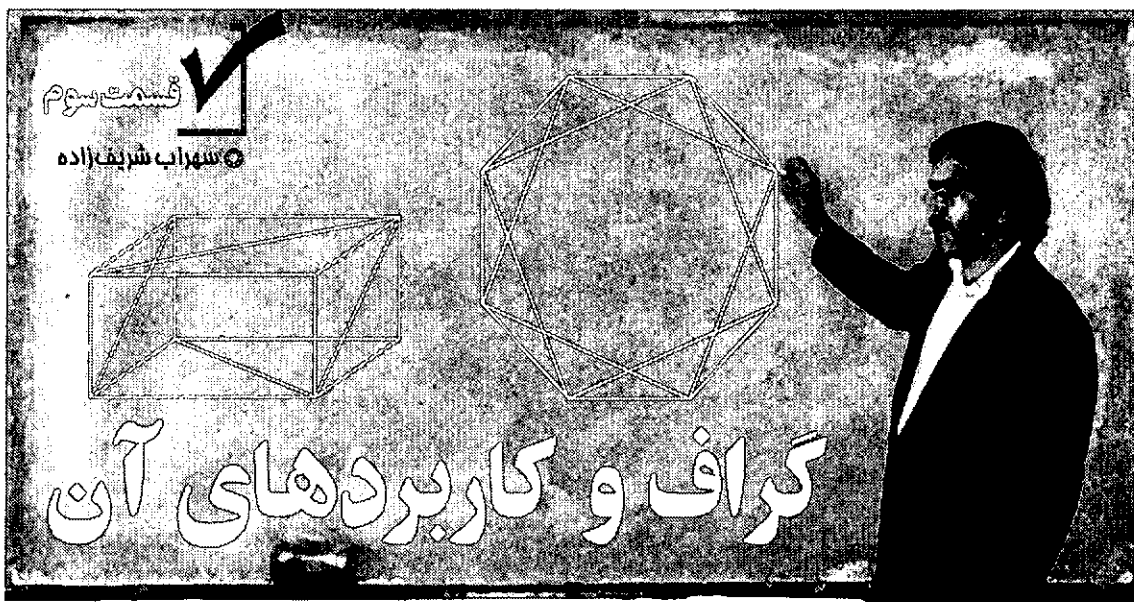




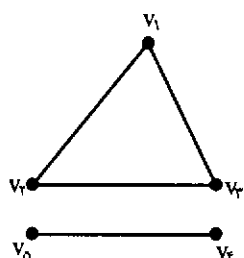
برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

گراف مکمل

باشد، آن گاه:

$$q(\bar{G}) = \binom{p}{2} - q(G)$$

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \quad \text{و} \quad \Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p - 1$$



مسأله: نمودار گراف $G = (V, E)$ به صورت مقابل رسم شده است:

الف) مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب) مجموعه $\bar{E} = \{uv \mid u \neq v, uv \notin E\}$ را مشخص کنید.

ج) گراف $H = (V, E \cup \bar{E})$ را رسم و نام آن را

اگر G یک گراف ساده باشد، مکمل گراف G را با $\bar{G}$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر می سازیم:

۱. مجموعه رئوس $\bar{G}$ همان مجموعه رئوس G است.
۲. بین دو رأس متمایز $\bar{G}$ یالی وجود دارد؛ اگر و تنها اگر یالی در G بین آن دو رأس نباشد.

تذکر: براساس تعریف بالا، هرگاه رأس هایی را که در گراف ساده G به هم وصل نشده اند، به هم وصل کنیم، گراف مکمل آن گراف به دست می آید.

مثال: اگر گراف G به صورت باشد، آن گاه $\bar{G}$ به صورت تعریف می شود.

نکته ۱: از ترکیب گراف ساده و مکمل آن، یک گراف کامل تشکیل می شود.

