

گراف ها

قسمت اول

و کاربردهای آن

برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

شماره ۳۰

© برای دانش آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی

«نظریه گراف ها یکی از معدود رشته های ریاضی است که تاریخ دقیق پیدایش آن کاملاً مشخص است. نخستین مقاله مربوط به گراف ها را لئونهارد اویلر ریاضی دان سوئیسی که یکی از تأثیرگذارترین افراد در تاریخ علوم است در سال ۱۷۳۶ میلادی نوشت و منتشر کرد، وی زمانی که سرگرم نوشتن مقاله اش درباره گراف ها بود بینایی یکی از چشمانش را از دست داد و به هنگام پیری کاملاً نابینا شد، ولی حتی این پیشامد موجب کاهش میزان نوشته های او نشد، اویلر مقاله خود درباره گراف ها را با بررسی معمایی به نام مسأله پل های کونیگسبرگ آغاز کرد و در نهایت این مسأله باعث بوجود آمدن گراف های اویلری شد.»^۱

آشنایی با گراف

فرض کنید مدرسه ای تعداد ۵ عدد رایانه دارد که می خواهد با ایجاد یک شبکه ارتباطی بین رایانه ها، دسترسی به اطلاعات و ارائه خدمات به دانش آموزان آسانتر شود، لذا با اتصالات زیر رایانه ها را به همدیگر متصل می کند:

رایانه A را به رایانه های B و C و E متصل می کند.

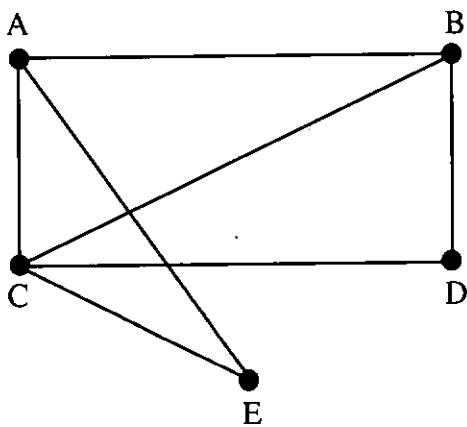
رایانه B را به رایانه های C و D متصل می کند.

رایانه C را به رایانه های A و B و D و E متصل می کند.

رایانه D را به رایانه های B و C متصل می کند.

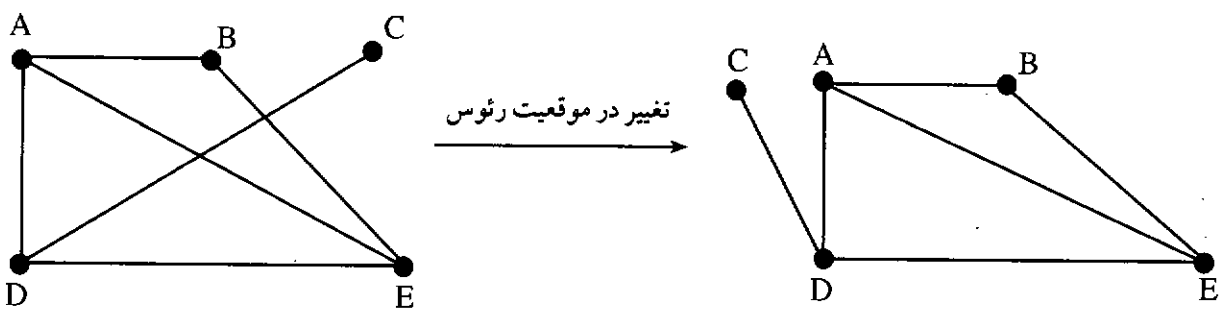
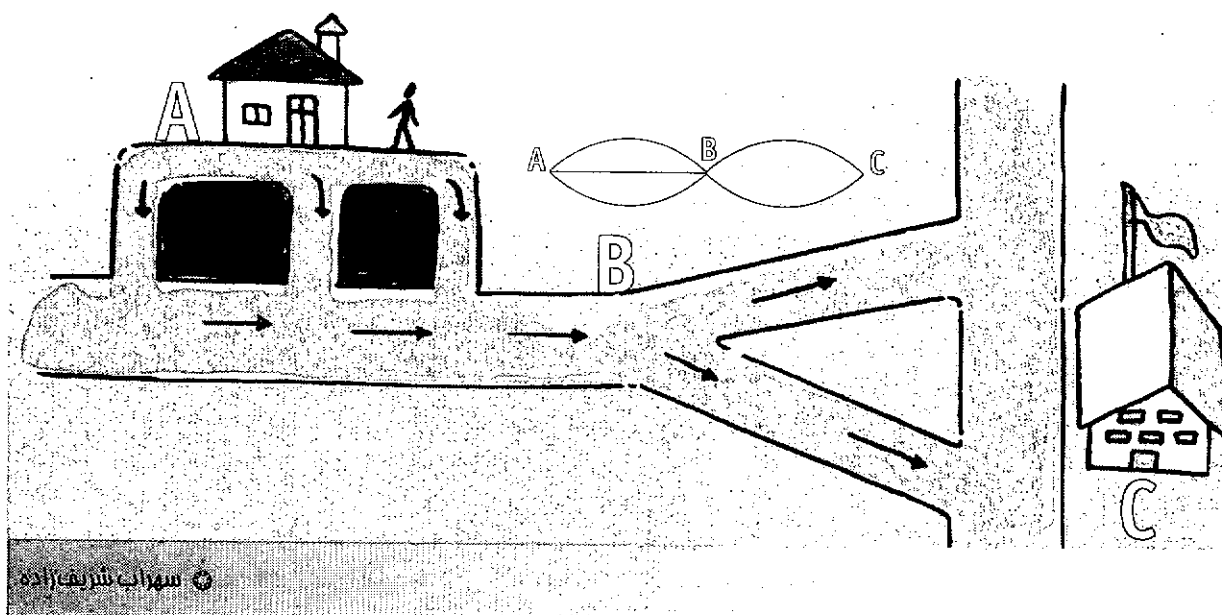
رایانه E را به رایانه های A و C متصل می کند.

