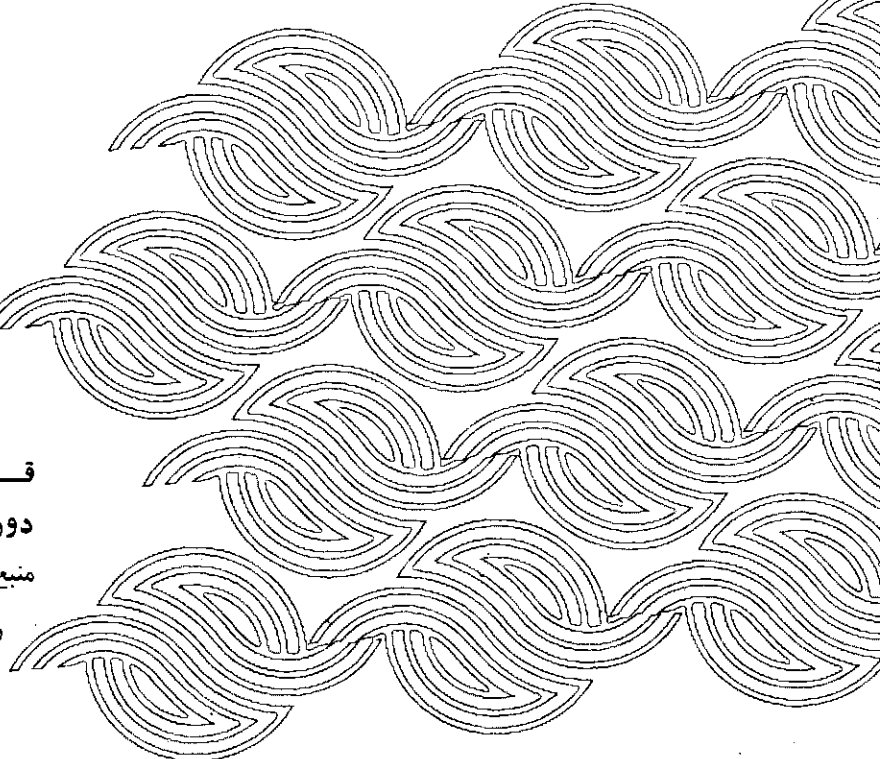


گراف

(قسمت دوم)

قابل استفاده دانش آموزان رشته ریاضی،
دوره پیش دانشگاهی، ریاضیات گسسته
منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیباتی
رالف - پ - گریمالدی (جلد دوم)
ترجمه و جمع آوری: سیمین اکبری زاده (دبیر ریاضی - اراک)

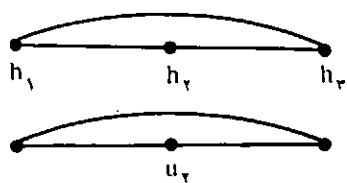
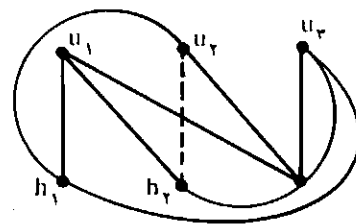
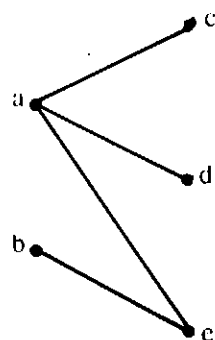


تعریف: گراف دو بخشی کامل

(complete bipartite graph)

مثال ۱۵: در گراف G_1 شکل (۲۴) هرگاه $V_1 = \{a, b\}$ و $V_2 = \{c, d, e\}$ انتخاب شوند، خواهیم داشت $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و $V_1 \cup V_2 = V$ و گذشته از این بین رئوس V_1 هیچ یالی موجود نیست و همچنین بین رئوس موجود در V_2 ، لذا G_1 یک گراف دو بخشی است. ولی چون بین رأس b در V_1 و رئوس d و c در V_2 هیچ یالی موجود نیست، G_1 دو بخشی کامل نیست. متنی با اضافه کردن یالهای $\{b, c\}$ و $\{b, d\}$ گراف حاصل دو بخشی کامل $(k_{2,3})$ خواهد بود. G_1 گراف سطح است (طبق تعریف). در G_1 با انتخاب $V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ و $V_2 = \{h_1, h_2, h_3\}$ نتیجه خواهیم گرفت دو بخشی کامل $(k_{3,3})$ است. ولی G_2 سطح نیست. مگر با برداشتن یالی مثل $\{h_2, u_2\}$.

