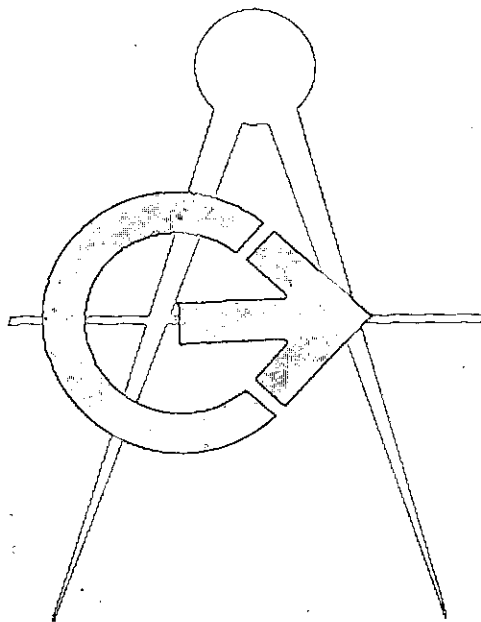




کاربرد دترمینان

(قسمت اول)

• سیامک جعفری از (اهواز)

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

و خواص زیر را به کمک دترمینان بسادگی اثبات کرد:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{c})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$$

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه $A(0, 1, 2)$ و

$B(1, -2, 0)$ بگذرد و بر صفحه به معادله $2x - 3y + 5z - 1 = 0$

عمود باشد.

حل:

الف) بدون استفاده از دترمینان

$$P \perp P' \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b + 5c = 0 \\ b + 2c + d = 0 \\ a - 2b + d = 0 \end{cases}$$

$$A \in P' \Rightarrow \begin{cases} b + 2c + d = 0 \\ a - 2b + d = 0 \end{cases}$$

$$B \in P' \Rightarrow \begin{cases} b + 2c + d = 0 \\ a - 2b + d = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه سه معادله، بر حسب d خواهیم داشت:

$$c = d, b = -2d, a = -7d$$

$$P': -7x - 3y + z + 1 = 0$$

معادله صفحه P' خواهد شد:

ب) به کمک دترمینان

دترمینان زیر را حساب کنید:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

معمول است که دترمینان را در ضمن درس ماتریسها عنوان

می‌کنند و البته این روش مزیت‌هایی دارد. در اینجا دترمینان را به صورت

یک تابع عددی که دامنه آن مجموعه‌ای از ماتریسهای مربع است

تعریف می‌کنیم.

یادآوری: یادآوری دو نکته از کتابهای درسی ضروری است. ابتدا

دستگاه سه معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

با عملیاتی که آشنا هستید جواب این دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{array}{c|c|c} x & y & z \\ \hline \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

نکته دوم اینکه حاصلضرب سه گانه اسکالر بسادگی به صورت زیر

به دست می‌آید:

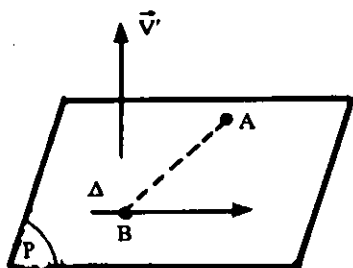
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

و به دست آوردن این دترمینان با یک روش مشابه ساده خواهد بود.

نقطه دلخواهی مانند B از خط Δ را اختیار می‌کنیم.

$$\vec{V} = \vec{\Delta} \wedge \vec{AB} \quad \text{بردار قائم صفحه}$$

$$P \equiv \vec{BM} \cdot (\vec{\Delta} \wedge \vec{AB}) = 0 \quad \text{معادله صفحه P}$$



که همان دترمینان بالا را می‌دهد به شکل کلی زیر:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه $A(2,0,-1)$ و $B(1,-1,2)$ و $C(0,2,1)$ می‌گذرد.

حل:

الف) بدون دترمینان

$$P: ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{aligned} A \in P &\Rightarrow \begin{cases} 2a-c+d=0 \\ a-b+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases} \\ B \in P &\Rightarrow \\ C \in P &\Rightarrow \end{aligned}$$

از حل دستگاه اخیر به دست می‌آید:

$$a = -\frac{2d}{3}, b = -\frac{d}{3}, c = -\frac{d}{3}$$

$$-\frac{2d}{3}x - \frac{d}{3}y - \frac{d}{3}z + d = 0$$

$$P: 2x+y+z-3=0$$

ب) به کمک دترمینان

M نقطه‌ای از صفحه است.

$$\vec{V} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} \quad \text{بردار قائم}$$

$$P \equiv \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0 \quad \text{معادله صفحه}$$

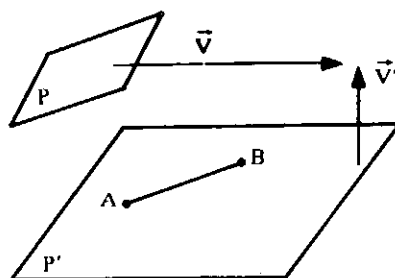
$$\Rightarrow -7x-3y+z+1=0$$

و به دست آوردن این دترمینان ساده است. یاد داشته باشید که در روش اول ما محل دستگاه را بر حسب d به عهده خودتان گذاشتیم.

