

کشف فرمول اعداد اول

و

نتایج آن

(حل مسئله های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

فصلنامه

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi - moosavi@yahoo.com

پارامتر ارائه داد:

$$(p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \dots \neq p_k)$$

$$X_1^{p_1} + X_2^{p_1} + \dots + X_k^{p_1} = Y_1^{p_1} + Y_2^{p_1} + \dots + Y_r^{p_1} \quad (1)$$

$$= \dots = Z_1^{p_k} + Z_2^{p_k} + \dots + Z_s^{p_k}$$

برای تعیین یک سلسله جواب عمومی برای معادله ی ۱ کافی است، آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

(۲)

$$(a_1^{p_1 p_2 \dots p_k} \dots p_k)^{p_1} + (a_2^{p_1 p_2 \dots p_k} \dots p_k)^{p_1} + \dots + (a_k^{p_1 p_2 \dots p_k} \dots p_k)^{p_1} =$$

$$(a_1^{p_1 p_2 \dots p_k} \dots p_r)^{p_1} + (a_2^{p_1 p_2 \dots p_k} \dots p_r)^{p_1} + \dots + (a_k^{p_1 p_2 \dots p_k} \dots p_r)^{p_1} = \dots$$

$$(a_1^{p_1 p_2 \dots p_{k-1}} \dots p_k)^{p_k} + (a_2^{p_1 p_2 \dots p_{k-1}} \dots p_k)^{p_k} + \dots + (a_k^{p_1 p_2 \dots p_{k-1}} \dots p_k)^{p_k}$$

اشاره

در قسمت اول تا چهارم مقاله، با سیر تکاملی کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن که از اساسی ترین آن ها حل معادله های سیال مرتبه ی n ام است، آشنا شدید. اکنون آخرین قسمت مقاله، از کتاب مرجع^۱ به صورت چکیده ارائه می شود. برای اطلاع بیش تر از عناوین و موضوعات کتاب مذکور به سایت کاشف فرمول اعداد اول^۲ مراجعه کنید.

حل معادله های سیال یا قوای غیرمتشابه (برابری های چندگانه) در معادله ی عمومی زیر، اگر $p_1, p_2, \dots, p_k$ عددهایی متمایز باشند، برای معادله می توان یک سلسله جواب عمومی با k

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۲، یک سلسله جواب عمومی با پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$(2) \begin{cases} X_1 = a^{p_1 p_2 \dots p_k}, X_2 = a^{p_1 p_2 \dots p_k}, \dots, X_k = a^{p_1 p_2 \dots p_k} \\ Y_1 = a^{p_1 p_2 \dots p_k}, Y_2 = a^{p_1 p_2 \dots p_k}, \dots, Y_k = a^{p_1 p_2 \dots p_k} \\ \dots \\ Z_1 = a^{p_1 p_2 \dots p_{k-1}}, Z_2 = a^{p_1 p_2 \dots p_{k-1}}, \dots, Z_k = a^{p_1 p_2 \dots p_{k-1}} \end{cases}$$

مثال: یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:
(m ≠ n ≠ p ≠ q)

$$X_1^m + X_2^m = Y_1^n + Y_2^n = Z_1^p + Z_2^p = T_1^q + T_2^q \quad (3)$$

حل: برای تعیین یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی ۳ کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{npq})^m + (b^{npq})^m = (a^{mpq})^n + (b^{mpq})^n \quad (4)$$

$$= (a^{mnq})^p + (b^{mnq})^p = (a^{mnp})^q + (b^{mnp})^q$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۳ با اتحاد ۴، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۳ نتیجه می‌شود:

$$X_1 = a^{npq}, X_2 = b^{npq}, Y_1 = a^{mpq}, Y_2 = b^{mpq}, \\ Z_1 = a^{mnq}, Z_2 = b^{mnq}, T_1 = a^{mnp}, T_2 = b^{mnp}$$

مثال: با شرط m ≠ n، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$X_1^m + X_2^m + X_3^m = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n \quad (5)$$

