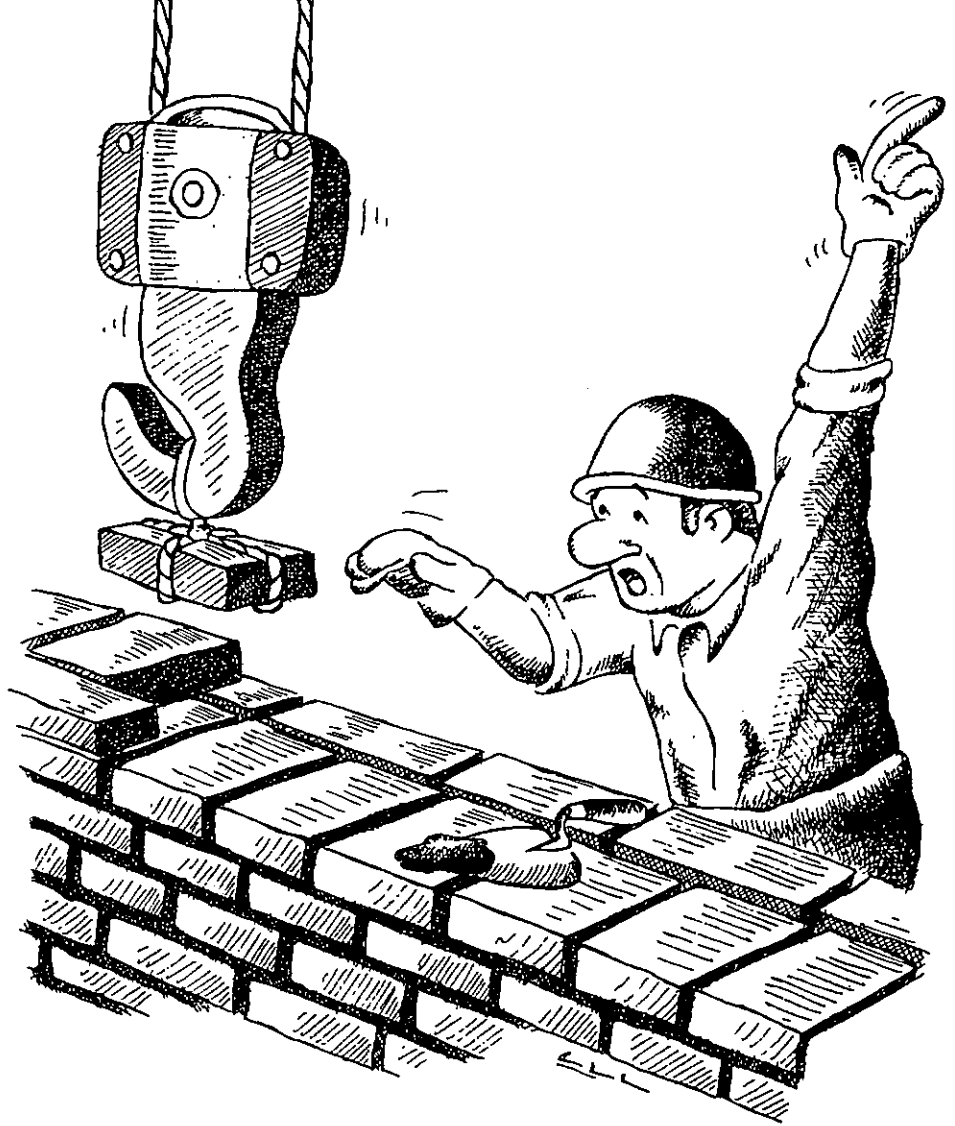


ریاضیات معاصر گشت و گذاری در



تهیه و تنظیم: غلامرضا یاسی پور

نظریه مجموعه ها

نظریه مجموعه ها، سنگ اساس بنای ریاضیات جدید است. تعریفهای دقیق جمیع مفاهیم ریاضی، مبتنی بر نظریه مجموعه هاست. گذشته از این روشهای استنتاج ریاضی، با استفاده از ترکیبی از استدلالهای منطقی و مجموعه - نظری تنظیم شده اند. مختصر بگویم؛ زبان نظریه مجموعه ها، زبان مشترکی است که ریاضیدانان سراسر دنیا با آن صحبت کرده و آن را درک می کنند. از مطالب فوق، چنین برمی آید که، اگر کسی بخواهد پیشرفتی در ریاضیات عالی یا کاربردهای عملی آن داشته باشد، باید با مفاهیم اساسی و نتایج نظریه مجموعه ها و زبانی که در آن بیان شده اند، آشنا شود.