اگر V' بردار قائم صفحه باشد:

$$\vec{V}' = \vec{V} \wedge \vec{AB} \quad \text{بردار قائم}$$

$$P' \equiv \vec{AM} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{AB}) = 0 \quad \text{معادله } P'$$



که همان ضرب اسکالر سه گانه است و دترمینان بالا را نتیجه می‌دهد.

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط Δ به معادلات $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ بوده و از نقطه $A(1,2,3)$ بگذرد.

حل:

الف) بدون کمک دترمینان

مختصات نقطه غیر مشخص از خط Δ که معادله‌های پارامتری آن

به صورت $x=y=t$ و $z=0$ است باید به ازاء هر مقدار t:

$$at+bt+0+d=0$$

این رابطه برقرار باشد.

$$A \in P \Rightarrow \begin{cases} a+2b+3c+d=0 \\ a+b=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ a=-b \\ c=\frac{a}{3} \end{cases}$$

معادله صفحه خواهد شد:

$$P: 3x-2y+z=0$$

ب) به کمک دترمینان

دترمینان زیر را بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1-1 & 1-2 & 0-3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

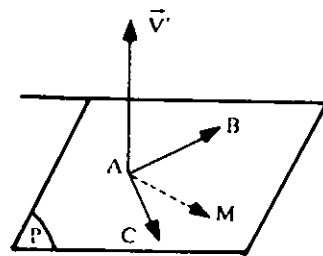
$$B \in \Delta: (1,1,0)$$

$$\Rightarrow 3x-2y+z=0$$

با توجه به بحث بالا در معادله صفحه اگر سه بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ داشته باشیم که در یک صفحه باشند از روی شکل بسادگی دیده می شود که:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$$P = \vec{V}_1 \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = 0$$



که اگر این ضرب سه گانه اسکالر را انجام دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مسئله: دو صفحه P و Q به معادلات $P: 4x+y-2z=0$ و $Q: y-2z=0$ مفروضند. معادله صفحه‌ای را که از فصل مشترک دو صفحه P و Q گذشته و بر صفحه R به معادله $R: x-2y+z=1$ عمود است بنویسید.

حل:

الف) بدون دترمینان

به کمک دسته صفحه داریم:

$$y-2z+\alpha(4x+y-2z)=0$$

$$4\alpha x+(1+\alpha)y-2z-2\alpha=0$$

بردار قائم صفحه مورد نظر بر بردار قائم R عمود است.

$$\vec{V}(4\alpha, 1+\alpha, -2)$$

$$1(4\alpha)-2(1+\alpha)+1(-2)=0 \Rightarrow \alpha=2$$

$$8x+3y-2z-4=0$$

معادله صفحه مطلوب:

ب) به کمک دترمینان

فصل مشترک دو صفحه یک خط Δ است. بنابراین باید معادله صفحه‌ای را پیدا کرد که از یک خط گذشته و بر صفحه دیگر عمود باشد (یا با بردار قائمی موازی باشد).

$$\text{اگر } z=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow A=(\frac{1}{4}, 0, 0)$$

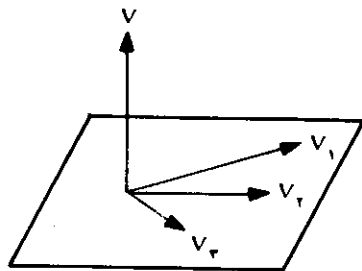
$$\text{اگر } z=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow B=(0, 2, 1)$$

$$\vec{V}' = \vec{V} \wedge \vec{AB}$$

بردار قائم

$$P \equiv \vec{AM} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{AB}) = 0 \quad \text{معادله صفحه}$$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{4} & y & z \\ -\frac{1}{4} & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x+3y-2z-4=0$$



بنابراین می توان گفت شرط اینکه سه بردار V_1 و V_2 و V_3 در یک صفحه باشند این است که دترمینان زیر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