حل: کافی است معادله‌ی ۵ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$m \neq n: (a^n)^m + (b^n)^m + (c^n)^m \quad (6)$$

$$= (a^m)^n + (b^m)^n + (c^m)^n$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۵ با اتحاد ۶، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a^n, X_2 = b^n, X_3 = c^n, Y_1 = a^m, \\ Y_2 = b^m, Y_3 = c^m$$

مثال: با شرط m ≠ n ≠ p، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$X_1^m + X_2^m + X_3^m + X_4^m = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + Y_4^n \quad (7) \\ = Z_1^p + Z_2^p + Z_3^p + Z_4^p$$

حل: کافی است معادله‌ی ۷ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{np})^m + (b^{np})^m + (c^{np})^m + (d^{np})^m \quad (8)$$

$$= (a^{mnp})^n + (b^{mnp})^n + (c^{mnp})^n + (d^{mnp})^n$$

$$= (a^{nm})^p + (b^{nm})^p + (c^{nm})^p + (d^{nm})^p$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۷ با اتحاد ۸، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a^{np}, X_2 = b^{np}, X_3 = c^{np}, X_4 = d^{np}, \\ Y_1 = a^{mp}, Y_2 = b^{mp}, Y_3 = c^{mp}, Y_4 = d^{mp}, \\ Z_1 = a^{mn}, Z_2 = b^{mn}, Z_3 = c^{mn}, Z_4 = d^{mn}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_1^{1384} + X_2^{1384} = Y_1^{173} + Y_2^{173} \quad (9) \\ = Z_1^4 + Z_2^4 = T_1^4 + T_2^4 = U_1^2 + U_2^2$$

حل: ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله را تعیین می‌کنیم:

$$1384 = 2^3 \times 173 = 4 \times 346 = 2 \times 692 \\ [1384, 173] = 1384, [1384, 4] = 1384$$

با توجه به این که کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله، عدد ۱۳۸۴ است، اتحاد زیر را می‌توان نوشت:

$$(a)^{1384} + (b)^{1384} = (a^4)^{173} + (b^4)^{173} \quad (10)$$

$$= (a^{173})^4 + (b^{173})^4 = (a^{346})^2 + (b^{346})^2$$

$$= (a^{692})^2 + (b^{692})^2$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۹ با اتحاد ۱۰، یک سلسله جواب عمومی با دو پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۹ حاصل می‌شود:

$$X_1 = a, X_2 = b, Y_1 = a^4, Y_2 = b^4, Z_1 = a^{173}, \\ Z_2 = b^{173}, T_1 = a^{346}, T_2 = b^{346}, U_1 = a^{692}, \\ U_2 = b^{692}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_1^{30!+1} + X_2^{30!+1} = Y_1^{31} + Y_2^{31} \quad (13)$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن و اتحاد H.M، می‌توان نوشت:
[] : قسمت درست عدد:

$$p = 31: (p-1)! + 1 = p \left(1 + \left[\frac{(p-1)! + 1}{2p} \right] \right) \\ = 31 \left(1 + \left[\frac{30! + 1}{62} \right] \right)$$

بنابراین:

$$[30! + 1, 31] = 30! + 1$$

پس این اتحاد برقرار است:

تحويل پذیری به حالت خاص هر معادله از معادله های ۱ را دارد.
تبصره: حکم اساسی H.M قابل تعمیم است و به سادگی، حکم
زیر نیز نتیجه می شود.

حکم اساسی تعمیم یافته ی H.M: معادله ی ۲ در حالت
عمومی، خاصیت تحويل پذیری به حالت خاص هریک از
معادله های عمومی زیر را دارد:

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + \dots + X_k^n = Y_1^n + Y_2^n + \dots + Y_s^n \quad (۴)$$

توجه: معادله ی ۴ در واقع شامل همه ی معادله های قوای متشابه
می شود و بدیهی است که معادله ی ۲ از نظر داشتن یا نداشتن جواب،
به معادله های عمومی ۴ وابسته است و این واقعیت به قضایای زیر
نیز منجر می شود.

