

کاربردهای

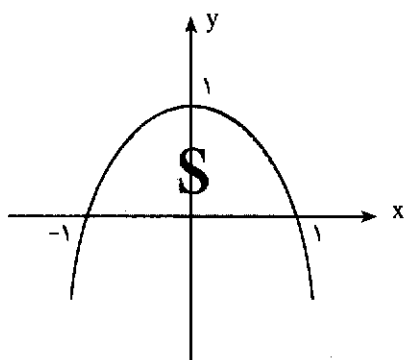
انتگرال

محاسبه مساحت

● سید محمد رضا هاشمی موسوی



سطح مورد نظر بالای محور x ها است :



بنابراین :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 y dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{3}(1)^3 + (1) - \left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right] \\ &= -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3} \text{ (واحد سطح)} \end{aligned}$$

مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه

$y = -x^2 - x + 6$ و محور x ها و دو خط $x = -2$ و $x = 1$ را

انتگرال معین در بسیاری از مسائل کاربرد دارد، که از آن جمله می توان محاسبه مساحت، حجم حاصل از دوران، طول منحنی و تعیین تابع چگالی در احتمال و مسائل مربوط به آنالیز، مکانیک، فیزیک، شیمی و... را نام برد. در این جا به برخی از آنها اشاره می کنیم :

محاسبه مساحت

اگر تابع با ضابطه عمومی $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ ، $a < b$ پیوسته و نامنفی باشد، اندازه مساحت سطح محصور بین منحنی تابع f و محور x ها و دو خط به معادلات $x = a$ و $x = b$ که عددی معین است، از محاسبه انتگرال معین زیر به دست می آید :

$$S = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: سطح محصور بین نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y = -x^2 + 1$ و محور x ها را به دست آورید.

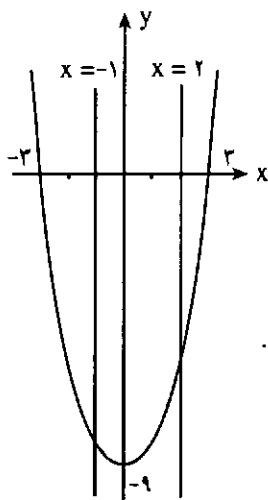
حل: برای محاسبه سطح محصور بین یک منحنی و محور x ها باید طول نقاط برخورد آن منحنی با محور x ها را به دست آوریم. بنابراین، طول نقاط برخورد منحنی با محور طولها را محاسبه می کنیم :

$$y = 0 : -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

محاسبه می کنیم :

$$y=0 : x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$\Rightarrow -3 < -1 < 2 < 3$$



مشاهده می شود که هیچ یک از طولهای به دست آمده، بین ۱- و ۲ قرار ندارند، و چون $f(0) = -9 < 0$ و $f(1) = -8 < 0$ ، پس تمام سطح مورد محاسبه، در پایین محور x قرار دارد؛ بنابراین :

$$S = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - 9) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - 9x \right]_{-1}^2 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} - 18 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 9 \right) \right| = |-24| = 24 \text{ (واحد سطح)}$$

تبصره ۲. هرگاه در فاصله $[a, b]$ تابع با ضابطه عمومی $y = f(x)$ تغییر علامت دهد، قسمت یا قسمتهایی از سطح مورد محاسبه، در بالا و پایین محور x قرار می گیرد که در این صورت، باید هر قسمت از سطح را به طور جداگانه محاسبه کنیم و سپس قدرمطلق آنها را با هم جمع کنیم. به طور مثال، در شکل زیر منحنی محور x ها را در نقطه ای به طول $a < c < b$ ، قطع کرده است؛ یعنی تابع f در مجاورت نقطه ای به طول $x = c$ تغییر علامت داده است.

$$S_1 = \int_a^c f(x) dx \quad \text{بنابراین :}$$

$$S_2 = \left| \int_c^b f(x) dx \right| \quad \text{و :}$$

به دست آورید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها را محاسبه می کنیم :

