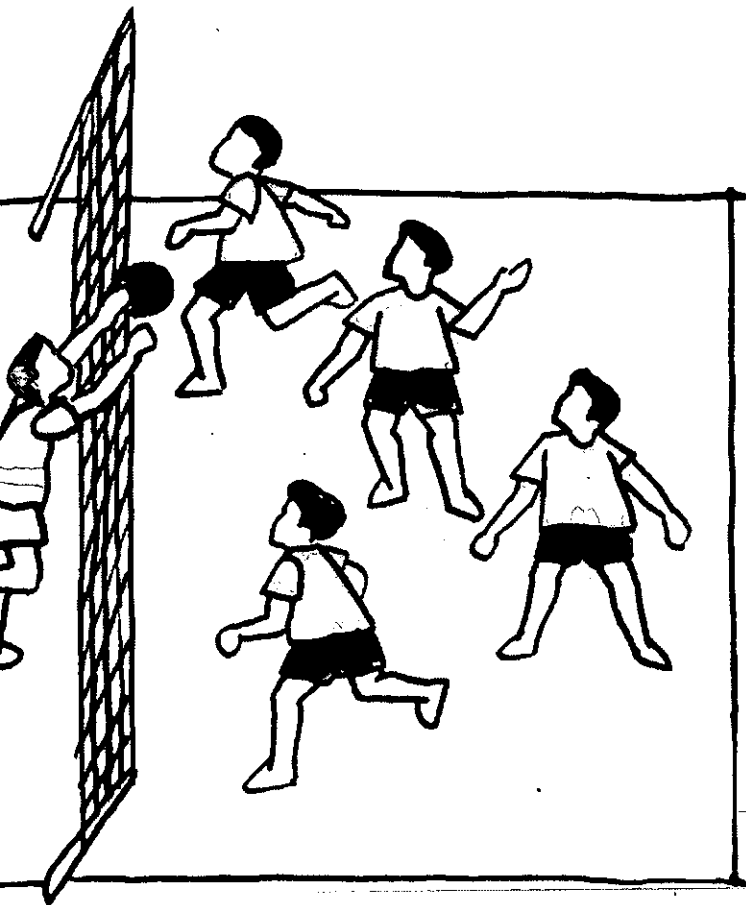
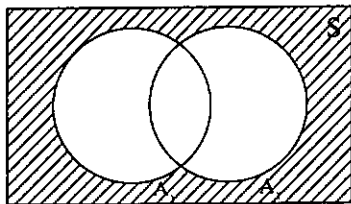


کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول



اگر A_1 و A_2 اشتراکی بایکدیگر نداشته باشند، $|A_1 \cap A_2| = 0$ بنابراین از رابطه (۱) داریم: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. علت نامگذاری «شمول و عدم شمول» روی این اصل، آن است که در محاسبه $|A_1| + |A_2|$ ، اعضای مشترک بین دو مجموعه A_1 و A_2 دوبار شمرده می‌شوند و این به معنای «شمول» دوباره این اعضاست. از این رو برای به دست آوردن تعداد کل اعضای اجتماع دو مجموعه، باید یکی از این دو بار را کنار گذاشت و این به معنای «عدم شمول» یک بار اعضای مشترک این دو مجموعه است و به این ترتیب، رابطه (۱) حاصل می‌شود. حال اگر هدف، یافتن اعضای S باشد که در هیچ کدام از دو مجموعه A_1 و A_2 نیستند، به صورت زیر عمل می‌کنیم (شکل ۲).



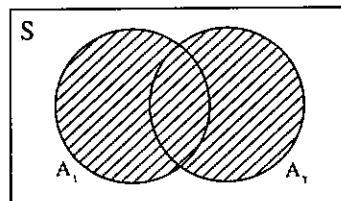
شکل ۲

$$|\overline{A_1 \cap A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = N - |A_1 \cup A_2| \quad (2)$$

اصل شمول و عدم شمول، یکی از روش‌های حل مسائل شمارشی در ریاضیات ترکیباتی است که ابتدا به معرفی این روش می‌پردازیم و سپس آن را روی چند مثال پیاده می‌کنیم. فرض کنید $|A|$ به معنای تعداد اعضای مجموعه متناهی A باشد.

