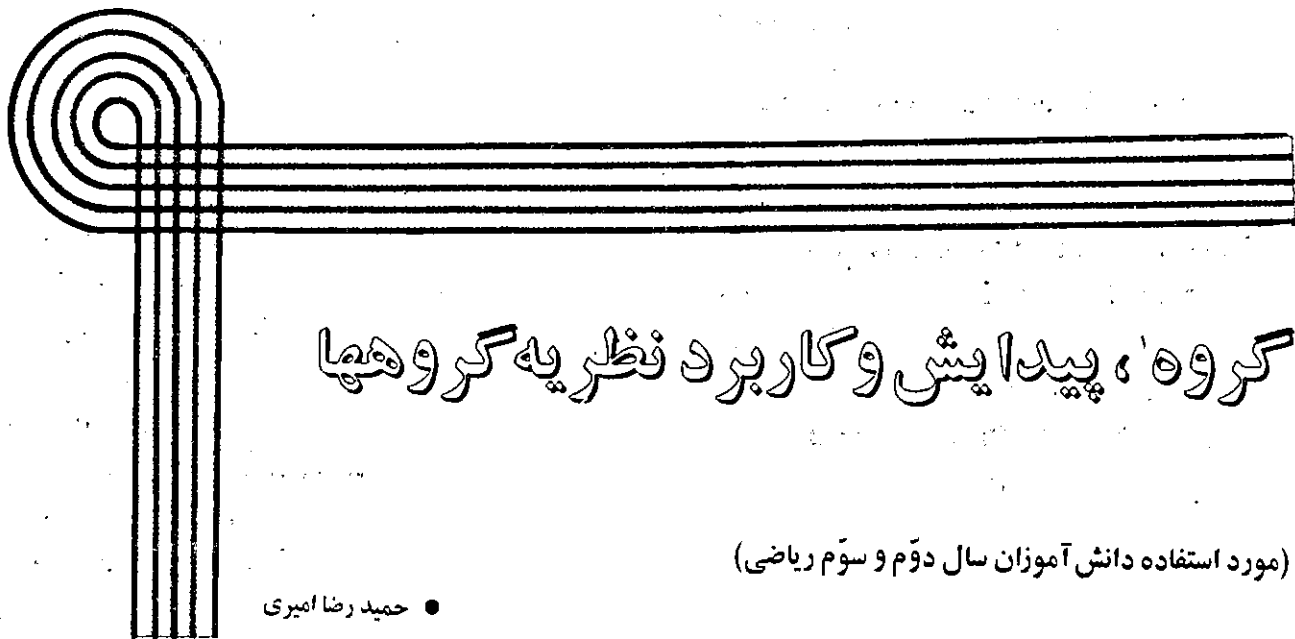




گروه، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها

(مورد استفاده دانش آموزان سال دوم و سوم ریاضی)

● حمید رضا امیری

او را درک کنند. گالوا در سن ۲۱ سالگی در یک دوئل جان باخت و فرصت زیادی برای ادامه راهش در زمینه جبر مجرد و تئوریها و نظریه‌هایش نیافت؛ ولی شیوه تفکر گالوا باعث شد امروزه نظریه او یکی از مهمترین تئوریهای ریاضی به شمار آید و عمومیت داشتن این نظریه نیز موجب استفاده وسیع از آن در علوم دیگر شد. مثلاً در علم شیمی، کاربرد نظریه گروه بسیار عمیق و کارساز است تا جایی که در سالهای آخر دوره لیسانس و حتی فوق لیسانس کاربرد شیمیایی نظریه گروه در تقارن مولکولی و شیمی کوانتم به دانشجویان این رشته تدریس می‌شود.

همانطور که بعداً خواهیم دید ما برای بیان مفهوم گروه نیاز به یک مجموعه^۱ و تعریف یک عمل دوتایی^۲ روی این مجموعه خواهیم داشت. حال اگر در بحث شیمی مجموعه را مجموعه‌ای از عناصر شیمیایی و عمل دوتایی را ترکیب کردن یا... تعریف کنیم و این مجموعه با عمل تعریف شده روی آن همه خواص لازم برای تشکیل یک گروه (به مفهوم ریاضی) را داشته باشد در این صورت می‌توان از کلیه قوانین و قضایایی که ریاضیدانان در نظریه گروهها ثابت کرده‌اند استفاده نمود و به نتایج جالبی در علم شیمی دست یافت.

اکنون به بیان و بررسی نظریه گروهها می‌پردازیم و به طور

یکی از دستگاههای مهم جبری و یکی از مفاهیم اساسی جبر مفهومی است که آن را گروه نامیده‌اند. در دنیای ریاضیات محض، این مفهوم یکی از مواد اصلی در ساختمان جبر مجرد است. اصطلاح مجرد، وابسته به طرز تفکر و برداشت شخص می‌باشد؛ زیرا ممکن است مطلبی یا مفهومی به نظر شخصی مجرد آید (کاملاً ذهنی) ولی در تعییرات شخص دیگری واقعی و عملی جلوه کند. اما اساساً وظیفه ریاضیات محض و به خصوص جبر مجرد خلق دستگاهها و مفاهیم ریاضی به صورت مجرد است، که البته در اکثر موارد این دستگاهها و مفاهیم را می‌توان تعمیم داد و از کاربردهای آن در بقیه علوم استفاده کرد. یکی از این مفاهیم که امروزه در علوم چون، فیزیک - شیمی - زیست شناسی - نجوم و... کاربردهای با ارزشی دارد مفهوم گروه است. این مفهوم در عصر ما تا حد زیادی پیشرفت کرده و اکنون به شکل یکی از شاخه‌های اصلی علم جبر در آمده است. از پایه گذاران جبر مجرد و به خصوص نظریه گروهها شخصی است به نام اوارینست گالوا^۳ که نظریه خود را در ۱۹ سالگی به تقریر در آورد. وی یکی از نوابع ریاضیات است؛ گالوا در زمان خود به درس جبر با چشم تحقیر می‌نگریست و در آن خلاقیت و ابتکاری مشاهده نمی‌کرد. او در این درس به دنبال روشها و خلاقتهای بزرگ بود و همین امر باعث شد که حتی معلمین سرشناس و بزرگ زمانش نتوانند

اختصار وارد قلم رو این شاخه بسیار زیبا از ریاضیات می‌شویم.

