



میر شهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

کاربرد مشتق در امور فنی (مسائل بهینه سازی)

ضربشان بیشتر می شود تا آن جا که وقتی هر دو عدد برابر با ۱۰ باشند، حاصل ضربشان بیشترین مقدار را دارد. بنابراین به روش شهودی به این حدس کلی می رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن را داشته باشند، برابرند

$$\text{با: } x = y = \frac{a}{2}$$

می توان حدس بالا به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = a \Rightarrow y = a - x \\ P = xy \end{cases} &\Rightarrow P = x(a - x) \\ \Rightarrow P = x(a - x) = -x^2 + ax = -(x^2 - ax) \\ &= -(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$P = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \quad (1)$$

با توجه به رابطه ی (۱) درمی یابیم که بیشترین مقدار P

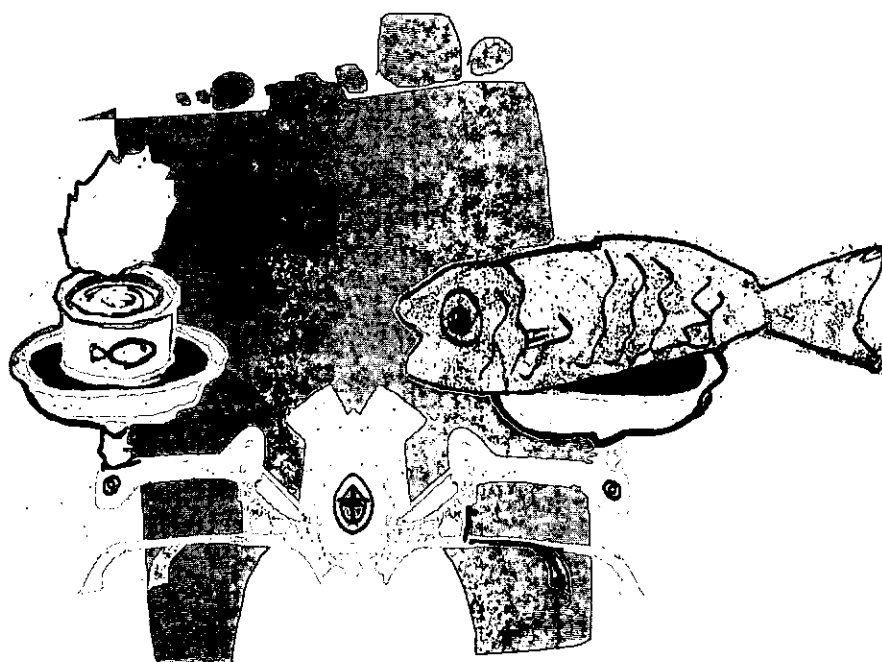
در زندگی روزمره با مسائلی روبرو می شویم که می خواهیم از حداقل امکانات حداکثر استفاده را ببریم، برای آشنایی بیشتر به این مثال توجه کنید:

«دو عدد صحیح مثبت چنان بیابید که حاصل جمع آن ها ۲۰ و حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن باشد».

برای حل این مثال، ابتدا با استفاده از شهود، سعی کرده جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن ها برابر با ۲۰ باشد، سپس حاصل ضرب هر کدام از آن ها را پیدا می کنیم. از بین این حاصل ضرب ها، هر کدام که از بقیه بیشتر باشد دو عدد مورد نظر مسأله را می دهد:

$1+19=20; 1 \times 19=19$	$6+14=20; 6 \times 14=84$
$2+18=20; 2 \times 18=36$	$7+13=20; 7 \times 13=91$
$3+17=20; 3 \times 17=51$	$8+12=20; 8 \times 12=96$
$4+16=20; 4 \times 16=64$	$9+11=20; 9 \times 11=99$
$5+15=20; 5 \times 15=75$	$10+10=20; 10 \times 10=100$

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب های بالا ملاحظه می کنیم که هرچه اختلاف دو عدد کمتر می شود، حاصل



۲. با توجه به مسأله، عددها و متغیرهایی را به هر یک از مقدارهای شکل نسبت می‌دهیم.

