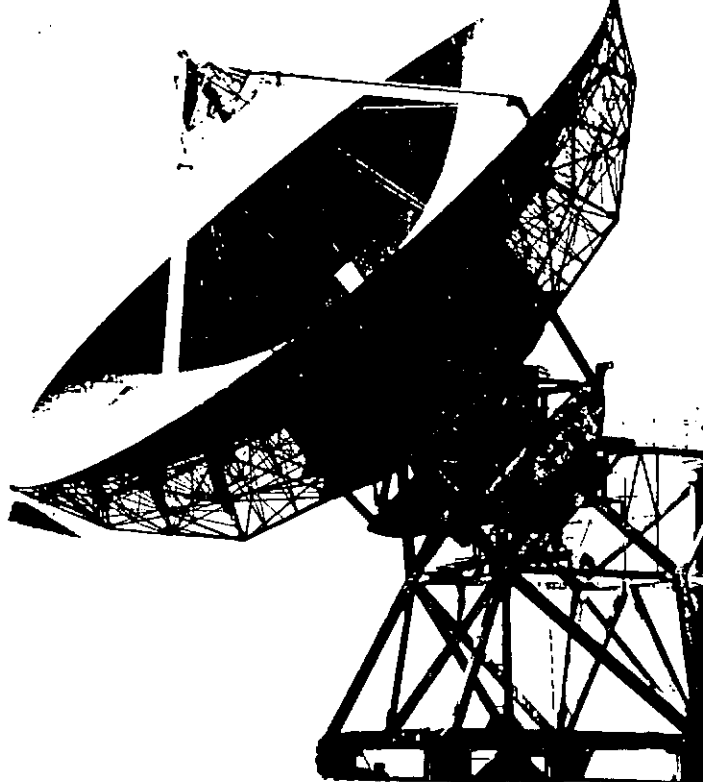


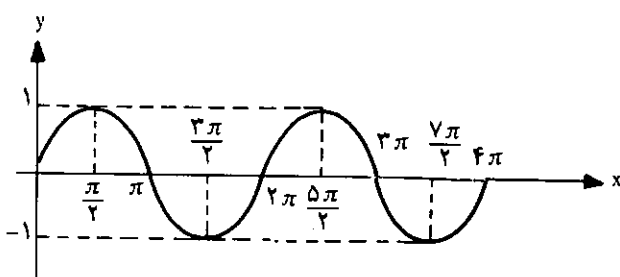
کاربردهای ریاضیات در فیزیک (موج)



سیدعلاء الدین صلاحی

توجه نمود که مقادیر $f(x)$ تکرار می‌گردند و در هر فاصله kT از متغیر دقیقاً یک مقدار خواهند داشت مثال روشن این تابع عبارت است از:

$$y = \sin x \rightarrow T = 2\pi$$



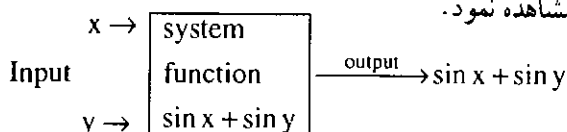
$$y = \sin x \rightarrow T = 2\pi$$

حال می‌خواهیم به تعریف یک تابع دو متغیره متناوب بپردازیم.

تابعی با ضابطه $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره نامیده می‌شود چرا که بر حسب x و y دارای تغییراتی خواهد بود یا به هر جهت متغیرهای آن x و y هستند به عنوان مثال می‌توان تابع

$$\begin{cases} Z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ Z = f(x, y) = \sin x + \sin y \end{cases}$$

را نام برد و با توجه به شکل مقابل رابطه ورودی خروجی آن را مشاهده نمود.



موج یکی از مهمترین مفاهیم بنیادی علم فیزیک است. از روشهای انتقال انرژی از مکانی به مکان دیگر نیز هست. یعنی هنگامی که هدفی را دنبال کنیم بدین مضمون که انرژی از نقطه‌ای به نقطه دیگر منتقل گردد بدون آن که ذره‌ای از ماده در بستر مکان جابجا شده باشد یعنی بدون آن که در راستای انتقال انرژی ماده‌ای منتقل یا منتشر شده باشد از این ایده و روش بهره می‌بریم.