نکته ۲: اگر $\bar{G}$ گراف مکمل گراف G از مرتبه P

مشخص کنید. (امتحان هماهنگ کشوری - تیرماه ۷۴)

حل: الف)

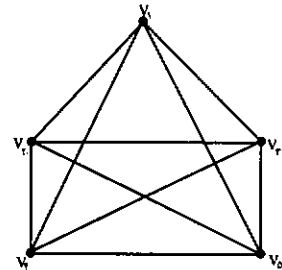
$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

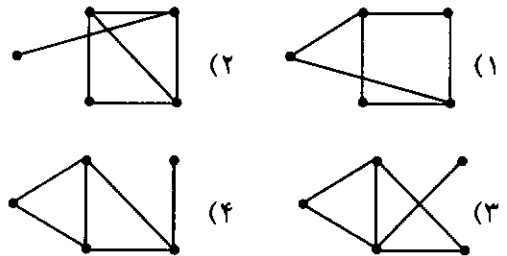
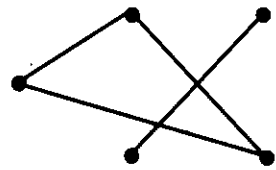
ب)

$$\bar{E} = \{v_1v_4, v_1v_5, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$$

ج) گراف H همان k_5 است.



آزمون ۳۰) مکمل گراف زیر کدام است؟



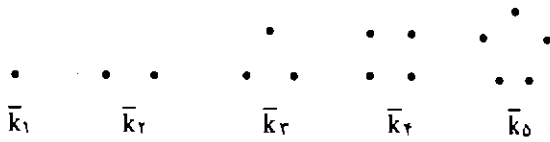
حل: گزینه (۱). مکمل این گراف باید ۲ رأس درجه ۳ و سه رأس درجه ۲ داشته باشد که فقط گراف داده شده در گزینه (۱) دارای این رأس هاست.

گراف تهی

گرافی را که دارای هیچ یالی نباشد، گراف تهی می نامند. هر گراف تهی مرتبه p را به $\bar{k}_p$ نمایش می دهند.

تذکر ۱: گراف « $\bar{o}$ » منتظم از مرتبه p را گراف تهی مرتبه p می نامند.

مثال: گراف $\bar{k}_p$ به ازای $1 \leq p \leq 5$:



تذکر ۲: گراف k_p و $\bar{k}_p$ مکمل یکدیگرند.

آزمون ۳۱) در گراف $G=(V,E)$ داریم،

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 56, \text{ کدام است } p?$$

$$6(4) \quad 9(3) \quad 8(2) \quad 7(1)$$

حل: گزینه (۲): $2q = 56 \rightarrow q = 28$

تعداد یال های گراف G برابر تعداد یال های گراف k_8

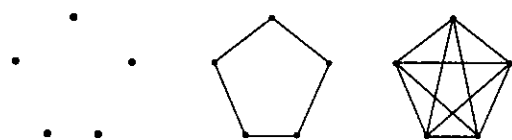
است که در آن: $p = 8$

آزمون ۳۲) کدام یک از گراف های زیر وجود ندارد؟

۱) غیرکامل و منتظم
۲) کامل و غیرمنتظم
۳) کامل و منتظم
۴) غیرکامل و غیرمنتظم
حل: گزینه (۲). با توجه به این که همه گراف های کامل منتظمند، گراف کاملی وجود ندارد که منتظم نباشد.

سؤال: چند نوع گراف منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ آن ها را رسم کنید.

پاسخ: ۴ یا ۲ یا ۰ یا $5r = 2q \rightarrow r = 0$ یا ۲ یا ۴ چون $2q$ زوج است، r می تواند اعداد ۰ یا ۲ یا ۴ را اختیار کند:



(۴- منتظم مرتبه ۵) (۲- منتظم مرتبه ۵) (۰- منتظم مرتبه ۵)

سؤال: چند گراف منتظم با اندازه ۱۲ وجود دارد؟

پاسخ:

$$\begin{cases} rp = 2q = 2 \times 12 = 24 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 1 \times 24 \\ r < p \end{cases}$$

گراف‌های منتظم با اندازه ۱۲ عبارتند از:

«۲- منتظم مرتبه ۱۲» و «۳- منتظم مرتبه ۸» و «۴- منتظم مرتبه ۶» و «۱- منتظم مرتبه ۲۴»

حل: از رأس a به b تعداد ۸ مسیر وجود دارد که عبارتند از:

مسیرهای به طول دو: $(adb), (afb)$

مسیرهای به طول سه: $(adcb), (adfb), (afdb), (afeb)$

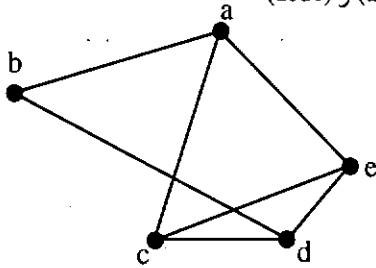
مسیرهای به طول چهار: $(afdcdb), (adfeb)$

تذکر: در هر گراف مسیری به طول مرتبه وجود ندارد.