$G = (V, E)$ را یک گراف دو بخشی گوئیم، هرگاه V را بتوان به صورت اجتماع دو مجموعه ناتهی و جدا از هم V_1 و V_2 نوشت طوری که بین رئوس V_1 و همچنین بین رئوس V_2 هیچ یالی موجود نباشد (به عبارتی هر یال در نظر بگیریم، یک رأس در V_1 و دیگری در V_2 باشد). اگر علاوه بر این هر رأس V_1 با هر رأس V_2 بوسیله یالی به هم وصل شوند، آنگاه گراف حاصل را گراف دو بخشی کامل گوئیم. وقتی $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$. این گراف را با $k_{m,n}$ نمایش می دهیم.



شکل (۲۵)

حل: همان طور که در شکل (۲۵) ملاحظه می شود:

$$E(k_{2,2}) = \{h_1h_2, h_1u_1, h_1u_2, h_2u_1, h_2u_2, u_1u_2\}$$

پس $k_{2,2}$ دارای ۲ مؤلفه k_2 و k_3 می باشد. به طور کلی $k_{m,n}$ دارای دو مؤلفه k_m و k_n می باشد.

مسئله ۱۶: الف) تعداد رئوس و یالهای موجود در گراف کامل

شکل (۲۴)

الف) هرگاه دوری در G موجود باشد که از هر رأس موجود در G دقیقاً یک بار بگذرد، گوئیم G دارای دور همیتونی است. (یا به اختصار G گراف همیتونی است).

ب) مسیر همیتونی، سیری در G می باشد که از هر رأس موجود در G دقیقاً یک بار می گذرد. دو تعریف را با تعاریف مدار اولیری و خط سیر اولیری مقایسه کنید.

توجه: هرگاه G گراف همیتونی با n رأس باشد، دارای دوری با n رأس متمایز و n یال خواهد بود.

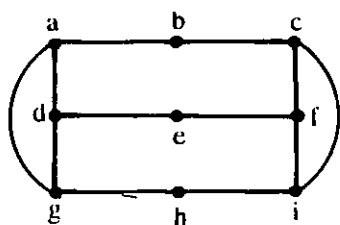
نکته ۱: اگر گرافی دور همیتونی داشته باشد، مسیر همیتونی نیز خواهد داشت (کافی است یک یال از دور را حذف کنیم). ولی عکس این موضوع صادق نیست و ممکن است گرافی مسیر همیتونی داشته باشد ولی دور همیتونی نداشته باشد.

نکته ۲: تفاوت دور و دور همیتونی در آن است که ممکن است رأسی در گراف G موجود باشد که در دور ظاهر نشود. ولی در دور همیتونی هر رأس دقیقاً یک بار ظاهر می شود.

نکته ۳: هرگاه G دور همیتونی داشته باشد برای هر $a \in V$ داریم $\deg(a) \geq 2$.

نکته ۴: هرگاه $a \in V$ و $\deg(a) = 2$ ، آنگاه هر دو یال وابسته به رأس a باید در دور همیتونی ظاهر شود.

مسئله ۱۳: گراف شکل (۲۶) را در نظر بگیرید.



شکل (۲۶)

الف) آیا می توان از یک رأس شروع کرد و از هر رأس دقیقاً یک بار گذشت و به همان رأس اول رسید (یا آیا گراف همیتونی است)؟

ب) آیا می توان از یک رأس شروع کرد و از هر رأس دقیقاً یک بار گذشت و به رأس دیگری به جز رأس اول رسید؟ (آیا گراف مسیر همیتونی دارد).

حل: الف) باتوجه به این که G ۹ رأس دارد. اگر در G دور همیتونی موجود باشد طول این دور باید ۹ باشد و چنین دوری را نمی توان یافت لذا G گراف همیتونی نیست. ب) دنباله رئوس

دو بخشی $k_{m,n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}^+$) را تعیین کنید.

ب) اگر گراف $k_{m,12}$ ۷۲ یال داشته باشد، m را محاسبه کنید.

پ) ثابت کنید: $\binom{m+n}{2} - mn = \binom{m}{2} + \binom{n}{2}$

(راهنمایی: از تعداد یالهای موجود در گرافهای $k_{m,n}$ و $k_{m,n}$ استفاده کنید).

حل: الف) تعداد رئوس: $m+n$ و تعداد یالها: mn .