اتصالات بین رایانه ها را می توان به صورت نمودار زیر نمایش داد.



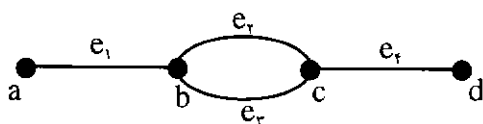
نمودار بالا را یک گراف می نامند، نقطه های A و B و C و D و E را رأس های گراف می گویند و پاره خط هایی که رأس های گراف را به هم متصل می کنند، یال های گراف می نامند، مانند: AB و CE و ...
تذکر ۱: در هر گراف امکان دارد یال ها به صورت کمان یا منحنی نیز باشد.

تذکر ۲: چون گراف را در صفحه رسم کرده ایم، امکان دارد یال های گراف یکدیگر را در نقاطی غیر از رئوس قطع کنند، لذا برای پرهیز از این مشکل، با تغییر در موقعیت رئوس می توان، آن را طوری رسم کرد که یال ها همدیگر را در نقطه ای غیر از رئوس قطع کنند.



یال‌های موازی

هرگاه بین دو رأس متمایز بیش از یک یال موجود باشد، به آن یال‌ها، یال‌های موازی می‌گویند، مانند یال‌های e_r و e_r در گراف زیر:

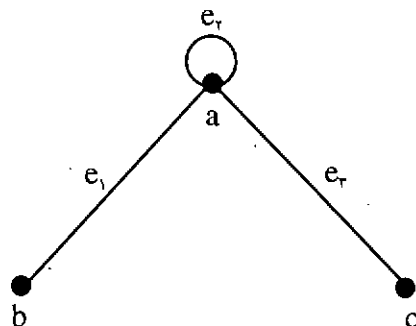


رأس تنها (ایزوله یا منفرد)

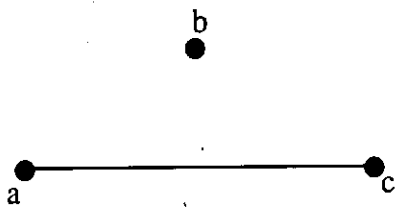
اگر رأسی با هیچ یالی به رأس دیگر متصل نباشد، آن رأس

طوقه (حلقه)

یالی است که هر رأس را به خود آن رأس وصل می‌کند، مانند یال e_r در گراف زیر:



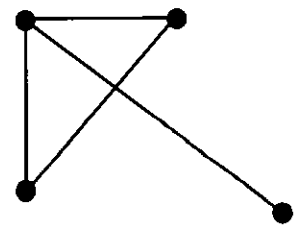
را رأس تنها می نامند، مانند رأس b در گراف زیر:



