

(حل مسائلهای لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

کشف فرمول اعداد اول

و

نتایج آن *

قسمت ۳

● سید محمدرضا هاشمی موسوی*

hashemi - moosavi@yahoo.com

● یافتن جوابی برای تعمیم قضیه ی بزرگ فرما (حکم بزرگ فرما)

با استفاده از قضیه های مربوط به اعداد اول :

$$(n, m) = 1 : x^n + y^n = z^m \quad (1)$$

پیش از بررسی معادله هایی نظیر معادله ی (۱)، لازم است چند قضیه ی اساسی مربوط به اعداد اول، مثل قضیه ی کوچک فرما، قضیه ی اوپلر (تعمیمی از قضیه ی کوچک فرما) و قضیه ی ویلسن را یادآور شویم. به این منظور، ابتدا به عناوین قضایای می پردازیم :

۱. قضیه ی کوچک فرما

اگر p عدد اول باشد و $(p, a) = 1$ ، آن گاه :

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad \text{یا} \quad a^p \equiv a$$

۲. قضیه ی اوپلر

اگر $(a, m) = 1$ ، آن گاه :

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1$$

۳. قضیه ی ویلسن

اگر p عدد اول باشد، آن گاه :

$$(p-1)! \equiv -1$$

در این جا تنها کافی است اثباتی ساده برای قضیه ی اوپلر ارایه

دمیم؛ زیرا دو قضیه‌ی دیگر، حالت خاصی از قضیه‌ی اوایلر هستند.

قضیه‌ی کوچک فرما چنین است:

$$(p > 2) \quad a = (p-2)! : ((p-2)!)^{p-1} \equiv 1 ; (p-2)! \equiv 1$$

$$(p > 2) \quad a = (p-1)! : ((p-1)!)^{p-1} \equiv 1 ; (p-1)! \equiv -1$$

از طریق آزمایش پی می‌بریم که جواب‌های $(p-1)! \equiv 1$ و $(p-1)! \equiv -1$ خارجی است و این قضیه برای $p=2$ نیز برقرار است.

۱. تعیین جوابی برای معادله‌ی (۱):

$$(m, n) = 1 : x^n + y^n = z^m$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۱)، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$k \in \mathbb{N} : x_1^{k-1} + x_2^{k-1} = x_3^k \quad (2)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۲)، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a, b \in \mathbb{Z} : (a^k + ab^{k-1})^{k-1} + (ba^{k-1} + b^k)^{k-1} = (a^{k-1} + b^{k-1})^k \quad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی (۲) و اتحاد (۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = a^k + ab^{k-1} \\ x_2 = ba^{k-1} + b^k \\ x_3 = a^{k-1} + b^{k-1} \end{cases} \quad \text{(یک سلسله جواب معادله‌ی (۲))}$$

در این جا، با فرض $k = m^{\varphi(n)}$ ، معادله‌ی (۲) به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{m^{\varphi(n)-1}} + x_2^{m^{\varphi(n)-1}} = x_3^{m^{\varphi(n)}} \quad (4)$$

φ تابع اوایلر است) $\varphi(n)$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به آن اول اند. برای مثال: $\varphi(2) = 1$ و $\varphi(12) = 4$ ؛ زیرا ۱، ۵، ۷، ۱۱ نسبت به ۱۲ اول اند.

اثبات قضیه‌ی اوایلر (۲)

اگر $(a, m) = 1$ و فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_n$ که در آن دسته‌ی ساده‌ی باقی مانده به پیمانه‌ی m باشند، واضح است که عددهای $ax_1, ax_2, \dots, ax_n$ نیز دسته‌ی ساده‌ی باقی مانده‌ها به پیمانه‌ی m هستند؛ زیرا:

$$\begin{aligned} (a, m) = 1, n = \varphi(m) : \quad & ax_1 \equiv x_1 \\ & ax_2 \equiv x_2 \\ & \dots \\ & ax_n \equiv x_n \end{aligned}$$

از ضرب هم‌نهشتی‌ها:

$$a^n x_1 x_2 \dots x_n \equiv x_1 x_2 \dots x_n$$

چون $(m, x_1 x_2 \dots x_n) = 1$ ، پس از اختصار لازم خواهیم داشت:

$$a^n \equiv 1 ; a^{\varphi(m)} \equiv 1$$

توضیح: $\varphi(m)$ (تابع φ اوایلر)، یعنی تعداد عددهای کوچک‌تر از m که نسبت به m اول اند.

