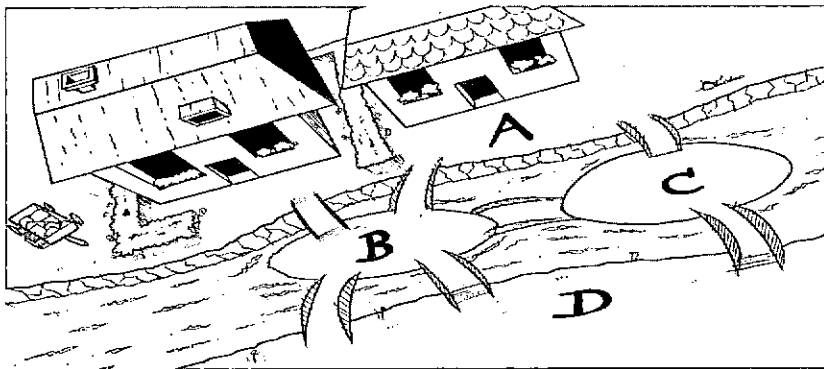


گراف اویلری

احسان یارمحمدی

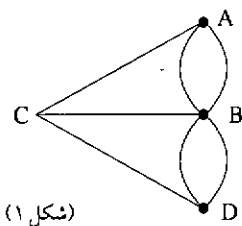
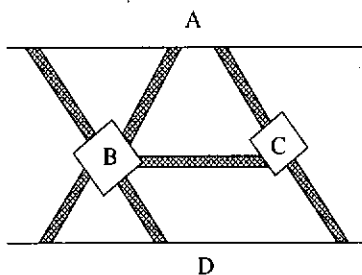


در قرن هجدهم میلادی، شهر کونیگسبرگ^۱ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره واقع در این رودخانه تشکیل شده بود که در آن زمان، این مناطق چهارگانه به وسیله‌ی هفت پل به یکدیگر متصل بودند. این سؤال که آیا امکان دارد با شروع از یکی از این مناطق چهارگانه در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و فقط یک بار عبور کرد و به مکان اول

بازگشت؟ سالیان متوالی ذهن اهالی این شهر به حل این مسأله معطوف شده بود. سرانجام شهردار شهر کونیگسبرگ، طبق نامه‌ای که برای لئونارد اویلر^۲ (۱۷۸۳-۱۷۰۷) ریاضیدان متولد شهر بازل^۳، سوئیس^۴ فرستاد، او را از این مسأله آگاه ساخت و از وی خواست که برای این مسأله‌ی به ظاهر بغرنج راه حلی پیدا کند. اویلر جوان در سال ۱۷۳۶ میلادی توانست پاسخ مناسبی را در جواب سؤال مطرح شده ارائه دهد. لئونارد اویلر به هر یک از این مناطق چهارگانه، نقطه‌ای از صفحه‌ی دکارتی اختصاص داد و به ازای هر پل، پاره‌خطی بین دو نقطه‌ی متناظر با آن نقاط رسم کرد. در حقیقت اویلر از درک شهودی^۵ برای حل این مسأله یاری جست و با ارائه یک مدل ریاضی^۶ (شکل ۱)، بنیانگذار یک شاخه از ریاضیات محض^۷ شد که بیانگر نوعی از ریاضی تصویری^۸ است؛ که این ابداع بعدها تأثیر شایانی در علوم گوناگون مانند پزشکی، ژنتیک، باستان‌شناسی و رایانه گذاشت و آن را به دلیل تصویری بودنش، نظریه گراف^۹ نامیدند.

پاسخ اویلر منفی بود؛ بدین معنا که هیچ‌گاه نمی‌توان از یکی از مناطق چهارگانه شروع به حرکت کرد و از هر پل، یک و فقط یک بار عبور کرد و دوباره به مکان شروع حرکت بازگشت.

اوایلر جواب خود را در قالب قضیه‌ای^{۱۰} مطرح کرد که پس از بیان چند تعریف و ارائه چند مثال، آن را به تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد.