گزاره ۱: اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه متناهی

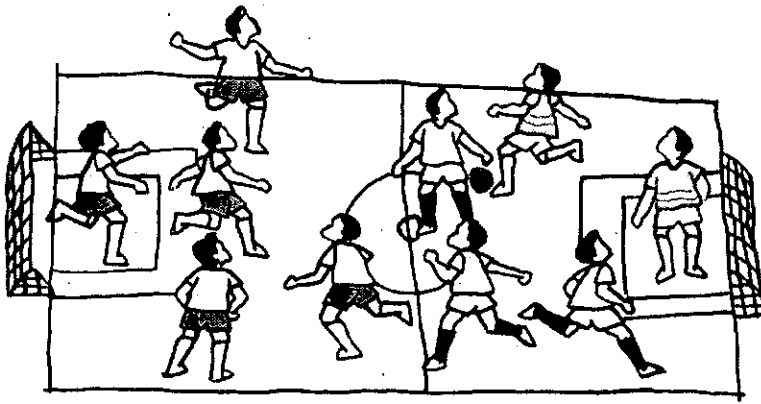
فرض کنیم S مجموعه N عضوی و A_1 و A_2 دو زیرمجموعه از S باشند. در این صورت تعداد اعضای اجتماع این دو مجموعه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (شکل ۱):



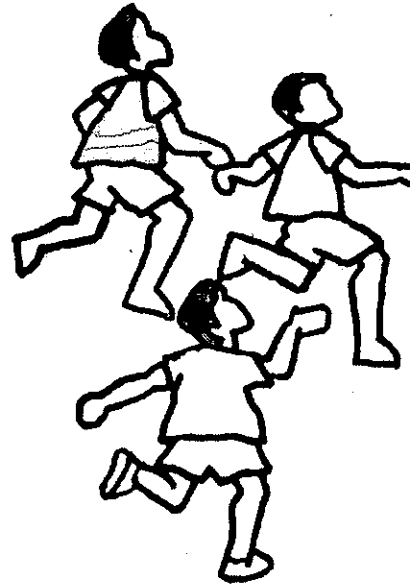
شکل ۱

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \quad (1)$$

یعنی: تعداد اعضای S که حداقل به یکی از دو مجموعه A_1 یا A_2 تعلق دارند، برابر است با تعداد اعضای دو مجموعه A_1 و A_2 منهای تعداد اعضای مشترک این دو مجموعه (شکل ۱).



برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی



مثال ۱: در یک کلاس ۴۰ نفری، ۳۲ نفر در درس فیزیک و ۲۴ نفر در درس ریاضی افتاده‌اند و تنها ۴ نفر این دو درس را گذرانده‌اند؛ تعیین کنید چند نفر در هر دو درس افتاده‌اند؟

حل: اگر S مجموعه دانش آموزان این کلاس باشد، آن گاه $|S| = 40$ است. فرض کنیم A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه دانش آموزانی باشند که در درس فیزیک و درس ریاضی افتاده‌اند، در این صورت:

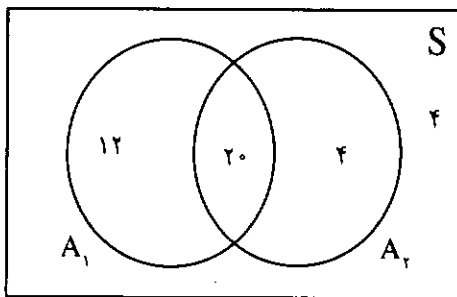
$|A_1| = 32$ ، $|A_2| = 24$ و چون ۴ نفر در این کلاس، این دو درس را گذرانده‌اند، پس تعداد دانش آموزانی که حداقل در یکی از این دو درس افتاده‌اند، برابر است با:

$|A_1 \cup A_2| = 40 - 4 = 36$

حالا بنابر رابطه (۱) داریم:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2| \\ \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 32 + 24 - 36 = 20$$

بنابراین ۲۰ نفر در هر دو درس فوق افتاده‌اند. همان‌طوری که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت:



شکل ۳

$|A_1| - |A_1 \cap A_2| = 12$ = تعداد دانش آموزانی که فقط در درس ریاضی افتاده‌اند

گزاره ۲: «اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه متناهی»

فرض کنیم S مجموعه‌ای N عضوی و A_1 و A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از S باشند، در این صورت تعداد اعضای اجتماع این سه مجموعه، از رابطه صفحه بعد به دست می‌آید:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = \frac{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|}{N - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|} = \quad (6)$$

به منظور حل مثال‌هایی از رابطه‌های (۳) و (۶)، ابتدا گزاره‌ای از بحث ترکیبات را یادآوری می‌کنیم:

گزاره ۳: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{n} \quad \text{دو مثال زیر را برای آشنایی با گزاره ۳ حل می‌کنیم:}$$

مثال ۲: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ را به دست آورید.

