

اشاره

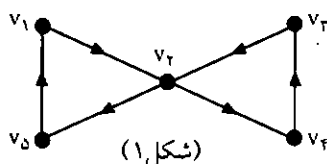
می‌دانیم دز طول یک دوره مسابقه‌ی ورزشی که بین تیم‌های شرکت‌کننده در آن دوره مسابقات انجام می‌پذیرد، ممکن است هر تیمی در رویارویی با حریفش، شکست بخورد و یا پیروز شود؛ با این‌که در مقابل یکدیگر به نتیجه‌ی تساوی برسند. یکی از روش‌های نمایش این نتایج، استفاده از گراف‌هایی است که در مبحث «نظریه‌ی گراف» کتاب ریاضیات گسسته‌ی دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، اشاره‌ای از آن‌ها آمده است. اما آن اشاره تنها در اندازه‌ای است که خواننده فقط می‌تواند با استفاده از یک نمودار گراف جهت‌دار و متناظر کردن آن به یک دوره‌ی مسابقه، متوجه برد یا باخت تیم‌ها شود و نمی‌تواند مطالب بیشتری را با استفاده از نمودار آن کسب کند.

موضوع این مقاله، بحث پیشرفته‌ای پیرامون نتیجه‌ی یک دوره مسابقه‌هایی است که بین تیم‌های شرکت‌کننده در آن صورت می‌پذیرد؛ به گونه‌ای که هیچ‌یک از تیم‌ها مجاز به تساوی در مقابل هم نیستند و هر بازی، در نهایت یک برنده و یک بازنده دارد. این موضوع را به کمک یک دسته از گراف‌های جهت‌دار خاص با ویژگی‌های منحصر به فرد با عنوان «تورنمنت»^۱، بررسی می‌کنیم. برای یادآوری و درک بهتر مقاله اشاره می‌کنم که تورنمنت در لغت به معنای مسابقات قهرمانی و تشکیل مسابقه و در ورزش به معنای یک دوره‌ی مسابقه است. هم‌چنین این مقاله، اشاره‌ای محضی-کاربردی به استفاده از رده‌ای خاص از گراف‌ها به نام «گراف‌های جهت‌دار»^۲ یا «دیگراف»^۳‌ها در یکی از ابعاد زندگی امروزی بشر به نام ورزش دارد. به همین دلیل، در ابتدا گراف‌های جهت‌دار را معرفی و تعریف‌های مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱

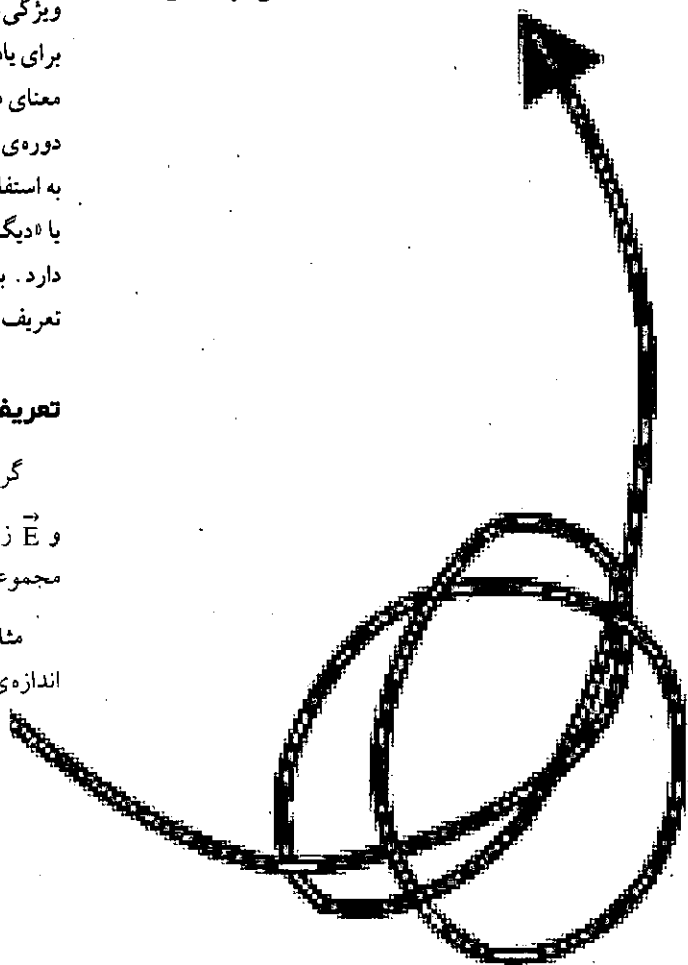
گراف $G = (V, E)$ را که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و E زیر مجموعه‌ای از تمام دوتایی‌های مرتب متشکل از اعضای مجموعه‌ی V است، جهت‌دار می‌نامیم.

