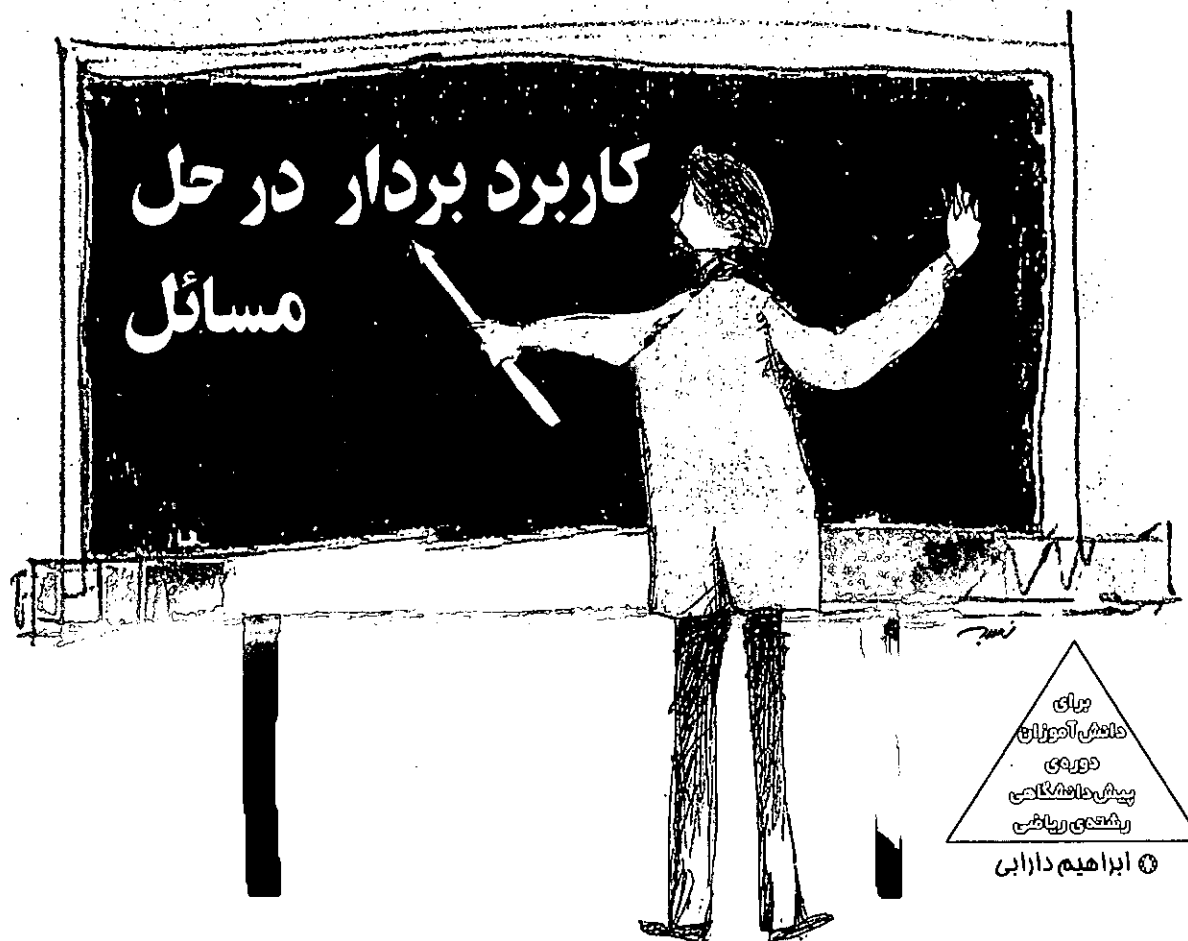




۲. تصویرهای بردار a را روی محورهای ox ، oy و oz در دستگاه xyz ، به ترتیب با x ، y و z نشان می‌دهند و آن‌ها را مختصات بردار a می‌نامند و می‌نویسند:

$$\vec{a} = (x, y, z) \text{ یا } \vec{a}(x, y, z)$$

۳. دو بردار a ، b با مختصات $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ با یکدیگر مساوی هستند؛ اگر و تنها اگر:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

بردار در همه‌ی عرصه‌های علوم، از جمله ریاضیات کاربرد زیادی دارد. در این جا کاربرد بردار در حل معادله، نامعادله، اثبات نامساوی‌ها، تعیین ماکزیمم توابع و نیز حل دستگاه معادله‌ها مورد توجه ما است.