حل: هدف، یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ با شرط $x_i > 0$ ، $i=1,2,3$ است که معادل است با شرط $x_i \geq 1$ ، $i=1,2,3$. فرض می‌کنیم $y_i = x_i - 1$ ، با جایگذاری آن در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = 20 \\ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 17, \quad y_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

لذا مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 17$ می‌شود که بنا به گزاره (۳) برابر است با:

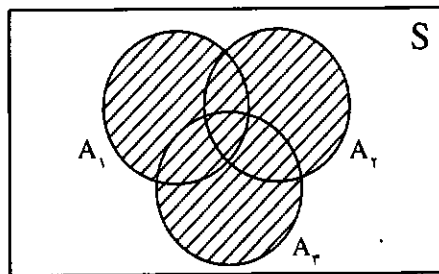
$$\binom{17+3-1}{17} = \binom{19}{17} = \binom{19}{2} = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

مثال ۳: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $y_1 + y_2 + y_3 = 20$ را با شرط $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ به دست آورید.

حل: دو شرط فوق معادلند با $x_1 \geq 3$ و $x_3 \geq 4$. فرض می‌کنیم $y_1 = x_1 - 3$ و $y_3 = x_3 - 4$ ، با جایگذاری آن‌ها در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 3 + x_2 + y_3 + 4 = 20 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 = 13$$

که در آن $x_2 \geq 0$ ، $y_1 \geq 0$ و $y_3 \geq 0$. بنابراین گزاره ۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله اخیر برابر است با:



شکل ۲

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - [|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|] + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3)$$

برهان: با استفاده از گزاره ۱ و قوانین مجموعه‌ها، رابطه ۳ را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $B_1 = A_2 \cup A_3$ در این صورت:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup B_1| = |A_1| + |B_1| - |A_1 \cap B_1| \quad (4)$$

از طرفی:

$$|B_1| = |A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cap B_1| &= |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| = \\ &= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

با جایگذاری این نتایج در رابطه (۴)، رابطه (۳) به دست می‌آید.

نتیجه: اگر سه مجموعه A_1 ، A_2 و A_3 با هم اشتراکی نداشته باشند، آن گاه:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| \quad (5)$$

همچنین تعداد اعضای از مجموعه S که به هیچ کدام از سه مجموعه A_1 ، A_2 و A_3 تعلق ندارند، برابرند با:

$$\binom{13+3-1}{13} = \binom{15}{13} = \binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

نتیجه: به منظور یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_i \geq a_i$ و $i = 1, \dots, k$ از تغییر متغیر $y_i = x_i - a_i$ استفاده می‌کنیم تا معادله فوق به معادله زیر تبدیل شود:

$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ که در آن $y_i \geq 0$ است. حال اگر $l = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ و $n \geq l$ ، مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - l$ می‌شود که بنابر گزاره ۳ برابر است با:

$$\binom{n-l+k-1}{n-l}$$

مثال ۴: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ را با شرط‌های $x_i \leq 10$ و $i = 1, 2, 3$ به دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم S مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله باشد، بنابر گزاره ۳ داریم:

$$|S| = \binom{20+3-1}{20}$$

$$\Rightarrow |S| = N = 231$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله، با شروط داده شده، به طور مستقیم مقدور نیست، شروط مذکور را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که بتوان تعداد جواب‌های صحیح را به طور مستقیم و به شیوه‌ای که در نتیجه فوق مطرح شده است، به دست آورد. به این منظور، نقیض سه شرط فوق را می‌آوریم و سه مجموعه A_1 ، A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Rightarrow x_1 > 10 \xrightarrow{\text{نقیض}} x_1 \leq 10 \text{ شرط } 1$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_1 > 10\}$$

$$\Rightarrow x_2 > 10 \xrightarrow{\text{نقیض}} x_2 \leq 10 \text{ شرط } 2$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_2 > 10\}$$

$$\Rightarrow x_3 > 10 \xrightarrow{\text{نقیض}} x_3 \leq 10 \text{ شرط } 3$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 > 10\}$$