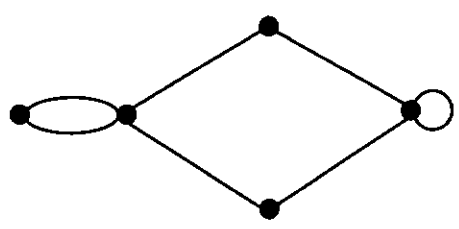
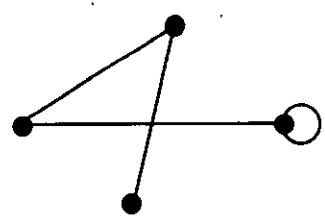
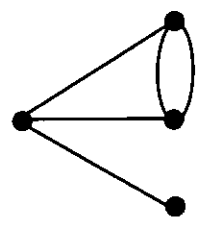
گراف ساده

گراف هایی که دارای هیچ طوقه و یال موازی نمی باشند، گراف ساده می نامند.

مثال ۱) گراف زیر یک گراف ساده است، زیرا دارای طوقه و یال موازی نمی باشد.



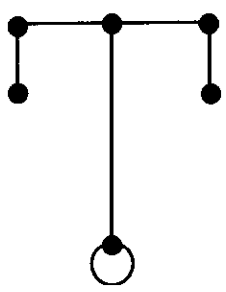
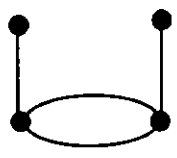
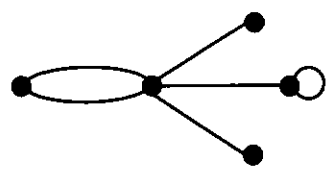
مثال ۲) گراف های زیر ساده نمی باشد، زیرا دارای طوقه یا یال موازی و یا هر دو می باشند.



گراف چندگانه

گرافی که ساده نباشد یک گراف چندگانه است. به عبارت دیگر «گرافی که در آن، بین دو رأس بیش از یک یال موجود باشد یا این که رأسی به وسیله یک یال به خودش متصل باشد، گراف چندگانه می نامند»

مثال ۳) گراف های زیر چندگانه اند؟ (توجه کنید که در مثال ۲ نیز تمامی گراف ها چندگانه اند)



گراف مسأله شهر کونیگسبرگ یک گراف چندگانه است: مسأله چنین است:

شهر کونیگسبرگ در کشور روسیه از دو ساحل رودخانه پرگل و دو جزیره مجزا تشکیل شده بود و هفت پل این دو جزیره را به صورت شکل صفحه بعد، به هم وصل می کردند:

تذکر: در گراف جهتدار به ازای هر دو رأس متمایز حداکثر دو یال جهتدار از یک رأس به رأس دیگر و بالعکس وجود دارد.

تعریف گراف ساده

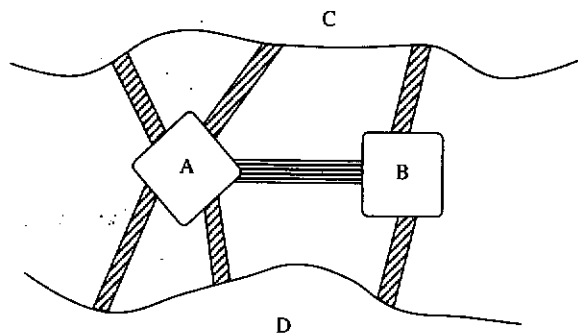
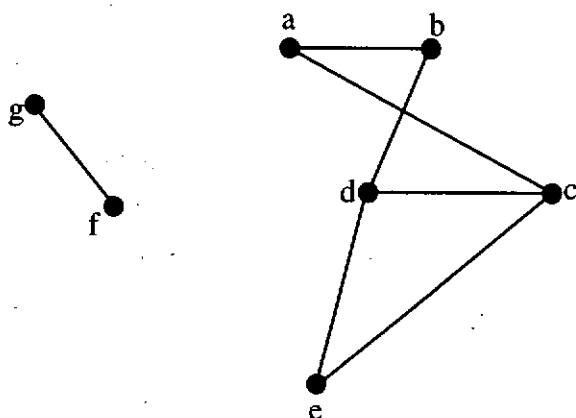
تعریف: گراف ساده $G = (V, E)$ عبارت است از یک مجموعه متناهی و غیر تهی V که اعضایش را رأس می نامیم و E زیر مجموعه ای است از مجموعه تمام زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه V ، که اعضایش را یال می نامیم.