آزمون (۳۴) در گراف شکل زیر، چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟ (سراسری - ریاضی - ۷۵)

۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

حل: گزینه (۴). مسیرهای بین a و e به طول ۳ عبارتند از: $(abde)$ و $(acde)$

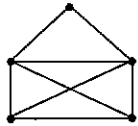


مثال ۱: در گراف، همه دورهای به طول ۳ را مشخص کنید.

حل: دورهای به طول ۳ عبارتند از:

$(aeda) - (abda) - (bcdbe) - (edce)$

مثال ۲: در گراف دورهایی به طول ۳، ۴ و ۵ وجود دارد.

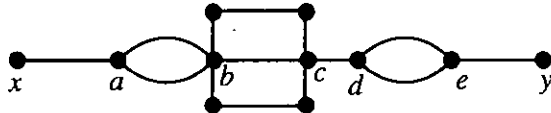


مثال ۳: در گراف دوری وجود ندارد.



آزمون (۳۵) تعداد مسیرهای بین دو رأس x و y در گراف زیر کدام است؟

۶ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴)



آزمون (۳۳) تعداد گراف‌های ۱۷ منتظم مرتبه ۱۸ چند تا است؟

۵ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

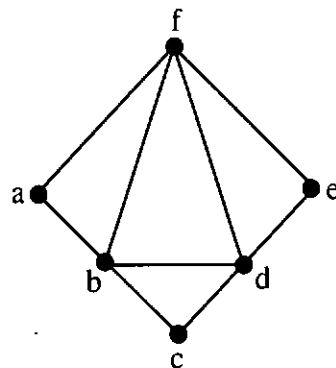
حل: گزینه (۲). گراف مزبور، گراف کامل K_{18} است و فقط یک گراف کامل مرتبه ۱۸ وجود دارد.

مسیر و دور در گراف

تعریف: در گراف ساده $G=(V,E)$ یک مسیر از a به b ، دنباله‌ای از رأس‌های متمایز G به صورت $(v_1=a)v_2v_3\cdots(v_{n+1}=b)$ است؛ به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، توسط یک یال به هم وصل شده باشند (مجاور باشند). تعداد یال‌های مسیر را طول مسیر می‌نامند که در این جا طول مسیر برابر n است.

تعریف: اگر در گراف $G=(V,E)$ ، دو سر یک مسیر فقط یک رأس باشد، آن را دور می‌نامند و طول دور هم برابر تعداد یال‌های تشکیل دهنده آن دور است.

تذکر: دنباله شامل فقط یک رأس، مسیری به طول صفر است.



مثال: تعداد مسیرهای از a به b را مشخص کنید و آن‌ها را بنویسید.

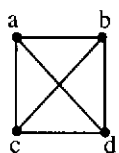
حل:

$$\binom{2}{0}! = 1 \quad b \text{ به } a \text{ به طول یک از } a \text{ به } b$$

$$\binom{2}{1}! = 2 \quad b \text{ به } a \text{ به طول دو از } a \text{ به } b$$

$$\binom{2}{2}! = 2 \quad b \text{ به } a \text{ به طول سه از } a \text{ به } b$$

پس تعداد کل مسیرهای به طول متفاوت از رأس a به رأس b برابر است با: $1+2+2=5$



مثلاً در گراف کامل (روبه‌رو)،
مسیرهای متفاوت بین a و b عبارتند از:
 ab و acb و adb و $acdb$ و $adcb$

توجه کنید:

تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه و

متمايز a و b در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\binom{P-2}{0}! + \binom{P-2}{1}! + \dots + \binom{P-2}{P-2}! =$$

$$\sum_{L=0}^{P-2} \binom{P-2}{L} L! = \sum_{L=0}^{P-2} (P-2)_L$$

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{که:}$$

آزمون (۳۶) تعداد مسیرهای متفاوت از رأس a به رأس b در گراف k_6 کدام است؟

$$۵۰ (۱) \quad ۵۵ (۲) \quad ۶۰ (۳) \quad ۶۵ (۴)$$

حل: گزینه (۴). روش اول:

$$P=6 \rightarrow \text{تعداد کل مسیرها در } k_6 \text{ بین } a \text{ و } b = \sum_{L=0}^4 \binom{4}{L} L!$$

$$= \binom{4}{0}! + \binom{4}{1}! + \binom{4}{2}! + \binom{4}{3}! + \binom{4}{4}!$$

$$= 1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$$

حل: گزینه (۳). بین دو رأس x و a یک مسیر، بین a و b دو مسیر، بین b و c سه مسیر، بین c و d یک مسیر و بین d و e دو مسیر و بین e و y یک مسیر وجود دارد، پس بنابر اصل ضرب:

$$1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 12 = \text{تعداد مسیرهای بین } x \text{ و } y$$

نکته ۱: هرگاه $\delta \geq k$ ، در این صورت گراف حداقل یک مسیر به طول k دارد.

نکته ۲: هرگاه $\delta \geq k$ ، در این صورت گراف حداقل یک دور به طول $k+1$ دارد.

نکته ۳: هرگاه $\delta \geq 2$ ، در این صورت گراف حداقل یک دور دارد.

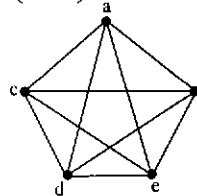
نکته ۴: تعداد مسیرهای به طول L بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\binom{P-2}{L-1} (L-1)!$$

مثال ۱: چند مسیر به طول ۳ در گراف k_5 وجود دارد؟

$$P=5 \rightarrow \text{تعداد مسیرهای به طول ۳} = \text{حل:}$$

$$\binom{5-2}{3-1} (3-1)! = \binom{3}{2} 2! = 3 \times 2 = 6$$



مثلاً در گراف کامل (روبه‌رو) مسیرهای به طول ۳ بین دو رأس a و b عبارتند از:

$$(acdb) - (aceb) - (adeb) - (adcb)$$

$$(aedb) - (aecb)$$

همان‌طور که توجه دارید، بین دو رأس a و b تبدیلات دوتایی از حروف d و e و c نوشته شده‌اند که تعداد آن‌ها

$$\binom{3}{2} 2! = 6 \text{ برابر است با:}$$

مثال ۲: تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه a و b در گراف k_4 را مشخص کنید.

توجه کنید:

تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف k_p برابر است با:
 $[(P-2)! e]$ [علامت جزء صحیح،
 $(P > 2, e = 2/72$

روش دوم:

تعداد کل مسیرهای متفاوت در k_p بین a و b $P=6 \rightarrow$
 $= [4! \times e] = [24 \times 2/72] = [65/28] = 65$
 نکته: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل k_p برابر

است با: $\frac{1}{2} \binom{P}{k} (k-1)!$ $(3 \leq k \leq p)$

آزمون ۳۷) گراف کامل مرتبه ۵ چند دور به طول ۵ دارد؟
 ۱۰ (۴) ۱۶ (۳) ۱۲ (۲) ۸ (۱)
 حل: گزینه (۲):

$\frac{1}{2} \binom{5}{5} 4! = \frac{1}{2} \times 1 \times 24 = 12$

نکته: تعداد کل دورهای k_p برابر است با:

$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^P \binom{P}{k} (k-1)!$

آزمون ۳۸) تعداد دورهای متمایز گراف k_p کدام است؟
 ۹ (۴) ۷ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)
 حل: گزینه (۳):

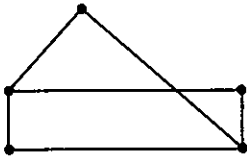
$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^4 \binom{4}{k} (k-1)! = \frac{1}{2} \binom{4}{3} (2!) + \frac{1}{2} \binom{4}{4} 3! = 4 + 3 = 7$

آزمون ۳۹) دنباله درجه‌های رأس‌های گراف G به صورت ۲ و ۲ و ۳ و ۳ است. اگر دو رأس با ماگزییم درجه مجاور نباشند، تعداد دورهای به طول ۳ یال کدام

است؟ (سراسری-ریاضی-۷۹)

۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

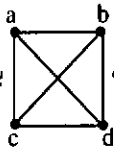
حل: گزینه (۱). گراف G به صورت مقابل است که مشاهده می‌شود و هیچ دوری به طول ۳ ندارد.