۳. با توجه به صورت مسأله، برای کمیتی که باید ماکزیمم یا مینیمم شود، معادله‌ای می‌نویسیم و آن را «معادله‌ی اولیه» می‌نامیم.

۴. معمولاً در معادله‌ی اولیه، بیش از یک متغیر وجود دارد. با توجه به مسأله یا شکلی که برای آن رسم می‌کنیم، رابطه‌ای بین متغیرها وجود دارد که به آن «معادله‌ی ثانویه» می‌گوییم.

۵. معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته می‌کنیم. برای این کار از معادله‌ی ثانویه استفاده می‌کنیم.

۶. دامنه‌ی معادله‌ی اولیه را مشخص می‌کنیم.

۷. نقاط بحرانی معادله‌ی اولیه را به دست می‌آوریم و جدول تغییرات آن را رسم می‌کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به دست آید. سپس طول نقاط اکسترمم را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم و مقدار ماکزیمم یا مینیمم کمیت موردنظر را به دست می‌آوریم.

وقتی به دست می‌آید که: $(x - \frac{a}{2})^2 = 0$ بنابراین داریم:

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad (2)$$

از طرفی $x+y=a$ ، پس با توجه به رابطه (۲) ملاحظه

می‌کنیم که $y = \frac{a}{2}$ ، در نتیجه وقتی P بیشترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x = y = \frac{a}{2}$$

اکنون می‌خواهیم که این مثال یا مسائل مشابه با آن را با استفاده از کاربرد مشتق حل کنیم.

در بحث کاربرد مشتق در امور فنی، معمولاً مسائلی مطرح می‌شوند که به دنبال یافتن بیشترین یا کمترین مقدار یک کمیت در شرایط مشخصی هستند. برای استفاده از مشتق در حل این گونه مسائل، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. شکل مناسبی (در صورت امکان) برای مسأله رسم

می‌کنیم.

می‌خواهیم حجم استوانه ماکزیمم باشد، بنابراین:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 x$$

با توجه به شکل در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$OH^2 + HA^2 = OA^2 \Rightarrow x^2 + r^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 27 - x^2$$

اکنون اگر $r^2 = 27 - x^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = 2\pi(27 - x^2)x = -2\pi x^2 + 54\pi x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = -2\pi x^2 + 54\pi x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -4\pi x + 54\pi = 0 \Rightarrow x = -\frac{27}{2}, x = \frac{27}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{27}{2}$	$\frac{27}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-108	108	$-\infty$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = -\frac{27}{2}$ دارای مینیمم نسبی و در $x = \frac{27}{2}$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x = \frac{27}{2}; r^2 = 27 - x^2 \Rightarrow r^2 = 27 - \frac{729}{4} = \frac{108}{4} \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$$

در نتیجه، حجم ماکزیمم برابر است با:

$$V = 2\pi r^2 x = 2\pi \times 108 \times \frac{27}{2} = 108\pi$$

تمرین‌های حل شده

۱. دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۹۲ و حاصل جمع عدد اول با ۳ برابر عدد دوم مینیمم باشد.

حل: فرض کنیم عدد اول $x > 0$ و عدد دوم $y > 0$ باشند. داریم:

$$A = x + 3y$$

معادله‌ی اولیه $xy = 192 = y = \frac{192}{x}$

اگر $y = \frac{192}{x}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A = x + 3 \times \frac{192}{x} = x + \frac{576}{x}$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{576}{x}$ را به دست می‌آوریم:

مثال: مجموع دو عدد مثبت برابر ۲۰ است. ماکزیمم حاصل ضرب آن‌ها چه قدر است.

حل: فرض کنیم آن دو عدد x و y باشند. چون هر دو عدد مثبت هستند، بنابراین: $y > 0, x > 0$

معادله‌ی اولیه $A = xy$

معادله‌ی ثانویه $x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$

اکنون اگر $y = 20 - x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A = x(20 - x) = -x^2 + 20x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 20x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -2x + 20 = 0 \Rightarrow x = 10$$

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$
		100	$-\infty$

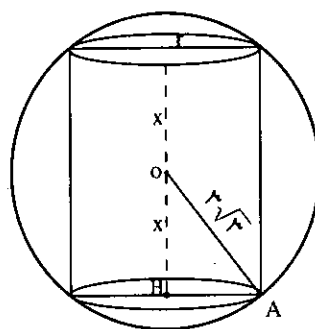
با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = 10$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x = 10, y = 20 - x = 20 - 10 = 10$$

در نتیجه، دو عدد موردنظر $x = 10$ و $y = 10$ هستند.