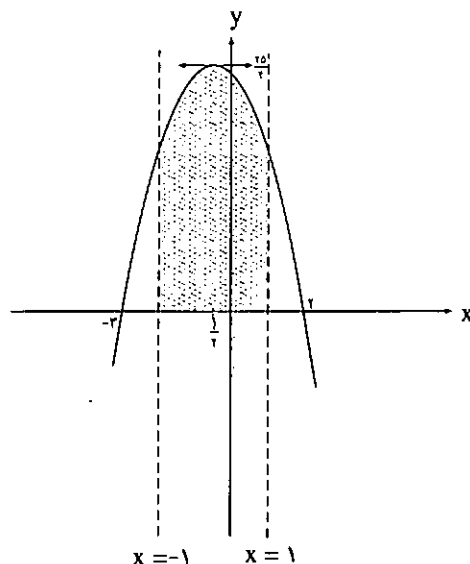
$$y=0 : -x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x=2, x=-3$$

$$-3 < -2 < 1 < 2 \quad \text{ملاحظه می کنیم که :}$$

مشاهده می شود که هیچ یک از طولهای به دست آمده، بین ۲- و ۱ قرار ندارند؛ پس سطح مورد محاسبه، به طور کامل در یک طرف محور x ها است و چون $f(0) = 6 > 0$ است، بنابراین تمامی سطح بالای محور x ها قرار دارد؛ پس :

$$S = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 6) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 6x \right]_{-2}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 12 \right) = 16\frac{1}{6} \text{ (واحد سطح)}$$



تبصره ۱. اگر تمام سطح مورد محاسبه، زیر محور x ها قرار داشته باشد؛ یعنی در فاصله $[a, b]$ ، $f(x) < 0$ باشد، آن گاه $\int_a^b f(x) dx$ عددی منفی است که باید قدرمطلق آن را در نظر بگیریم :

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| [F(x)]_a^b \right| = |F(b) - F(a)|$$

مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y = x^2 - 9$ و محور x ها و دو خط $x = -1$ و $x = 2$ را به دست آورید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها را

بنابراین :

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6}$$

$$S_2 = \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{-9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^2 (x^2 - 3x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{6} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = \frac{15}{2} \Rightarrow S = \frac{15}{2} \text{ (واحد سطح)}$$

تبصره ۳. برای محاسبه سطح محصور بین یک خط و یک منحنی یا سطح محصور بین دو منحنی، ابتدا باید طولهای نقاط برخورد آنها را از حل دستگاه معادله‌های خط و منحنی یا دو منحنی به دست آوریم و در صورت لزوم، عرضهای نقاط برخورد را نیز محاسبه کنیم. در صورتی که طولهای نقاط برخورد (دو نقطه متوالی) a و b باشند، به یکی از دو روش زیر، سطح مورد نظر در فاصله $[a, b]$ را محاسبه می‌کنیم:

روش اول - سطح محصور بین خط و منحنی (یا دو منحنی) و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم و سطوح به دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$S_1 = \int_a^b f_1(x) dx, \quad S_2 = \int_a^b f_2(x) dx \Rightarrow S = |S_2 - S_1|$$

روش دوم - اگر معادله‌های خط و منحنی (یا دو منحنی)، دو تابع f_1 و f_2 به صورت زیر باشند:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x)$$

که در فاصله $[a, b]$ پیوسته و $f_2(x) > f_1(x)$ ، سطح مورد نظر، از دستور زیر محاسبه می‌شود:

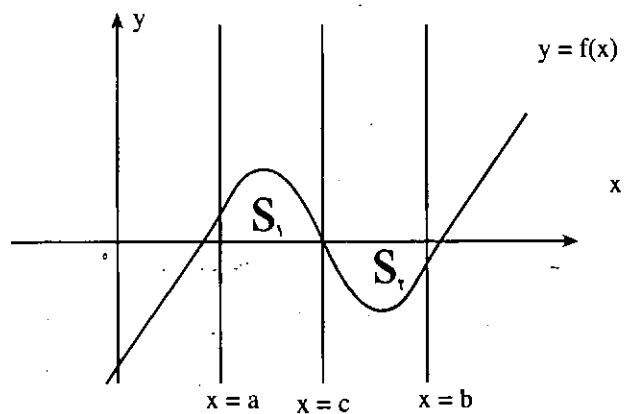
$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