مثال ۱. شکل ۱ نمودار گراف جهت‌دار G است. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را مشخص کنید.



گراف تورنمنت

● احسان یارمحمدی



گراف جهت دار $\vec{G}$ دارای مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های زیر است. بنابراین از مرتبه‌ی $p=5$ و اندازه‌ی $q=6$ خواهد بود.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1), (v_2, v_4)\}$$

تعریف ۲

درجه‌ی ورودی^۱ رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که به رأس v_i وارد می‌شود که آن را به صورت $\text{indeg}_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳

درجه‌ی خروجی^۲ رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که از رأس v_i خارج می‌شود که آن را به صورت $\text{outdeg}_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: بدیهی است که اگر $\text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i)$ عددی زوج^۳ باشند، آن‌گاه آن‌ها را به ترتیب رأس ورودی زوج و رأس خروجی زوج و اگر $\text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i)$ عددی فرد^۴ باشند، آن‌گاه آن‌ها را به ترتیب رأس ورودی فرد و رأس خروجی فرد می‌نامیم.

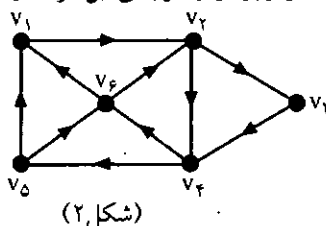
تعریف ۴

بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های ورودی (خروجی) گراف جهت دار $\vec{G}$ را ماکزیمم درجه‌ی ورودی (خروجی) می‌نامیم و آن را با $\Delta^-(\vec{G})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵

کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌های ورودی (خروجی) گراف جهت دار $\vec{G}$ را مینیمم درجه‌ی ورودی (خروجی) می‌نامیم و آن را با $\delta^-(\vec{G})$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. شکل ۲ نمودار گراف جهت دار $\vec{G}$ است. ماکزیمم و مینیمم درجه‌های ورودی و خروجی این گراف را تعیین کنید.



(شکل ۲)

با توجه به نمودار این گراف جهت دار (شکل ۲) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{deg}^-(v_1) = 2 \\ \text{deg}^-(v_2) = 2 \\ \text{deg}^-(v_3) = 1 \\ \text{deg}^-(v_4) = 2 \\ \text{deg}^-(v_5) = 1 \\ \text{deg}^-(v_6) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^- = 2, \delta^- = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{deg}^+(v_1) = 1 \\ \text{deg}^+(v_2) = 2 \\ \text{deg}^+(v_3) = 1 \\ \text{deg}^+(v_4) = 2 \\ \text{deg}^+(v_5) = 2 \\ \text{deg}^+(v_6) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^+ = 2, \delta^+ = 1$$

قضیه ۱

در گراف جهت دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، رابطه‌ی

$$\sum_{i=1}^p \text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i) = \sum_{i=1}^p \text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i) = q$$

برهان

در گراف جهت دار $\vec{G}$ ، هر یال تنها یک جهت دارد به این معنا که دقیقاً به یک رأس از گراف $\vec{G}$ وارد می‌شود (دقیقاً از یک رأس از گراف $\vec{G}$ خارج می‌شود). بنابراین در سمت چپ رابطه‌ی ارائه شده در قضیه، هر یال تنها یک بار به حساب می‌آید. اکنون که با الفبای تعریف‌ها و مطالب پیرامون گراف‌های جهت دار آشنا شدیم، با ارائه‌ی مثالی، مبحث اصلی مقاله را شروع می‌کنیم.