تعریف عمل دوتایی

یک عمل دو تایی روی مجموعه ناتهی A تابعی^۵ است از $A \times A$ به A که به هر زوج مرتب از $A \times A$ عضو منحصر به فردی از A را نسبت می‌دهد به عنوان مثال اگر $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه A باشد، آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$*: A \times A \rightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto a * b$$

مثال ۱: عمل $+$ روی $\mathbb{IR}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$+: \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b$$

به عنوان مثال زوج مرتب $(-2, 4)$ تحت این عمل به عدد $2 = 4 + (-2)$ ربط داده می‌شود.

تعریف: مجموعه A را نسبت به قانون $*$ بسته گوییم هرگاه برای هر دو عضو مجموعه A مانند x و y داشته باشیم $x * y \in A$ حاصل ترکیب هر دو عضو مجموعه A تحت قانون $*$ عضوی از مجموعه A باشد.

به عبارت دیگر:

$$A \Leftrightarrow (a, b) \in A \times A \Rightarrow a * b \in A$$

نسبت به $*$ بسته است.

توضیح این مطلب واجب است که با توجه به تعریف عمل، اگر لفظ عمل را بر یک قانون اطلاق کنیم یعنی تابعی متصور است مانند $*$ از $A \times A$ به A که بسته بودن مجموعه A نسبت به عمل $*$ در تعریف عمل نهفته است. در حقیقت هرگاه می‌گوییم مجموعه A همراه با عمل $*$ مفروض است، نیازی به بررسی خاصیت بسته بودن در مجموعه A نسبت به عمل $*$ نمی‌باشد، زیرا طبق تعریف عمل، عمل $*$ ناچاراً به هر دو عضو از A عضوی منحصر بفرد از A را نسبت می‌دهد و این همان مفهوم بسته بودن است ولی اگر لفظ قانون بر $*$ اطلاق شود بررسی خاصیت بسته بودن الزامی است.

در اینجا قبل از معرفی و تعریف گروه به بررسی چند خاصیت مهم که اساس و پایه‌های یک گروه بر آنها استوار می‌باشد خواهیم پرداخت.

خاصیت شرکت پذیری: فرض کنیم عمل دوتایی $*$ روی مجموعه A تعریف شده باشد. در این صورت می‌گوییم مجموعه A نسبت به عمل $*$ دارای خاصیت شرکت پذیری است هرگاه داشته باشیم:

$$a, b, c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

مثال: مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{IR}$ نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت شرکت پذیری است یعنی برای هر سه عضو از این مجموعه مانند a و b و c داریم:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

مثال: مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل ضرب معمولی خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی:

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مثال: مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ نسبت به عمل $*$ که به صورت زیر تعریف می‌شود خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x * y = x + y - 5$$

$$\text{زیرا: } (x * y) * z = (x + y - 5) * z =$$

$$\stackrel{\text{شرکت پذیری } \mathbb{Z}}{[(x + y - 5) + z] - 5} = (x + y + z) - 10 \quad (1)$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - 5) = [x + (y + z - 5)] - 5 = (x + y + z) - 10 \stackrel{\text{شرکت پذیری } \mathbb{Z}}{=} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$$

خاصیت جابجایی: فرض کنیم عمل دوتایی $*$ روی مجموعه A تعریف شده باشد، می‌گوییم مجموعه A نسبت به عمل $*$ دارای خاصیت جابجایی است هرگاه داشته باشیم:

$$a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$

مثال: مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{IR}$ نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت جابجایی است یعنی برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم:

$$a + b = b + a$$

مثال: مجموعه ماتریسهای 2×2 نسبت به عمل جمع ماتریسی دارای خاصیت جابجایی است زیرا اگر

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

دو عضو دلخواه این مجموعه باشند داریم:

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ (c_1 + c_2) & (d_1 + d_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_2 + a_1) & (b_2 + b_1) \\ (c_2 + c_1) & (d_2 + d_1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A_2 + A_1$$

خاصیت عضو خنثی: فرض کنیم عمل دوتایی $*$ روی مجموعه A تعریف شده باشد در این صورت عضو e را عضو خنثی در مجموعه A می‌نامیم هرگاه: اولاً $e \in A$ و ثانیاً برای هر عضو مجموعه A مانند a داشته باشیم $a * e = e * a = a$.

مثال: در مجموعه اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع معمولی عدد صفر عضو خنثی است زیرا اگر a عضو دلخواهی از $\mathbb{R}$ باشد داریم

$$a + 0 = 0 + a = a$$

مثال: اگر مجموعه اعداد گویای مثبت را در نظر بگیریم و عمل $*$ را به صورت زیر تعریف کنیم در این صورت عضو خنثی عدد 3 خواهد بود.