تذکر ۱: مجموعه رئوس G را به $V(G)$ و مجموعه یال های آن را به $E(G)$ نیز نمایش می دهند.

تذکر ۲: برای هر دو عضو a و b از V اگر $\{a, b\} \in E$ آنگاه یالی بین a و b وجود دارد و اگر $\{a, b\} \notin E$ یعنی یالی بین a و b نیست.

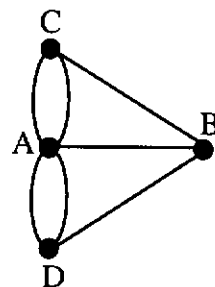
تذکر ۳: در این مقاله هر جا از کلمه «گراف» استفاده شود منظور گراف ساده است مگر آنکه خلاف آن گفته شود.
مثال (۴) قرار است بین هفت روستای a و b و c و d و e و f و g جاده هایی احداث گردد و به طوری که توسط این جاده ها: روستای a با b و c و روستای f با g در ارتباط باشند. روستای c با e و d و روستای d با b و e در ارتباط باشند. گراف متناظر را رسم کنید.

حل: نمودار گراف چنین است:



مسئله ای سال ها ذهن مردم را به خود مشغول کرده بود و آن مسئله این بود که:

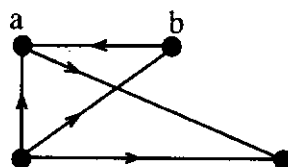
«چگونه می توان با شروع از یک نقطه شهر و با گذشتن تنها یک بار از هر پل در شهر گشتی زد و به همان نقطه اولیه برگشت»
مردم این شهر سعی می کردند با قدم زدن و روش سعی و خطا این مسئله را حل کنند ولی در عمل نتیجه ای نمی گرفتند
شهردار این شهر با نامه ای حل این مسئله را از اوایلر درخواست می کند. اوایلر بوسیله گراف زیر ثابت می کند که چنین کاری امکان پذیر نیست.



نمودار گراف مسئله این شهر یک گراف چندگانه است زیرا دارای یال های موازی می باشد.

گراف جهتدار

گرافی است که دارای یال های جهتدار می باشد، مانند گراف زیر:



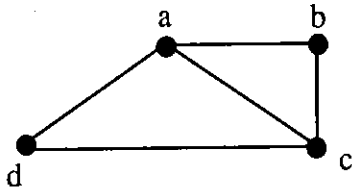
رأس مجاور به خود

در طوقه چون ابتدا و انتهای یک یال، یک رأس است به آن رأس، رأس مجاور به خود می گویند.

دو یال مجاور

هر دو یالی که محدود به یک رأس باشند، دو یال مجاور می نامند.

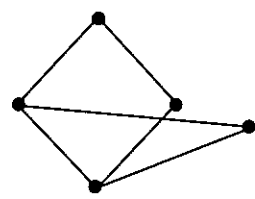
مثال در گراف زیر یال های ab و bc یال های مجاورند، زیرا هر دو یال به رأس b محدود هستند و اما یال های ab و cd یال های غیر مجاورند.



مرتبه و اندازه در گراف

در گراف $G = (V, E)$ ، تعداد اعضای V را مرتبه G و تعداد اعضای E را اندازه G می نامند و آن ها را به ترتیب با p (یا $p(G)$) و q (یا $q(G)$) نمایش می دهند.

مثال V $q = 6$ ، $p = 5$



توجه کنید:

دیدیم در گراف ساده $G = (V, E)$ ، مجموعه E زیر مجموعه ای از مجموعه تمام زیر مجموعه های دو عضوی V است. بنابراین در گراف با p رأس و q یال حداکثر تعداد عضوهای E برابر $\binom{p}{2}$ خواهد بود، لذا خواهیم داشت:

$$0 \leq q \leq \binom{p}{2} = \frac{1}{2} p(p-1)$$

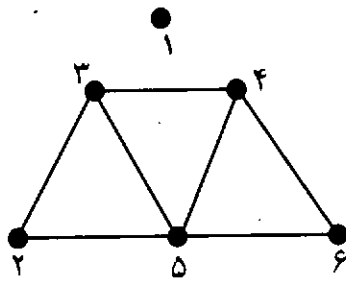
مثال ۵) اگر $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و

$$E = \left\{ \{x, y\} \mid \frac{y}{x} \in \mathbb{N}, x, y \in V \right\}$$

نمودار گراف ساده $G = (V, E)$ را رسم کنید.