قضیه ی اساسی اول H.M: اگر معادله ی ۲ به ازای هر n طبیعی
جواب داشته باشد، آن گاه همه ی معادله های قوای متشابه ۴ برای همان
n دارای جواب هستند.

قضیه ی اساسی دوم H.M: اگر یکی از معادله های عمومی ۴ به
ازای هر n طبیعی جواب نداشته باشد، معادله ی ۲ نیز برای همان n
دارای جواب نیست.

نکته: می دانیم معادله ی ۲ برای هر $n \geq 3$ جوابی به جز صفر
ندارد (قضیه یا در اصل حکم بزرگ فرما). بدیهی است که اگر
معادله ی ۲ برای هر n طبیعی لااقل یک جواب خاص داشته باشد،
همه ی معادلات قوای متشابه ۴ نیز برای همان توان دارای جواب
هستند. از آن جا که معادله ی ۲ به ازای $n = 2$ دارای جواب عمومی
است، معادله های ۴ نیز به ازای $n = 2$ دارای جواب اند. در این جا
معلوم می شود که برای حل معادله ی ۲ بی نهایت شرایط لازم وجود
دارد، یعنی همه ی معادله های قوای متشابه ۴ باید دارای جواب
باشند. همین واقعیت امکان وجود جواب برای معادله ی ۲ را در
حالت $n \geq 3$ به صفر می رساند.

در این جا برای نشان دادن کاربرد قانون تحويل پذیری H.M در
حل معادله های قوای متشابه کافی است به بررسی معادله های زیر
پردازیم:

$$I) X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2 = X_{k+1}^2$$

$$II) X_1^3 + X_2^3 + \dots + X_{2k+1}^3 = X_{2k+2}^3$$

$$III) X_1^4 + X_2^4 + \dots + X_{2k+1}^4 = X_{2k+2}^4$$

$$IV) X_1^5 + X_2^5 + \dots + X_{2s+1}^5 = X_{2s+2}^5$$

$$V) X_1^6 + X_2^6 + \dots + X_{2t+1}^6 = X_{2t+2}^6$$

برای بررسی معادله های فوق از نظر وجود یا نبود جواب، کافی
است یک جواب خاص برای هریک از معادله ها ارائه دهیم:

$$I) a_1^2 + b_1^2 = c_1^2 ; a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = 5 : 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$b_1^2 = c_1^2 - a_1^2 ;$$

$$b_1^2 ((c_1^2)^{k-1} + (c_1^2)^{k-2} a_1^2 + \dots + (a_1^2)^{k-1}) = (c_1^2)^k - (a_1^2)^k$$

$$(a)^{3 \cdot 1 + 1} + (b)^{3 \cdot 1 + 1} = \left(a^{1+2} \left[\frac{3 \cdot 1 + 1}{6 \cdot 2} \right] \right)^{3^1} + \left(b^{1+2} \left[\frac{3 \cdot 1 + 1}{6 \cdot 2} \right] \right)^{3^1}$$

از مقایسه ی معادله ی ۱۳ با اتحاد ۱۴، یک سلسله جواب عمومی
معادله حاصل می شود:

$$X_1 = a, X_2 = b, Y_1 = a^{1+2} \left[\frac{3 \cdot 1 + 1}{6 \cdot 2} \right], Y_2 = b^{1+2} \left[\frac{3 \cdot 1 + 1}{6 \cdot 2} \right]$$

در این جا، قضیه ی اساسی H.M را در رابطه با حل معادله های
سیال با قوای غیر متشابه (برابری های چندگانه) ارائه می دهیم.