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}^+, x * y = \frac{x \cdot y}{3}$$

زیرا $x * 3 = \frac{x \cdot 3}{3} = x, 3 * x = \frac{3 \cdot x}{3} = x$

خاصیت عضو متقابل یا وارون

فرض کنیم عمل دوتایی $*$ روی مجموعه A تعریف شده باشد در این صورت می‌گوییم مجموعه A نسبت به عمل $*$ دارای خاصیت عضو متقابل است هرگاه برای هر عضو مجموعه A مانند a عضوی از A مانند a' یا (a^{-1}) وجود داشته باشد به قسمی که:

$$a * a' = a' * a = e$$

(e همان عضو خنثی در A است).

مثال: مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت عضو متقابل است زیرا: برای هر عدد حقیقی مانند x عدد $-x$ عددی حقیقی است و $x + (-x) = (-x) + x = 0$ که 0 عضو خنثی در $\mathbb{R}$ نسبت به جمع است.

مثال: اگر مجموعه اعداد گویای مثبت را در نظر گرفته و تعریف کنیم:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}^+, x * y = \frac{x \cdot y}{4}$$

در این صورت عضو متقابل هر عضو از $\mathbb{Q}^+$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\left. \begin{aligned} x * x' &= e \Rightarrow \frac{x \cdot x'}{4} = e \Rightarrow x \cdot x' = 4e \Rightarrow x' = \frac{4e}{x} \\ x' * x &= e \Rightarrow \frac{x' \cdot x}{4} = e \Rightarrow x' \cdot x = 4e \Rightarrow x' = \frac{4e}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x' = \frac{4e}{x}$$

تذکر: اگر مجموعه نسبت به عمل دوتایی دارای خاصیت جابجایی باشد (مانند مثال بالا) برای به دست آوردن عضو خنثی کافی است یکی از دو معادله زیر را حل کنیم

$$\begin{cases} x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

و برای به دست آوردن عضو متقابل هر عضو کافی است یکی از دو معادله زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} x * x' = e \\ x' * x = e \end{cases}$$

حال به تعریف گروه می‌پردازیم:

تعریف: مجموعه ناتهی G ، همراه با عمل $*$ که روی G تعریف شده یک گروه نامیده می‌شود و می‌نویسیم $(G, *)$ گروه است، اگر فقط اگر خواص زیر برقرار باشند:

(خاصیت شرکت پذیری) $1 - \forall a, b \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$

(خاصیت عضو خنثی) $2. \exists! e \in G \forall a \in G, e * a = a * e = a$

(خاصیت عضو متقابل) $3. \forall a \in G \exists! a' \in G, a * a' = a' * a = e$

تذکر: گزاره‌های سوری $\forall y \exists! x$ و $\exists! x \forall y$ با هم تفاوت بسیار دارند. وقتی می‌نویسیم $\exists! x \forall y$ یعنی x ای منحصر بفرد هست که برای تمام y ها خاصیتی برقرار است پس این x برای همه y ها ثابت است اما وقتی می‌نویسیم $\forall y \exists! x$ یعنی برای هر y ، x ای منحصر بفرد هست که خاصیتی برقرار است، پس هر y برای خودش یک x منحصر بفرد دارد، مثلاً اگر ۱۰ عدد y داشته باشیم در قسمت اول فقط دارای یک x هستیم ولی در قسمت دوم دارای ۱۰ عدد x خواهیم بود.

اگر گروه $(G, *)$ علاوه بر خواص سه گانه فوق دارای خاصیت زیر نیز باشد آن را یک گروه جابجایی^۱ یا آبدلی می‌نامیم:

$$\forall a, b \in G, a * b = b * a$$

تعریف: اگر گروه G دارای تعدادی متاهی عضو باشد آن را یک گروه متاهی و اگر تعداد اعضاء گروه G نامتناهی باشد آن را یک گروه نامتناهی می‌نامیم، مثلاً $(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه نامتناهی است ولی $(\{0, 1, -1\}, +)$ یک گروه متاهی است.

حال به بررسی و معرفی چند گروه ریاضی که اکثر خوانندگان با آنها برخورد داشته و تا حدود زیادی قابل درک هستند، می‌پردازیم و سپس اندک اندک بحث را به بررسی و شناخت گروه‌های مجردتر همراه با اعمال غیر ملموس‌تر و ناآشنا تر، می‌کشانیم.

مثال ۱: اگر قرار دهیم $G = \mathbb{Z}$ و عمل $*$ را همان جمع معمولی تعریف کنیم در این صورت $(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه جابجایی است.

تذکر: اگر مجموعه‌ای مانند A نسبت به عمل $*$ دارای خواص شرکت پذیری یا جابجایی باشد این خاصیتها به کلیه زیر مجموعه‌های A (همراه با همان عمل $*$) القاء می‌شود یا به ارث می‌رسند! مثلاً مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ نسبت به عمل جمع دارای خاصیت شرکت پذیری و جابجایی است بنابراین تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ این دو خاصیت را نسبت به همان عمل جمع دارا می‌باشند.

مثال ۲: اگر قرار دهیم $G = \mathbb{Z}$ و عمل $*$ را همان عمل ضرب معمولی که با ۰ نشان می‌دهیم تعریف کنیم در این صورت $(\mathbb{Z}, \cdot)$

تشکیل گروه نمی‌دهد. زیرا خاصیت عضو متقابل برای هر عضو Z نسبت به عمل ضرب برقرار نیست، چون می‌دانیم عدد ۱ عضو خنثی نسبت به عمل ضرب در Z می‌باشد لذا اگر $a \in \mathbb{Z}$ عضوی دلخواه باشد عضو متقابل آن یعنی a' به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a' \cdot a = e = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a}$$

و مثلاً اگر قرار دهیم $a = 2$ در این صورت $a' = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ و یا اگر $a = 0$ خواهیم داشت: $a' = \frac{1}{0}$ که a' تعریف نشده است.