اثبات قضیه‌ی فرما (۱)

بدیهی است که اگر m عدد اولی مثل p باشد، قضیه‌ی اوایلر به حالت خاص، یعنی قضیه‌ی فرما تبدیل می‌شود:

$$m = p : \varphi(p) = p-1 ; a^{p-1} \equiv 1$$

اثبات قضیه‌ی ویلسن (۳)

در قضیه‌ی فرما می‌توان فرض کرد $a = (p-1)!$ یا $a = (p-2)!$ و p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ فرض می‌شود و هم چنین

طبق قضیه ی اوایلر، اگر $(m, n) = 1$ ، آن گاه عبارت $m^{\varphi(n)} - 1$ بر n بخش پذیر است.
از طرف دیگر می توان نوشت:

$$(m, n) = 1 : m^{\varphi(n)} - 1 = n \left(1 + 2 \left[\frac{m^{\varphi(n)} - 1}{2n} \right] \right) \quad (5)$$

([] : قسمت درست عدد)

با استفاده از رابطه ی (5)، معادله ی (4) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\left(x_1^{1+2 \left[\frac{m^{\varphi(n)} - 1}{2n} \right]} \right)^n + \left(x_2^{1+2 \left[\frac{m^{\varphi(n)} - 1}{2n} \right]} \right)^n = (x_2^{m^{\varphi(n)-1}})^m \quad (6)$$

از مقایسه ی معادله ی (1) با اتحاد (6)، یک سلسله از جواب های معادله ی (1) حاصل می شود:

$$(V) \begin{cases} x = (a^{m^{\varphi(n)}} + ab^{m^{\varphi(n)-1}})^{1+2 \left[\frac{m^{\varphi(n)} - 1}{2n} \right]} \\ y = (ba^{m^{\varphi(n)-1}} + b^{m^{\varphi(n)}})^{1+2 \left[\frac{m^{\varphi(n)} - 1}{2n} \right]} \\ z = (a^{m^{\varphi(n)-1}} + b^{m^{\varphi(n)-1}})^{m^{\varphi(n)-1}} \end{cases}$$

توضیح: در برابری های (V)، اگر n عددی اول مثل p باشد:

$$n = p : \varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$$

و اگر m عددی مرکب به صورت $m = p^r \cdot q^s \cdot t^u \dots$

باشد، $(p, q, t, \dots)$ عوامل های اول اند، می توان نوشت:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{t} \right) \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n \end{vmatrix}$$

برای مثال:

$$n = 205 = 5 \times 41 : \varphi(205) = 205 \left(1 - \frac{1}{5} \right) \left(1 - \frac{1}{41} \right) = 160$$

$$n = 864 = 2^5 \times 3^3 : \varphi(864) = 864 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 288$$

۲. تعیین جوابی برای معادله ی:

$$(p, m) = 1 : X^p + Y^p = Z^m \quad (2)$$

معادله ی (2) حالت خاصی از معادله $x^n + y^n = z^m$ است.

بنابراین؛ برای تعیین جواب آن کافی است، در جواب معادله ی (1) $n = p$ را اختیار کنیم:

$$\varphi(p) = p - 1 : \begin{cases} x = (a^{m^{p-1}} + ab^{m^{p-1}-1})^{1+2 \left[\frac{m^{p-1}-1}{2p} \right]} \\ y = (ba^{m^{p-1}-1} + b^{m^{p-1}})^{1+2 \left[\frac{m^{p-1}-1}{2p} \right]} \\ z = (a^{m^{p-1}-1} + b^{m^{p-1}-1})^{m^{p-1}} \end{cases} \quad (A)$$

جواب (A) حالت خاص جواب (V) به ازای $\varphi(p) = p - 1$ است.

البته جواب معادله ی (2) به طور مستقیم نیز قابل محاسبه

است. با استفاده از قضیه ی فرما و روشی مشابه حل معادله ی (1)



دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی با
مجله های رشد

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می شوند:

مجله های دانش آموزی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر

سال تحصیلی - منتشر می شوند):

- رشد کودک (برای دانش آموزان آمادگی و پایه ی اول دوره ی ابتدایی)
- رشد نوآموز (برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره ی ابتدایی)
- رشد دانش آموز (برای دانش آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره ی ابتدایی).
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی):
- رشد جوان (برای دانش آموزان دوره ی متوسطه).