ب) $|E| = 12m = 72 \Rightarrow m = 6$

پ) فرض می کنیم $m+n$ رأس $k_{m,n}$ به صورت

$\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ لیست شده باشند و $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. همه یالهای به شکل

$\{x_i, y_j\}$ ، $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ را (که تعداد آنها mn است) از یالهای گراف کامل k_{m+n} (که تعدادشان $\binom{m+n}{2}$ می باشد) حذف می کنیم. در نتیجه $k_{m,n}$ که دارای دو مؤلفه k_m و k_n است حاصل می شود، با تعداد یالهای

$$\binom{m}{2} + \binom{n}{2}$$

لذا:

$$|E(k_{m,n})| = \binom{m+n}{2} - mn = \binom{m}{2} + \binom{n}{2}$$

تمرین ۱: ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه یک گراف دو بخشی باشد، آن است که دوری با طول خرد نداشته باشد.

تمرین ۲: هرگاه $G = (V, E)$ یک گراف همبند با v رأس باشد که $|E| > \frac{v^2}{4}$ ، ثابت کنید G نمی تواند گراف دو بخشی باشد.

تست ۶) کدام گزینه همواره صحیح است.

الف) هر گراف ساده نوع خاصی از یک گراف چندگانه است.

ب) هر گراف دو بخشی کامل الزاماً یک گراف دو بخشی است.

پ) هر گراف دو بخشی کامل الزاماً یک گراف کامل است.

ت) موارد ب و پ.

حل: گزینه ب و پ صحیح است. (توجه داشته باشید که گزینه پ صحیح نیست. مثلاً G_4 در شکل (۲۴) دو بخشی کامل هست ولی گراف کامل نیست).

تعریف: دور همیتونی و مسیر همیتونی

(Hamilton cycle and Hamilton path)

فرض کنید، $G = (V, E)$ یک گراف بی جهت یا چندگانه باشد.

تعریف: عدد رنگی (رأسی)

(chromatic number)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی جهت باشد، رنگ آمیزی مناسب G هنگامی رخ می دهد که رئوس G را طوری رنگ بزنیم که اگر $\{a,b\}$ یالی در G باشد آنگاه a و b با رنگهای مختلف رنگ شوند. حداقل تعداد رنگهای لازم برای چنین رنگ آمیزی را عدد رنگی (رأسی) گراف G می نامند و با $X(G)$ نمایش می دهند. بنابراین برای پیدا کردن $X(G)$ باید مجموعه رئوس G را چنان افزایش کنیم که بین اعضای زیرمجموعه های حاصل هیچ یالی موجود نباشد و تعداد زیرمجموعه ها حداقل باشد.

مثال ۱۶: الف) باتوجه به تعریف گراف دوسخشی کامل

$$X(K_{m,n}) = 2$$

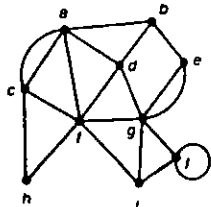
ب) هرگاه C_n دوری با طول n ($n \geq 3$) باشد آنگاه:

$$X(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ 3 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

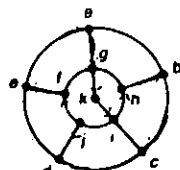
تمرین ۳: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی جهت همبند دو بخشی باشد که V به دو مجموعه ناتهی V_1 و V_2 افراز شده باشد. الف) هرگاه $|V_1| \neq |V_2|$ ، ثابت کنید G نمی تواند دور همیتونی داشته باشد.

ب) هرگاه $|V_1| - |V_2| \neq \pm 1$ ، ثابت کنید G نمی تواند مسیر همیتونی داشته باشد.

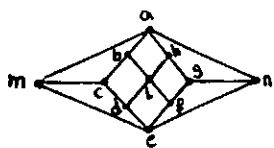
تست ۷: کدامیک از گرافهای شکل (۲۸) همیتونی نیست؟
الف) گراف a^* ب) گراف b پ) گراف c ت) گراف d .



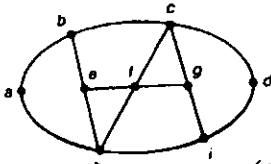
(b)



(ii)



(d)



(c)

شکل (۲۸)

$a, b, c, f, e, d, g, h, i$ یک مسیر همیتونی برای G می سازد.

مسئله ۱۴: یک گراف همبند مثال بزنید که دارای شرایط زیر

باشد.