موجها اقسام متفاوتی دارند مانند موجهای طولی - موجهای عرضی - موجهای پیچشی و ... و اینها با توجه به جهت‌های ارتعاش و انتشار تعریف می‌گردند. به عنوان مثال در موجهای عرضی راستای انتشار و ارتعاش بر یکدیگر عمود هستند یعنی اگر ذرات محیط نوسان کننده در راستای قائم حرکت کنند آنگاه انتشار موج در جهت افقی صورت می‌پذیرد. در اینجا می‌خواهیم یک مفهوم و تفسیر و تبیین ریاضی از مفهوم موج مطرح کنیم.

با تعریف تابع متناوب آشنا هستیم. هرگاه تابع f با دامنه تعریف D_f و برد R_f معین و دارای دوره تناوب T باشد باید در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall x \in D_f: x + kT \in D_f, k \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in D_f: f(x) = f(x + kT), k \in \mathbb{Z} \end{cases}, T > 0$$

پس حال تابع f با دوره تناوب T تکرار می‌گردد البته باید

داده و به فضای $\mathbb{R}^n$ توسیع دهیم ولی چون در اینجا بحث فیزیکی و طبیعی و محسوس داریم بنابراین تا بستر چهار بعدی فضا - زمان می توانیم آن را تعمیم دهیم یعنی تابعی چهار متغیره با ضابطه $\Psi = f(x, y, z, t)$ تعریف کنیم و بعد تابع متناوب چهار متغیره را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} \forall (x, y, z, t) \in D_\Psi: \\ \forall (x, y, z, t) \in D_\Psi: \\ (x + k_1 T_x, y + k_2 T_y, z + k_3 T_z, t + k_4 T_t) \in D_\Psi, k_i \in \mathbb{Z} \\ f(x, y, z, t) = f(x + k_1 T_x, y + k_2 T_y, z + k_3 T_z, t + k_4 T_t) \end{cases}$$

به شرط آن که $(T_x, T_y, T_z, T_t) > (0, 0, 0, 0)$.

حال یک تابع چهار متغیره که نسبت به هر چهار متغیر متناوب است در دست داریم. اگر این متغیرها را فضا و زمان در نظر بگیریم می توانیم فرم ساده تری از این تابع یا نگاشت دهیم.

$$\Psi(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t)$$

پس تعریف متناوب بودن آن نیز به فرم مقابل تبدیل می گردد.

$$\begin{cases} \forall (\vec{r}, t) \in D_\Psi: \\ \forall (\vec{r}, t) \in D_\Psi: \\ (\vec{r} + k\vec{r}, t + k'T) \in D_\Psi \\ f(\vec{r}, t) = f(\vec{r} + k\vec{r}, t + k'T) \end{cases} \quad \exists k, k' \in \mathbb{Z}, (\vec{r}, t) > (0, 0)$$

حال به تعریف الگوی ریاضی موج می پردازیم. هر تابع چهار متغیره فضا - زمان را که نسبت به متغیرهای فضا و زمان متناوب و دوره ای و تکراری باشد، موج یا تابع موج می نامیم. پس موج یک حرکت است که نسبت به مکان و زمان در ابعاد مختلف مکان تکراری و دوره ای است. پس موج یک حرکت است که در زمان تکرار می شود و در هر فاصله T ثانیه مجدداً به وضعیت اول برمی گردد و نیز در فضا و مکان نیز تکرار می شود یعنی در هر فاصله λ متر مجدداً به وضعیت اول برمی گردد اگر بخواهیم یک تعبیر محسوس و تجربی داشته باشیم این گونه مطرح می شود که اگر به یک حرکت موجی در یک لحظه خاص از زمان توجه کنیم و از تمام محیط ارتعاش عکس برداری کنیم آنگاه متوجه می شویم که در آن لحظه و نیز هر لحظه دلخواه دیگر حرکت در محیط تکرار شونده بوده است (البته به شرط آن که طول محیط بیش از چند طول موج باشد) یعنی مثلاً شکل

$$\begin{aligned} \text{مثال: } x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{4} &\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ &\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

اینک می خواهیم تعریفی برای تابع دو متغیره متناوب با تدقیق کافی ارایه کنیم.

