

ریاضیات تفریحی



● غلامرضا یاسی پور

کاشیکاری و خطا

- حمید، آیا بنا قول نداده بود که دیوار حمام را کاملاً کاشیکاری کند؟
- البته که قول داده بود عزیزم!
- پس چرا انجام نداده! دیوارها با گچ ساده رها شده‌اند و یک جعبه بزرگ پر از کاشی، گوشه حمام جا مانده!
حمید آقا با حالتی تسلیم‌آمیز گفت: «همین حالا بهش تلفن می‌کنم.»
به این ترتیب بود که حمید آقا تلفن کرد. جواب طرف چنین بود: «بله قربون، بله؛ حق به جانب شماس، قربون. خوب، با مشکل کوچکی برخورد کردیم. منظورم اینه که کاشی‌های سفارشی شما، کاشی‌های فانتزی‌ای با شکلهای عجیب و غریبی بودن، خوب ... نمی‌تونیم اونا رو پهلوی هم قرار بدیم.»

- ببخشید، چی فرمودید؟

حمید آقا و زنش، مریم بانو، و بچه شیرخوارشان اصلان، تازه از دردسر و مکافات اسباب کشی به یکی از این آپارتمان‌های نقلی جدید و مدرن راحت شده‌اند و شروع به استفاده از مزایای خانه جدیدشان کرده‌اند؛ به خصوص مریم خانم از این که دیگر لازم نیست از پله‌های باریک خانه قبلی‌شان بالا و پایین برود، خیلی خوشحال بود. اما وضعیت حمام خانه را که دید، حالش گرفته شد.

فریاد کشید: «حمید! حمید بیا این جا!»

حمید آقا با اکراه از اتاق مطالعه‌اش بیرون آمد - اتاق مطالعه‌ای که با یک مبل راحتی و یک قفسه پر از کتاب‌های دلخواه حمید آقا مجهز شده بود - و از راهروی دراز منجر به حمام گذشت و گفت:

- بله، عزیزم!



شکل (۸): کاشی حمام آپارتمان حمید آقا. آیا می‌توانید از پهلوی هم قرار دادن این کاشی‌ها مستطیلی بسازید؟

تعداد n - مربعی‌ها

n	$P(n)$	$Q(n)$
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۲	۶
۴	۵	۱۹
۵	۱۲	۶۳
۶	۳۵	۲۱۶
۷	۱۰۸	۷۶۰
۸	۳۶۹	۲,۷۲۵
۹	۱,۲۸۵	۹,۹۱۰
۱۰	۴,۶۵۵	۳۶,۴۴۶
۱۱	۱۷,۰۷۳	۱۳۵,۲۶۸
۱۲	۶۳,۶۰۰	۵۰۵,۸۶۱
۱۳	۲۳۸,۵۹۱	۱,۹۰۳,۸۹۰
۱۴	۹۰۱,۹۷۵	۷,۲۰۴,۸۷۴
۱۵	۳,۴۲۶,۵۷۶	۲۷,۳۹۴,۶۶۶
۱۶	۱۳,۰۷۹,۲۵۵	۱۰۴,۵۹۲,۹۳۷
۱۷	۵۰,۱۰۷,۹۱۱	۴۰۰,۷۹۵,۸۶۰
۱۸	۱۹۲,۶۲۲,۰۵۲	۱,۵۴۰,۸۲۰,۵۴۲

به طوری که گوشه‌هایشان روی هم قرار گیرند. اگر به n مربع از مربع‌هایی چنین نیاز داشته باشیم، آن را n مربعی می‌نامیم. تعداد n مربعی‌ها با n سریعاً افزایش می‌یابد. (جدول بالا را ملاحظه کنید.)

احمد خان ادامه داد: «برای دقیق ساختن مسأله، اجازه بده از روشی پیروی کنم که دیوید کلارنر "David Klarner" در سال ۱۹۶۹ با توجه به آن، مرتبه یک چند مربعی را این گونه تعریف کرد: کمترین تعداد کپی برای تشکیل یک مستطیل؛

- کاشیکارمون می‌گه یه مقدار فاصله بین اونا ایجاد می‌شه. حمید آقا با عصبانیت ریشش را خاراند و گفت: «مسخره‌اس! هیچ وقت چنین عذر احمقانه‌ای را در مدت عمرم نشنیده بودم!»