یعنی ابتدا $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ را محاسبه می‌کنیم؛ و اگر تابع اولیه $G(x)$ را $G(x)$ بنامیم، سطح مطلوب، در حالت کلی برابر است با:

$$S = \left| \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \right| = \left| \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$S = S_1 + S_2$$

پس :



مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x$ و محور x ها و دو خط $x = -1$ و $x = 2$ را حساب کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 0 : x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$$

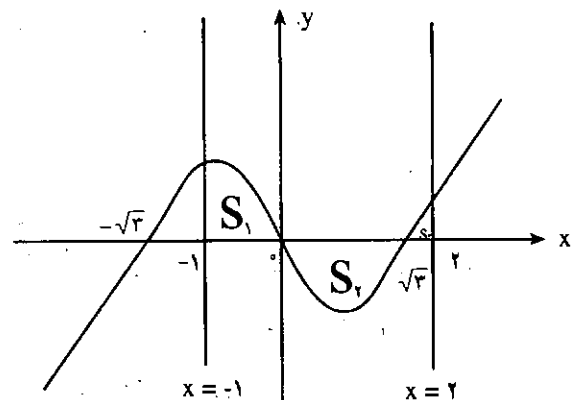
$$\Rightarrow x = 0 ; x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < -1 < 0 < \sqrt{3} < 2$$

مشاهده می‌شود که تابع فوق در فاصله $[-1, 2]$ در مجاورت نقاطی به طولهای $x = \sqrt{3}$ و $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد؛ یعنی دو ریشه معادله $y = 0$ بین دو مقدار $x = -1$ و $x = 2$ واقع است. با توجه به $f(-1) = 2 > 0$ و $f(1) = -2 < 0$ و $f(2) = 2 > 0$ نتیجه می‌شود:

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx, \quad S_2 = \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3x) dx \right|$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^2 (x^2 - 3x) dx \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3$$



$$\Rightarrow S = \int_{-7}^1 (-x^2 - 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-7}^1$$

$$= 0 - \left(-\frac{27}{3} - \frac{27}{2} \right) = -\left(-\frac{27}{6} \right) = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{9}{2} \quad (\text{واحد سطح})$$

مثال: سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $y = x^2 - 7x + 5$ و $y = -x^2 - 3x + 1$ را محاسبه کنید.
حل:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 3x + 1 \\ y = x^2 - 7x + 5 \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 3x + 1 = x^2 - 7x + 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad x = 3$$

$$S = \int_{-1}^3 (y_2 - y_1) dx \quad (\text{طولهای نقاط تقاطع})$$

$$= \int_{-1}^3 (-x^2 - 3x + 1 - x^2 + 7x + 5) dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3$$

$$= (-18 + 18 + 18) - \left(-\frac{2}{3} + 2 - 6 \right) = \frac{64}{3} \Rightarrow$$

$$S = 21\frac{1}{3} \quad (\text{واحد سطح})$$

تبصره ۴. هرگاه سطح محصور بین یک منحنی و محور عرضها و دو خط $y = a$ و $y = b$ را بخواهیم محاسبه کنیم، باید رابطه $x = g(y)$ را مشخص سازیم و سپس مانند محاسبه سطح محصور بین منحنی، به معادله $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ عمل کنیم.