بنابراین مجموعه A_1 ، A_2 ، A_3 عبارت است از مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ با شرط $x_i > 10$ و $i = 1, 2, 3$. حال هدف، یافتن تعدادی از اعضای S است که در هیچ کدام از مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 قرار ندارند؛ یعنی محاسبه $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

به منظور استفاده از رابطه (۳) ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم که معادل است با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ با شرط $x_1 \geq 11$. با فرض $y_1 = x_1 - 11$ این مسأله معادل است با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + x_2 + x_3 = 9$ که

برابر است با $\binom{9+3-1}{9} = 55$ لذا $|A_1| = 55$ و به طور مشابه: $|A_2| = |A_3| = 55$.

از طرفی چون سه مجموعه A_1 ، A_2 و A_3 دو به دو با هم اشتراک ندارند، بنابر رابطه (۵).

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 55 + 55 + 55 = 165$$

و بنابر رابطه (۶) داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 231 - 165 = 66$$

یعنی این معادله دارای ۶۶ جواب با شرط $x_i \leq 10$ و $i = 1, 2, 3$ است.

مثال ۵: تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ را با شرط $2 \leq x_1 \leq 4$ و $3 \leq x_2 \leq 6$ و $4 \leq x_3 \leq 12$ بیابید.

حل: شروط داده شده در این مثال را به شروطی تبدیل می‌کنیم که منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ای می‌شود که بتوان به طور مستقیم تعداد جواب‌های آن را یافت.

$$2 \leq x_1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 2 \leq 2$$

$$0 \leq y_1 \leq 2 \text{ و } y_1 = x_1 - 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_2 - 3 \leq 3 \Rightarrow 3 \leq x_2 \leq 6 \text{ شرط دوم}$$

$$y_2 = x_2 - 3 \text{ و } 0 \leq y_2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_3 - 4 \leq 8 \Rightarrow 4 \leq x_3 \leq 12 \text{ شرط سوم}$$

$$y_3 = x_3 - 4 \text{ و } 0 \leq y_3 \leq 8$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\Rightarrow y_1 + 2 + y_2 + 3 + y_3 + 4 = 20$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 11$$

لذا مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ با شرط‌های $y_1 \leq 2$ و $y_2 \leq 3$ و $y_3 \leq 8$ می‌شود. مشابه آنچه که در مثال قبل گفته شد، سه مجموعه A_1 ، A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Rightarrow y_1 > 2 \Rightarrow y_1 \geq 3 \text{ نفی شرط ۱}$$

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S | y_1 \geq 3\}$$

$$\Rightarrow y_2 > 3 \Rightarrow y_2 \geq 4 \text{ نفی شرط ۲}$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S | y_2 \geq 4\}$$

$$\Rightarrow y_3 > 8 \Rightarrow y_3 \geq 9 \text{ نفی شرط ۳}$$

$$A_3 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S | y_3 \geq 9\}$$

که در آن S عبارت است از مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ که بنا بر گزاره ۳

$$N = |S| = \binom{13}{11} = 78 \text{ و هدف به دست آوردن}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \text{ است. به این منظور، ابتدا } |A_1| \text{ را}$$

می‌یابیم؛ یعنی یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ با شرط $y_1 \geq 3$ که با فرض $z_1 = y_1 - 3$ منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $z_1 + y_2 + y_3 = 8$ می‌شود و برابر

$$\text{است با } \binom{10}{8} = 45 \text{، لذا } |A_1| = 45 \text{ و به طور}$$

$$\text{مشابه } |A_2| = \binom{7+3-1}{7} = 36 \text{ و } |A_3| = \binom{4}{2} = 6$$

همچنین $|A_1 \cap A_2|$ یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ با شرط‌های $y_1 \geq 3$ و $y_2 \geq 4$ که با فرض $z_1 = y_1 - 3$ ، $z_2 = y_2 - 4$ ، $z_3 = y_3$ منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $z_1 + z_2 + y_3 = 4$