تعریف مجموعه، که در زیر ذکر شده است، این تصور را می دهد که درک مفهوم عامیانه مجموعه، به علت وضوح ظاهری آن، آسان

است؛ اما در واقع، این تعریف در عمل، به مشکلات بسیاری می انجامد، که تنها با استفاده از دستاورد دستگاه های اصل موضوعی بر آنها فائق آمده اند.

زمانی که «جورج کانتور» Georg Cantor (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، مؤسس نظریه مجموعه ها، مفاهیم و استدلالهای جدید و متهورانه خود را منتشر کرد، اهمیت آنها تنها توسط تعداد کمی از ریاضیدانان درک شد؛ اما این نظریه در توسعه بعدی اش، تقریباً در تمام شاخه های ریاضیات نفوذ کرد و تأثیری عمیق بر گسترش آنها داشت؛ به طوری که حتی باعث تغییر نظریه های تثبیت شده گردید. در واقع، توسعه بعضی از نظامهای ریاضی، از قبیل توبولوژی، اساساً به ابزار نظریه مجموعه ها وابسته است. از اینها مهمتر، نظریه مجموعه ها نیروی متحدکننده به دست داد که به تمام شاخه های ریاضیات مبنایی مشترک و مفاهیم آنها، وضوح و دقتی تازه بخشیده است.

مفهوم مجموعه

استدلالهای نظریه مجموعه‌ها مناسب به نظر رسیده است؛ درست همان‌طور که عدد $\circ$ (از لحاظ تاریخی اختراعی جدید) گزاره‌ها و محاسبه‌های حساب را گرد می‌کند. نماد معمول مجموعه تهی $\emptyset$ است.

مجموعه‌هایی که عنصرهای آنها خود مجموعه‌اند، به خانواده "family" یا دستگاه "system" موسومند. به عنوان مثال، یک قوم یا ملت، مجموعه‌ای از اشخاص است و خود عنصری از خانواده اقوام یا ملت‌هاست. یکی از دستگاه‌های بسیار مهم، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه S است؛ این دستگاه به مجموعهٔ توانی "power set" موسوم است و با $p(S)$ نمایش داده می‌شود.

چهار اصل اساسی مشترک دستگاه‌های اصل موضوعی نظریه

$$\{x \in N \mid x = y^2, y \in N\} \text{ به ازای هر } y \in N$$

تمام دستگاه‌های اصل موضوعی نظریه مجموعه‌ها، که در نیمهٔ اول این قرن (قرن بیستم میلادی) توسعه یافتند، چهار اصل اساسی مشترک دارند: اصلهای توسیع‌پذیری "principles of extensionality" اصل ساخت مجموعه‌ای "principle set constructions"، وجود مجموعه‌های نامتناهی، "existence of infinite sets" و اصل موضوع انتخاب "axiom of choice". اصل توسیع‌پذیری بر این است که دو مجموعه S و T دارای عنصرهای یکسان (یعنی، دو مجموعه‌ای که با یک توسیع باشند) همانندند ($S = T$). کلمهٔ همانند "identical" را در این جا به مفهوم لایب‌نیتز "Leibniz" گرفته‌ایم؛ یعنی در هر گزاره می‌توان T را به جای S قرار داد بی‌آن‌که صدق (راست بودن) یا کذب (دروغ بودن) گزاره تغییر کند.

اصل ساخت بر این است که انواع محدود خاصی از گزاره‌ها مجموعه‌ها را تعریف می‌کنند؛ یکی از محدودیتهای معمول این است که گزاره تنها شامل نمادهای شیئی "object symbols"، نمادهای منطقی "logical symbols" و نماد $\in$ است.

وجود مجموعه‌های نامتناهی بیانگر همین مطلب است. البته معنای نامتناهی را باید دقیق کنیم. مشکل است که این اصل با استفاده از ارجاع مستقیم علت و انگیزه موضوعی شود؛ اما بدون آن قسمت اعظم ریاضیات و علوم نظری "theoretical science" از قبیل حساب دیفرانسیل و انتگرال و مکانیک کلاسیک، بی‌معنا خواهد شد. بی‌آن‌که حتی نمی‌توان اساس مجموعه نظری نظریهٔ اعداد طبیعی را به دست داد.