مثال: در کره‌ای به شعاع $3\sqrt{3}$ ، استوانه‌ای به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. مقدار عددی این حجم را بیابید.

حل: در شکل زیر فرض می‌کنیم، ارتفاع استوانه $h = 2x$ و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر r باشد.



با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم که ابعاد جعبه‌ی در باز برابر است با: $(13-2x)$ ، $(13-2x)$ و x . بنابراین:

$$V = (13-2x)(13-2x)x$$

$$V = x(13-2x)^2$$

چون معادله‌ی اولیه بر حسب یک متغیر است، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x(13-2x)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = (13-2x)^2 - 4x(13-2x) = 0; (13-2x)(13-6x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{13}{2}, x = \frac{13}{6}$$

x	$-\infty$	$\frac{13}{6}$	$\frac{13}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = \frac{13}{6}$

دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین اگر طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند، $\frac{13}{6}$ باشد، جعبه‌ی در باز بیش‌ترین حجم

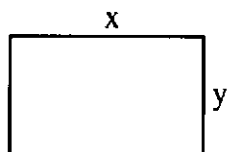
را دارد.

۳. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که محیط

آن ۲۰۰ سانتی‌متر است.

حل: فرض کنیم طول مستطیل برابر x سانتی‌متر و عرض

آن برابر y سانتی‌متر باشد. بنابراین داریم:



$$A = xy \text{ : معادله‌ی اولیه}$$

$$2(x+y) = 200 \Rightarrow x+y = 100 \text{ : معادله‌ی ثانویه}$$

$$\Rightarrow y = 100 - x$$

اکنون اگر $y = 100 - x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم،

$$f'(x) = 1 - \frac{576}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 576}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 24, x = -24$$

x	$-\infty$	-24	0	24	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

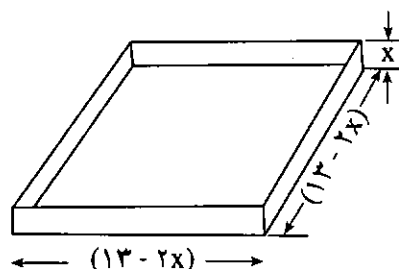
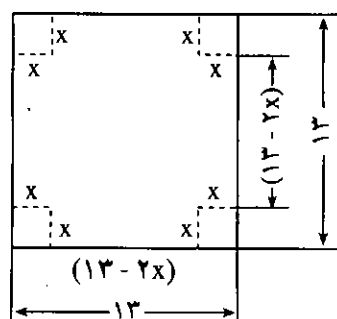
با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع در $x=24$ دارای مینیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x = 24, y = \frac{192}{x} = \frac{192}{24} = 8$$

در نتیجه دو عدد موردنظر $x=24$ و $y=8$ هستند.

۲. یک سازنده‌ی جعبه می‌خواهد از مقوایی مربع شکل به مساحت ۱۶۹ سانتی‌متر مربع، با بریدن چهار مربع برابر از چهار گوشه‌ی آن و بالا زدن جوانب آن، یک جعبه‌ی در باز بسازد. طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند، چه قدر باشد تا حجم جعبه بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشند؟

حل: در شکل زیر فرض کنیم که طول ضلع مربع‌هایی که از چهار گوشه مقوای بریده می‌شوند، برابر x سانتی‌متر باشد. چون مساحت مقوای مربع شکل ۱۶۹ سانتی‌متر مربع است، طول هر ضلع مربع ۱۳ سانتی‌متر می‌شود.



معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده ایم:

$$A = xy \text{ و } y = 100 - x \Rightarrow A = x(100 - x) \\ = -x^2 + 100x$$

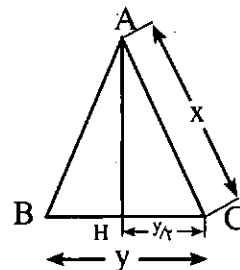
نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + 100x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50$$

x	$-\infty$	50	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم، تابع f در $x = 50$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین، اگر طول مستطیل را $x = 50$ سانتی متر در نظر بگیریم، عرض آن $y = 50$ سانتی متر خواهد بود و در این صورت، مساحت ماکزیمم خواهد شد. ۴. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی الساقینی که محیط آن ۱۸ متر باشد.