حل:

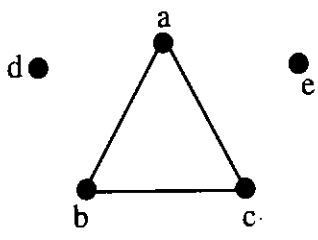
$$E = \{\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$$



توجه: در گراف $G = (V, E)$ و $a, b \in V$ به جای $\{a, b\} \in E$ ، برای سادگی از این به بعد می نویسیم: $ab \in E$

مثال ۶) فرض کنید G با $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc\}$ داده شده باشد، گراف آن را رسم کنید.

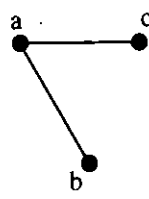
حل: نمودار گراف به صورت زیر است:



توجه: گراف بالا از سه بخش جدا از هم تشکیل شده است و همچنین گراف های داده شده در مثال های ۱ و ۲ هر کدام از دو بخش تشکیل شده اند.

دو رأس مجاور

دو رأس a و b در گراف $G = (V, E)$ را مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم متصل شده باشند. و رأس های a و b را دو سر یال ab می نامند. مثلاً در گراف مقابل دو رأس a و c مجاورند.



آزمون ۱: کدام عدد نمی تواند برابر تعداد یال های یک گراف مرتبه ۱۰ باشد؟

- ۳۶ (۱) ۱۸ (۲)
۴۵ (۳) ۴۸ (۴)

حل: گزینه (۴)

$$0 \leq q \leq \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \rightarrow q \in [0, 45]$$

اعداد صحیحی که متعلق به بازه $[0, 45]$ می باشند، می توانند برابر تعداد یال های گراف مرتبه ۱۰ باشند.
نکته: در هر گراف ساده از مرتبه p و اندازه q :

$$p \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2}$$

آزمون ۲: اندازه یک گراف ساده برابر ۴۰ می باشد، حداقل مرتبه این گراف کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲)
۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

حل: گزینه (۲)

$$q = 40 \rightarrow p \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2} = 9 / 45 \xrightarrow{p \in \mathbb{N}} p_{\min} = 10$$

نکته ۱: تعداد گراف های ساده با p رأس برابر است با:

$$2^{\binom{p}{2}}$$

نکته ۲: تعداد گراف های ساده با p رأس و q یال برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2}}{q}$$

آزمون ۳: چند گراف متفاوت با رئوس $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$

می توان تعریف کرد، که دارای دو یال باشند؟

- ۹۹۰ (۱) ۸۷۰ (۲)
۴۹۰ (۳) ۷۸۰ (۴)

حل: گزینه (۱)

$$\binom{\binom{10}{2}}{2} = \frac{45}{2} = \frac{45 \times 44}{2} = 45 \times 22 = 990$$

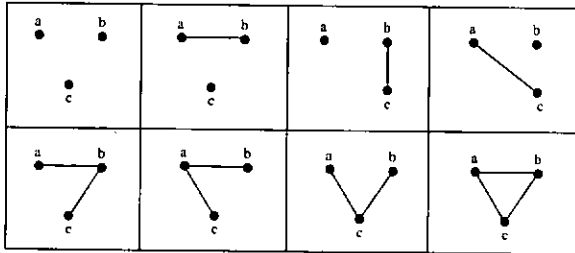
آزمون ۴: تعداد گراف های ساده p رأسی برابر 2^{10} است، p کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۵ (۲)
۴ (۳) ۸ (۴)

$$2^{\binom{p}{2}} = 2^{10} \rightarrow \binom{p}{2} = 10 \rightarrow p = 5 \quad \text{حل: گزینه (۲)}$$

مثال ۸) همه گراف های ساده با ۳ رأس را رسم کنید.