می‌شود که برابر است با $\binom{6}{4} = 15$. لذا

$$|A_1 \cap A_2| = 15 \text{ در ضمن چون } A_1 \text{ و } A_2 \text{ و همچنین } A_3 \text{ با هم اشتراکی ندارند،}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 0 \text{ و } |A_2 \cap A_3| = 0 \text{ و}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

بنابراین رابطه (۳):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 45 + 36 + 6 - 15 = 72$$

در نتیجه بنابر رابطه ۶ خواهیم داشت:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 78 - 72 = 6$$

این ۶ جواب عبارتند از: $(4, 6, 10)$ و $(4, 5, 11)$ و $(4, 4, 12)$ و $(3, 6, 11)$ و $(3, 5, 12)$ و $(2, 6, 12)$

مثال ۶: مطلوب است تعیین تعداد اعداد صحیح و مثبت n به طوری که $n \leq 600$ و n بر ۳ یا ۵ یا ۷ بخش پذیر نباشد.

حل: فرض کنیم $S = \{1, 2, 3, \dots, 600\}$ و A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب مجموعه اعضای S باشند که بر ۳، ۵ و ۷ بخش پذیرند. هدف، محاسبه $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|$ است. می‌دانیم اگر x عدد صحیح و مثبتی باشد، تعداد اعداد صحیح و مثبت نایبتر از n که بر x بخش پذیرند، برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ که در آن $[0]$ به معنای جزء صحیح عدد حاصل است. بنابراین:

$$A_1 = \{n \in S \mid 3 \mid n\} \Rightarrow |A_1| = \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 200$$

$$A_2 = \{n \in S \mid 5 \mid n\} \Rightarrow |A_2| = \left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor = 120$$

$$A_3 = \{n \in S \mid 7 \mid n\} \Rightarrow |A_3| = \left\lfloor \frac{600}{7} \right\rfloor = 85$$

از طرفی $|A_1 \cap A_2|$ به معنای تعداد اعضای S است

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{گ} & \text{ر} & \text{ا} & \text{ف} \\ \hline \end{array}}_{1 \text{ شیء واحد}} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{پ} & \text{ت} & \dots \\ \hline \end{array}}_{28 \text{ حرف دیگر}}$$

$|A_1| = 29!$ تعداد جایگشت های ۲۹ شیء متمایز

و به طور مشابه: $|A_2| = |A_3| = 30!$

حال به محاسبه $|A_i \cap A_j|$ ، $1 \leq i \neq j \leq 3$ ،

می پردازیم. به عنوان مثال، برای محاسبه $|A_1 \cap A_2|$ تعداد جایگشت ها عبارتند از:

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{گ} & \text{ر} & \text{ا} & \text{ف} \\ \hline \end{array}}_{1 \text{ شیء واحد}} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ج} & \text{ه} & \text{ت} & \dots \\ \hline \end{array}}_{1 \text{ شیء واحد}} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ب} & \text{پ} & \text{ت} & \dots \\ \hline \end{array}}_{25 \text{ حرف دیگر}}$$

$|A_1 \cap A_2| = 27!$ تعداد جایگشت های ۲۷ شیء متمایز

و به طور مشابه: $|A_2 \cap A_3| = 28!$ و $|A_1 \cap A_3| = 0$ ؛

زیرا این حروف «گراف» و «دور»، حرف مشترک وجود دارد و این حالت در جایگشت های حروف روی نمی دهد. به همین علت: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ است. لذا بنابر رابطه های (۳) و (۶) داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= 29! + 30! + 30! - 28! - 27! = \\ 49503 \times 27! &\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 32! - 27! \times \\ 49503 &= 27! \times 24115617 \end{aligned}$$

این تعداد حالاتی است که هیچ کدام از این سه الگو در جایگشت های حروف فارسی روی نمی دهند.

اصل شمول و عدم شمول را می توان برای $K \geq 2$ مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_K$ بیان نمود.