- ممکنه همین طور باشد قربون! اما این مشکل، مارو حسابی گیج و ویج کرده.

- چرا چند تا از آنها را برای ساختن مستطیل پهلوی هم قرار نمی‌دید تا بعد، از مستطیل‌های حاصل شده برای دیوار استفاده کنید؟

- خُب، عرض شود کاشیکارمون راجع به اینم فکر کرده. اتفاقاً روش کارمون همینیه. اما، گیر کار این جاست که نمی‌شه با اونا مستطیل ساخت. گرچه باید این رو هم بدونیم که تنها راه کاشیکاری کردن دیوار، ساختن مستطیل نیس.

حمید آقا می‌گفت تمام فکر و ذکرش متوجه حل مسأله از طریق مستطیل‌بندی بود، بلافاصله جواب داد: «چرنده!»

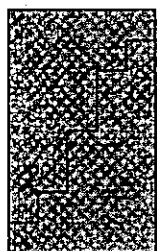
استاد بنا با عذرخواهی گفت: «از کاشیکار خواستم یه حمله دیگه به مسأله بکنه. ایشالا تا سه هفته بعد از چهارشنبه آینده، کار رو انجام می‌ده.»

حمید آقا پاسخ داد: «مزخرفه! خودم انجامش می‌دم!» و گوشی را محکم روی تلفن کوبید و به حمام رفت، و در حالی که برای همسرش دربارهٔ بساز و بفروش‌ها داد سخن می‌داد، در جعبهٔ کاشی‌ها را باز کرد.

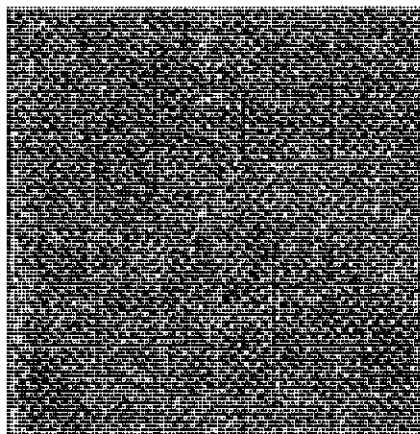
گفت: «هوم. بعله! شکل کاشی‌ها کمی غیرمعموله (شکل ۸). اما فکر نمی‌کنم سخت باشد. مسأله اینه که چطور اونا رو پهلوی هم بذاریم تا مستطیل دُرُس بشه. په، باید آسون باشد ...!»

دو روز گذشت و حمید آقا مایوس‌تر و مایوس‌تر می‌شد. بالاخره مجبور شد با دوست قدیمی و ریاضیدانش احمدخان، که در مؤسسهٔ ریاضیات کار می‌کرد، مشورتی داشته باشد.

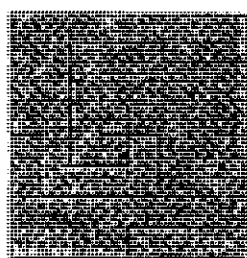
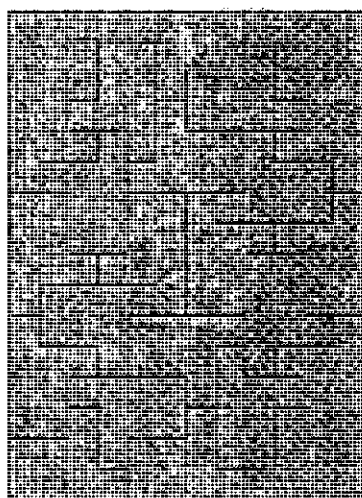
احمد خان، بعد از مقداری فکر، گفت: «جالبه. این طور که معلومه، کاشی شما به شکل چند مربعی "polyomino" است؛ یعنی یک شکل مسطح تشکیل شده از به هم پیوستن لبه به لبه مجموعه‌ای از مربع‌های هم اندازه،