توجه کنید:

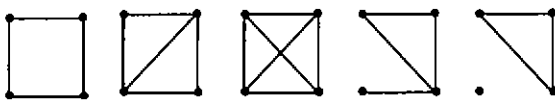
در هر گراف k_p ، تعداد 2^{P-2} مسیر بین هر دو رأس مشخص و متمایز وجود دارد.

مثال ۱: در گراف k_4 بین دو رأس a و b تعداد



$2^{4-2} = 2^2 = 4$ مسیر متمایز وجود دارد که عبارتند از:
 $(ab) - (acb) - (adb) - (acdb)$

مثال ۲: گراف‌های مرتبه ۴ را که دارای دور هستند، رسم کنید.
 حل:



توجه کنید:

در گراف k_p ، اگر p زوج باشد، تعداد دورهای زوج و تعداد دورهای فرد با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-2}{2}$

اثبات: می‌دانیم طول‌های دورهای متفاوت در گراف k_p به صورت زیر است:
 ۳, ۴, ۵, ۶, ..., p

چون p زوج است، لذا دورهای به طول زوج عبارتند از:

$$\underbrace{4, 6, 8, \dots, p}_{t_n}$$

و این یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است، پس:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow p = 4 + (n-1) \times 2 \rightarrow p = 4 + 2n - 2 \rightarrow 2n = p - 2$$

$$\rightarrow n = \frac{p-2}{2}$$

و همچنین، دورهای به طول فرد عبارتند از:

$$\underbrace{3, 5, 7, \dots, p-1}_{t_n}$$

و این نیز یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است. پس:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow p-1 = 3 + (n-1) \times 2 \rightarrow p-1 = 3 + 2n - 2$$

$$\rightarrow p-1 = 2n+1 \rightarrow n = \frac{p-2}{2}$$

توجه کنید:

در گراف کامل K_p اگر p فرد باشد، آن گاه:

الف) تعداد دورهای زوج با طول های متفاوت

$$\frac{p-3}{2} \text{ برابر است با:}$$

ب) تعداد دورهای فرد با طول های متفاوت

$$\frac{p-1}{2} \text{ برابر است با:}$$

اثبات: الف) $\underbrace{4, 6, 8, \dots, p-1}_n$: تعداد دورهای به طول

تا

زوج (p فرد) و این تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است. پس:

$$\begin{cases} d=2 \\ t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow p-1 = 4 + (n-1) \times 2 \rightarrow p-1 = 4 + 2n - 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow n = \frac{p-3}{2}$$

ب) $\underbrace{3, 5, 7, \dots, p}_{t_n}$: تعداد دورهای به طول فرد (p فرد)

و این نیز یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است.

پس:

$$\begin{cases} d=2 \\ t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow p = 3 + (n-1) \times 2 \rightarrow p = 3 + 2n - 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow n = \frac{p-1}{2}$$

آزمون ۴۰ در گراف کامل مرتبه ۱۹، تعداد دورهای زوج با طول های متفاوت، کدام است؟

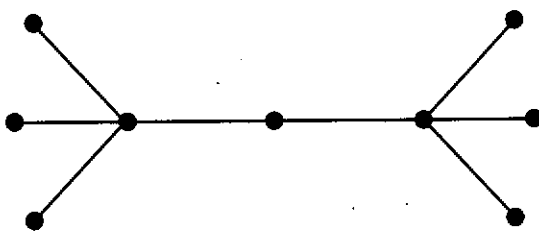
۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۶

حل: گزینه (۱):

$$k_{19} \text{ تعداد دورهای زوج در } = \frac{p-3}{2} = \frac{19-3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

مسئله: نمودار گراف $G=(V,E)$ به صورت مقابل

است،



الف) تمام دورهای گراف G را مشخص کنید.

ب) چه یالی از گراف G را حذف کنیم تا گراف حاصل

۲- منتظم از مرتبه ۶ باشد.

(امتحان هماهنگ کشوری - ۷۷/۴/۳۱)

حل: الف) این گراف تنها دو دور دارد که عبارتند از:

(۷۵۷۴۷۶۷۵) و (۷۱۷۲۷۳۷۱)

ب) با حذف یال ۷۳۷۴ گراف ۲- منتظم مرتبه ۶

می شود.