گزاره ۴: صورت کلی اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_K$ زیر مجموعه هایی متناهی از مجموعه N عضوی مفروض S باشند؛ در این صورت تعداد اعضای اجتماع این K مجموعه به صورت زیر به دست می آید:

که هم بر ۳ و هم بر ۵، یعنی بر ۱۵ بخش پذیرند؛

بنابراین: $|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{600}{15} \right] = 40$ و به طور مشابه:

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{600}{21} \right] = 28, |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{600}{35} \right] = 17$$

و در نهایت: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{600}{105} \right] = 5$ ، لذا

بنابر رابطه (۳) داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= 200 + 120 + 85 - \\ [40 + 17 + 28] + 5 &= 325 \end{aligned}$$

و در نتیجه بنابر رابطه (۶):

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 600 - 325 = 275$$

یعنی ۲۷۵ عدد از اعضای S وجود دارند که بر ۳ یا ۵ و یا ۷ بخش پذیر نیستند.

مثال ۷: مطلوب است تعیین تعداد جایگشت های حروف الفبای فارسی؛ به طوری که در هیچ کدام از آن ها الگوهای «گراف» یا «دور» و یا «جهت» روی ندهد (تکرار حروف مجاز نیست)؟

حل: فرض کنیم S مجموعه تمام جایگشت های ۳۲ حرف الفبای فارسی باشد؛ در این صورت:

$$|S| = 32!$$

همانند مثال های قبل، چون محاسبه تعداد جایگشت های S با شرط مذکور به طور مستقیم مقدور نیست، ابتدا تعداد حالاتی را که حداقل یکی از این سه الگو در جایگشت های حروف به وجود می آیند، با استفاده از قوانین ترکیبات می یابیم. به این منظور، مجموعه های A_1 و A_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

مجموعه جایگشت هایی از S که شامل الگوی «گراف» باشند. $A_1 =$

مجموعه جایگشت هایی از S که شامل الگوی «دور» باشند. $A_2 =$

مجموعه جایگشت هایی از S که شامل الگوی «جهت» باشند. $A_3 =$

ابتدا به محاسبه $|A_i|$ ، $i = 1, 2, 3$ می پردازیم. به عنوان

مثال، برای محاسبه $|A_1|$ ، تعداد جایگشت ها عبارتند از:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K| = \sum_{i=1}^K |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq K} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < l \leq K} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \dots + (-1)^{K-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K| \quad (v)$$

برهان: به منظور اثبات رابطه (v)، ثابت می‌کنیم هر عضو دلخواه $x \in S$ به تعداد مساوی در دو طرف این رابطه شمرده می‌شود. اگر x به هیچکدام از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق نداشته باشد آن‌گاه x در دو طرف رابطه (v) صفر بار شمرده می‌شود. حال فرض کنیم x به t مجموعه از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق داشته باشد ($1 \leq t \leq K$). در این حالت x یک بار در طرف چپ رابطه (v) شمرده می‌شود. در طرف راست این رابطه x به صورت زیر شمرده می‌شود:

$$\binom{t}{1} \text{ بار در جمله } \sum_{i=1}^K |A_i|, \quad (x) \text{ یک بار در هر یک از } t \text{ مجموعه شمرده می‌شود.}$$

$$\binom{t}{2} \text{ بار در جمله } \sum_{1 \leq i < j \leq K} |A_i \cap A_j|, \quad (x) \text{ یک بار در هر دو مجموعه‌ای که از بین این } t \text{ مجموعه انتخاب می‌کنیم شمرده می‌شود.}$$

$$\binom{t}{3} \text{ بار در جمله } \sum_{1 \leq i < j < l \leq K} |A_i \cap A_j \cap A_l|, \quad (x)$$

یک بار در هر سه مجموعه‌ای که از بین این t مجموعه انتخاب می‌کنیم شمرده می‌شود.

با ادامه این استدلال معلوم می‌شود که سهم x در طرف راست رابطه (v) برابر است با:

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \dots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t} = 1$$

یعنی x یک بار نیز در طرف راست رابطه شمرده می‌شود.

$$\binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = 0 \text{ می‌دانیم}$$

است. به این ترتیب در هر حالت سهم x در دو طرف رابطه (v) برابر است.

رابطه (v) تعداد آن دسته از اعضای S را که حداقل به یکی از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق دارند مشخص می‌کند. به این ترتیب، تعداد اعضای از مجموعه N عضوی S که به هیچ کدام از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق ندارند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K}| = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_K}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K| \quad (A)$$

در حالت کلی، اعضای مجموعه‌های A_1 تا A_K ویژگی‌هایی دارند که بر اساس آن‌ها رابطه (v) تعداد اعضای از S را که حداقل در یکی از این ویژگی‌ها صدق می‌کنند، را مشخص می‌کند و رابطه (A) تعداد اعضای از S را که در هیچ کدام از این K ویژگی صدق نمی‌کنند، به دست می‌آورد.