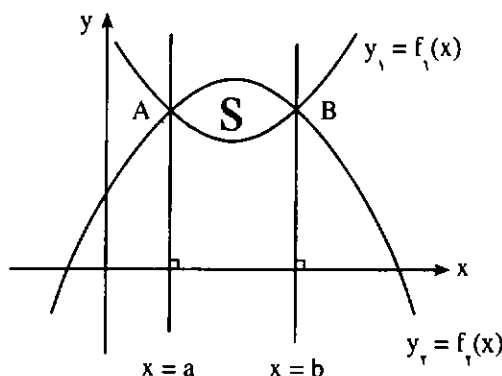
مثال: سطح محصور بین منحنی به معادله $y^2 - 5y - x + 4 = 0$ و محور عرضها و دو خط $y = 2$ و $y = 3$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا عرضهای نقاط تلاقی را به دست می آوریم:

$$x = 0 : y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 1, y = 4$$

(عرضهای نقاط تقاطع)

$$= |[G(x)]_a^b| = |G(b) - G(a)|$$



توجه: توصیه می شود برای سهولت در محاسبه سطح محصور بین دو منحنی، همیشه از روش دوم استفاده کنید.

مثال: سطح محصور بین منحنی تابع با ضابطه $y = -x^2 - 2x + 1$ و خط به معادله $y = x + 1$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد خط و منحنی را به دست می آوریم:

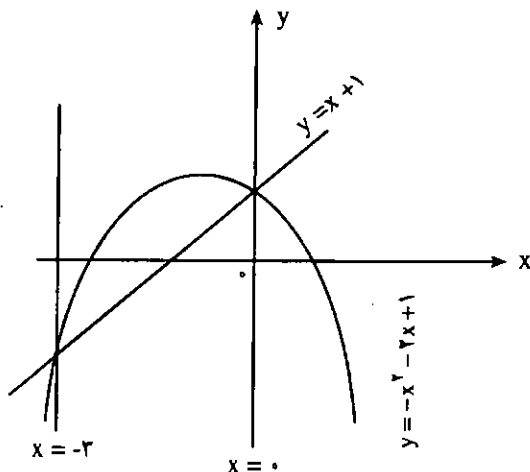
$$\begin{cases} y_1 = x + 1 \\ y_2 = -x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow -x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

$$\Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3 \quad (\text{طولهای نقاط تقاطع})$$

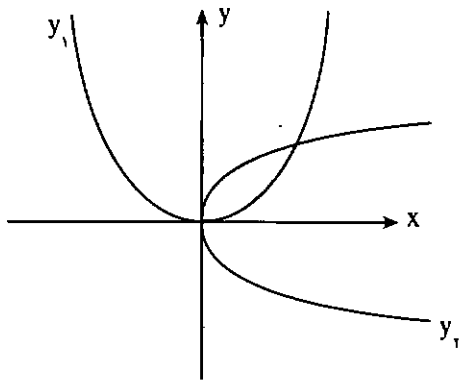
$$g(x) = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$$

$$= (-x^2 - 2x + 1) - (x + 1)$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 - 3x \Rightarrow S = \int_{-3}^0 g(x) dx$$



(طولهای نقاط تقاطع) $x = 2p$



همچنین:

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \quad y_2 = \sqrt{2px}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2p} (y_2 - y_1) dx = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx \\ &= \int_0^{2p} \left(\sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2p} x^2 \right) dx = \left[\frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6p} x^3 \right]_0^{2p} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2p}}{3} (2p)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6p} (2p)^3 \right) = \frac{2(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(2p)^2}{3} \\ &= \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

پس:

$$S = \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} = 27 \Rightarrow (2p)^{\frac{3}{2}} = 81$$

$$\Rightarrow |2p| = 9 \Rightarrow |p| = \frac{9}{2}$$

تمرین: تابع با ضابطه $y_1 = f(x) = 12x + \frac{76}{(x+3)^2}$

مفروض است. سطح محصور بین منحنی تابع f و مجانب مایل (غیرموازی با محورها) آن را از خط $x = -2$ تا خط $x = k > -2$

بیاید. همچنین مقدار $\lim_{k \rightarrow \infty} S$ را نیز حساب کنید.