حل: اگر طول ساق‌های مثلث متساوی الساقین را x متر و قاعده‌ی آن را y متر در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$\triangle AHC: AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = x^2 - \frac{y^2}{4} \\ \Rightarrow AH = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$\text{معادله‌ی اولیه: } s = \frac{1}{2}(AH \times BC) = \frac{y}{2} \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$\text{معادله‌ی ثانویه: } x + x + y = 18 \Rightarrow x = \frac{18 - y}{2}$$

اکنون اگر $x = \frac{18 - y}{2}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده ایم:

$$s = \frac{y}{2} \sqrt{\left(\frac{18 - y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4}}$$

اگر s بیش‌ترین مقدار را بگیرد، آن گاه $s^2 = \frac{y^2}{4} \left(\left(\frac{18 - y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} \right)$ نیز بیش‌ترین مقدار را خواهد گرفت. بنابراین، نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(y) = \frac{y^2}{4} \left(\left(\frac{18 - y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} \right)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(y) = \frac{y^2}{4} (81 - 9y) = \frac{81}{4} y^2 - \frac{9}{4} y^3$$

$$f'(y) = \frac{81}{2} y - \frac{27}{4} y^2 = 0 \Rightarrow \frac{27}{4} y (6 - y) = 0 \\ \Rightarrow y = 0, y = 6$$

y	$-\infty$	0	6	$+\infty$
$f'(y)$	-	0	+	-
$f(y)$	↘		↗	↘

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $y = 6$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$y = 6 \text{ و } x = \frac{18 - y}{2} \Rightarrow x = 6$$

در نتیجه، بزرگ‌ترین مساحت مثلث برابر است با:

$$s = \frac{y}{2} \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{6}{2} \sqrt{36 - \frac{36}{4}} = \frac{18\sqrt{3}}{2}$$

۵. در مکعب مستطیلی با قاعده‌ی مربع، مجموع طول و عرض و ارتفاع آن مقدار ثابت L است. ارتفاع این مکعب مستطیل چه قدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود.

حل: در صورتی که طول ضلع قاعده‌ی مکعب مستطیل را x و ارتفاع آن را y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + (2 - x^2)^2$ را به دست می‌آوریم:
 $f'(x) = 2x - 4x(2 - x^2) = 0$; $2x(2x^2 - 3) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ و $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

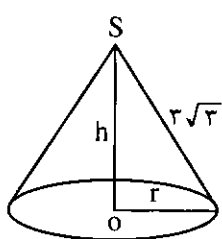
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در
 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ دارای مینیمم نسبی است. در نتیجه
 داریم:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } y = 4 - x^2 \Rightarrow y = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}; A \left| \begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{13}{4} \end{array} \right.$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } y = 4 - x^2 \Rightarrow y = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}; B \left| \begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{13}{4} \end{array} \right.$$

پس نقاط A و B واقع بر نمودار تابع با ضابطه‌ی
 $y = 4 - x^2$ هستند و تا نقطه‌ی $(0, 2)$ کم‌ترین فاصله را
 دارند.



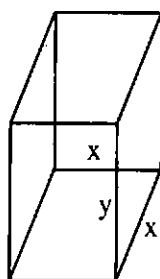
۷. بین مخروط‌های به مولد
 ثابت $3\sqrt{3}$ ، ماکزیمم حجم را
 بیابید.