مثال ۳: اگر فرض کنیم $G = \{-1, 1\}$ و عمل $*$ را ضرب معمولی فرض کنیم در این صورت $(G, \cdot)$ یک گروه جابجایی است (به عنوان تمرین به عهده خواننده).

تذکر: همان طور که ملاحظه می‌شود در مثال ۳ مجموعه $\{-1, 1\}$ یکی از زیر مجموعه‌های بسیار کوچک Z می‌باشد ولی این مجموعه ۲ عضوی با همان عمل ضرب معمولی که روی Z تعریف کردیم و Z با آن تشکیل گروه نداد، می‌تواند یک گروه جابجایی تشکیل دهد و این گویای این مطلب است که بزرگی یا کوچکی (تعداد اعضاء) و متاهی یا نامتناهی بودن یک مجموعه هیچ کدام نمی‌تواند ملاک قطعی برای گروه بودن آن باشند.

مثال ۴: اگر فرض کنیم $G = \mathbb{Q}$ و عمل $*$ را ضرب معمولی تعریف کنیم در این صورت $(\mathbb{Q}, \cdot)$ یک گروه نمی‌باشد، زیرا در این مجموعه عدد گویای صفر نسبت به عمل ضرب فاقد عضو متقابل است.

تذکر: باید توجه داشته باشیم که خاصیت بسته بودن یک مجموعه نسبت به عملی که روی آن تعریف کرده‌ایم ممکن است به زیر مجموعه‌هایش القاء نشود، مثلاً Z نسبت به عمل تفریق بسته است ولی $\mathbb{N}$ که زیر مجموعه Z می‌باشد نسبت به این عمل بسته نیست.

مثال ۵: اگر فرض کنیم مجموعه اعداد گویا با مخرج فرد $G = \mathbb{Q}$ و قانون $*$ را روی این مجموعه همان تفریق معمولی تعریف کنیم در این صورت $(G, -)$ تشکیل یک گروه نمی‌دهد، زیرا این مجموعه نسبت به قانون تعریف شده روی آن، خاصیت عضو خنثی ندارد مثلاً اگر $e = 0$

$$\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \neq 0$$

حال که تا اندازه‌ای با اسکلت ساختمان گروهها در ریاضی آشنا شدیم و چهار چوب این ساختمان را بنا کردیم به داخل ساختمان قدم می‌گذاریم تا خواص و ویژگیهای موجود در یک گروه و قضایای حاکم بر آن را مورد بررسی قرار دهیم، ابتدا به اثبات چند قضیه مهم و اساسی در گروهها می‌پردازیم.

قضیه ۱: در هر گروه مانند $(G, *)$ عضو خشی منحصر بفرد است برهان: در حقیقت می‌خواهیم ثابت کنیم اگر در گروه $(G, *)$ برای هر $a \in G$ داشته باشیم $e_1 * a = a * e_1 = a$ و $e * a = a * e = a$ در این صورت $e = e_1$.

$$\left. \begin{array}{l} e_1 \in G \Rightarrow e * e_1 = e_1 \\ e \in G \Rightarrow e * e_1 = e \end{array} \right\} \Rightarrow e = e * e_1 = e_1 = e$$

قضیه ۲: در هر گروه مانند $(G, *)$ عضو متقابل برای هر عضو G منحصر بفرد است. برهان: در این قضیه منظور ما این است که اگر مثلاً برای یک عضو دلخواه G مانند a داشته باشیم:

$$a * a' = a' * a = e, a * a'' = a'' * a = e$$

در این صورت باید $a' = a''$.

به شکل زیر قضیه را اثبات می‌کنیم.

$$a' = e * a' = (\underbrace{a'' * a}_e) * a' = a'' * (\underbrace{a * a'}_e) = a'' * e = a''$$

قضیه ۳: هرگاه $(G, *)$ یک گروه باشد و $a, b \in G$ آنگاه معادلات $y * a = b$ و $a * x = b$ جوابهای منحصر بفردی برای x و y در G خواهند داشت و خصوصاً دو قانون حذف (از چپ و از راست) در G برقرارند یعنی

$$\begin{array}{l} a * b = a * c \Rightarrow b = c \quad (\text{قانون حذف از چپ}) \\ b * a = c * a \Rightarrow b = c \quad (\text{قانون حذف از راست}) \end{array}$$

برهان:

$$a * x = b \Rightarrow a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b \Rightarrow (a^{-1} * a) * x =$$

$$a^{-1} * b \Rightarrow e * x = a^{-1} * b \Rightarrow \boxed{x = a^{-1} * b}$$

و با توجه به قضیه ۲ اگر متقابل a را a^{-1} بنامیم در این صورت $x = a^{-1} * b$ منحصر بفرد است.

$$y * a = b \Rightarrow (y * a) * a^{-1} = b * a^{-1} \Rightarrow y * (a * a^{-1}) = b * a^{-1} \Rightarrow y * e = b * a^{-1} \Rightarrow y = b * a^{-1}$$

و چون a^{-1} طبق قضیه منحصر بفرد است پس $y = b * a^{-1}$ نیز منحصر بفرد است.

اکنون به اثبات یکی از قوانین حذف در یک گروه دلخواه مانند $(G, *)$ می‌پردازیم:

$$a * b = a * c \Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \Rightarrow$$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \xrightarrow{\text{چون } e \text{ منحصر بفرد است}} e * b = e * c \Rightarrow b = c$$

اثبات قانون حذف از راست به عنوان تمرین به عهده خواننده.