$$\Rightarrow 1 < 2 < 3 < 4$$

سطح مورد نظر در یک طرف محور عرضها است؛ بنابراین:

$$y^2 - 5y - x + 4 = 0 \Rightarrow x = y^2 - 5y + 4$$

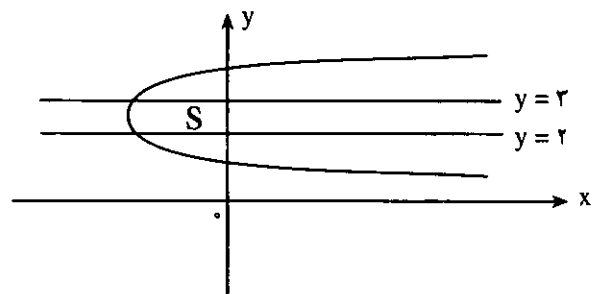
$$S = \left| \int_1^2 x dy \right| = \left| \int_1^2 (y^2 - 5y + 4) dy \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{5}{2} y^2 + 4y \right]_1^2 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 12 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right|$$

$$= \left| \frac{-13}{6} \right| = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$

$$S = 2\frac{1}{6} \text{ (واحد سطح)}$$



مثال: اندازه سطح محصور بین دو منحنی به معادلات

$$2y^2 - 4px = 0 \text{ و } 3x^2 - 6py = 0 \text{ برابر } 27 \text{ است، } |p| \text{ برابر}$$

چيست؟

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد دو منحنی را به دست

می آوریم:

$$\begin{cases} 2y^2 - 4px = 0 \\ 3x^2 - 6py = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ x^2 = 2py \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{x^2}{2p} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2p} \right)^2 = 2px \Rightarrow x^4 - 4p^2 x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 4p^2) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

با توجه به قرینه بودن دو قسمت سطح واقع در ناحیه اول و سوم (سطحهای سایه خورده)، کافی است سطح واقع در ناحیه اول را محاسبه کنیم و حاصل را دو برابر کنیم:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\sqrt{2}} (y_2 - y_1) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 - \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} = 1 \Rightarrow S_1 = 1 \end{aligned}$$

(سطح محصور به منحنی و خط y_2)

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 (y_2 - y_1) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{6} \quad (\text{سطح محصور به منحنی و خط } y_2)$$

$$\Rightarrow S = 2(S_1 - S_2) = 2(1 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{3} \quad (\text{واحد سطح})$$



در یک کنفرانس بین‌المللی ۱۵ نماینده از قاره‌های آفریقا، آسیا، آمریکا و اروپا جمع شده‌اند. تعداد نمایندگان هر قاره با هم متفاوت است، ولی هر قاره لا اقل یک نماینده فرستاده است. آمریکا و آسیا جمعاً ۶ نماینده، آسیا و اروپا جمعاً ۷ نماینده دارند.

کدام قاره ۴ نماینده دارد؟

جواب در صفحه ۸۸

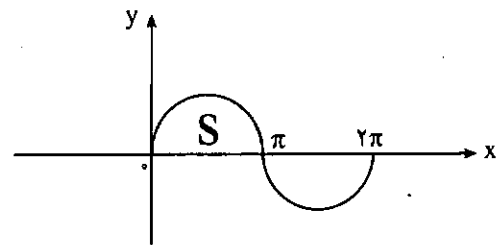
(راهنمایی: معادلهٔ مجانب مایل منحنی $y_2 = 13x$ است. پس:

$$S = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y_2 - y_1) dx \right|$$

مثال: سطح محصور بین یکی از طاقهای منحنی به معادله $y = \sin x$ و محور x را محاسبه کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$



$$S = \int_0^{\pi} y dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= (1 + 1) = 2 \Rightarrow S = 2 \quad (\text{واحد سطح})$$

مثال: تمام سطح محصور بین منحنی به معادله $y = x^2$ و خطهای $2y - 4x = 0$ و $7y - 7x = 0$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی $y_1 = x^2$ را با خطهای $2y - 4x = 0$ و $7y - 7x = 0$ یا $y_2 = 2x$ و $y_3 = x$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_3 = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