حل: فرض کنیم که شعاع
 قاعده‌ی مخروط r و ارتفاع آن h
 باشد. بنابراین داریم:

$$o\hat{S}A : o\hat{S}^2 + o\hat{A}^2 = S\hat{A}^2 \Rightarrow r^2 + h^2 = 27$$

$$\text{معادله‌ی اولیه: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{معادله‌ی ثانویه: } r^2 + h^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$



معادله‌ی اولیه: $V = x \times x \times y = x^2 y$
 (حجم مکعب)

معادله‌ی ثانویه: $x + x + y = L \Rightarrow y = L - 2x$
 اکنون اگر $y = L - 2x$ را در معادله‌ی
 اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک
 متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = x^2(L - 2x) = Lx^2 - 2x^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = Lx^2 - 2x^3$ را به
 دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2Lx - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x = \frac{L}{3}$$

h	$-\infty$	0	$\frac{L}{3}$	$+\infty$
$f'(h)$		-	+	-
$f(h)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = \frac{L}{3}$
 دارای ماکزیمم نسبی است. در نتیجه داریم:

$$y = L - 2x = L - \frac{2L}{3} = \frac{L}{3}$$

۶. نقاطی بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 4 - x^2$ پیدا کنید
 که نزدیک‌ترین نقاط به نقطه‌ی $(2, 0)$ باشند.

حل: فرض کنیم $A \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right.$ واقع بر نمودار این تابع و

نزدیک‌ترین نقطه به نقطه‌ی $(2, 0)$ باشد. بنابراین داریم:

$$\text{معادله‌ی اولیه: } d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\text{معادله‌ی ثانویه: } y = 4 - x^2$$

اکنون اگر $y = 4 - x^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار

دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2}$$

d وقتی کم‌ترین مقدار را می‌گیرد که عبارت زیر رادیکال
 کم‌ترین مقدار را داشته باشد، بنابراین نقاط بحرانی تابع با

اولیه را به یک متغیر وابسته کرده ایم:

$$S = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(x) = -2x^2 + 24x$ را به دست می آوریم:

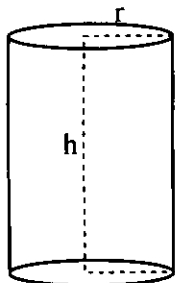
$$f'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = -2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می کنیم که تابع f در $x = 2$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$S = -2(2)^3 + 24(2) = 32$$

۹. رابطه ی بین شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه ای به صورت $r + h = 15$ است. شعاع قاعده چه قدر باشد تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم شود؟
حل:



معادله ی اولیه:

$$S = 2\pi r h \text{ (مساحت جانبی استوانه)}$$

معادله ی ثانویه:

$$r + h = 15 \Rightarrow h = 15 - r$$

اگر $h = 15 - r$ را در معادله ی اولیه قرار دهیم، در این صورت معادله ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده ایم:

$$S = 2\pi r(15 - r) = -2\pi r^2 + 30\pi r$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(r) = -2\pi r^2 + 30\pi r$ را به دست می آوریم:

$$f'(r) = -4\pi r + 30\pi = 0 \Rightarrow r = \frac{15}{2}$$

r	$-\infty$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
$f'(r)$		+	-
$f(r)$		$\nearrow$	$\searrow$

اگر $r^2 = 27 - h^2$ را در معادله ی اولیه قرار دهیم،

معادله ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده ایم:

$$V = \frac{1}{3}\pi(27 - h^2)h = 9\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(h) = 9\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$ را

به دست می آوریم:

$$f'(h) = 9\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = 3 \text{ و } h = -3$$

n	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(n)$		-	+	-
$f(n)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می کنیم که تابع f در $h = 3$

دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$h = 3 \text{ و } r^2 = 27 - h^2 \Rightarrow r^2 = 27 - 9 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$$

بزرگ ترین حجم مخروط به مولد $3\sqrt{3}$:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 18 \times 3 = 18\pi$$

۸. خط $y = m > 0$ ، منحنی تابع با ضابطه ی

$y = 12 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می کند. مستطیلی

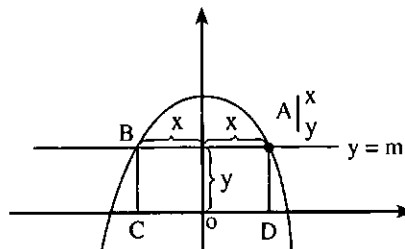
می سازیم که یک ضلع آن پاره خط AB و ضلع مقابل AB روی محور xها باشد. مقدار ماکزیمم مساحت مستطیل را بیابید.