۱ - تابع دو متغیره با ضابطه $z = f(x, y)$ را متناوب نسبت به x می گوئیم هر گاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall x \in D_{f_x}: x + kT_x \in D_{f_x}, k \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in D_{f_x}: f(x, y) = f(x + kT_x, y) \end{cases}, T_x > 0$$

در اینجا D_{f_x} دامنه تعریف تابع نسبت به متغیر x است و T_x دوره تناوب نسبت به متغیر x است.

۲ - تابع دو متغیره با ضابطه $z = f(x, y)$ را متناوب نسبت به y می گوئیم هر گاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall y \in D_{f_y}: y + k'T_y \in D_{f_y}, k' \in \mathbb{Z} \\ \forall y \in D_{f_y}: f(x, y) = f(x, y + k'T_y) \end{cases}, T_y > 0$$

در اینجا D_{f_y} دامنه تعریف نسبت به متغیر y است و T_y دوره تناوب نسبت به متغیر y است.

۳ - تابع دو متغیره با ضابطه $z = f(x, y)$ را نسبت به هر دو متغیر x و y متناوب گوئیم هر گاه در دو شرط زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in D_z: \\ \forall (x, y) \in D_z: \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x + kT_x, y + k'T_y) \in D_z: (k, k' \in \mathbb{Z}) \\ f(x, y) = f(x + kT_x, y + k'T_y) \end{aligned}, (T_x, T_y) > (0, 0)$$

در اینجا D_z دامنه تعریف نسبت به هر دو متغیر x و y است یعنی $(T_x, T_y) = T_{xy} = T$ و $D_z = D_f = (D_{f_x}, D_{f_y})$ دوره تناوب تابع دو متغیره x و y است.

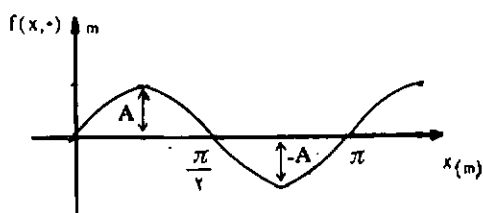
یعنی در اینجا چون، هم دامنه $\mathbb{R}^2$ است پس هر عضو در دامنه تعریف یک دوتایی (زوج) مرتب است به شکل (x, y) و چون برد $\mathbb{R}$ است پس هر عضو برد به شکل $z \in \mathbb{R}$ است.

نتیجه: بنابراین تا اینجا با یک تابع دو متغیره که نسبت به هر دو متغیر متناوب و دوره ای است آشنا شدیم و تعریف آن را بیان کردیم. حال اگر بخواهیم می توانیم این مفهوم را باز هم تعمیم

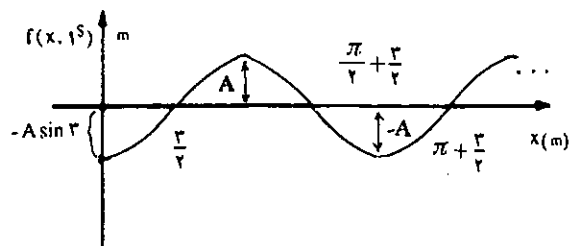
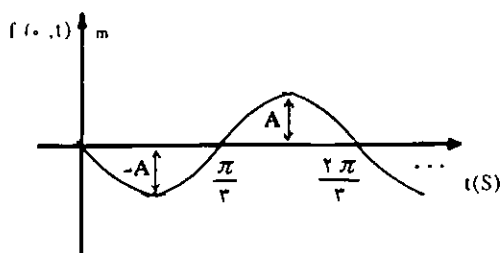
$$f(x, t) = A \sin(\gamma x - \gamma t) \rightarrow T_l = T = \frac{2\pi}{|\gamma|} = \frac{2}{\gamma} \pi^s$$

زیرا خواهیم دید.