اگر $k=3$ باشد، رابطه (۳) که صورت اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه A_1 ، A_2 و A_3 است، حاصل می‌شود. اگر $K=4$ باشد، رابطه (v) به صورت زیر بیان می‌شود که صورت اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 است.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \\ &(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + \\ &|A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \\ &|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - \\ &|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned} \quad (9)$$

ملاحظه می‌شود که در رابطه (9) تعداد جملات سمت راست برابرند با: $15 = 4 + 6 + 4 + 1$ و در حالت کلی، تعداد جملات سمت راست رابطه (v) برابرند با:

دو به دوی مجموعه های A_i ، $1 \leq i \leq 4$ ، برابر هستند لذا داریم:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} |A_i \cap A_j| = \binom{4}{2} \binom{7}{4}$$

از طرفی $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ است، زیرا تعداد

جواب های صحیح و نامنفی معادله فوق با شرایط $x_1 \geq 8$

و $x_2 \geq 8$ برابر است با تعداد جواب های

صحیح و نامنفی معادله $x_1' + x_2' + x_3' + x_4 = -4$

که برابر صفر است. $x_i' = x_i - 8$ ، $i = 1, 2, 3$

به همین ترتیب:

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

در نتیجه بنابر رابطه (9)، خواهیم داشت:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{4}{1} \binom{15}{12} - \binom{4}{2} \binom{7}{4} + 0 - 0 = 1610$$

لذا:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 1771 - 1610 = 161$$

در قسمت دوم مقاله به ادامه کاربردهایی از اصل شمول

و عدم شمول، از جمله به دست آوردن تعداد توابع پوشا از

یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی،

$m \geq n$ ، می پردازیم.



منابع

۱. ریاضیات گسسته و ترکیباتی رالف گریمالدی

۲. ریاضیات گسسته مقدماتی. و. ک. بالاکریشنا

$$\binom{K}{1} + \binom{K}{2} + \binom{K}{3} + \dots + \binom{K}{K} = 2^K - 1, K \geq 1$$

مثال ۸: به چند طریق می توان 2^0 سیب را بین ۴ کودک

طوری توزیع نمود که به هر کودک حداکثر ۷ سیب برسد؟

جل: مسأله منجر به یافتن تعداد جواب های صحیح و

نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2^0$ با شرط های

$x_i \leq 7$ و $1 \leq i \leq 4$ می شود.

فرض می کنیم S مجموعه جواب های صحیح و نامنفی

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2^0$ باشد.

$$\text{لذا، } |S| = \binom{2^0 + 4 - 1}{2^0} \binom{2^3}{2^0} = 1771$$

مجموعه های A_i ، $1 \leq x_i \leq 4$ ، را به صورت

اعضایی از S که در شرط $x_i > 7$ (یا $x_i \geq 8$) صدق

می کنند، تعریف می کنیم. لذا هدف یافتن

$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$ است.

به این منظور، ابتدا جملات سمت راست رابطه (9) را به

دست می آوریم. برای یافتن $|A_1|$ ، تعداد جواب های

صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2^0$ را

با شرط $x_1 \geq 8$ می یابیم. در این حالت کافی است تعداد

جواب های صحیح و نامنفی معادله

$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ را که در آن $x_1' = x_1 - 8 \geq 0$

است، به دست آوریم. به این صورت:

$$\binom{12 + 4 - 1}{12} = \binom{15}{12}$$

چون $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4|$ ، لذا

$$\sum_{i=1}^4 |A_i| = \binom{4}{1} \binom{15}{12}$$

این منظور باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2^0$ را با شرط $x_1 \geq 8$ و

$x_2 \geq 8$ به دست آوریم. برای این کار کافی است تعداد

جواب های صحیح و نامنفی معادله

$x_1' + x_2' + x_3 + x_4 = 4$ را که در آن $x_1' = x_1 - 8 \geq 0$

و $x_2' = x_2 - 8 \geq 0$ است، بیابیم که برابر می شود با

$$\binom{4 + 4 - 1}{4} = \binom{7}{4}$$