۲↑



→ ۲۸



۴↑

← ۲۴

شکل (۹): چند مربعی‌های از مرتبه ۲، ۴، ۲۴ و ۲۸

مسأله (۲): در شکل (۱۰)، n - مربعی‌های ممکن را به ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ نشان داده‌ایم. آیا می‌توانید مرتبه آنها را مشخص کنید؟

راهنمایی: ممکن است مورد ۷ - پنج ضلعی، موجب زحمت شود؛ اما می‌توان آن را انجام داد.

احمد خان گفت: «آها! حتی در این مرحله آغازی هم می‌توان بعضی از اصول کلی را ملاحظه کرد. واضح است که یک چند مربعی اگر و تنها اگر یک مستطیل باشد، دارای مرتبه ۱ است.»

حمید آقا گفت: «احمد خان! اگر حرف مهمت همینه، بهتره به خونه برم و کار هیجان‌انگیزتری مثل دیدن رشد و نمو کاکتوس‌ها را انجام بدم.»

احمد خان با کج خلقی گفت: «صرفاً ملاحظه یک واقعیت؛ چرا که حتی بدیهی‌ترین واقعیت‌ها نیز می‌توانند

البته با این فرض که این کار ممکن باشد؛ چه در غیر این صورت، ترتیب مذکور تعریف نمی‌شود.»

مسأله (۱): آیا می‌توانید یک چند مربعی را تصور کنید که دارای مرتبه نباشد؛ یعنی نتواند سطح یک مستطیل را پوشاند؟ مستطیل مورد بحث می‌تواند (تا زمانی که مستطیل بماند) به هر شکل و هر اندازه باشد.

در شکل (۹)، چند مثال از چند مربعی‌هایی با مرتبه‌های گوناگون نشان داده‌ایم. توجه داشته باشید که برای اثبات این که یک چند مربعی دارای مرتبه‌ای مثلاً m ، است، باید دو کار را انجام دهیم:

(الف) راهی برای تشکیل یک مستطیل با m کپی یا مورد بیابیم.
(ب) ثابت کنیم هیچ تعداد کپی کمتر از m ، مستطیل نمی‌سازد.

ممکن است تصور کنیم قسمت (الف) مشکل‌تر است؛ اما اغلب این (ب) است که موجب زحمت می‌شود. در مورد هر اندازه و شکل معلوم مستطیل و هر چند مربعی مفروض، می‌توان در تئوری مشخص کرد که چند مربعی مزبور می‌تواند مستطیل معلوم را تشکیل دهد یا خیر. اما تنها روش سیستماتیک شناخته شده، روش هوشمندانه آزمایش و خطا "trial-and-error" است و این روش، حتی برای مستطیل‌های با اندازه متعادل نیز، به سرعت غیرعملی می‌شود.

در این مورد، هیچ روش عمومی کارایی شناخته شده نیست و در این زمینه، مسائل حل نشده بسیاری وجود دارد. حوزه مورد بحث برای علاقه‌مندان ریاضیات تفریحی، کاملاً باز است.

احمد خان به حمید آقا گفت: «حالا، کاشیمان به گونه‌ای فریبنده، مثال ساده‌ای از هفت مربعی است؛ یعنی یک چند مربعی ساخته شده از هفت مربع. در واقع، آنچه را که به آن نیاز داریم، این است که مشخص کنیم مستطیل مورد بحث دارای مرتبه‌ای هست یا نه؟ و اگر هست، این مرتبه کدام است؟ اما من تصور می‌کنم مسأله اصلی این است که شروع کار با هفت مربعی، کمی جاه طلبانه باشد. در این صورت، چرا کار را با یک مربعی، دو مربعی، سه مربعی، چهار مربعی یا پنج مربعی آغاز نکنیم؟»