فرض کنید در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) فوتبال که نتیجه‌ی هیچ مسابقه‌ای نباید به تساوی کشیده شود و در پایان هر بازی باید یک تیم برنده و یک تیم بازنده باشد، چهار تیم سبز، سفید، قرمز و آبی حضور دارند. بعد از این که تمامی تیم‌ها با یکدیگر پیکار کرده‌اند، نتایج زیر به دست آمده است:

تیم سفید دو بر یک، تیم سبز را شکست داده است.
تیم قرمز با نتیجه‌ی سه بر یک، بر حریف خود تیم آبی فائق آمده است.

تیم قرمز بازی را با یک گل خورده، به تیم سفید واگذار کرده است.
تیم سبز با حساب دو بر صفر، بر تیم آبی چیره شده است.
تیم آبی با دو گل خورده، مقابل تیم سفید شکست خورده است.

تیم سبز با یک گل زده، بر تیم قرمز برتری یافته است.

بنابراین شیوه‌ی امتیازدهی که از سوی فدراسیون جهانی فوتبال (فیفا) ارائه شده است، تیم برنده سه و تیم بازنده صفر امتیاز را بعد از انجام بازی از آن خود می‌کنند. بنابراین بعد از محاسبه‌ی امتیازها، و تعداد گل‌های زده و خورده‌ی هر یک از تیم‌ها، می‌توانیم جدول زیر را برای این دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) ارائه کنیم:

تیم	تعداد بازی	تعداد پیروزی	تعداد شکست	تعداد تساوی	امتیاز	تعداد گل زده	تعداد گل خورده	تفاضل گل
سفید	۳	۳	۰	۰	۹	۵	۱	+۴
سبز	۳	۲	۱	۰	۶	۴	۲	+۲
قرمز	۳	۱	۲	۰	۳	۳	۲	+۱
آبی	۳	۰	۳	۰	۰	۰	۷	-۷

(جدول ۸)

حداکثر یال‌های جهت‌داری ممکن را داراست. البته باید این نکته را نیز مورد توجه قرار دهیم که در گراف کامل K_p با اندازه‌ی q ، درجه‌ی هر رأس برابر با $p-1$ و یا به بیان بهتر، در هر گراف کامل K_p برای ماکزیمم و مینیمم درجه‌ی رأس‌ها، رابطه‌ی $\Delta = \delta = p-1$ را داریم. اما در گراف‌های جهت‌داری که حداکثر یال‌های ممکن را دارا هستند، درستی یا نادرستی رابطه‌های $\delta^- = \delta^-$ یا $\delta^+ = \delta^+$ و... باید گراف‌های جهت‌دار با مرتبه و اندازه‌های گوناگون را بررسی کرد.

تعریف ۶

گراف جهت‌دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی P و اندازه‌ی q را که دارای حداکثر یال‌های جهت‌دار است و دقیقاً بین هر دو رأس متمایز آن، یک یال جهت‌دار وجود دارد، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷

گراف کامل K_p با اندازه‌ی q را که یال‌های آن یال‌های جهت‌دار هستند، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

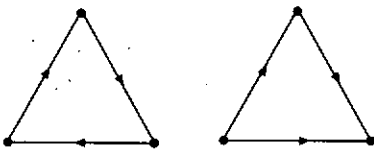
مثال ۳. نمودار تمام تورنمنت‌های متمایز $\vec{T}_3$ ، $\vec{T}_4$ و $\vec{T}_5$ را رسم کنید.

برای تورنمنت $\vec{T}_3$ که در آن مجموعه رأس‌هایش دو عضو دارد، نمودار زیر را می‌توان رسم کرد.