تمرین: ثابت کنید اگر $(G, *)$ یک گروه آبدلی باشد داریم:

$$a * b = c * a \Rightarrow b = c$$

قضیه ۴: در هر گروه $(G, *)$ و برای هر دو عضو این گروه مانند x و y داریم:

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} \quad (x^{-1} \text{ متقابل } x \text{ است نسبت به عمل } *)$$

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e$ و سپس با استفاده از قانون حذف قضیه را به اثبات می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) &= x * [y * (y^{-1} * x^{-1})] = x * [(y * y^{-1}) * x^{-1}] \\ &= x * (e * x^{-1}) = x * x^{-1} = e \end{aligned} \quad (1)$$

و همچنین واضح است که $(x * y) * (x * y)^{-1} = e$: (۲) پس داریم:

$$e = e \xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} (x * y) * (x * y)^{-1} = (x * y) * (y^{-1} * x^{-1})$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر قانون حذف}} (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

قضیه ۵: ثابت کنید در هر گروه دلخواه مانند $(G, *)$ و برای هر $a \in G$ داریم:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

اگر $b \in Q^+$ ، وارون b یعنی b' برابر است با $\frac{49}{b}$ (وارون $\frac{2}{3}$ عبارت است از $\frac{49}{\frac{2}{3}} = \frac{147}{2}$) لذا تاکنون ثابت شد که $(Q^+, *)$ یک گروه است، از طرفی:

$$\forall a, b \in Q^+, a * b = \frac{a \cdot b}{v} = \frac{b \cdot a}{v} = b * a \Rightarrow a * b = b * a$$

بنابراین $(Q^+, *)$ یک گروه آبلی یا جابجایی است.

مثال ۷: فرض کنیم $G = \{a_0, a_1, \dots, a_v\}$ و عمل $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall a_i, a_j \in G; a_i * a_j = \begin{cases} a_{i+j} & i+j < v \\ a_{i+j-v} & i+j \geq v \end{cases}$$

(چون $1+2 < v$) مثلاً: $a_1 * a_2 = a_{1+2} = a_3$

(چون $4+5 > v$) $a_4 * a_5 = a_{4+5-v} = a_2$

ثابت می‌کنیم $(G, *)$ یک گروه آبلی است.

(۱) بررسی خاصیت شرکت پذیری:

برای هر a_i و a_j و a_k اگر $i+j+k < v$ که داریم:

$$a_i * (a_j * a_k) = a_i * a_{j+k} = a_{i+j+k}$$

$$(a_i * a_j) * a_k = (a_{i+j}) * a_k = a_{(i+j)+k} = a_{i+j+k}$$

و اگر $i+j+k \geq v$ اثبات به عهده خوانندگان.

(۲) بررسی خاصیت عضو خنثی: واضح است که در این مجموعه

$$\forall i, a_i * a_0 = a_{i+0} = a_i, a_0 * a_i = a_{0+i} = a_i \quad \text{زیرا } e = a_0$$

(۳) بررسی خاصیت عضو متقابل:

برای هر a_i به دنبال عضوی مانند a_j هستیم به قسمی که

$$a_i * a_j = a_{i+j} = a_0 = e = a_j * a_i$$

دهیم $i = v - j$ در این صورت $a_i * a_{v-i} = a_{i+v-i} = a_v = a_0 = e$

مثلاً متقابل a_5 برابر است با $a_{v-5} = a_2$ زیرا $5+2 = v$

$$a_5 * a_2 = a_{5+2} = a_0 = e$$

پس $(G, *)$ یک گروه است از طرفی

$$a_i * a_j = a_{i+j} = a_{j+i} = a_j * a_i \quad \text{اگر } i+j < v$$

$$a_i * a_j = a_{(i+j)-v} = a_{(j+i)-v} = a_j * a_i \quad \text{اگر } i+j > v$$

بنابراین گروه $(G, *)$ یک گروه آبلی است.

$$\left. \begin{aligned} a^{-1} * a &= e \\ a^{-1} * (a^{-1})^{-1} &= e \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^{-1} * a = a^{-1} * (a^{-1})^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر قانون حذف}} a = (a^{-1})^{-1}$$

اکنون آمادگی داریم تا به بررسی و معرفی بعضی از گروههای مجرد پیردازیم و اندکی این مطلب را کلی‌تر بیان کنیم.

مثال ۶: اگر فرض کنیم $G = Q^+$ و عمل $*$ را روی Q^+ به صورت زیر تعریف کنیم در این صورت $(Q^+, *)$ یک گروه جابجایی است.

$$\forall a, b \in Q^+, a * b = \frac{a \cdot b}{v} \quad (1) \quad a * (b * c) = a * \left(\frac{b \cdot c}{v} \right) = \frac{a \cdot \frac{b \cdot c}{v}}{v} = \frac{a \cdot (b \cdot c)}{v^2}$$

$$(a * b) * c = \frac{a \cdot b}{v} * c = \frac{\left(\frac{a \cdot b}{v} \right) \cdot c}{v} = \frac{(a \cdot b) \cdot c}{v^2} = \frac{a \cdot (b \cdot c)}{v^2} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) برقراری خاصیت شرکت پذیری حاصل می‌شود.