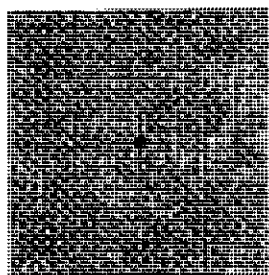
این را نیز اضافه می‌کند که: «این ایده از لحاظ شهودی آشکار است؛ اما تنظیم اثباتی دقیق برای آن، مشکل به نظر می‌رسد. تا آن جا که من مطلع‌م، در این مورد هنوز کسی اثباتی انتشار نداده است و مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۹ نوشته شده، به طور ضمنی، به این مسائل به عنوان مسائل حل نشده اشاره می‌کند. اما در این مورد، حق به جانب کلارنر است؛ چرا که من، یعنی احمد خان، به تازگی اثباتی برای این قضیه به دست آورده‌ام.»

مسئله (۳): آیا می‌توانید حدس کلارنر را اثبات کنید؟

اثبات احمد خان، پیچیده‌تر از آن است که در این جا داده شود. جالب توجه است که اثبات مزبور، استفاده وسیعی از استدلال‌های متقارن به عمل می‌آورد. (احمد خان به تازگی آن را در مقاله‌ای مشترک با من به چاپ رساند؛ چه احمد خان به علت کمرویی زیاد، به تنهایی مایل به چاپ آثارش نیست.)

حمید آقا، که حالت تحقیق به خود گرفته بود، پرسید: «درباره مرتبه ۴ چه؟» آشکار بود که مدتی طول می‌کشد تا احمد خان سری به حمام مریم خانم بزند؛ اما حمید آقا هم عجله‌ای در این مورد نداشت. به طور قطع و یقین هم نداشت؛ به خصوص اگر برای مسئله راه‌حلی وجود نداشته باشد، که به طور تهدیدکننده‌ای می‌رفت که چنین باشد.

احمد خان گفت: «حدس زده‌اند که چند مربعی‌های مرتبه ۴، دقیقاً به دو طریق ایجاد می‌شوند (شکل ۱۱).»

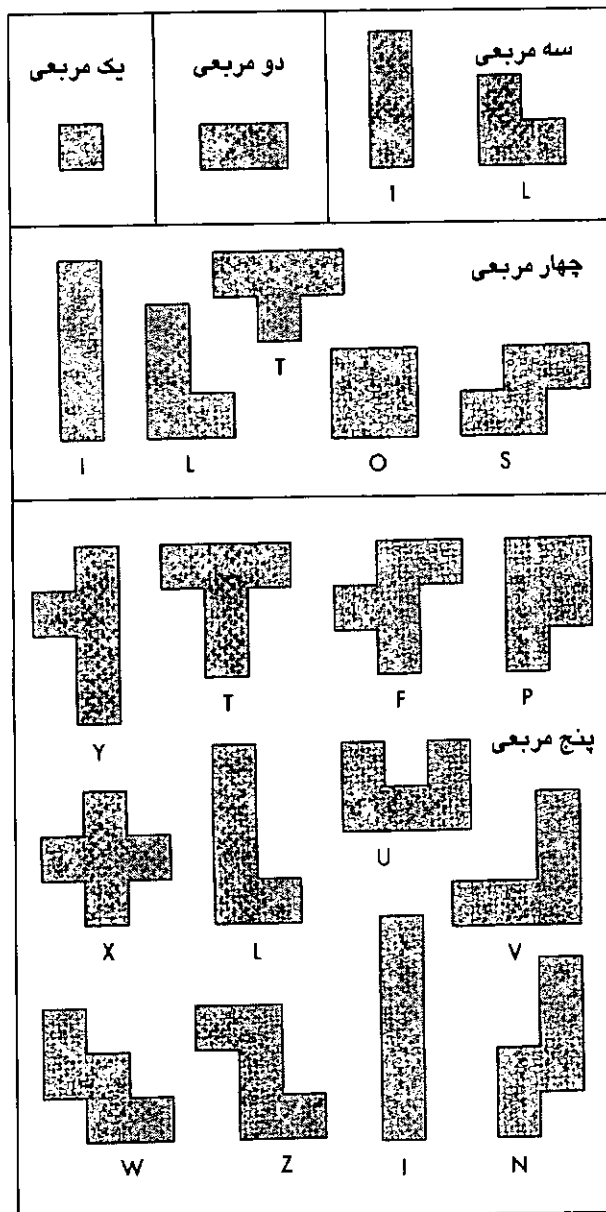


شکل (۱۱): دو طریق به دست آوردن چند مربعی‌های مرتبه ۴

به نظر می‌رسد که اثبات این مطلب احتمالاً پیچیده باشد. خوب، من خودم اثباتی به دست نیاورده‌ام؛ اما بعید نیست که پیدا شود.