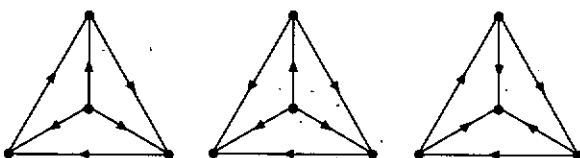
(شکل ۴)

برای تورنمنت $\vec{T}_4$ که در آن مجموعه رأس‌هایش سه عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



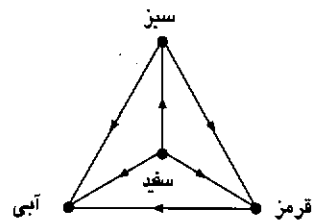
(شکل ۵)

برای تورنمنت $\vec{T}_5$ که در آن مجموعه رأس‌هایش چهار عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۶)

با استفاده از گراف‌های جهت‌دار نیز می‌توانیم وضعیت این دوره‌ی مسابقه را بررسی کنیم. به این صورت که در صفحه‌ی دکارتی، چهار نقطه متناظر با هر یک از تیم‌های آبی، سفید، سبز و قرمز را در نظر می‌گیریم و برای هر بازی انجام شده بین دو تیم، یال جهت‌داری را از تیم برنده به سمت تیم بازنده رسم می‌کنیم. بنابراین گراف جهت‌داری که نشان‌دهنده‌ی بازی‌های انجام شده و نتایج متبوع به پیروزی یا شکست آن‌ها باشد، به صورت شکل ۳ است.



(شکل ۳)

با توجه به گراف جهت‌دار شکل ۳ می‌توانیم، بیشتر اطلاعاتی را که در جدول بنابر قوانین فیفا ارائه شده‌اند، مانند: تعداد بازی، پیروزی، شکست، تساوی و امتیاز هر یک از تیم‌های آبی، سفید، قرمز و سبز را به دست آوریم.

تذکر: با کمی دقت در نمودار گراف جهت‌دار ۳ درمی‌یابیم، این گراف جهت‌دار، گرانی از مرتبه‌ی $p=4$ و اندازه‌ی $q=6$ است. اکنون اگر یک گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی $p=4$ و اندازه‌ی $q=6$ را در نظر داشته باشیم، از آن‌جا که در هر گراف کامل K_p با

اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است، بنابراین

گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی $p=4$ و اندازه‌ی $q=6$ یک گراف کامل K_p است. اگر همین روش را درباره‌ی گراف جهت‌دار مثال بیان شده نیز بررسی کنیم، درخواهیم یافت که این گراف جهت‌دار نیز،

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، رانیم برنده می نامیم، اگر $\deg_{\vec{T}_p}^+(v_i) = \Delta^+$ باشد.

تعریف ۹

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، $s_1(v_i) = \deg_{\vec{T}_p}^+(v_i)$ را امتیازبندی سطح نخست می نامیم که به معرفی تیم نخست در رتبه بندی منجر می شود.

تعریف ۱۰

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه رأس های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، $s_2(v_i) = \sum_{v_j \in E_{\vec{T}_p}} s_1(v_j)$ ، $1 \leq i \leq p$ ، v_i را امتیازبندی سطح دوم می نامیم که به معرفی تیم دوم در رتبه بندی منجر می شود.

تعریف ۱۱

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، $s_n(v_i) = \sum_{v_j \in E_{\vec{T}_p}} s_{n-1}(v_j)$ ، $1 \leq i \leq p$ ، v_i را امتیازبندی سطح n -ام می نامیم که به معرفی تیم n -ام در رتبه بندی منجر می شود.

مثال ۴. در یک دوره ی مسابقه ی فوتبال دوستانه که بین شش تیم آژاکس، منچستر یونایتد، بایرن مونیخ، لیون، رئال مادرید و یوونتوس برگزار شده است، بعد از تمام بازی ها، نتایج زیر به دست آمده اند:

- تیم لیون مقابل تیم های یوونتوس، آژاکس و رئال مادرید به پیروزی

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با اندازه ی q رابطه ی $q = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است.