برای یادآوری، به بعضی از ویژگی‌های بردار اشاره می‌کنیم:

۱. هر پاره خط جهت دار را بردار می‌نامند. برداری که ابتدای آن A و انتهای آن B باشد، با نماد $\vec{AB}$ نشان داده می‌شود.

بردار را با حروف کوچک لاتین، مانند: $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم نشان می‌دهند.

$$z_1 = z_2 = 0$$

چون در این مقاله به ویژگی‌های دیگر بردارها نیازی نیست، از آوردن آن‌ها خودداری می‌شود.

مقاله را با حل مثال پی می‌گیریم و به پایان می‌بریم.

مثال ۱. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x^2 + 4x^2 + 2x + 8} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

حل: ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x^2 + 2)(x + 4)} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

اکنون با توجه به صورت مسأله، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(x, \sqrt{2}), \vec{b}(\sqrt{x}, 2)$$

داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 2}, |\vec{b}| = \sqrt{x + 4}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

بنابر فرمول (الف) داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

اما چون در این مسأله داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

(صورت مسأله را نگاه کنید).

پس بنابر فرمول (ب)، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند و داریم:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ در دامنه‌ی تعریف معادله قرار دارد

($D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$) و در معادله صدق می‌کند. پس $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله است.

۴. طول $\vec{a}(x, y, z)$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

۵. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ موازی و یا بریک

استقامت هستند، اگر:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

۶. ضرب داخلی و یا ضرب اسکالر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

که در آن φ زاویه‌ی بین دو بردار است.

از تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

۷. ضرب داخلی دو بردار بر حسب مختصات آن‌ها، به

صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

۸. از ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نتیجه می‌شود که اگر این

دو بردار موازی و یا بریک استقامت باشند، آن‌گاه:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (\text{ب})$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{پ})$$

و اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر یکدیگر عمود باشند، آن‌گاه:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(ت) یا:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در صفحه‌ی xoy قرار داشته باشند، آن‌گاه:

مثال ۲. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\cos x \sqrt{2 - 2 \sin^2 x} + \sqrt{1 - 2 \cos^2 x} = \sqrt{\cos^2 x + 1}$$

حل: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(\cos x, 1), \vec{b}(\sqrt{2 - 2 \sin^2 x}, \sqrt{1 - 2 \cos^2 x})$$

داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\cos^2 x + 1}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2 - 2 \sin^2 x + 1 - 2 \cos^2 x} = 1$$

با توجه به صورت مسأله و بنابر فرمول (ب) داریم:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \cos x \sqrt{2 - 2 \sin^2 x} + \sqrt{1 - 2 \cos^2 x} \\ \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| &= 1 \times \sqrt{\cos^2 x + 1} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2 - 2 \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos^2 x}} \Rightarrow$$

$$\cos^2 x (1 - 2 \cos^2 x) = 2 - 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos^4 x + 2 - 2(1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^4 x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x (2 \cos^2 x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۳. اگر $a + b + c = 11$ ، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\sqrt{2a+3} + \sqrt{2b+4} + \sqrt{2c+7} \leq 6\sqrt{2}$$

اثبات: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{x}(\sqrt{2a+3}, \sqrt{2b+4}, \sqrt{2c+7}), \quad \vec{y}(1, 1, 1)$$

داریم:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(2a+3) + (2b+4) + (2c+7)} = \sqrt{2(a+b+c) + 14} = 6$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \times \sqrt{2a+3} + 1 \times \sqrt{2b+4} + 1 \times \sqrt{2c+7}$$

بنابر فرمول (الف) داریم:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| |\vec{y}| \Rightarrow \sqrt{2a+3} + \sqrt{2b+4} + \sqrt{2c+7} \leq 6\sqrt{3}$$

مثال ۴. اگر x, y, z اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

اثبات: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(x, y, z), \quad \vec{b}(y, z, x)$$

داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow xy + yz + zx \leq (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$$

مثال ۵. ماکزیمم تابع $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}$ را در

بازه‌ی $[-1, 0]$ پیدا کنید.