- مرتبه ۵ چی؟

- هیچ کس نمی‌داند. تا این اواخر، تنها مرتبه‌های شناخته شده بزرگتر از ۴ عبارتند از ۱۰، ۱۸، ۲۴، ۲۸، ۷۶ و ۹۲.



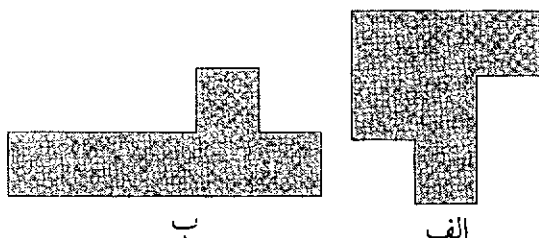
شکل (۱۰): تمام n -مربعی‌ها به ازای $n \leq 5$

مفید باشند. اما حالا اجازه بده موارد کمی مشکل‌تر را مورد بررسی قرار دهیم. چند مربعی از مرتبه ۲، بنا به تعریف، از بریدن یک مستطیل به دو تکه برابر حاصل می‌شود. برای رسیدن به این منظور، خط برش باید تحت دوران 180° متقارن باشد. این عمل مشخصه‌ای کارا از تمام چند مربعی‌های از مرتبه ۲ به دست می‌دهد، نیز سودمند است؛ زیرا معروف‌ترین مثال‌های چند مربعی‌هایی که دارای مرتبه‌اند، مرتبه ۲ دارند.

- مرتبه ۳ مورد پیچیده‌تری است. کلارنر در سال ۱۹۶۹ حدس زده که چند مربعی‌های از مرتبه ۳ وجود ندارند. وی

برای حمید آقا کشید.

- این یک چند مربعی (شکل ۱۲ الف) از مرتبه ۱۸ است. ممکن است دوست داشته باشی ۱۸ کپی از آن تهیه کنی و آنها را برای تشکیل یک مستطیل 9×12 ، پهلوی هم بگذاری. تا این اواخر، یک حالت، یعنی ۷ - شش مربعی، وجود داشت که در آن پاسخ مسأله نامشخص بود (شکل ۱۲ ب)؛ اما در سال ۱۹۸۹ کارل دالکه "Karl Dahlke" اثبات کرد که ۷ - شش مربعی دارای مرتبه ۹۲ است. قبلاً گفتم که درباره این موضوع بیشتر صحبت می‌کنم و می‌بینی که به قولم عمل کردم.



شکل (۱۲): الف. یک شش مربعی از مرتبه ۱۸ ب. ۷ - شش مربعی، که مرتبه‌اش تا سال ۱۹۸۹ معلوم نبود.

مسأله (۴): آیا می‌توانید هشت شش مربعی از مرتبه ۴ یا کمتر را پیدا کنید؟ آیا می‌توانید با استفاده از چند مربعی شکل ۱۲ الف، یک مستطیل بسازید؟ در صورت تمایل، می‌توانید سعی در یافتن این موضوع داشته باشید که چگونه می‌شود 92×7 - شش مربعی را برای ساختن یک مستطیل 23×24 پهلوی هم قرار داد؛ اما بدانید که دالکه این کار را با استفاده از زبان برنامه‌نویسی C و سه روز کار بر یک ریز کامپیوتر انجام داده است.

- بله احمد خان. تو این را هم قول دادی که مطالبی هم در مورد کاشیکاری حمام مریم خانم بگویی.