برهان

مجموع درجه ی رأس های ورودی تورنمنت $\vec{T}_p$ به اضافه ی مجموع درجه ی رأس های خروجی تورنمنت $\vec{T}_p$ برابر با $p(p-1)$ است. پس بنابر قضیه ی ۱، نصف این عدد برابر با تعداد یال های تورنمنت $\vec{T}_p$ است.

تذکر: می دانیم براساس قوانین فدراسیون جهانی فوتبال، تیم های شرکت کننده در یک دوره ی مسابقه (تورنمنت)، براساس امتیازاتی که به دست آورده اند، رتبه بندی می شوند. در پاره ای از موارد ممکن است دو یا چند تیم شرکت کننده در یک دوره ی مسابقه، امتیازات یکسان و مشابهی را به دست آورده باشند که در این صورت فیفا تفاضل گل آن ها را بررسی می کند و تیمی که نسبت به سایر تیم ها تفاضل گل بهتری داشته باشد، در رتبه ی بالاتر قرار می گیرد. اگر تفاضل گل دو یا چند تیم نیز با یکدیگر برابر باشد، آن گاه فیفا به سراغ تعداد گل های زده ی تیم ها، و در صورت برابری آن، به سراغ گل خورده ی تیم های شرکت کننده می رود و براساس آن ها رتبه بندی صورت می پذیرد.

اگر آگاهی های ما از نتایج بازی های انجام شده، تنها شامل نتیجه ی برد یا باخت تیم ها نباشد و در برگیرنده ی نتیجه ی بازی با تعداد گل های زده و خورده باشد، آن گاه مانند مثالی که قبلاً ارائه شد، می توانیم با تشکیل یک جدول، تیم های حاضر در آن دوره ی مسابقه (تورنمنت) را رتبه بندی کنیم. اما اگر اطلاعات ما تنها شامل نتیجه ی باخت یا برد تیم ها در مقابل یکدیگر باشد، به این علت که ممکن است تعداد پیروزی ها یا شکست های دو یا چند تیم با یکدیگر برابر باشد و از آن جا که ما نیز از تعداد گل های رد و بدل شده ی بین آن ها بی اطلاع هستیم، کار ما برای رتبه بندی تیم ها مقداری مشکل خواهد شد. به همین دلایل، در زیر چند

تعریف را درباره ی تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ بیان می کنیم تا بتوانیم در رتبه بندی تیم های شرکت کننده در یک دوره ی مسابقه (تورنمنت) صرفاً با آگاهی داشتن از نتیجه ی برد یا باخت تیم ها، اظهار نظر کنیم.

v_4, v_5 و v_6 درجه‌ی خروجی تعیین و به پیروی از آن، تیم نخست را در رتبه‌بندی مشخص کنیم. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \deg^+(v_1) = 4 \\ \deg^+(v_2) = 3 \\ \deg^+(v_3) = 3 \\ \deg^+(v_4) = 2 \\ \deg^+(v_5) = 2 \\ \deg^+(v_6) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1(v_1) = 4 \\ s_1(v_2) = 3 \\ s_1(v_3) = 3 \\ s_1(v_4) = 2 \\ s_1(v_5) = 2 \\ s_1(v_6) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(s_1) = s_1(v_1) = 4$$

در نتیجه، تیم متناظر با رأس v_1 این تورنمنت، یعنی تیم رئال مادرید، پس از پایان بازی‌ها در رده‌ی نخست قرار گرفته است. با اندکی دقت در مقدار $s_1(v_i), 1 \leq i \leq 6$ درمی‌یابیم، $s_1(v_1) = s_1(v_2) = s_1(v_3) = 3$ بعد از مقدار $s_1(v_1) = 4$ بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده‌اند. ولی این سؤال در ذهن ما پدیدار می‌شود که کدام یک از تیم‌های متناظر با رأس‌های v_2 و v_3 در جایگاه دوم رتبه‌بندی قرار می‌گیرد. به همین دلیل، به محاسبه‌ی $s_2(v_i), 1 \leq i \leq 6$ می‌پردازیم، بنابراین:

