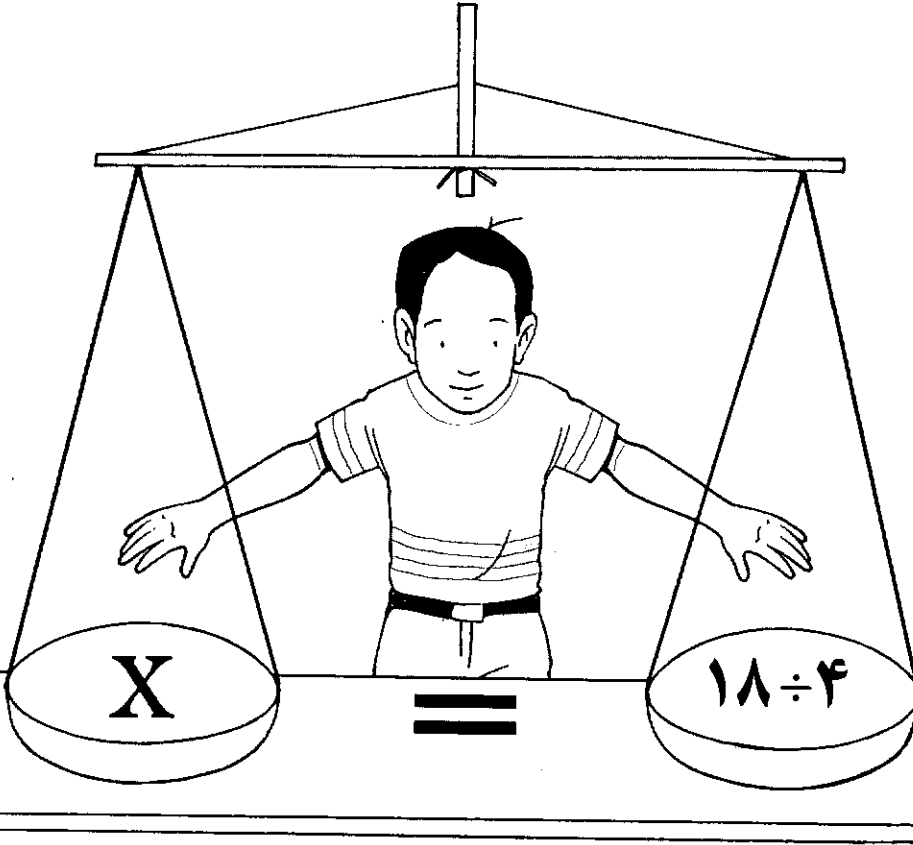


$$a = dq + r$$



کاربردهای قضیه‌ی تقسیم

افراز Z توسط قضیه‌ی تقسیم

در قضیه‌ی تقسیم مشاهده شد که اگر a عددی صحیح و دل‌خواه باشد و $a = bq + r$ با تقسیم a بر b رابطه‌ی $0 \leq r < b$ را برای $b \in \mathbb{N}$ یعنی حالتی که $r = 0$ تا $r = b - 1$ باشد، می‌توان نوشت. برای مثال اگر $b = 4$ ، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر 4 ، طبق قضیه‌ی تقسیم عبارت است از $r = 0$ یا $r = 1$ یا $r = 2$ یا $r = 3$. به بیان دیگر، هر عدد صحیح مانند a را به یکی از چهار صورت زیر می‌توان نوشت:

یا $a = 4q$ یا $a = 4q + 1$ یا $a = 4q + 2$ یا $a = 4q + 3$
در واقع می‌توان یک افراز 4 عضوی برای Z و به صورت زیر تعریف کرد:

$$A_1 = \{x \in Z \mid x = 4k\}$$

$$A_2 = \{x \in Z \mid x = 4k + 1\}$$

$$A_3 = \{x \in Z \mid x = 4k + 2\}$$

$$A_4 = \{x \in Z \mid x = 4k + 3\}$$

در حالت کلی می‌توان یک افراز k عضوی برای Z تعریف کرد؛ یعنی Z را به k زیر مجموعه، افراز یا تقسیم کنیم (منظور از افراز یک مجموعه به n زیر

مجموعه‌ی خودش، تقسیم آن مجموعه به n زیر مجموعه است که اول، هیچ‌کدام از زیر مجموعه‌ها تهی نباشند. دوم، دو به دو اشتراکی نداشته باشند و سوم، اجتماع زیر مجموعه‌ها، مجموعه‌ی اصلی را تشکیل دهد):

$$Z = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

$$A_k = \{x \in Z; x = kq + (k-1)\}$$

که حال می‌خواهیم از این نوع افراز Z ، که توسط قضیه‌ی تقسیم صورت گرفت و با استفاده از روشی در استدلال به نام «روش اشباع» چند مسئله در نظریه‌ی اعداد طرح و حل کنیم.