حل: تعداد $2^{\binom{3}{2}} = 8$ گراف ساده با ۳ رأس می توان رسم کرد که عبارتند از:

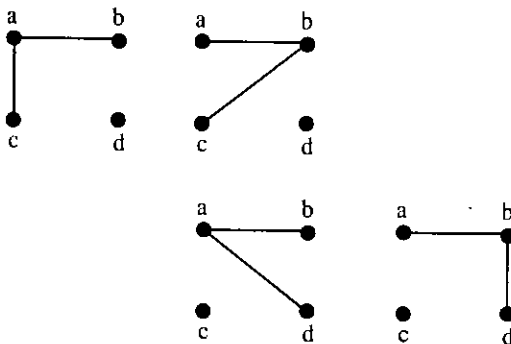


آزمون ۵: چند گراف ساده با رئوس $\{a, b, c, d\}$ و دو یال

می توان رسم کرد که یکی از یال های آن ab باشد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲)
۴ (۳) ۵ (۴)

حل: گزینه (۳) مطابق گراف های زیر:



نکته ۳: تعداد گراف های جهتدار با p رأس برابر

$$2^{p^2}$$

نکته ۴: تعداد گراف های جهتدار بدون طوقه با p رأس

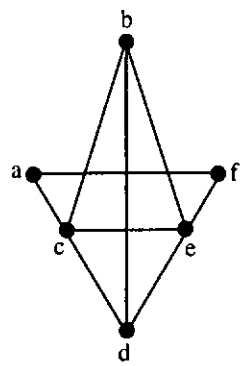
$$2^{p^2 - p}$$

درجه

در گراف $G = (V, E)$ که $a \in V$ ، درجه رأس a عبارتست از تعداد یال‌هایی که از رأس a می‌گذرند، این عدد با $\deg a$ یا $\deg_a^G$ نمایش می‌دهند.

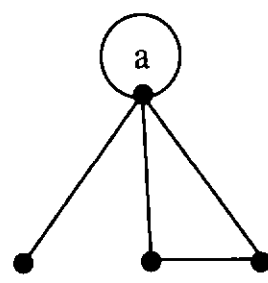
تذکره ۱: در گراف G درجه رأسی که فرد باشد رأس فرد و درجه رأسی که زوج باشد، رأس زوج می‌نامیم.

مثال ۹) رئوس زوج $\begin{cases} \deg a = 2 \\ \deg c = 4 \\ \deg e = 4 \\ \deg f = 2 \end{cases}$ رئوس فرد $\begin{cases} \deg b = 3 \\ \deg d = 3 \end{cases}$



$G = (V, E)$

تذکره ۲: اگر گرافی دارای یال طوقه باشد، در شمارش درجات رئوس، درجه آن رأس به ازای آن طوقه دوبار شمارش می‌شود.



مثال) $\deg a = 5$

تذکره ۳: در گراف $G = (V, E)$ از مرتبه p ، به ازای هر $0 \leq \deg v_i \leq p-1$ ، $v_i \in V$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, p$

قضیه (نخستین قضیه گراف‌ها)

اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G با

اندازه q باشد آنگاه:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

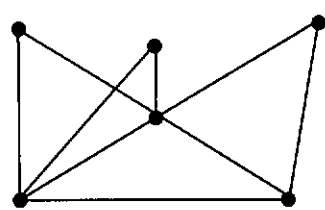
اثبات: در شمارش درجات رئوس G چون هر یال دو سر دارد، بنابراین هر یال دوبار شمارش می‌شود. نتیجه ۱: مجموع درجات رئوس هر گراف، عددی زوج است.

نتیجه ۲: تعداد رئوس فرد در هر گراف، زوج است. سؤال: آیا تعداد رئوس زوج در هر گراف همواره عددی زوج است؟

پاسخ: خیر - با توجه به اینکه مجموع درجات رئوس زوج عددی همواره زوج است، پس تعداد رئوس زوج در هر گراف می‌تواند فرد یا زوج باشد.

آزمون ۶: در گراف مقابل مجموع درجات رئوس کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۸ (۲) | ۱۴ (۱) |
| ۱۲ (۴) | ۱۶ (۳) |



حل: گزینه (۲)

$$\sum_{i=1}^6 \deg v_i = 2 + 4 + 2 + 5 + 3 + 2 = 18$$

آزمون ۷: در گرافی که سه رأس زوج از درجه ۴ دارد، اندازه برابر ۲۰ است، مجموع درجات رئوس فرد کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۳۰ (۲) | ۲۸ (۱) |
| ۳۲ (۴) | ۲۰ (۳) |

حل: گزینه (۱)

$$\sum \deg v_i = 2q = A + B \rightarrow 2 \times 20 = 3 \times 4 + B \rightarrow B = 28$$