(۲) برای اثبات خاصیت عضو خنثی به دنبال عضوی مانند e در Q^+ هستیم به قسمی که برای هر $a \in Q^+$ داشته باشیم: $a * e = e * a = a$ در این گونه موارد کافی است یکی از دو معادله $e * a = a$ یا $a * e = a$ را حل کنیم و e را به دست آوریم زیرا ثابت می‌شود $(Q^+, *)$ دارای خاصیت جابجایی است.

$$a * e = a \Rightarrow \frac{a \cdot e}{v} = a \Rightarrow a \cdot e = v \cdot a \Rightarrow e = v$$

یعنی در این مجموعه عدد گویای v نسبت به عمل $*$ نقش عضو خنثی را ایفا می‌کند و در واقع عضو خنثی می‌باشد.

(۳) حال به دنبال یافتن عضو متقابل برای هر عضو Q^+ هستیم یعنی اگر $a \in Q^+$ به دنبال عضوی مانند a' در Q^+ می‌باشیم به قسمی که $a * a' = a' * a = e$ که در آن $e = v$ پس کافی است یکی از دو معادله $a * a' = e = v$ یا $a' * a = e = v$ را حل کنیم و a' را بیابیم؛

$$a * a' = v \Rightarrow \frac{a \cdot a'}{v} = v \Rightarrow a \cdot a' = v^2 \Rightarrow a' = \frac{v^2}{a}$$

و واضح است که اگر $a \in Q^+$ در این صورت $a' = \frac{v^2}{a} \in Q^+$ مثلاً

مثال ۸: فرض کنیم $G=Z$ و عمل $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x, y \in Z; x*y = x+y-2$$

ثابت می‌کنیم $(Z, *)$ یک گروه جابجایی است.

$$(1) \quad x*(y*z) = x*(y+z-2) = [x+(y+z-2)]-2 = x+(y+z)-4$$

$$(2) \quad (x*y)*z = (x+y-2)*z = [(x+y-2)+z]-2 = (x+y)+z-4 = x+(y+z)-4$$

با توجه به (۱) و (۲) شرکت‌پذیری حاصل می‌شود

(۲) به دنبال عضوی در Z مانند e هستیم که برای هر $x \in Z$ داشته باشیم:

$$x*e = e*x = x$$

$$x*e = x \Rightarrow x+e-2 = x \Rightarrow \boxed{e=2}$$

(۳) برای هر $x \in Z$ به دنبال عضوی در Z مانند x' هستیم به قسمی که:

$$x*x' = x'*x = e = 2$$

مثلاً متقابل عدد ۳ عبارت است از:

$$x*x' = 2 \Rightarrow x+x'-2 = 2 \Rightarrow x+x' = 4 \Rightarrow x' = 4-x$$

$$\text{اگر } x=3 \Rightarrow x' = 4-3 = 1 \Rightarrow x' = 1$$

پس $(Z, *)$ یک گروه است از طرفی

$$\forall x, y \in Z; x*y = x+y-2 = y+x-2 = y*x$$

بنابراین $(Z, *)$ یک گروه جابجایی است.

تعریف: هرگاه $(G, *)$ یک گروه باشد و $a \in G$ در این صورت:

$$a^1 = a*a \text{ و } a^2 = a^1*a, \dots, a^n = a^{n-1}*a$$

حال تا حدودی به بررسی خواص و ویژگیهای گروهها با توجه به اعمال تعریف شده روی آنها می‌پردازیم.

مثال ۹: ثابت کنید اگر برای هر دو عضو از گروه $(G, *)$ مانند

a و b داشته باشیم، $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ در این صورت $(G, *)$ یک گروه جابجایی است.

تذکر: قبلاً طبق قضیه ۳ ثابت کردیم

$$(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\forall a, b \in G; a*b = b*a$$

$$(a*b) = \left((a*b)^{-1} \right)^{-1} = (b^{-1}*a^{-1})^{-1}$$

از طرفی چون G گروه است و $a, b \in G$ پس $a^{-1}, b^{-1} \in G$ لذا

$$(b^{-1}*a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}*(a^{-1})^{-1} = b*a$$

طبق فرض

پس ثابت شد $a*b = b*a$ یعنی $(G, *)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۱۰: ثابت کنید هر گروه از مرتبه ۳ آبلی است. فرض کنیم G یک گروه از مرتبه ۳ باشد لذا دارای ۳ عضو است که با توجه به گروه بودن G و اینکه $e \in G$ پس حداکثر دارای ۲ عضو مخالف e مانند a و b می‌باشد یعنی $G = \{a, b, e\}$.

حال به بررسی خاصیت جابجایی گروه $(G, *)$ می‌پردازیم. خاصیت جابجایی برای هر یک از دو عضو a و b با e با توجه به خاصیت عضو خنثی در گروه G واضح است یعنی همواره:

$$a*e = e*a = a$$

$$b*e = e*b = b$$

و نیز خاصیت جابجایی برای هر عضو G با خودش واضح است یعنی

$$a*a = a*a \text{ و } b*b = b*b \text{ و } e*e = e*e$$

حال ثابت می‌کنیم $a*b = b*a$.