حل. فرض کنیم $A \Big|_y^x$ محل برخورد خط $y = m$ با تابع

با ضابطه ی $y = 12 - x^2$ می باشد. بنابراین داریم:

$$S = 2xy \text{ معادله ی اولیه}$$

$$y = 12 - x^2 \text{ معادله ی ثانویه}$$



اگر $y = 12 - x^2$ را در معادله ی اولیه قرار دهیم، معادله ی

دارای ماکزیمم نسبی است. در نتیجه:

$$V = \frac{2}{3} \pi r \left(\frac{4}{3} r\right)^2 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{4}{3} r\right)^3 = \frac{32}{81} \pi r^3$$

تمرین های تکمیلی

۱. مطلوب است عددی از بازه $[0, 1]$ که تفاضل بین آن عدد و مربعش ماکزیمم باشد.
۲. مطلوب است مساحت بزرگ ترین مستطیل قابل محاط در یک دایره به شعاع r .
۳. دو عدد مثبت چنان بیابید که مجموع آن ها برابر 220 و حاصل ضرب آن ها ماکزیمم باشد.
۴. مطلوب است، ابعاد استوانه ی مستدیر قائم بایش ترین حجم که بتوان آن را در یک مخروط مستدیر قائم به شعاع 5 سانتی متر و ارتفاع 12 سانتی متر محاط کرد.
۵. دایره ای با معادله ی $x^2 + y^2 = 9$ مفروض است. مطلوب است: الف) کوتاه ترین فاصله از نقطه ی $(5, 4)$ تا نقطه ای از دایره؛ ب) بیش ترین فاصله از نقطه ی $(5, 4)$ تا نقطه ای از دایره.
۶. مینیمم فاصله ی منحنی به معادله ی $y = x^2 - 2x$ از خط $y = 2x - 9$ را به دست آورید.
۷. خط $y = m > 0$ منحنی تابع به معادله ی $y = 27 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می کند (O مبدأ مختصات است). اندازه ی ماکزیمم مساحت OAB را به دست آورید.
۸. در بیضی به معادله ی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، مستطیلی را که اضلاعش موازی محورهای مختصات است، محاط کرده ایم. ماکزیمم مساحت مستطیل را بیابید.
۹. یک قاعده ی دوزنقه ی متساوی الساقینی 4 متر و هریک از ساق های آن 2 متر است. قاعده ی دیگر چند متر باشد تا مساحت دوزنقه ماکزیمم باشد؟
۱۰. در مثلث قائم الزاویه ای، مجموع اندازه های وتر و یک ضلع مقدار ثابت k است. اگر مساحت مثلث ماکزیمم باشد، اندازه ی زوایای حاده ی آن را تعیین کنید.

با توجه به جدول بالا ملاحظه می کنیم که تابع f در $r = \frac{15}{4}$

دارای ماکزیمم نسبی است.

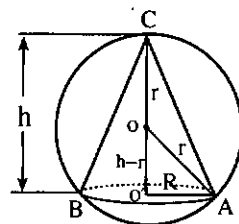
۱۰. حجم بزرگ ترین مخروط دواری را بیابید که در

درون کره ای به شعاع r محاط شده است.

حل: فرض کنیم، شعاع قاعده ی مخروط R و ارتفاع

آن h ، و شعاع کره r باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} OO'A: OA^2 &= OO'^2 + O'A^2 \Rightarrow r^2 = (h-r)^2 + R^2 \\ &\Rightarrow R^2 = r^2 - (h-r)^2 \\ &\Rightarrow R^2 = 2rh - h^2 \end{aligned}$$



معادله ی اولیه: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

معادله ی ثانویه: $R^2 = 2rh - h^2$

اگر $R^2 = 2rh - h^2$ را در معادله ی اولیه قرار دهیم،

معادله ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده ایم:

$$V = \frac{1}{3} \pi (2rh - h^2) h = \frac{2}{3} \pi rh^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(h) = \frac{2}{3} \pi rh^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$

را به دست می آوریم:

$$f'(h) = \frac{4}{3} \pi rh - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = 0, h = \frac{4}{3} r$$

h	$-\infty$	0	$\frac{4}{3} r$	$+\infty$
$f'(h)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(h)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می کنیم، تابع f در $h = \frac{4}{3} r$