مجموع درجات رئوس فرد: B مجموع درجات رئوس زوج: A

$$\delta \leq \deg v_i \leq \Delta \rightarrow \sum_{i=1}^p \delta \leq \sum_{i=1}^p \deg v_i \leq \sum_{i=1}^p \Delta \rightarrow p\delta \leq 2q \leq p\Delta$$

$$\rightarrow \delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

آزمون ۱۰: درجه هر رأس در گراف مرتبه ۱۵ حداکثر

برابر ۶ می‌باشد، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

$$44(2)$$

$$42(1)$$

$$48(4)$$

$$45(3)$$

حل:

$$\frac{2q}{p} \leq \Delta \rightarrow q \leq \frac{p\Delta}{2} = \frac{6 \times 15}{2} = 45 \rightarrow \text{Max}(q) = 45$$

آزمون ۱۱: (آزمون سوم پایندگان-۷۹) در گرافی با ۱۸

یال حداقل درجه بین رئوس برابر ۳ است، کدام عدد نمی‌تواند

برابر تعداد رئوس این گراف باشد؟

$$12(2)$$

$$9(1)$$

$$14(4)$$

$$8(3)$$

حل:

$$\begin{cases} p \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \times 18}}{2} = 6/5 \rightarrow p \geq 7 \\ p \leq \frac{2q}{\delta} = \frac{2 \times 18}{3} = 12 \rightarrow 7 \leq p \leq 12 \end{cases}$$

پس اعدادی که در نامساوی بالا صدق می‌کنند، می‌توانند

برابر مرتبه گراف مزبور باشند که بین گزینه‌ها عدد ۱۴ در نامساوی

مزبور صدق نمی‌کند و نمی‌تواند برابر مرتبه این گراف باشد.

آزمون ۱۲: در گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۴۸ کدام

عدد نمی‌تواند برابر Δ باشد؟

$$8(2)$$

$$7(1)$$

$$11(4)$$

$$10(3)$$

$$\frac{2q}{p} \leq \Delta \leq p-1 \rightarrow \frac{2 \times 48}{12} \leq \Delta \leq 12-1 \rightarrow 8 \leq \Delta \leq 11$$

پس نمی‌تواند برابر ۷ باشد.

پانویس

۱- گراف و کاربردهای آن - آیینین آر - ترجمه منتخب

آزمون ۸: اگر گراف G از مرتبه ۱۴، دارای ۸ رأس از درجه

یک، سه رأس از درجه ۳، یک رأس از درجه ۵ و ۲ رأس از

درجه ۲ باشند، G چند یال دارد؟

$$13(2)$$

$$12(1)$$

$$19(4)$$

$$14(3)$$

حل: گزینه (۲)

$$(8 \times 1) + (3 \times 3) + (1 \times 5) + (2 \times 2) = 2q \rightarrow 8 + 9 + 5 + 4 = 2q \rightarrow q = 13$$

ماکسیمم درجه و می‌نیمم درجه

در بین درجه‌های رئوس یک گراف بزرگترین عدد را

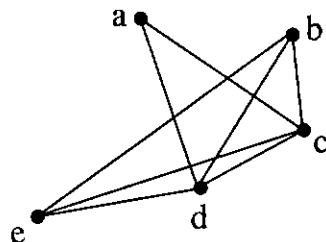
ماکسیمم درجه و کوچک‌ترین عدد را می‌نیمم درجه آن گراف

می‌نامیم، ماکسیمم درجه را به $\Delta(G)$ و می‌نیمم درجه را

به $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: رأس تنها دارای درجه صفر است.

مثال (۱۰) در گراف مقابل: $\delta = 2$, $\Delta = 4$



نکته: در هر گراف: $\delta \geq 0$, $\Delta \leq p-1$

آزمون ۹: در یک گراف $\Delta = 12$ است، کمترین مقدار p

کدام است؟

$$12(2)$$

$$11(1)$$

(۴) نمی‌توان مشخص کرد.