اگر $a*b = c$ ، با توجه به بسته بودن گروه G نسبت به عمل $*$ باید $c \in G$ اگر $c = a$ در این صورت

$$a*b = a \text{ و } a*e = a \Rightarrow a*b = a*e \xrightarrow{\text{قانون حذف}} b = e$$

و این با منحصر بفرد بودن e تناقض دارد پس $c \neq a$ و اگر $c = b$ در

$$a*b = b \text{ و } e*b = b \Rightarrow a*b = e*b$$

این صورت

$$\xrightarrow{\text{قانون حذف}} a = e$$

و این نیز با منحصر بفرد بودن e تناقض دارد پس $c \neq b$ لذا باید $c = e$

یعنی $a*b = e$ و به همین قیاس ثابت می‌شود $b*a = e$ پس $a*b = b*a$ بنابراین $(G, *)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۱۱: ثابت کنید هرگاه برای هر عضو گروه $(G, *)$ مانند x

اگر داشته باشیم $x = x^{-1}$ (متقابل هر عضو خودش باشد) آنگاه G آبلی است.

$$\forall x, y \in G; x*y = y*x \text{ ثابت می‌کنیم}$$

(متقابل هر عضو خودش می‌باشد) $(x*y)^{-1} = (x*y)$ طبق فرض داریم

$$(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$$

و طبق فرض $x^{-1}=x$ و $y^{-1}=y$ لذا

$$(x*y)=(x*y)^{-1}=(y^{-1}*x^{-1})=(y*x) \Rightarrow x*y=y*x$$

پس G آبلی است.

گاهی اوقات مجموعه‌ها را همراه با عمل تعریف شده روی آنها و اثر عمل روی هر یک از اعضاء مجموعه به صورت جدولی نمایش می‌دهیم که بنوبه خود دارای خواص و ویژگیهای قابل توجهی می‌باشد. مثلاً در مثال ۱۰ و با توجه به مطالب اثبات شده در آن می‌توان گروه G از مرتبه ۳ را به صورت جدولی نمایش داد.

*	a	b	e
a	b	e	a
b	e	a	b
e	a	b	e

تذکر: هرگاه یک گروه و نتیجه حاصل از عمل $*$ روی اعضاء این گروه را به صورت جدولی نمایش دهیم و قطر اصلی جدول را رسم کنیم (مطابق شکل) و اعضاء دو طرف قطر نسبت به آن تقارن داشته باشند در این صورت حتماً گروه مزبور یک گروه آبلی است (اثبات به عهده خواننده) و نیز اگر در یک جدول یک عضو مجموعه بیش از یک بار در هر سطر یا ستون تکرار شود آن مجموعه همراه با آن عمل تشکیل گروه نمی‌دهد (اثبات به عهده خواننده).

مثال:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$$G = \{e, a, b, c\}$$

طبق مطالب فوق $(G, *)$ یک گروه آبلی است.

مثال: اگر $G = \{A, B, C, D\}$ در این مثال چون در سطر اول B دوبار تکرار شده و یا در سطر آخر D دو بار تکرار شده و یا در ستون دوم B دوبار تکرار شده لذا بنابر مطالب فوق $(G, *)$ نمی‌تواند یک گروه باشد. البته واضح است که C نقش عضو خنثی را دارد، زیرا ترکیب آن از چپ و از راست با هر عضو G خود آن عضو را نتیجه می‌دهد. اما مثلاً عضو D فاقد متقابل است زیرا ترکیب هیچ یک از اعضاء G با D عضو خنثی یعنی C را نتیجه نمی‌دهد.

*	A	B	C	D
A	<u>B</u>	C	A	<u>B</u>
B	C	D	B	A
C	A	B	C	D
D	A	B	<u>D</u>	<u>D</u>

به عنوان تمرین ثابت کنید جدول زیر مشخص کننده یک گروه است (عضو خنثی و وارون هر عضو را مشخص کنید)، آیا گروه آبلی است؟

x	۱	-۱	i	-i
۱	۱	-۱	i	-i
-۱	-۱	۱	-i	i
i	i	-i	-۱	۱
-i	-i	i	۱	-۱

تعریف: مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ را مجموعه باقیمانده‌های

تقسیم اعداد صحیح مثبت بر n می‌نامیم که در آن $n \geq 1$ ، و با Z_n نمایش می‌دهیم مثلاً $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

تذکر: می‌دانیم هرگاه عددی صحیح و بزرگتر از صفر بر n تقسیم شود باقیمانده این تقسیم یا صفر است یا یک ... یا $n-1$ است، واضح است چون بخش پذیری در اعداد صحیح مثبت مطرح است باقیمانده تقسیم اعداد کوچکتر از n بر n خودشان می‌شوند مثلاً باقیمانده تقسیم عدد ۴ بر ۸ برابر است با ۴ زیرا

$$4 = 0 \times 8 + 4 \quad \begin{array}{r} 8 \\ 4 \overline{) 4} \end{array}$$

و با توجه به اینکه باید $e \in Z_5$ باشد بنابراین $m_1 = 0$ ، یعنی:

$$e = 0$$

(۳) برای هر عضو Z_5 مانند x به دنبال عضوی از Z_5 مانند x' هستیم به قسمی که $x \oplus x' = x' \oplus x = e = 0$.

$$x \oplus x' = 0 \Rightarrow x + x' - 5m_1 = 0 \Rightarrow x' = 5m_1 - x$$

$$\text{اگر } x = 0 \Rightarrow x' = 5m_1 - 0 \xrightarrow{m_1=0} x' = 0$$

$$\text{اگر } x = 1 \Rightarrow x' = 5m_1 - 1 \xrightarrow{m_1=1} x' = 4$$

$$\text{اگر } x = 2 \Rightarrow x' = 5m_1 - 2 \xrightarrow{m_1=1} x' = 3$$

$$\text{اگر } x = 3 \Rightarrow x' = 5m_1 - 3 \xrightarrow{m_1=1} x' = 2$$

$$\text{اگر } x = 4 \Rightarrow x' = 5m_1 - 4 \xrightarrow{m_1=1} x' = 1$$

پس $(Z_5, \oplus)$ یک گروه است. از طرفی با توجه به خاصیت جابجایی جمع معمولی در اعداد حقیقی داریم:

$$x \oplus y = (x + y) - 5m_1 = (y + x) - 5m_1 = y \oplus x$$

لذا $(Z_5, \oplus)$ یک گروه آبدی است.