مسئله ۱: ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۲ بخش پذیر است.
حل: فرض کنیم $a = n(n-1)$. ثابت می‌کنیم $2|a$. برای این منظور، طبقه قضیه‌ی تقسیم، برای n دو حالت در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت ثابت می‌کنیم a بر ۲ بخش پذیر است:

الف) $n = 2k \Rightarrow 2|n \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

ب) $n = 2k+1 \Rightarrow n-1 = 2k \Rightarrow 2|n-1 \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

مسئله ۳: ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد را به یکی از دو صورت $(4k+1)$ یا $(4k+3)$ می‌توان نوشت. سپس نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $(8t+1)$ است.

حل: فرض کنیم a عدد صحیح و دل‌خواه باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی تقسیم، a را به یکی از چهار صورت $a = 4k$ یا $a = 4k+1$ یا $a = 4k+2$ یا $a = 4k+3$ می‌توان نوشت. حال اگر a فرد باشد، $a \neq 4k$ و $a \neq 4k+2$. بنابراین، فقط به یکی از دو صورت $a = 4k+1$ یا $a = 4k+3$ نوشته می‌شود:

الف) $a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8t_1 + 1$

ب) $a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

مسئله ۲: ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = (n-1)n(n+1)$. ثابت می‌کنیم $6|a$. کافی است ثابت شود $2|a$ و $3|a$. برای این منظور، برای n سه حالت در نظر می‌گیریم و از مسئله ۱ نیز استفاده می‌کنیم:

الف) $n = 3k \Rightarrow 3|n \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) \Rightarrow 3|a$

ب) $n = 3k+1 \Rightarrow n-1 = 3k \Rightarrow 3|n-1 \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ج) $n = 3k+2 \Rightarrow n+1 = 3k+3 = 3k' \Rightarrow 3|n+1 \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ثابت شد که $3|a$. در مسئله ۱ نیز ثابت کردیم $2|n(n-1)(n+1)$ و در نتیجه $6|a$ (اگر عدد بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد، آن گاه بر ۶ هم بخش پذیر است).

مسئله ۵: اگر a عددی فرد و مضرب ۳ نباشد، ثابت کنید $(a^2 + 23)$ بر 24 بخش پذیر است.
حل: کافی است ثابت کنیم $(a^2 + 23)$ بر ۸ و بر ۳ بخش پذیر است.

فرد است $a \Rightarrow a^2 = 8t + 1$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 8t + 1 + 23 = 8t + 24$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 8(\underbrace{t+3}_{t_1}) \Rightarrow 8|a^2 + 23$

$a \neq 3k \Rightarrow \begin{cases} a = 3k+1 \\ a = 3k+2 \end{cases}$ طبق فرض

اگر $a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 6k + 24 = 3k'$

اگر $a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 12k + 27 = 3k''$

مسئله ۴: ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{Z}$ عدد $a = n^5 - n$ بر ۳۰ بخش پذیر است.

حل: چون $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ و قبلاً طبق مسئله ۲ ثابت کردیم $6|(n-1)n(n+1)$ ، پس $6|a$. کافی است ثابت کنیم $5|a$. برای این منظور، برای n پنج حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $n = 5k \Rightarrow 5|n \Rightarrow 5|n(n^4-1) \Rightarrow 5|a$

ب) $n = 5k+1 \Rightarrow n-1 = 5k \Rightarrow 5|n-1 \Rightarrow 5|a$

پ) $n = 5k+2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 20k + 4 \Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5t \Rightarrow 5|n^2 + 1 \Rightarrow 5|(n^2-1) \times n \times (n^2+1) = a$

ت) $n = 5k+3 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 30k + 9 \Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5t \Rightarrow 5|n^2 + 1 \Rightarrow 5|a$

ث) $n = 5k+4 \Rightarrow n+1 = 5k+5 = 5t \Rightarrow 5|n+1 \Rightarrow 5|a$

مسئله ی ۶: ثابت کنید، اگر $p > 3$ عددی اول باشد، فقط به یکی از دو صورت $6k \pm 1$ نوشته می شود.

حل: می دانیم عدد $p \in \mathbb{N}$ و $p \neq 1$ اول است، هرگاه هیچ شمارنده یا مقسوم علیه مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد و می دانیم عدد ۲ تنها عدد اول و زوج است. و نیز می دانیم هر عدد به صورت $6t + 5$ همان $6k - 1$ است، زیرا:

$$6t + 5 = 6t + 6 - 1 = 6(t+1) - 1 = 6k - 1$$

حال اگر p عددی اول باشد، لذا عددی صحیح است و هر عدد صحیح به یکی از ۶ صورت $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ نوشته می شود که چون p اول و بزرگ تر از ۳ است، پس p زوج نیست و $p \neq 6k+2$ ، $p \neq 6k+4$ و نیز p ، مضرب ۳ نیستند. پس $p \neq 6k+3$. بنابراین فقط می تواند به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ باشد که همان $6t-1$ است.