$$13(3)$$

حل: گزینه (۳) $\Delta \leq p-1 \rightarrow p \geq \Delta+1 = 12+1 = 13$

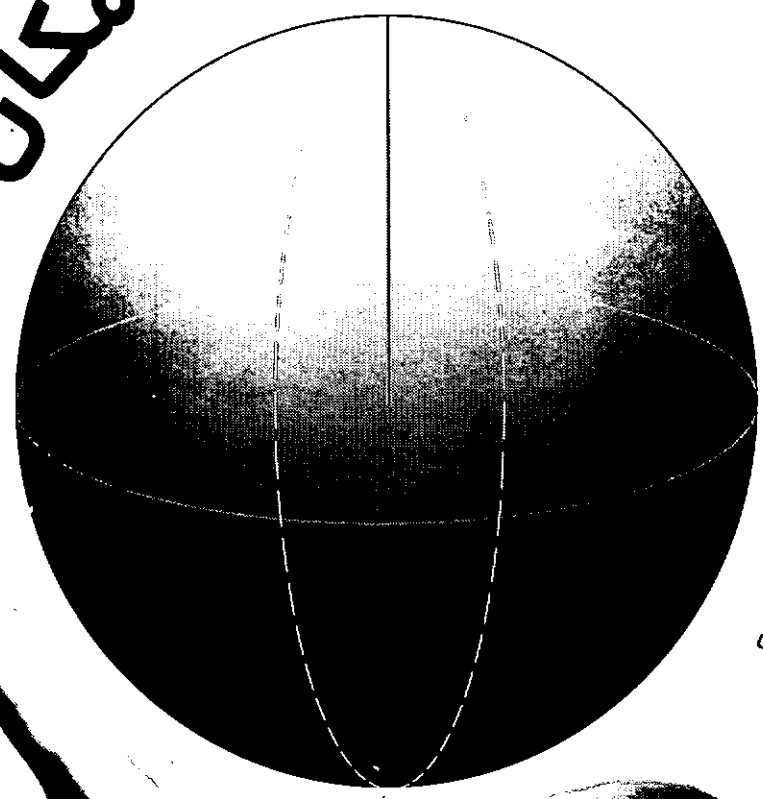
توجه کنید:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta : q \text{ و اندازه } p \text{ مرتبه}$$

($\frac{2q}{p}$ را میانگین درجات رئوس گراف می‌نامند)

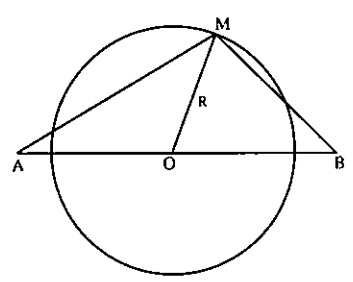
اثبات: فرض کنیم $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس

گراف G باشد، داریم:



محمد هاشم رستمی

مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابتی است



و بنا به رابطه میانه‌ها در مثلث می‌توان نوشت:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز وسط پاره خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطه O وسط پاره خط AB و $AB=a$ و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \quad (1)$$

در مثلث MAB، پاره خط MO میانه نظیر ضلع AB است

یا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{\gamma} \quad (2)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$2MO^2 + \frac{a^2}{\gamma} = k^2 \Rightarrow OM = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2k^2 - a^2} \quad (3)$$

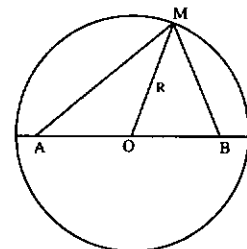
با توجه به ثابت بودن نقطه O و مقدارهای k^2 و a ، رابطه (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2k^2 - a^2}$ است. بعکس هر نقطه روی این دایره انتخاب کنیم، مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا

$$k^2 \geq \frac{a^2}{2} \quad \text{در این صورت:}$$

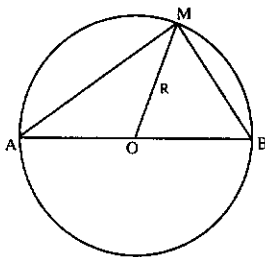
۱. اگر $k^2 > \frac{a^2}{2}$ باشد، $R > \frac{a}{\gamma}$ و در نتیجه دو نقطه A و

B درون دایره مکان واقع می‌شوند.



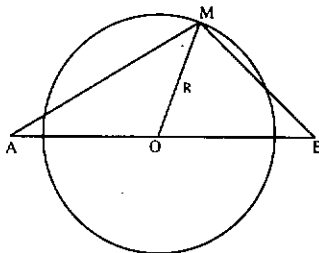
۲. اگر $k^2 = \frac{a^2}{2}$ باشد، $R = \frac{a}{\gamma}$ ، و دایره مکان از دو نقطه

A و B می‌گذرد. در حقیقت در این حالت، دایره مکان، دایره به قطر پاره خط AB است.



۳. اگر $\frac{a^2}{2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{\gamma}$ و دو نقطه A و B

در بیرون دایره مکان قرار می‌گیرند.



۴. اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = 0$ و در نتیجه تنها نقطه O

وسط پاره خط AB ، جواب مسأله است.