به همین ترتیب در حالت کلی می توان ثابت کرد که $(Z_n, \oplus)$ یک گروه جابجایی است.

تمرین: اگر $G = Z_5 - \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ و عمل $\otimes$ را روی اعضاء این مجموعه به صورت زیر تعریف کنیم ثابت کنید $(Z_5 - \{0\}, \otimes)$ یک گروه جابجایی است.

$$\forall x, y \in Z_5 - \{0\}, x \otimes y = 5 \text{ باقیمانده تقسیم } xxy \text{ بر } 5 = xxy - 5m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

مثلاً $3 \otimes 4 = 2$ زیرا $3 \times 4 = 12$ و باقیمانده تقسیم ۱۲ بر ۵ برابر با عدد ۲ است.

حال جمع و ضرب جدیدی روی چنین مجموعه هایی تعریف کرده و خواهیم دید که این مجموعه ها با اعمال تعریف شده روی آنها تشکیل گروه جابجایی می دهند.

مثال ۱۲: فرض کنیم $G = Z_5$ یا $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و عمل $\oplus$ را روی اعضاء این مجموعه به صورت زیر تعریف می کنیم: باقیمانده تقسیم $x + y$ بر ۵ $x \oplus y = 5$ $\forall x, y \in Z_5$ (اگر $x + y$ را بر عدد ۵ تقسیم کنیم باقیمانده تقسیم حتماً یکی از اعداد ۰ تا ۴ خواهد بود پس مجموعه نسبت به عمل بسته است).

$$\begin{array}{r} x+y \\ \hline r \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ m \end{array}$$

$$\Rightarrow x + y = 5m + r \Rightarrow r = (x + y) - 5m$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in Z_5, x \oplus y = (x + y) - 5m$$

$$m \in \{0, 1\}$$

به عنوان مثال: $4 \oplus 3 = 2$ زیرا $4 + 3 = 7$ و باقیمانده تقسیم ۷ بر ۵ برابر با ۲ است. حال $(Z_5, \oplus)$ را به صورت جدولی نمایش می دهیم:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(۱) بررسی خاصیت شرکت پذیری با توجه به جدول واضح و به عهده خواننده.

(۲) به دنبال عضوی در Z_5 مانند e هستیم به قسمی که برای هر $x \in Z_5$ داشته باشیم:

$$x \oplus e = e \oplus x = x$$

$$x \oplus e = x \Rightarrow x + e - 5m_1 = x \Rightarrow e = 5m_1$$

$$۱) x * y = x + y + ۱ \quad ۷) x * y = x + xy$$

$$۸) x * y = x + xy + y \quad ۹) x * y = xy + y$$

$$۱۰) x * y = x - y$$

یادداشتها

۱. Group

۲. Evariste Galois

۳. set

۴. Binary operation

۵. Function

۶. Associative

۷. Existential - uniqueness quantifier (سور وجودی یکتا)

۸. Identity element

۹. Commutative group



ترجمه پرویز شهریار

ادب ریاضی

گوشه‌ای از تاریخ ریاضیدانها

آخرین سخنان لاگراف از زبان مونتر

از مرگ نباید هراس داشت. وقتی که بدون درد فرارسد هیچ چیز ناگواری در آن وجود ندارد. چند دقیقه دیگر، بدن من از زندگی جدا می‌شود، همه جا مرگ و نیستی خواهد بود. آری من دارم می‌میرم و این خوشایند من است. من زندگی کردم. احترام یک ریاضی دان را به دست آوردم. هرگز کینه خود را به کسی نیاز مودم. هیچ بدی نکرده‌ام. مرگ برایم خیلی ساده است.
از کتاب اورایست گالوا اثر لنوپولد اینفلد

تقریب:

(۱) نشان دهید که اگر G گروهی از مرتبه زوج باشد (تعداد اعضاء G زوج است) آنگاه G دارای عضوی چون $e \neq a$ می‌باشد به قسمی که $a^2 = e$.

(۲) ثابت کنید برای هر گروه دلخواه چون G اگر رابطه زیر برقرار باشد آنگاه G یک گروه آبلی (جابجایی) است.

$$\forall a, b, c \in G; a * b = c * a \Rightarrow b = c$$

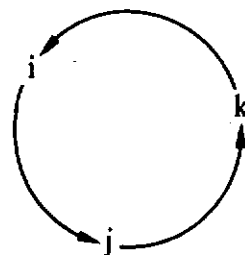
(۳) فرض کنیم G مجموعه‌ای از عناصر به صورت $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ و عمل ضرب معمولی را روی اعضاء G به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$



ثابت کنید مجموعه G با ضرب معمولی تعریف شده روی آن یک گروه است. آیا گروه آبلی است؟

(۴) اگر a و b و c اعضاء گروه $(G, *)$ باشند ثابت کنید

$$(a * b) * c)^{-1} = (c^{-1} * b^{-1}) * a^{-1}$$

(۵) فرض کنیم $A = \{a, b, c\}$ ثابت کنید $(P(A), \cap)$ و نیز $(P(A), U)$ هیچ کدام گروه نمی‌باشند.

در مسائل ۶ تا ۱۰ عمل دوتایی $*$ را روی Z تعریف کرده‌ایم. مشخص کنید Z با کدام یک از اعمال تعریف شده تشکیل گروه می‌دهد و کدام یک گروه جابجایی است.