(شکل ۱)

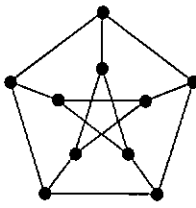
مسیر اویلری^{۱۱}

در گراف همبند^{۱۲} $G=(V,E)$ ، مسیری را که از همه‌ی یال‌های گراف عبور کند و از هر یالی بیش از یک بار عبور نکند، مسیر اویلری می‌نامیم.

مدار اویلری^{۱۳}

در گراف همبند $G=(V,E)$ ، اگر مسیر اویلری یک دور^{۱۴} باشد، آن را مدار اویلری می‌نامیم.

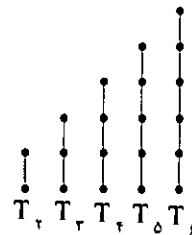
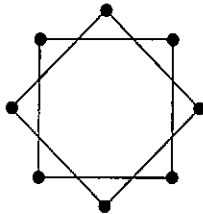
خیر؛ هرچند که گراف «پترسن» شرط اولی اولیری بودن گراف را دارد، ولی چون درجه‌ی هر رأس آن عدد فرد ۳ است، بنابراین گراف «پترسن» اولیری نیست.



(شکل ۲)

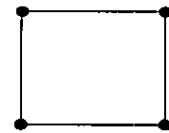
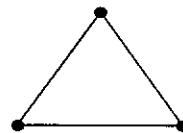
مثال. نمودار گراف G شکل زیر است. آیا این گراف اولیری است؟ چرا؟

خیر؛ هرچند درجه‌ی تمام رئوس گراف G ، عدد زوج ۲ است، ولی چون این گراف همبند نیست، بنابراین اولیری نیست.



با مقداری دقت در نمودار این نوع از درخت‌ها، درخواهیم یافت که هر کدام از آن‌ها دارای مسیر اولیری هستند و طول هر کدام از این مسیرهای اولیری در این نوع درخت از مرتبه‌ی p ، برابر با $p-1$ است.

مثال. هر یک از گراف‌های زیر دارای مدار اولیری هستند.



اکنون اگر مدل ریاضی را که اولیر برای پل گونیگسبرگ^{۱۹} اختصاص داده بود، در نظر بگیریم، درخواهیم یافت که آن مدل ریاضی که بیانگر گراف‌ی از مرتبه‌ی ۴ و اندازه‌ی ۷ است، همبند بوده و از طرفی $\deg(A) = \deg(C) = \deg(D) = 3$ و $\deg(B) = 5$ است. بنابراین گراف مربوطه اولیری نیست و این بدان معناست که نمی‌توان از یکی از مناطق چهارگانه حرکت را آغاز کرد و از هر پل، یک‌بار و فقط یک‌بار عبور کرد و دوباره به مکان شروع حرکت بازگشت.

اکنون که با تاریخچه‌ی شکل‌گیری گراف اولیری و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف، چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱. گراف کامل^{۲۱} K_p از مرتبه‌ی فرد p ، اولیری است.

برهان: چون گراف K_p ، کامل و از مرتبه‌ی فرد p است، بنابراین همبند و درجه‌ی هر رأس آن برابر با $p-1$ ، که عددی زوج است؛ بنابراین گراف کامل K_p از مرتبه‌ی فرد p ، اولیری است.

روشن است، برای این که گراف $G=(V,E)$ دارای مدار اولیری باشد، الزاماً باید همبند باشد، از طرفی دیگر، چون مدار اولیری به تعداد دفعاتی که وارد رأسی از گراف G می‌شود، از همان رأس گراف G نیز خارج می‌شود، بنابراین لازم است که درجه‌ی تمام رئوس گراف اولیری G زوج باشد.

نتیجه: دو شرط لازم برای این که گراف $G=(V,E)$ اولیری باشد، عبارت‌اند از:

۱. گراف G همبند باشد.