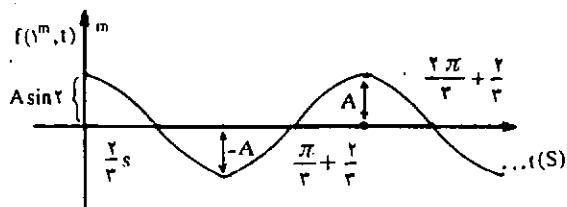
$$\text{مبدأ زمان } t=0 \Rightarrow f(x, 0^s) = A \sin \gamma x$$



$$\text{مبدأ مکان } x=0 \Rightarrow f(0^m, t) = A \sin(-\gamma t) = -A \sin \gamma t$$



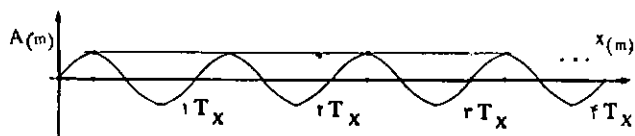
$$f(x, 1^s) = A \sin(\gamma x - \gamma)$$



$$f(1^m, t) = A \sin(\gamma - \gamma t)$$

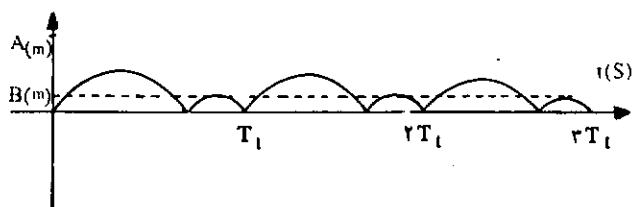
پس موج فوق نسبت به زمان و مکان در حرکت است و این حرکت دوره‌ای و تکراری است.

$$\Psi(x, t)$$



و اگر یک دوربین فیلم برداری را در نقطه‌ای خاص و دلخواه از محیط ارتعاش فیکس و ثابت کنیم و از آن نقطه فیلم برداری کنیم باز هم ناظر و شاهد یک حرکت تکراری و دوره‌ای و متناوب خواهیم بود مثلاً مطابق شکل زیر:

$$\Psi(x, t)$$



دوره تناوب در بعد زمان را زمان تناوب می‌گوییم و دوره تناوب در بعد مکان را طول موج می‌نامیم به طوری خود طول موج دارای سه بعد است یعنی (طولی - عرضی - ارتفاعی)

$$\begin{cases} \vec{\lambda} = (\lambda_x^{(m)}, \lambda_y^{(m)}, \lambda_z^{(m)}) \\ T_l = T^{(s)} \end{cases} \Rightarrow T = (\vec{\lambda}, T_l)$$

واحد پریود زمانی معمولاً ثانیه و واحد پریود مکانی معمولاً متر است.

اینک به عنوان نمونه مثالی را با هم پاسخ می‌گوییم.
مثال: هرگاه ضابطه $f(x, t) = A \sin(\gamma x - \gamma t)$ نشان دهنده یک موج متحرک در امتداد محور x ها باشد (SI) مطلوب است.

الف - پریود و طول موج

ب - شکل موج در مبدأ زمان بر حسب x و در $t = 1^s$

ج - شکل موج در مبدأ مکان بر حسب t و در $x = 1^m$

حل: می‌دانیم که پریود تابع $y = A \sin au$ برابر است با $T_u = \frac{2\pi}{|a|}$ بنابراین دوره زمانی و مکانی موج فوق عبارتند از:

$$f(x, t) = A \sin(\gamma x - \gamma t) \rightarrow T_x = \lambda = \frac{2\pi}{|\gamma|} = \pi^m$$