قضیه ی H.M: معادله ی عمومی زیر، با فرض این که $p_1, \dots, p_r$
عددهایی متمایز باشند، همیشه دارای جواب است
 $(p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \dots \neq p_k)$

$$X_1^{p_1} + X_2^{p_1} + \dots + X_k^{p_1} = Y_1^{p_1} + Y_2^{p_1} + \dots + Y_k^{p_1} \\ = \dots = Z_1^{p_k} + Z_2^{p_k} + \dots + Z_k^{p_k}$$

قانون تحويل پذیری H.M برای معادله های سیال قوای متشابه

معادله ی سیال با قوای متشابه به صورت عمومی با اندیس k را
در نظر می گیریم:

$$X_1^n + X_2^n + \dots + X_k^n = X_{k+1}^n \quad (۱)$$

این معادله به معادله هایی با اندیس $(k-1)N + k$ قابل تحويل
است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب، به این گونه معادله ها وابسته
است و هیچ گونه استقلالی ندارد. در صورتی که یکی از معادله ها با
اندیس $(k-1)N + k$ جواب نداشته باشد، معادله ی ۱ نیز جواب
ندارد.

برای مثال، معادله ی زیر با اندیس $k = 2$ را در نظر می گیریم:

$$X^n + Y^n = Z^n \quad (۲)$$

نشان می دهیم که معادله ی ۲ در حالت عمومی به معادله های ۱
قابل تحويل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب به این معادله ها
وابسته است.

برای اثبات این مطلب کافی است معادله ی ۲ را به صورت
 $Y^n = Z^n - X^n$ بنویسیم، دو طرف این معادله را در عبارت زیر
ضرب کنیم و سپس آن را به صورت ۱ بنویسیم:

$$(Z^{k-2})^n + (Z^{k-3}X)^n + \dots + (ZX^{k-2})^n + (X^{k-1})^n$$

پس از انجام عملیات لازم به برابری زیر می رسم:

$$(X^{k-1})^n + (X^{k-2}Y)^n + (X^{k-2}YZ)^n \quad (۳)$$

$$+ (X^{k-4}YZ^2)^n + \dots + (YZ^{k-2})^n = (Z^{k-1})^n$$

از برابری ۳، حکم مسلم زیر که حکمی اصلی و اساسی در رابطه
با تحويل پذیری معادله ی ۲ است، نتیجه می شود.
حکم اساسی H.M: معادله ی ۲ در حالت عمومی، خاصیت

در صورتی که یک دسته جواب معادله ۱ را خصوصی یا عمومی بدانیم، با در دست داشتن جواب و جای‌گزینی آن در معادله، به این برابری بدیهی می‌رسیم:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \dots + a_k^n = a_{k+1}^n \quad (3)$$

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n = a_{k+1}^n - a_1^n$$

$$(a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n) \left((a_{k+1}^n)^{k-1} + (a_{k+1}^n)^{k-2} (a_1^n) + \dots + (a_1^n)^{k-1} \right) = (a_{k+1}^n)^k - (a_1^n)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله ۳ به معادله ۴

زیر تحویل می‌شود:

$$(a_1^k)^n + (a_2 a_{k+1}^{k-1})^n + (a_3 a_{k+1}^{k-2})^n + \dots + (a_k a_{k+1}^{k-1})^n = (a_{k+1}^k)^n$$

از مقایسه معادله ۲ با اتحاد ۴، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = a_1^k, X_2 = a_2 a_{k+1}^{k-1}, \dots, X_{(k-1)N+1} = a_k a_{k+1}^{k-1},$$

$$X_{(k-1)N+2} = a_{k+1}^k$$

در این جا با دسته جواب فوق، برهان قضیه نهایی H.M کامل می‌شود.

