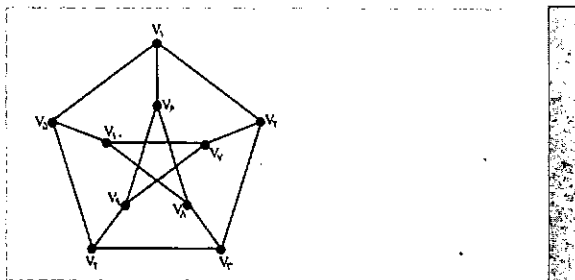


در سال ۱۸۵۹ میلادی سر ویلیام روان همیلتن (۱۸۰۵-۱۸۶۵) ریاضیدان برجسته‌ی ایرلندی، نوعی بازی را که از یک دوازده وجهی که از چوب سفت و محکم، قطعه‌ای زنجیر و بیست پرچم تشکیل شده بود، به بازار عرضه کرد. در این بازی، هر رأس دوازده وجهی به نام یکی از شهرهای مهم و مشهور آن زمان نامگذاری شده بود، و بازیکن به عنوان جهانگرد، باید از یک شهر شروع به حرکت می‌کرد و سپس از

شهرهای بعدی، تنها و تنها یک بار عبور می‌کرد و دوباره به همان شهری که حرکت خود را از آن آغاز کرده بود، بازمی‌گشت. در این بازی، جهانگرد از هر شهری که دیدار می‌کرد، یک پرچم را در رأس متناظر با آن شهر، در دوازده وجهی قرار می‌داد و به همین ترتیب تا شهر آخر. زنجیر نیز مسیر حرکت جهانگرد را نشان می‌داد. این بازی که به عنوان یک معما به بازار ارائه شده بود، آن قدر سهل و آسان بود که هر فرد عامی نیز می‌توانست آن را حل کند. به همین دلیل، فروش



نامگذاری می‌کنیم. بنابراین، نمودار گراف پترسن به صورت زیر می‌شود:



با توجه به شکل بالا، هریک از مسیرهای زیر، یک مسیر همپلتنی برای گراف پترسن است.

$$1. v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_{10}$$

$$2. v_1 v_5 v_4 v_3 v_2 v_7 v_8 v_9 v_{10} v_6$$

$$3. v_1 v_6 v_5 v_4 v_3 v_2 v_7 v_8 v_9 v_{10}$$

(ب) گراف پترسن همپلتنی نیست، چون در نمودار آن هیچ دور همپلتنی وجود ندارد.

قضیه ۱

گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p \leq 2$ همپلتنی نیست.

برهان

اگر گراف ساده‌ی G دارای مرتبه‌ی $p \leq 2$ باشد، به آن معناست که $p=1$ یا $p=2$ است که باعث پدیدار شدن سه گراف متمایز از یکدیگر می‌شود.

اگر $p=1$ باشد، بنابراین گراف متناظر با یک رأس، گراف کامل K_1 است که گراف تهی $\overline{K_1}$ نیز تلقی می‌شود. اگر $p=2$ باشد، در این صورت گراف متناظر با دو رأس یا گراف کامل K_2 یا گراف تهی $\overline{K_2}$ است.

بنابراین چون گراف‌های کامل K_1 و K_2 را به ترتیب می‌توان درخت‌های T_1 و T_2 نامید، در نتیجه در گراف کامل K_1 مسیری وجود ندارد که بخواهیم در مورد همپلتنی بودن یا نبودن آن بحث کنیم. در گراف K_2 هر چند که مسیری به طول

آن در بازار، نه تنها با اقبال خوب مواجه نشد، بلکه به صورت کامل دچار شکست شد. عرضه‌ی این بازی توسط همپلتن باعث شد، رده‌ای خاص از گراف‌ها در نظریه‌ی گراف‌ها به عرصه‌ی ظهور بگذارند که به افتخار همپلتن، گراف‌های همپلتنی نامیده شدند.

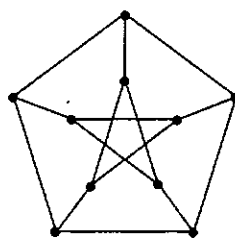
مسیر همپلتنی: در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و اندازه‌ی q ، مسیری را که همه‌ی رأس‌های گراف G را یک بار و تنها یک بار مرور کند، مسیر همپلتنی می‌نامیم.