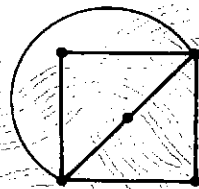
الف) نه اولیری باشد و نه همیتونی.

ب) اولیری باشد ولی همیتونی نباشد.

پ) همیتونی باشد ولی اولیری نباشد.

ت) هم اولیری باشد و هم همیتونی.

حل:



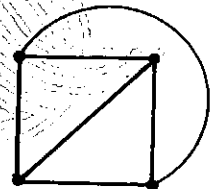
(b)



(a)



(d)



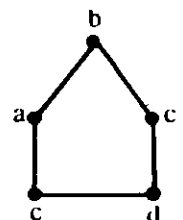
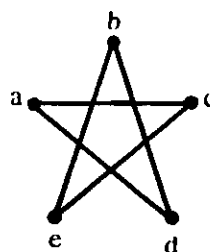
(c)

شکل (۲۷)

مسئله ۱۵: الف) گراف کامل K_n ، ($n \geq 3$ و عددی فرد) چند دور همیتونی مختلف دارد؟

ب) ۱۷ دانش آموز، هر روز برای خوردن ناهار دور یک میز گرد می نشینند. آنها سعی می کنند برای آنکه یکدیگر را بهتر بشناسند هر روز بین دو نفری بنشینند که روزهای قبل کنار آنها نبوده اند آنها برای چند روز این کار را می توانند ادامه دهند.

حل: الف) K_n ، n رأس و $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ یال دارد. یک دور همیتونی در K_n ، n یال دارد. بنابراین حداکثر $\frac{n-1}{2}$ دور همیتونی می توانیم داشته باشیم طوری که هیچ دو دوری یال مشترک نداشته باشند. مثلاً K_5 ، $\frac{5-1}{2} = 2$ دور همیتونی مختلف دارد که عبارتند از:
ب) باتوجه به قسمت الف، برای $\frac{17-1}{2} = 9$ روز.



* گراف شکل (G) در تست ۷ بی جهت می باشد لطفاً جهت ها را در نظر بگیرید.

اکنون نوبت به h رسیده، چون h مجاور e و f است بنابراین نمی توان آن را در V_1 و V_2 قرار داد و مجبوریم از مجموعه سومی به نام V_3 استفاده کنیم. بنابراین V را می توان حداقل به ۳ زیرمجموعه

$$V_1 = \{a, d, e, g\}$$

$$V_2 = \{b, c, f\}$$

$$V_3 = \{h\}$$

افزاد کرد که بین اعضای V_1 هیچ یالی موجود نیست و همچنین بین اعضای V_2 و V_3 . لذا عدد رنگی (رأسی) این گراف ۳ می باشد یعنی حداقل سه جلسه برای برگزاری امتحانات لازم است.

مسئله ۱۷: هرگاه G یک گراف بی جهت با حداقل یک یال باشد، ثابت کنید G دوبخشی است اگر و تنها اگر $X(G) = 2$.

حل: این موضوع باتوجه به تعریف گراف دوبخشی بدیهی است. مثلاً گراف (d) در شکل (۲۸) گراف دوبخشی است. لذا

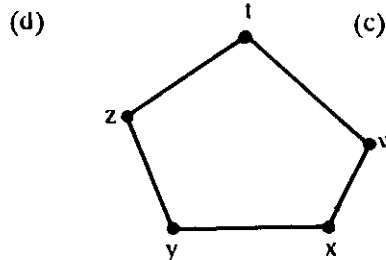
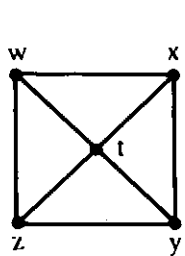
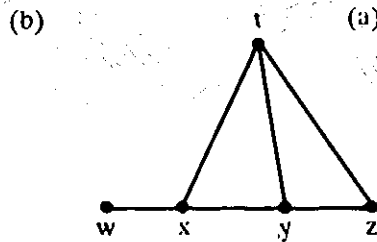
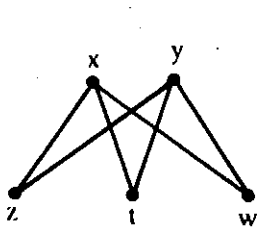
$$X(G) = 2$$

مسئله ۱۸: یک گراف بی جهت مانند G ارائه دهید که $X(G) = 3$. ولی هیچ زیرگراف G با k_2 یکریخت نباشد.