تمرین:

با قانون تحویل‌پذیری H.M نشان دهید، معادله‌های زیر به ازای « $n = 2, 3, 4, 5$ » دارای جواب هستند:

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + X_4^n + X_5^n + X_6^n + X_7^n = X_8^n \quad (1)$$

$$X_1^n + X_2^n + \dots + X_7^n = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + \dots + Y_7^n \quad (2)$$

راهنمایی: برای تعیین جوابی برای معادله ۱ کافی است با قانون تحویل‌پذیری H.M، اتحادهای عددی زیر را به حالت خاص معادله ۱ تحویل دهیم. (برای تعیین جوابی برای معادله ۲ کافی است از تعویض نقش اعداد استفاده کنیم):

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2, \quad 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \quad \text{و}$$

$$(95800)^2 + (217519)^2 + (414560)^2 = (422481)^2$$

$$(27)^5 + (84)^5 + (110)^5 + (133)^5 = (144)^5$$

برای مثال، پس از تحویل، به اتحاد عددی زیر می‌رسیم:

$$(729)^5 + (12096)^5 + (15840)^5$$

$$+ (19152)^5 + (2268)^5 + (2970)^5 + (3591)^5 = (50736)^5$$

منابع

1. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches (Author: S.M.R.Hashemi Moosavi).

توضیح: این کتاب به زبان انگلیسی و فارسی در دست چاپ است.

۲. سایت کاشف فرمول: www.primenumbersformula.com

$$(b_1^k + c_1^k) \left((d_1^k)^{k-1} + (d_1^k)^{k-2} (a_1^k) + \dots + (a_1^k)^{k-1} \right) = (d_1^k)^k - (a_1^k)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله ۵

$$a_1^k + b_1^k + c_1^k = d_1^k$$

(۴)

$$(a_1^k)^k + (b_1 d_1^{k-1})^k + (c_1 d_1^{k-1})^k + \dots + (c_1 a_1^{k-1})^k = (d_1^k)^k$$

از مقایسه معادله ۱ و اتحاد ۴، یک دسته جواب عمومی

برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = a_1^k, X_2 = b_1 d_1^{k-1}, X_3 = c_1 d_1^{k-1}, \dots,$$

$$X_{rs+1} = c_1 a_1^{k-1}, X_{rs+2} = d_1^k$$

یک جواب عددی برای معادله ۱ و IV نیز چنین است:

$$X_1 = (95800)^k, X_2 = (217519)(422481)^{k-1},$$

$$X_3 = (414560)(422481)^{k-1}, \dots,$$

$$X_{rs+1} = (414560)(95800)^{k-1}, X_{rs+2} = (422481)^k$$

$$V) a_0^5 + b_0^5 + c_0^5 + d_0^5 = h_0^5; a_0 = 27, b_0 = 84$$

$$c_0 = 110, d_0 = 133, h_0 = 144;$$

$$(27)^5 + (84)^5 + (110)^5 + (133)^5 = (144)^5$$

$$b_0^5 + c_0^5 + d_0^5 = h_0^5 - a_0^5,$$

$$(b_0^5 + c_0^5 + d_0^5) \left((h_0^5)^{k-1} + (h_0^5)^{k-2} (a_0^5) + \dots + (a_0^5)^{k-1} \right) = (h_0^5)^k - (a_0^5)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله ۵

$$a_0^5 + b_0^5 + c_0^5 + d_0^5 = h_0^5$$

(۵)

$$(a_0^k)^5 + (b_0 h_0^{k-1})^5 + (c_0 h_0^{k-1})^5 + \dots + (d_0 a_0^{k-1})^5 = (h_0^k)^5$$

از مقایسه معادله ۱ و اتحاد ۵، یک دسته جواب خاص برای

آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = (27)^k, X_2 = (84)(144)^{k-1}, X_3 = (110)(144)^{k-1},$$

$$\dots, X_{r1+1} = (133)(27)^{k-1}, X_{r1+2} = (144)^k$$

قضیه نهایی H.M: اگر معادله ۱ زیر دارای یک جواب خاص

یا عمومی باشد:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_k^n = x_{k+1}^n \quad (1)$$

آن‌گاه معادله ۱ زیر (با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M) دارای

دسته جواب‌های خاص یا عمومی است ($k, N \in \mathbb{N}, k \geq 2$):

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + \dots + X_{(k-1)N+1}^n = X_{(k-1)N+2}^n \quad (2)$$

برهان: اثبات این قضیه را با استفاده از قانون تحویل‌پذیری انجام

می‌دهیم.