- البته. این موضوع تا اندازه‌ای مسحورکننده است. توجه داشته باش، باز هم تا این اواخر، تنها یک هفت مربعی با مرتبه‌ای بیشتر از ۲ شناخته شده بود. بقیه، با یک استثنا، یا مستطیل 1×7 بودند، یا با استفاده از ساختارهایی که قبلاً برای مرتبه ۲ داده‌ام، معلوم شده بودند و یا مشخص شده بود که مرتبه ندارند. تنها هفت مربعی مرتبه بالا توسط جیمز استیوارت "James Stuart"، از Endwell, New York کشف

حمید آقا گفت: «این عددها، اعداد بسیار جالبی هستند». احمد خان با موافقت گفت: «قطعاً چنین‌اند و در صورتی که تنها موارد ممکن باشند، ۹۲ عددی بسیار نامتعارف است؛ بزرگترین مرتبه چند مربعی ممکن.»

- هوم. آیا ۹۲ ویژگی‌های نامتعارف دیگری دارد؟

احمد خان نسخه‌ای از کتاب David Well به نام *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* را از قفسه کتابخانه‌اش بیرون کشید و گفت: «در این جا که مطلبی درباره آن وجود ندارد.» حمید آقا گفت: «شاید این عدد جالب و شگفت‌انگیز نیست.»

احمد خان جواب داد: «درباره این موضوع، لطیفه‌ای از ریاضیدانان تعریف می‌کنند. درباره این قضیه که هر عدد جالب است. اثبات قضیه چنین است: اگر عددی جالب نباشد، در این صورت باید یک کوچکترین عدد ناجالب موجود باشد، و البته این عدد، در واقع، عددی بسیار جالب خواهد بود! بنابراین، تناقضی منطقی ایجاد می‌شود که مستلزم آن است که فرض وجود عدد ناجالب، باید نادرست باشد.»

حمید آقا گفت: «اوه، بله؛ اما این عدد غیرمتعارف هم است؟»

احمد خان جواب داد: «نمی‌دانم. سؤال بسیار دقیقی است، گرچه ممکن است خارج از موضوع باشد؛ زیرا در سال ۱۹۸۹ سولومون گولوم "Solomon Golomb" ثابت کرد هر مضرب ۴ ی می‌تواند یک مرتبه باشد.»

حمید آقا گفت: «در مورد کاشیکاری حمام خانه ما چی؟»

احمد خان پاسخ داد: «کاشی‌های شما هفت مربعی‌اند؛ در حالی که من هنوز مورد شش مربعی‌ها را تمام نکرده‌ام. بسیار خوب، در این مورد دقیقاً ۳۵ شش مربعی موجود است، و مشخص شده که درست ۱۰ مورد از آنها یک مستطیل تشکیل می‌دهد. در این جا چند سرنخ به دست می‌دهم و خودت می‌توانی سعی کنی آنها را بیابی. دو موردشان از مرتبه ۱ هستند، پنج مورد از مرتبه ۲، و یکی هم از مرتبه ۴.»

احمد خان به سرعت کاغذ و مدادی برداشت و طرحی

شده بود این هفت مربعی دارای مرتبه ۲۸ است (شکل ۹ را ملاحظه کنید).

- اوه! و هفت مربعی کاشی حمام ما چی؟

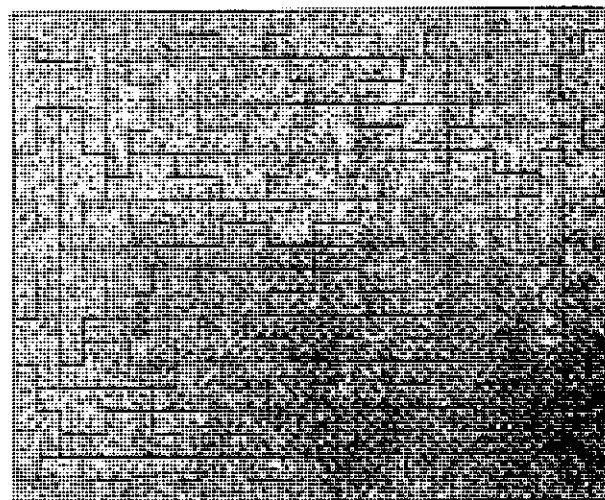
- البته که نه! نه، اتفاقاً کاشی شما تنها موردی است که وضعیتش