حل: کافی است G دوری با n رأس که $n \geq 5$ و عددی خرد است، انتخاب شود.

تست ۸: عدد رنگی کدامیک از گرافهای شکل (۳۰) مخالف ۳ است.

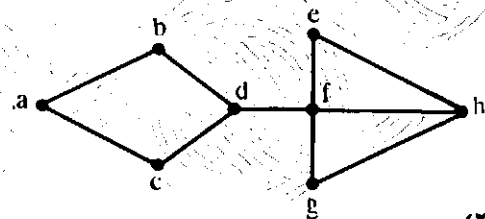
الف (a) ب (b) پ (c) ت (d)



شکل (۳۰)

حل: با انتخاب دنباله $a, g, k, i, h, b, c, d, j, f, e, a$ نتیجه می گیریم گراف (a) همیلتنی است و با انتخاب دنباله $a, d, b, e, g, j, i, f, h, c, a$ نتیجه می گیریم گراف (b) نیز همیلتنی است و با انتخاب دنباله $a, h, e, f, g, i, d, c, b, a$ نتیجه خواهیم گرفت گراف (c) نیز همیلتنی است. گراف (d) که به گراف (Herschel) معروف است همبند می باشد و با انتخاب $V_1 = \{a, c, e, g, i\}$ و $V_2 = \{b, d, f, h, n, m\}$ نتیجه خواهیم گرفت گراف دوبخشی است و چون $|V_1| = 5 \neq 6 = |V_2|$ لذا طبق تمرین ۳ نتیجه خواهیم گرفت این گراف همیلتنی نیست (توجه داشته باشید تمرین ۳ هنگامی قابل استفاده است که از دو بخشی بودن گراف اطمینان داشته باشیم. و نیز عکس ترکیبهای شرطی الف و ب در تمرین ۳ برقرار نیست).

مسئله ۱۶: یک دفتردار مدرسه می خواهد برای برگزاری ۸ امتحان برنامه ریزی کند. بعضی از امتحانها همزمان قابل اجرا نیستند و برخی از آنها به طور همزمان قابل اجرا هستند. به هر امتحان یک رأس نظیر کرده ایم و رؤوس متناظر با دو امتحانی که همزمان قابل اجرا نیستند را به وسیله یک یال به هم وصل نموده ایم، گراف شکل (۲۹) به دست آمده است. کمترین تعداد جلسات لازم برای این برنامه ریزی را تعیین کنید.



شکل (۲۹)

حل: $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ مجموعه V را باتوجه به تعریف عدد رنگی به طریق زیر افزایش می کنیم: یکی از رؤوس مثل a را انتخاب کرده و آن را در مجموعه V_1 قرار می دهیم. چون رأس b مجاور a است لذا آن را در مجموعه دیگری مثل V_2 قرار می دهیم. رأس c مجاور a است پس نمی توان آن را در V_1 قرار داد ولی باتوجه به این که رؤوس b و c مجاور نیستند c را در V_2 قرار می دهیم. تاکنون داریم:

$$V_1 = \{a\}$$

$$V_2 = \{b, c\}$$

و به این ترتیب ادامه می دهیم تا $V_1 = \{a, d, e, g\}$ و $V_2 = \{b, c, f\}$

حل: گراف b همان گراف کامل دوبخشی $K_{2,2}$ می باشد لذا

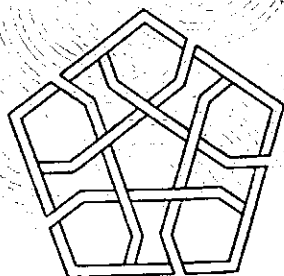
حلی: گراف G مسیر همیتونی دارد (با انتخاب دنباله رئوس $a, b, c, d, e, j, g, i, f, h$) عدد رنگی G طبق افراز زیر ۳ می باشد لذا G دوبخشی نیست.

$$V_1 = \{a, c, g\}, V_2 = \{b, d, f, j\}, V_3 = \{e, h, i\}$$

گراف G دور همیتونی ندارد، چون نمی توان هیچ دوری با ۱۰ رأس متمایز و طول ۱۰ در آن یافت. گزینه ب صحیح است. (می توان نشان داد اگر یک رأس و یالهای مجاور به آن را از گراف پترسون حذف کنیم، گراف حاصل همیتونی خواهد بود. مثلاً اگر رأس g و ۳ یال وابسته به آن را از G حذف کنیم با انتخاب دنباله رئوس $d, c, b, a, e, j, h, i, d$ دوری با ۹ رأس متمایز و طول ۹ خواهیم داشت و گراف حاصل همیتونی خواهد بود.