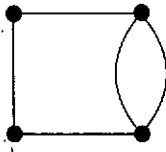
۲. همه‌ی رئوس گراف G زوج باشند.

مثال. نمودار گراف «پترسن»^{۱۸} (شکل ۲) است. آیا این گراف اولیری است؟ چرا؟

نتیجه: گراف کامل K_p از مرتبه‌ی زوج p ، اویلری نیست.

(۳) گراف اویلری است.

(۴) هیچ کدام.



جواب: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

آزمون ۴. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) گراف همبند و بدون دور G ، مدار اویلری دارد.

(۲) گراف تهی K_p ، مدار اویلری دارد.

(۳) گراف تهی K_p ، مسیر اویلری دارد.

(۴) هر سه مورد.

جواب: گزینه‌ی ۴ صحیح است.

چون گزینه‌ی ۱ درست است و در درخت دور وجود ندارد،

بنابراین مداری وجود نخواهد داشت. گزینه‌های ۲ و ۳ گراف تهی

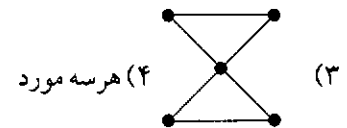
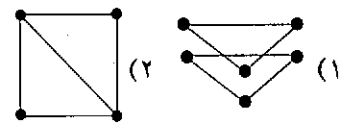
فاقدیال هستند، بنابراین دارای مسیر و دور نیستند.

قضیه‌ی ۲. گراف همبند r - منتظم (r) زوج از مرتبه‌ی p ، اویلری است.

برهان: چون این گراف همبند و درجه‌ی هر رأس آن، برابر با r زوج است. از طرفی چون گراف r - منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q است، بنابراین رابطه‌ی $rp = 2q$ ، می‌تواند مرتبه‌ی گراف هر عدد طبیعی باشد.

نتیجه: گراف r - منتظم (r) فرد از مرتبه‌ی p ، اویلری نیست.

آزمون ۱. کدام یک از گراف‌های زیر، گراف اویلری است؟



جواب: گزینه‌ی ۳ صحیح است؛ زیرا گراف گزینه‌ی ۱ ناهمبند، گراف گزینه‌ی ۲ دارای دو رأس از درجه‌ی سه است و گراف گزینه‌ی ۳ همبند و درجه‌ی تمام رئوس آن زوج است.

آزمون ۲. کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی گرافیکال^{۲۳} یک گراف اویلری است؟

(۱) $S: 5, 5, 5, 5, 5, 5$

(۲) $S: 2, 2, 2, 2, 2, 2$

(۳) $S: 2, 2, 2, 2, 1, 1$

(۴) $S: 3, 2, 2, 1$

جواب: گزینه‌ی ۲ صحیح است. زیرا، درجه‌ی رئوس هر گراف اویلری زوج است.

آزمون ۳. در مورد گراف شکل زیر، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) دارای دور اویلری است.

(۲) دارای دور اویلری نیست.

زیرنویس:

1. Königsberg City
2. Leonhard Euler
3. Basel
4. Switzerland
5. Intuitive Understanding
6. Model of Math
7. Pure Mathematics
8. The Graphic Math
9. Graph Theory
10. Theorem
11. Eulerian path
12. Connected Graph
13. Eulerian cycle
14. Cycle
15. Eulerian Graph
16. Acyclic
17. Tree
18. Petersen Graph
19. Königsberg Bridge
20. Even Vertexes
21. Complete Graph
22. r -Regular Graph
23. Graphical Sequence
24. Empty Graph

منابع

[1] M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak Foster, Graphs and Digraphs Wadsworth International Group.

[2]. O. Ore and R. G. Wilson, Graphs and Their Uses The Mathematical Association of America.

۳. رالف. پ. گریمالدی؛ ریاضیات گسسته و ترکیبات، ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی و بیژن شمس، انتشارات فاطمی.