$$\begin{aligned} s_2(v_1) &= \sum_{v_j \in E_T} s_1(v_j), 1 \leq j \neq 1 \leq 6 \\ &= s_1(v_2) + s_1(v_3) + s_1(v_4) + s_1(v_5) + s_1(v_6) = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \\ s_2(v_2) &= \sum_{v_j \in E_T} s_1(v_j), 1 \leq j \neq 2 \leq 6 = s_1(v_1) + s_1(v_4) + s_1(v_5) + s_1(v_6) \\ &= 2 + 2 + 1 = 5 \\ s_2(v_3) &= \sum_{v_j \in E_T} s_1(v_j), 1 \leq j \neq 3 \leq 6 = s_1(v_1) + s_1(v_2) + s_1(v_4) + s_1(v_5) + s_1(v_6) \\ &= 4 + 3 + 2 = 9 \end{aligned}$$

رسیده و در مقابل تیم‌های بایرن مونیخ و منچستر یونایتد متحمل شکست شده است.

- تیم منچستر یونایتد تیم‌های بایرن مونیخ و لیون را شکست داده و مقابل تیم‌های رئال مادرید، یوونتوس و آژاکس نتیجه را واگذار کرده است.

- تیم رئال مادرید در مقابل تیم‌های بایرن مونیخ، یوونتوس، منچستر یونایتد و آژاکس بازی را به سود خود به پایان رسانده و در مقابل تیم لیون متحمل شکست شده است.

- تیم یوونتوس در بازی با تیم‌های منچستر یونایتد، آژاکس و بایرن مونیخ پیروز از میدان خارج شده و در مقابل تیم‌های رئال مادرید و لیون، تن به شکست داده است.

- تیم آژاکس در رویارویی با تیم‌های لیون، یوونتوس و رئال مادرید دچار باخت شده و در مقابل تیم‌های منچستر یونایتد و بایرن مونیخ، نتیجه را از آن خود کرده است.

- تیم بایرن مونیخ در پیکار با تیم‌های رئال مادرید، منچستر یونایتد، آژاکس و یوونتوس، شکست را پذیرفته و در رویارویی با تیم لیون موفق به کسب پیروزی شده است.

با استفاده از تورنمنت‌ها، در مورد رتبه‌بندی تیم‌های شرکت‌کننده در این دوره مسابقات بحث کنید.

اگر وضعیت رویارویی این شش تیم در مصاف با یکدیگر را به کمک گراف‌های جهت‌دار بررسی کنیم، نمودار متناظر

با این دوره مسابقات، یک تورنمنت T_6 با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ و اندازه‌ی $q = 15$ خواهد شد.

بنابراین، به هریک از تیم‌های رئال مادرید، یوونتوس، لیون، آژاکس، منچستر یونایتد و بایرن مونیخ، به ترتیب رأس‌های v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 و v_6 را نظیر می‌کنیم. اکنون با توجه

به آن چه که در مثال در مورد نتایج بازی‌های انجام شده، آمده است، می‌توانیم برای هریک از رأس‌های v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 و v_6



• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

• رشد آموزش ابتدایی (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی). • رشد آموزش متوسطه (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه). • رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین‌شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه‌ای، رشد مشاور مدرسه.

مجله‌های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می‌شوند): • رشد برهان راهنمایی (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی). • رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد مدیریت مدرسه • رشد معلم (دو هفته نامه)

مجله‌های عمومی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند): • رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی). • رشد جوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه). • رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی ابتدایی). • رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی ابتدایی). • رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی ابتدایی).

مجله‌های دانش‌آموزی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر سال تحصیلی - منتشر می‌شوند): • رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی ابتدایی). • رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی ابتدایی). • رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی ابتدایی).