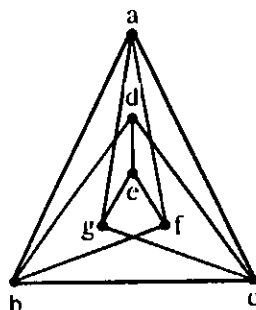
مسئله ۱۹: الف) ثابت کنید اگر یالهای گراف کامل K_9 با رنگهای قرمز یا آبی رنگ شوند، حتماً یک مثلث با یالهای قرمز یا آبی وجود خواهد داشت. ب) ثابت کنید در هر گروه ۶ نفری یا دست کم سه نفر هستند که دوه دو یکدیگر را می شناسند، یا دست کم ۳ نفر هستند که دوه دو یکدیگر را نمی شناسند. (با این فرض که آشنایی رابطه ای دوجانبه است).

حلی: الف) رئوس K_9 را با a, b, c, d, e, f نامگذاری می کنیم. یکی از ۶ رأس مثلاً انتخاب می کنیم. با توجه به اصل لانه کبوتری حداقل ۳ یال از ۵ یال گذرنده از a (ab, ac, ad, ae, af) همرنگ مثلاً قرمزند. فرض می کنیم این یالهای قرمز عبارتند از: ab, ac, ad . با توجه به ۳ یال مذکور یالهای bc, cd, bd را که مثلث تشکیل می دهند در نظر می گیریم. دو حالت امکان دارد: اگر این سه یال آبی باشند، مثلثی با یالهای آبی خواهیم داشت و اثبات تمام است وگرنه، یکی از این یالها مثلاً $\{c, d\}$ قرمز است و در این صورت این یال با دو یال قرمز ad و ac مثلثی قرمز تشکیل خواهد داد. ب) برای ساختن گراف ستاظر به هر یک نفر رأس نظیر می کنیم. برای هر دو نفری که با هم دوست (غریبه) هستند، ۲ رأس ستاظر آنها را با یال قرمز (آبی) به هم وصل می کنیم. به این ترتیب با توجه به قسمت الف، حکم نتیجه خواهد شد.



$X(G)=2$. ولی در گرافهای a و c و d می توان حداقل V را به ۳ زیر مجموعه مثل $V_1 = \{x, z\}$ و $V_2 = \{y, w\}$ و $V_3 = \{t\}$ افراز کرد که بین اعضای V_1 و V_2 و V_3 هیچ یالی موجود نباشد. لذا عدد رنگی هر ۳ گراف سه می باشد و گزینه (ب) صحیح است.

تست ۹: کدام گزاره در مورد شکل (۳۱) درست است.



- الف) گراف G ، گراف اولیری است.
ب) گراف G همیتونی است.
پ) گراف G دوبخشی است.
ت) گراف G غیرمسطح است.

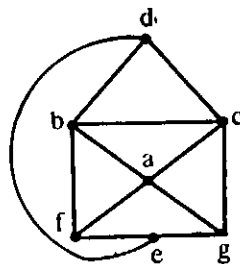
شکل (۳۱)

حلی: گراف G اولیری نیست، چون درجه تمام رئوس آن زوج نیست.

گراف G همیتونی است (با در نظر گرفتن دنباله رئوس e, d, b, c, g, a, f, e که دوری با ۷ رأس و ۷ یال می باشد). گراف G دوبخشی نیست. چون عدد رنگی آن طبق افراز زیر ۴ می باشد.

$$V_1 = \{a, d\}, V_2 = \{b, g\}, V_3 = \{c, f\}, V_4 = \{e\}$$

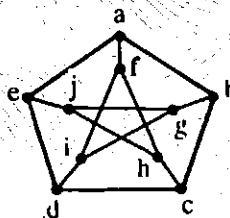
گراف G طبق شکل (۳۲) گراف مسطح است. (گزینه ب صحیح است).



شکل (۳۲)

تست ۱۰: کدام گزاره در مورد شکل (۳۳) که به گراف پترسون معروف است، درست است.

- الف) گراف پترسون دور همیتونی دارد.
ب) گراف پترسون مسیر همیتونی دارد.
پ) $X(G)=4$
ت) گراف G دوبخشی است.



شکل (۳۳)