حمید آقا با شنیدن این حرف، کلمه زشتی به زبان آورد. احمد خان جمله‌اش را تمام کرد: «... تا این اواخر مشخص نشده بود، و در این مورد باز هم کارل دالکه به دادت رسیده است! وی در سال ۱۹۸۹ برنامه ۷- شش مربعی خود را بار دیگر اصلاح کرد و به اثبات رساند، که کاشی هفت مربعی شما دقیقاً دارای مرتبه ۷۸ است.» (شکل ۱۳). (به خواننده هشیار مطلبی نسبتاً غریب را درباره مقاله دالکه خاطرنشان می‌کنیم: عنوان مقاله بر این است که ترتیب مورد بحث ۷۶ است؛ اما تصویری که به عنوان اثبات به دست داده، از ۷۸ هفت مربعی استفاده کرده است).

حمید آقا از دوستش تشکر فراوان کرد و با عجله به خانه رفت تا ماجرا را برای مریم خانم شرح دهد، و در راه می‌اندیشید که به شدت تحت تأثیر قرار خواهد گرفت! هنگامی که وارد خانه شد، زنش را مشغول پختن غذا دید.

- مریم بانو، من مسأله کاشی‌ها را شکست دادم!

مریم بانو پاسخ داد: «با این شرط که خود کاشی‌ها را شکست ندهی.»



شکل (۱۳): پاسخ مسأله حمید آقا برای کاشیکاری حمامش، با مستطیلی تشکیل شده از ۷۸ هفت مربعی.

- شوخی نمی‌کنم! در این مورد تمام کاری که باید انجام بدهی، برداشتن ۷۸ کاشی و تشکیل یک مستطیل از آنهاست! - حمید، بعضی وقت‌ها تو خیلی باهوش می‌شی. خبر خوبی آوردی! همین حالا شروع به کار می‌کنیم. تو ۷۸ کاشی بشمار و من دیوارها را تمیز می‌کنم.

این را گفت و با حالتی شکوهمندانه از آشپزخانه خارج شد و به طرف حمام رفت. حمید آقا هم به دنبالش راه افتاد. مریم خانم با دقت به تراشیدن دیوارها پرداخت و حمید آقا جعبه کاشی‌ها را بلند کرد، و پیش خودش فکر کرد: «شاید برچسب جعبه تعداد کاشی‌ها را مشخص کند، در این صورت معلوم می‌شود چند کاشی را باید بیرون بیاورم.» و جعبه را گرداند. نوشته بود:

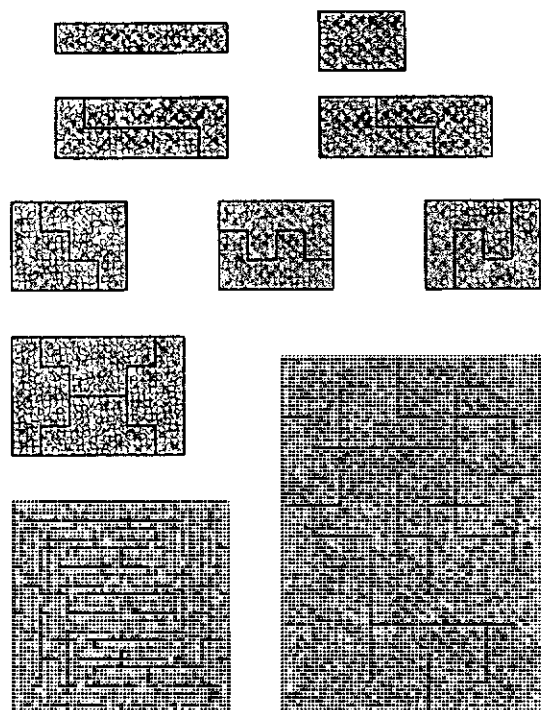


حمید آقا کلمه زشت دیگری به زبان آورد؛ اما به قدری آهسته که مریم خانم نشنود. با حالتی عصبی به طرف همسرش برگشت و گفت: «بانو جان، فکر می‌کنم باز هم با مشکل کوچکی مواجه شده‌ایم»