مجله های عمومی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر سال

تحصیلی منتشر می شوند):

- رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم، رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا

مجله های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال

منتشر می شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان، رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه ای، رشد مشاور مدرسه.

مجله های رشد عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاهها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شوند.

● نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی.

می توان جواب (۸) را برای معادله ی (۲) به دست آورد.

۳. تعیین جوابی برای معادله ی:

$p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ و $p_1, p_2 < p$ (prime number)

$$X^{p_1} + Y^{p_2} = Z^p \quad (۳)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب های معادله ی (۳)، ابتدا

یک سلسله از جواب های معادله ی زیر را به دست می آوریم:

$$x_1^n + x_2^n = x_3^{n+1} \quad (۴)$$

به این منظور کافی است، معادله ی (۴) را با اتحاد زیر مقایسه

کنیم:

$$(a^{n+1} + ab^n)^n + (a^n b + b^{n+1})^n = (a^n + b^n)^{n+1} \quad (۵)$$

اکنون از مقایسه ی معادله ی (۴) با اتحاد (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = a^{n+1} + ab^n \\ x_2 = a^n b + b^{n+1} \\ x_3 = a^n + b^n \end{cases} \quad (۶)$$

در این جا، با فرض $n = (p-1)!$ ، معادله ی (۴) به معادله ی

زیر تحویل می شود:

$$x_1^{(p-1)!} + x_2^{(p-1)!} = x_3^{(p-1)!+1} \quad (۷)$$

طبق قضیه ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت

$(p-1)!$ بر p بخش پذیر است. از طرف دیگر می توان نوشت:

$$(p-1)! + 1 = p \left(1 + 2 \left[\frac{(p-1)!+1}{2p} \right] \right) \quad (۸)$$

([] : قسمت درست عدد)

در این جا، با استفاده از رابطه ی (۸) و با توجه به شرط

$p_1, p_2 < p$ ، معادله ی (۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(x_1^{(p-1)!})^{p_1} + (x_2^{(p-1)!})^{p_2} = (x_3^{(p-1)!})^{1+2 \left[\frac{(p-1)!+1}{2p} \right]} \quad (۹)$$

از مقایسه ی معادله ی (۳) با اتحاد (۹)، یک سلسله از

جواب های معادله ی (۳) حاصل می شوند:

$$\begin{cases} X = (a^{(p-1)!+1} + ab^{(p-1)!})^{(p-1)!} \\ Y = (a^{(p-1)!}b + b^{(p-1)!+1})^{(p-1)!} \\ Z = (a^{(p-1)!} + b^{(p-1)!})^{1+2 \left[\frac{(p-1)!+1}{2p} \right]} \end{cases} \quad (۷)$$

توجه: در اتحادها و برابری های فوق اگر p را به

$p(1) = 2 \left(\frac{21+1}{2} \right)^{4m}$ تبدیل کنیم، به اتحادها و جواب های همیشه

برقرار به ازای $m \in \mathbb{N}$ خواهیم رسید ($H(m)$: فرمول اعداد اول).

در ادامه ی این مقاله یک مجموعه ی جواب عمومی برای

معادله های سیال تعمیم یافته ی عمومی با درجه ی دلخواه (با استفاده

از قضیه های ویلسن، فرما و اویلر و نشان دادن نقش فرمول اعداد

اول در پیدایش اتحادهای جبری) ارائه خواهد شد.

منابع:

* S.M. R. Hashemi Mossavi. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches. Brill/VSP (2006).

** www.primenumbersformula.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱- واریز مبلغ ۲۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخرده حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲- ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- نام مجله :
- نام و نام خانوادگی :
- تاریخ تولد :
- میزان تحصیلات :
- تلفن :
- نشانی کامل پستی :
- استان :
- خیابان :
- پلاک :
- کدپستی :
- مبلغ واریز شده :
- شماره و تاریخ رسید بانکی :

امضا:

نشانی: تهران- صندوق پستی مشترکین
www.roshdmag.ir
نشانی اینترنتی:
Email: info@roshdmag.ir
پست الکترونیک:
۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
شماره مشترکین:
۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۳۹۳۳۲

یادآوری:
• هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
• مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
• برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).