{cases}$ با استفاده از رابطه (۹)، خواهیم داشت:

$$X = 0.7207592$$

$$9X^3 + 9X^2 - 7X - 3 \approx -1/7 \times 10^{-10} \quad \text{امتحان:}$$



حال با استفاده از مدل فرم قدرمطلق - فاز برای اعداد مختلط داریم:

$$\lambda^{\frac{1}{3}} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

همچنین داریم:

$$\lambda = (K_r + Di)/2 = r^2(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$\mu = (K_r - Di)/2 = r^2(\cos 3\theta - i \sin 3\theta) \quad \text{و}$$

$$\mu^{\frac{1}{3}} = ((K_r - Di)/2)^{\frac{1}{3}} = r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad \text{بنابراین:}$$

از این رو $\lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}} = 2r \cos \theta$ که در آن

$$K_f = \frac{K_1^3}{27} \quad \text{اما} \quad \tan 3\theta = \frac{D}{K_r} \quad \text{و} \quad r^6 = (K_r^2 + D^2)/4 = K_f$$

بنابراین $r = \sqrt{K_1/3}$ اگر $K_r > 0$ باشد خواهیم داشت:

$$\text{اگر } X = 2\sqrt{(K_1/3)} \cos\left(\frac{1}{3} \arctg D/K_r\right) - P/3 \quad \text{اگر } K_r < 0 \text{ باشد داریم:}$$

$$(8) X = 2\sqrt{(K_1/3)} \cos\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \arctg D/K_r\right)\right) - P/3$$

حال $\frac{1}{3} \arctg D/K_r$ را جانشین $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \arctg D/K_r)$

می‌کنیم؛ زیرا قسمت حقیقی^(۷) اعداد مختلط کمتر از «۰» است یا با به کار بردن $D/K_r \pm \pi$ جوابهای دیگری نتیجه می‌شود.

اگر $K_r = 0$ باشد نتیجه می‌شود $\arctg D/K_r = \frac{\pi}{2}$

بنابراین: $X = 2\sqrt{(K_1/3)} \cdot \sqrt{3}/2 - P/3$ و یا

$$X = \sqrt{K_1} - P/3$$

مسئله‌ای که باید به آن توجه داشت، این است که در حالت دوم $K_1 < 0$ باشد. در این صورت ریشه موهومی بدست می‌آید و این غیر ممکن است، زیرا اگر $K_1 < 0$ باشد، آنگاه $K_f < 0$ و $K_r^2 - 4K_f > 0$ خواهد بود. بنابراین باید حالت اول که در آن این امکان وجود ندارد را بررسی کرد.

$$X^3 + 3X^2 + X - 3 = 0 \quad \text{مثال (۱):}$$

۱) An algorithm for solving cubic equations

۲ Real part