عبارت «مجموعه» در کاربرد محاوره‌ای، معمولاً به معنای دسته‌ای از اشیا در نظر گرفته شده است که به مفهومی وابسته به یکدیگر یا شبیه هم باشند. دقیق ساختن جنبهٔ اخیر، مشکل است و بنابراین از مفهوم ریاضی حذف می‌شود.

تعریف «کانتور» از مجموعه: یک مجموعه، نتیجهٔ جمع‌آوری اشیای خوش تشخیصی -well-determined از برداشت یا تصورمان در یک کل منفرد است؛ این اشیا را عنصرهای آن مجموعه می‌نامیم.

این تعریف، به رغم فقدان دقتش که در عمل به تناقضهایی منتهی می‌شود، برای معرفی چندین تعریف و مفهوم مهم کفایت می‌کند.

اگر شیء a عنصری از مجموعهٔ S باشد، می‌نویسیم $a \in S$ (می‌خوانیم « a متعلق است به S » یا « a شامل S است»). در صورتی که a عنصری از S نباشد، می‌نویسیم $a \notin S$. اگر S مجموعهٔ عناصر $a, b, c, \dots$ باشد، می‌نویسیم:

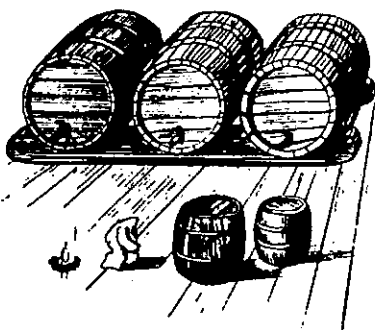
$S = \{a, b, c, \dots\}$ ، به عنوان مثال، $\{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی مثبت است. اگر S تنها شامل یک عنصر a باشد، آن گاه S را تک‌عنصری "singleton" می‌نامیم، $S = \{a\}$. اگر S شامل دو عنصر متمایز a و b باشد، آن گاه S را جفت نامرتب "unordered pair" می‌نامیم، $S = \{a, b\}$.

زیرمجموعه

T ، زیرمجموعهٔ "Subset" هر مجموعهٔ S ، هر مجموعه‌ای است که تمام عناصرش متعلق به S باشند؛ این موضوع را با $T \subseteq S$ نمایش می‌دهیم. زیرمجموعه‌های T از S که با خود S متمایزند، به زیرمجموعه‌های سره "proper subsets" S موسومند؛ در این حالت می‌نویسیم $T \subset S$. مجموعه تهی "empty set" مجموعه‌ای است که اصلاً عنصری ندارد. معرفی این مجموعه برای گرد کردن "to round off" گزاره‌ها و



تفریح اندیشه ۲



فروشنده‌ای سه ظرف، هر یک به گنجایش ۱۰۰ لیتر، و دو ظرف دیگر به گنجایش ۵۰ لیتر و ۲۵ لیتر در اختیار دارد.

سه ظرف اول پر هستند، اولی حاوی شیر پر چربی، دومی پر از شیر معمولی و سومی مملو از شیر کم چربی است. دو ظرف دیگر خالی می‌باشند. فروشنده برای اینکه سه نوع شیر مخلوط با نسبتهای مشخص در سه ظرف ۱۰۰ لیتری داشته باشد، فقط از ۵ ظرف بالا استفاده می‌کند. پس از انجام ۶ عمل ظرفهای ۱۰۰ لیتری همگی پر از شیر مخلوط با نسبتهای زیر می‌باشند:

اولی حاوی $\frac{1}{4}$ شیر پرچربی، $\frac{1}{4}$ شیر معمولی و $\frac{1}{4}$ شیر کم چربی

دومی حاوی $\frac{1}{4}$ شیر معمولی، $\frac{1}{4}$ شیر پرچربی، $\frac{1}{4}$ شیر کم چربی

سومی حاوی $\frac{1}{4}$ شیر کم چربی، $\frac{1}{4}$ شیر پرچربی، $\frac{1}{4}$ شیر معمولی.

فروشنده چگونه عمل کرده است؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

سرانجام، اصل موضوع انتخاب است که پایه بسیاری از استدلالهای ریاضی است. با وجود این، بسیاری از مؤلفان به این اصل موضوع با تردیدی می‌نگرند؛ مشابه موردی که اصل موضوع موازیهای اقلیدس در دوران اولیه با آن برخورد داشت.

اصل انتخاب: اگر S دستگاهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، آن گاه مجموعه A ی موجود است که به طور دقیق یک عنصر مشترک با هر مجموعه S از $\mathcal{S}$ دارد.