مشابه بحث بالا می توان شرط اینکه چهار نقطه در یک صفحه واقع باشند را پیدا کرد. معادله صفحه‌ای که از سه نقطه می گذشت را بیاد داریم

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

حال اگر نقطه‌ای به مختصات $A(x_0, y_0, z_0)$ در صفحه باشد باید در معادله صفحه صدق کند. پس شرط اینکه چهار نقطه روی یک صفحه باشند به دست آمد.

$$\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

تست ۱) کدامیک از خطوط زیر متقاطع هستند:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{+2} = \frac{z+2}{-3}$$

الف) ۱ و ۲

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-2}{4}$$

ب) ۱ و ۳

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{1}$$

ج) ۲ و ۳

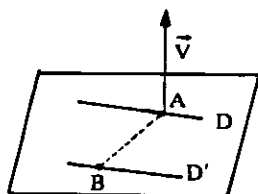
د) هیچکدام

حل: با توجه به شکل اگر دترمینان زیر برابر صفر شد دو خط متقاطع هستند.

$$\begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

حل: از روی شکل کاملاً مشخص است که معادله خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$



که خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(y-2z) = 0 \Rightarrow y-2z = 0$$

تست ۳) معادله صفحه‌ای که بر خط $D: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ می‌گذرد و بر صفحه $P: x-2y+z-5=0$ عمود است کدامیک می‌باشد.

الف) $19x-12y+z-18=0$

ب) $11x+2y-7z+16=0$

ج) $x-5y-3z=0$

د) $x+y+2z+3=0$

با آزمایش دترمینان برای خطوط ۱ و ۳

$$A \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6-0 & -1+5 & -2-4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

از امتحان دو حالت دیگر که متافره هستند صرف نظر می‌کنیم. پس جواب ب درست است.

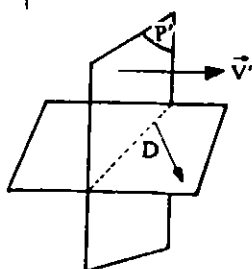
تست ۲) معادله صفحه‌ای که شامل دو خط موازی به معادلات $D: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ و $D': \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ کدام است.

الف) $y+2z=0$

ب) $y-2z+1=0$

ج) $y-2z=0$

د) $x+y-2z=1$



باشند) چیست؟

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$P_3: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$



اندیشه ریاضی

آیا در جبر بول عمل تفریق وجود دارد؟

در کمیت بولی x و y را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تفاضل این دو کمیت را تعریف کنیم. یک کمیت z جست و جو می‌کنیم به طوری که تساوی زیر برقرار باشد.

$$x = y + z \quad (1)$$

سه حالت ممکن است پیش آید

حالت اول. اگر $y = 0$ باشد در این صورت از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که $x = z$ یعنی اگر $x = 0$ باشد آنگاه $z = 0$ و اگر $x = 1$ باشد آنگاه $z = 1$ پس در حالتی که $y = 0$ است مقدار z مشخص نیست.

حالت دوم. اگر $y = 1$ و $x = 1$ باشد در این حالت از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که z می‌تواند صفر یا یک باشد. پس مقدار z در این حالت مشخص نیست.

حالت سوم. اگر $x = 1$ و $y = 0$ باشد در این حالت از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که برای z مقداری وجود ندارد. مختصر آن که در حالت اول می‌توان عمل تفریق تعریف کرد و در دو حالت دیگر نمی‌توان عمل تفریق تعریف کرد. پس در جبر بول در حالت کلی نمی‌توان عمل تفریق

تعریف کرد. ● دکتر احمد شرف‌الدین

تمرین:

(۱) نشان دهید معادله صفحه‌ای که از نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و با دو بردار $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ موازی است به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

(۲) نشان دهید معادله صفحه‌ای که از خط $\frac{x-x'}{k} = \frac{y-y'}{l} = \frac{z-z'}{m}$ می‌گذرد و از نقطه‌ای به مختصات (x_0, y_0, z_0) غیر واقع بر این خط گذشته به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'-x_0 & y'-y_0 & z'-z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$$

(۳) نشان دهید شرط اینکه چهار نقطه روی یک صفحه باشند آن است که

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(۴) نشان دهید اگر فصول مشترک صفحات زیر متقاطع باشند

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

در تریپتان زیر همواره برابر صفر است:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

(۵) شرط این که سه صفحه روبرو در یک خط هم‌رأس باشند را بدست آورید. شرط این که در یک نقطه هم‌رأس باشند (مشترک