پاسخها

۱. شاید ساده‌ترین مثال از یک چند مربعی که نمی‌تواند یک مستطیل را بپوشاند، هفت مربعی تشکیل شده از یک مربع 3×3 با یک سوراخ باشد. پر کردن همان چیزی است که باعث مشکل می‌شود.

۲. یک مربعی و دو مربعی مستطیل‌اند و در نتیجه مرتبه ۱ دارند. به همین ترتیب اند ۱- سه مربعی، ۱- چهار مربعی، ۰- چهار مربعی و ۱- پنج مربعی. ۱- سه مربعی، ۱- چهار مربعی، ۱- پنج مربعی و ۲- پنج مربعی دارای مرتبه ۲ اند. T- چهار مربعی مرتبه ۴ دارد و Y- پنج مربعی مرتبه ۱۰. (این حالت، تنها حالتی است که باید مدتی به آن ور بروید؛ در مورد آن، از یک مستطیل 5×10 استفاده کنید.)



شکل (۱۴): شش مربعی‌های از مرتبه منتهای

Knopf, 1977; Harmondsworth, England: Penguin Books, 1985.

Golomb, Solomon W. *Polyominoes*. New York: Scribner, 1965.

-. Tiling with polyominoes. *Journal of Combinatorial Theory* 1 (1966): 280-96.

-. Polyominoes which tile rectangles. *Journal of Combinatorial Theory Series A* 51 (1989): 117-24.

Grünbaum, Branko, and G.C. Shephard. *Tilings and patterns*. New York: W. H. Freeman, 1987.

Klarner, David A. Packing a rectangle with congruent n -ominoes. *Journal of Combinatorial Theory* 7 (1969): 107-15.

Stewart, Ian, and Albert Wormstein. Polyominoes of order 3 do not exist. *Journal of Combinatorial Theory Series A*. Forthcoming.

Wells, David. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Harmondsworth, England: Penguin Books, 1986; New York: Viking Penguin, 1986.

بقیه حالتها - S چهار مربعی و T، F، N، X، U، V، W و Z پنج مربعی - تشکیل مستطیل نمی‌دهند. اثبات در هر حالت، به سادگی با بررسی وضعیت رخ‌دهنده در گوشه مستطیل متعارفی که تشکیل می‌دهند، به دست می‌آید: قرار دادن تکه‌های دیگر اجباری است و از هر مورد قرار گیرند، در گوشه مجاور جلوگیری می‌کند.

جدول زیر نتایج فوق را خلاصه کرده است.

۳. اثبات احمد خان به زودی منتشر می‌شود؛ فهرست خواندنی‌های بیشتر واقع در پایان این فصل را ملاحظه کنید.
۴. ده شش مربعی با مرتبه منتهای را در شکل (۱۴) نشان داده‌ایم. مورد آخری راه‌حل دالکه برای Y-شش مربعی است.

جدول مرتبه‌های n - چند مربعی‌ها به ازای $n \leq 5$

مرتبه	اندازه مربعی
۱	یک مربعی
۱	دو مربعی
۱	سه مربعی I
۲	L
۱	چهار مربعی I, O
۲	L
۴	T
*	S
۱	پنج مربعی I
۲	L, P
۱۰	Y
*	F, N, T, U, V, W, X, Z

* مشخص این است که مرتبه مربوطه تعریف نشده است.

خواندنی‌های بیشتر

Dahlke, Karl A. The Y-hexomino has order 92. *Journal of Combinatorial Theory Series A* 51 (1989): 125-26.

-. A heptomino of order 76. *Journal of Combinatorial Theory Series A* 51 (1989): 127-28.

Gardner, Martin. *Mathematical Magic Show*. New York: Alfred A.