آشنایی با مجله‌های رشد

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پرورش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می‌شوند:

$$s_r(v_j) = \sum_{v_i v_j \in E_T} s_r(v_i), 1 \leq j \neq 4 \leq 6 = s_r(v_5) + s_r(v_6) = 4 + 3 = 7$$

$$s_r(v_j) = \sum_{v_i v_j \in E_T} s_i(v_i), 1 \leq j \neq 4 \leq 6 = s_i(v_5) + s_i(v_6) = 2 + 1 = 3$$

$$s_r(v_6) = \sum_{v_i v_j \in E_T} s_r(v_i), 1 \leq j \neq 6 \leq 6 = s_r(v_7) = 3$$

$$s_r(v_5) = \sum_{v_i v_j \in E_T} s_i(v_i), 1 \leq j \neq 5 \leq 6 = s_i(v_7) + s_i(v_6) = 3 + 1 = 4$$

$$s_r(v_6) = \sum_{v_i v_j \in E_T} s_i(v_i), 1 \leq j \neq 6 \leq 6 = s_i(v_7) = 3$$

در نتیجه، تیم متناظر با رأس v_7 که همان تیم آژاکس است، در رتبه‌ی پنجم و تیم متناظر با رأس v_6 یعنی تیم بایرن مونیخ، در مکان ششم رتبه‌بندی قرار می‌گیرد.

در نتیجه:

زیرنویس

1. Tournament
2. Directed Graphs
3. Digraph
4. Indegree
5. Outdegree
6. Even
7. Odd
8. Ranking

$$\left. \begin{array}{l} s_r(v_1) = 8 \\ s_r(v_2) = 5 \\ s_r(v_3) = 9 \\ s_r(v_4) = 3 \\ s_r(v_5) = 4 \\ s_r(v_6) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(s_r) = s_r(v_3) = 9$$

بنابراین، تیم متناظر با رأس v_3 این تورنمنت، یعنی تیم لیون، پس از پایان بازی‌ها در رده‌ی دوم، و تیم متناظر با رأس v_2 این تورنمنت، یعنی تیم یوونتوس، در رتبه‌ی سوم قرار گرفته است. از آن‌جا که تکلیف رتبه‌بندی تیم‌های متناظر با رأس‌های v_1 ، v_4 و v_7 مشخص شده است، بنابراین با اندکی دقت در مقدار $s_r(v_1)$ ، $s_r(v_4)$ و $s_r(v_7)$ درمی‌یابیم، $1 \leq i \neq 1, 2, 3 \leq 6$ و $s_r(v_4) = 3$ و $s_r(v_5) = 4$ و $s_r(v_6) = 3$ هستند. در نتیجه، تیم متناظر با رأس v_5 یعنی تیم منچستر یونایتد، در رتبه‌بندی مقام چهارم را به دست آورده است. اما به این دلیل که داریم: $s_r(v_4) = 3$ و $s_r(v_6) = 3$ لذا برای تشخیص این‌که چه تیمی در رتبه‌ی پنجم و کدام تیم در جایگاه ششم قرار می‌گیرد، باید به محاسبه‌ی $s_r(v_i)$ برای $i = 4, 6$ پردازیم. بنابراین:

منبع

1. <http://mathworld.wolfram.com>
2. <http://www.fifa.com>
3. <http://www.graphtheory.com>

برگ اشتراک مجله‌های رشد

رابط

برای دریافت برگ اشتراک مجله‌های رشد، لطفاً به آدرس زیر مراجعه کنید و برگه‌های مربوطه را پر کنید و به همراه برگه‌های دیگر به آدرس زیر ارسال کنید.

بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در

وجه شرکت اقساط.

۲- ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

• نام مجله:

• نام و نام خانوادگی:

• تاریخ تولد:

• میزان تحصیلات:

• تلفن:

• نشانی کامل پستی:

• استان:

• خیابان:

• پلاک:

• کد پستی:

• مبلغ واریز شده:

• شماره و تاریخ رسید بانکی:

امضا:

نشانی: تهران - صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

شماره مشترکین: ۷۷۳۳۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰

شماره پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ - ۸۸۳۹۳۳۲

یادآوری:

• هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.

• منای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.

• برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).