نتیجه ی متمم از مسئله ی ۶: اگر عددی طبیعی و بزرگ تر از ۳ را بر ۶ تقسیم کنیم و باقی مانده ی تقسیم آن عدد با ۱ یا ۵ برابر نباشد، قطعاً آن عدد اول نیست و اگر باقی مانده ۱ یا ۵ باشد، دلیل بر اول بودن آن عدد نیست. فقط می توان گفت آن عدد می تواند اول باشد. مانند عدد ۲۵ که به صورت $6 \times 4 + 1$ است، ولی اول نیست.

مسئله ی ۸: اگر p عددی اول و بزرگ تر از ۳ باشد، ثابت کنید $p^2 - 1$

بر ۲۴ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم: $a = p^2 - 1$. ثابت می کنیم: $24 | a$. برای این منظور

کافی است ثابت کنیم: $8 | a$ و $3 | a$.

$$p > 3 \Rightarrow p \text{ فرد است} \Rightarrow p^2 = 8k+1 \Rightarrow p^2 - 1 = 8k$$

$$\Rightarrow 8 | p^2 - 1 \Rightarrow 8 | a$$

$$p > 3 \Rightarrow p \neq 3k \begin{cases} p = 3k+1 \Rightarrow p-1 = 3k \\ p = 3k+2 \Rightarrow p+1 = 3k' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 | p-1 \Rightarrow 3 | (p-1)(p+1) = p^2 - 1 = a \\ 3 | p+1 \Rightarrow 3 | (p+1)(p-1) = p^2 - 1 = a \end{cases}$$

مسئله ی ۹: اگر p عددی اول و بزرگ تر از ۵ باشد، ثابت کنید

$(p^2 - 1)$ بر ۱۲۰ بخش پذیر است.

حل: اگر فرض کنیم $a = p^2 - 1$ ، ثابت می کنیم $120 | p^2 - 1$. کافی

است ثابت کنیم $(p^2 - 1)$ بر ۵ و ۲۴ بخش پذیر است.

$$24 | a \Rightarrow 24 | p^2 - 1 \Rightarrow 24 | (p^2 - 1)(p^2 + 1) \Rightarrow 24 | p^4 - 1$$

$p > 5$ اول است: بخش پذیری بر ۵

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 5k+1 \Rightarrow p-1 = 5k \Rightarrow 5 | p-1 \Rightarrow 5 | a \\ p = 5k+2 \\ p = 5k+3 \\ p = 5k+4 \end{cases} \Rightarrow p \neq 5k$$

$$\text{اگر } p = 5k+2 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 20k + 4$$

$$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k' \Rightarrow 5 | p^2 + 1 \Rightarrow 5 | a$$

$$\text{اگر } p = 5k+3 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 30k + 9$$

$$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k' \Rightarrow 5 | p^2 + 1 \Rightarrow 5 | a$$

$$\text{اگر } p = 5k+4 \Rightarrow p+1 = 5t \Rightarrow 5 | p+1 \Rightarrow 5 | a$$

مسئله ی ۷: اگر a عددی فرد و اول باشد، ثابت

کنید a را فقط به یک صورت منحصر به فرد به شکل

تفاضل مربعین دو عدد طبیعی می توان نوشت.

حل: می دانیم اگر a فرد باشد، اعداد $(\frac{a+1}{2})$ و

$$(\frac{a-1}{2})$$
 اعدادی طبیعی و $a = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$

حال برای اثبات منحصر به فردی فرض کنیم x و

y دو عدد طبیعی هستند و $a = x^2 - y^2$. در

این صورت داریم: $a = (x-y)(x+y)$ که

$0 < x-y < x+y$ و چون a اول است

$a = 1 \times a$ ، پس $x-y = 1$ و $x+y = a$ که با حل

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=1 \end{cases} \text{ دستگاه داریم:}$$

$$x = \frac{a+1}{2} \text{ و } y = \frac{a-1}{2}$$

$$\text{یعنی: } a = x^2 - y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$$

تمرین: عکس مسئله ی ۷ را ثابت کنید. یعنی

ثابت کنید: اگر یک عدد طبیعی و فرد که مخالف

یک است، فقط یک نمایش به صورت تفاضل

مربعین دو عدد صحیح و نامنفی داشته باشد،

آن گاه آن عدد اول است (روش اثبات خود را برای

ما بفرستید).