دور همپلتنی: در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و اندازه‌ی q ، دوری را که شامل همه‌ی رأس‌های گراف G باشد، دور همپلتنی می‌نامیم. گراف همپلتنی: گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و اندازه‌ی q را همپلتنی می‌نامیم، اگر دارای دور همپلتنی باشد.

مثال ۱: شکل زیر، نمودار گراف پترسن است.

(الف) مسیری همپلتنی در این گراف مشخص کنید.

(ب) آیا این گراف همپلتنی است؟ چرا؟



حل:

(الف) گراف پترسن از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ است: بنابراین، مجموعه رأس‌های آن به صورت $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ است.

اکنون رأس‌های گراف پترسن را به وسیله‌ی مجموعه رأس‌های متناظر با آن، برچسب‌گذاری یا به عبارت دیگر

۱ وجود دارد، ولی این مسیر همیلتنی هیچ گاه نمی تواند یک دور باشد، و این با گراف همیلتنی در تناقض است.
گراف تهی K_p گرافی بدون یال با تعداد رأس ۲ است که گرافی ناهمبند است. در ضمن، در گراف تهی K_p به علت وجود نداشتن یال، مسیری وجود ندارد که دوری وجود داشته باشد، و این با گراف همیلتنی در تناقض است.

قضیه ۲

گراف (ساده) همیلتنی G ، همبند است.

برهان

گراف G همیلتنی است، بنابراین دارای دور همیلتنی و به واسطه ی آن دارای مسیری همیلتنی است که هریک از رأس های گراف G را مرور می کند. بنابراین، هر ۲ رأس از مجموعه رأس های گراف G ، به وسیله ی یک مسیر به یکدیگر مجاور می شوند. بدین معنی که بین هریک از رأس های گراف G یک مسیر وجود دارد که این تعریف گراف همبند است.

مثال ۲: در گراف ۵-متنظم G از مرتبه ی p و اندازه ی q ، رابطه ی $3 = 2p - q$ برقرار است. آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

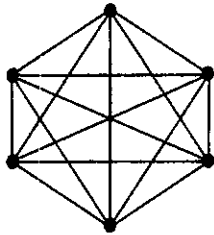
در گراف ۲-متنظم G از مرتبه ی p و اندازه ی q ، رابطه ی $2q = 2p$ برقرار است. بنابراین:

$$\begin{cases} 5p = 2q \\ q - 2p = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{5}{2}p \\ q = 2p + 3 \end{cases} \Rightarrow p = 6, q = 15$$

در گراف کامل K_p با اندازه ی q ، رابطه ی

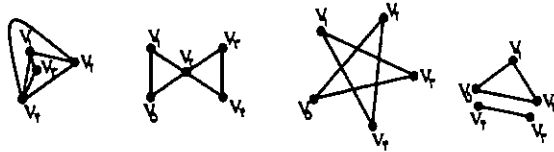
$$q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

۵-متنظم G یک گراف کامل K_6 نیز هست و در آن حداقل یک دور با طول ۶ یافت می شود، پس این گراف همیلتنی است.



تمرین ها

۱. شکل های زیر نمودارهای گراف های ساده ی G_1 ، G_2 ، G_3 و G_4 هستند.



الف) کدام یک از گراف های ساده ی G_1 ، G_2 ، G_3 و G_4 دارای مسیر همیلتنی است؟ استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

ب) کدام یک از گراف های مکمل متناظر با گراف های ساده ی G_1 ، G_2 ، G_3 و G_4 دارای دور همیلتنی است؟ دلیل خود را بیان کنید.

۲. ثابت کنید گراف کامل K_p با اندازه ی q ، همیلتنی است.

۳. شکل زیر نمودار گراف «ورک شاپ» است.

الف) آیا در این گراف مسیری که همه ی رأس های آن را یک بار و تنها یک بار مرور کند، وجود دارد؟ استدلال خود را شرح دهید.

ب) آیا گراف «ورک شاپ» همیلتنی است؟ چرا؟