حل: بردارهای $\vec{a}(\sqrt{3-x}, \sqrt{1+x})$ و $\vec{b}(1, 1)$ را در نظر

می‌گیریم. داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3-x+1+x} = \sqrt{4} = 2, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow 1 \times \sqrt{3-x} + 1 \times \sqrt{1+x} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{1+x} \leq 2\sqrt{2}$$

مقدار تابع را در کرانه‌های بازه‌ی $[-1, 0]$ حساب

می‌کنیم:

$$f(-1) = 2, \quad f(0) = \sqrt{3} + 1$$

$$2\sqrt{2} > \sqrt{3} + 1 > 2 \Rightarrow \text{Max}(y) = 2\sqrt{2}$$

مثال ۶. ماکزیمم تابع $y = \sqrt{3} \cos^2 2x + 2 + \sqrt{3} \sin^2 2x + 4$ را حساب کنید.

حل: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(\sqrt{3} \cos^2 2x + 2, \sqrt{3} \sin^2 2x + 4), \quad \vec{b}(1, 1)$$

داریم:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{3 \cos^2 2x + 2 + 3 \sin^2 2x + 4} = \sqrt{3(\sin^2 2x + \cos^2 2x) + 6} \\ &= \sqrt{3 + 6} = 3 \end{aligned}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} \cos^2 2x + 2 + 1 \times \sqrt{3} \sin^2 2x + 4$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &\leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow y = \sqrt{3} \cos^2 2x + 2 + \sqrt{3} \sin^2 2x + 4 \leq 3\sqrt{2} \\ \Rightarrow \text{Max}(y) &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

مثال ۷. ماکزیمم عبارت $S = a \sin x + b \cos x$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{a}(a, b)$ و $\vec{b}(\sin x, \cos x)$ را در نظر می‌گیریم.

داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow a \sin x + b \cos x \leq 1 \times \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \text{Max}(S) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال ۸. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + y(2x + z) = 0 \\ 4x^2 + 2x + y + 2yz = 0 \\ 12x^2 + 8y^2 + 16xy + 8yz = 4x + 4z + 2 \end{cases} \quad (1)$$

حل: دستگاه (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2x(2x + y) + y(y + z) = 0 \\ 2x(2x + 1) + y(2z + 1) = 0 \\ 4(2x + y)^2 + 4(y + z)^2 = (2x + 1)^2 + (2z + 1)^2 \end{cases} \quad (2)$$

اکنون با توجه به معادله‌های دستگاه (۲)، بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(2x, y), \quad \vec{b}(2x + y, y + z), \quad \vec{c}(2x + 1, 2z + 1)$$

داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x(2x + y) + y(y + z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2x(2x + 1) + y(2z + 1)$$

$$\vec{b}^2 = (2x + y)^2 + (y + z)^2$$

$$\vec{c}^2 = (2x + 1)^2 + (2z + 1)^2$$

با توجه به معادله سوم دستگاه (۲) و مقدار

$$\vec{c}(2x + 1, 2z + 1) \text{ معلوم می‌شود که:}$$

$$4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$$

اکنون دستگاه (۲) را بر حسب $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ 4\vec{b}^2 = \vec{c}^2 \end{cases} \quad (3)$$

این دستگاه را حل می کنیم.

اگر $\vec{a}(2x, y) = \vec{0}$ ، آن گاه:

$$2x = y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

اما اگر $\vec{a} = \vec{0}$ ، آن گاه: $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

در نتیجه دو حالت وجود دارد:

$$\begin{cases} \vec{c} = \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases} \quad \text{یا}$$

از یک طرف، اگر $\vec{c}(2x+1, 2z+1) = \vec{0}$ ، آن گاه:

$$\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون با فرض $x=y=0$ این دستگاه را تشکیل داده ایم، پس

در این حالت این جواب ها قابل قبول نیستند.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$2x(2x+y) + y(2z+1) = 0$$

$$\Rightarrow 0 + y(2z+1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, z = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $\vec{a} \neq \vec{0}$ ، آن گاه از دستگاه (۳) نتیجه

می شود:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{c}$$

و چون $\vec{c} = \vec{a} \pm 2\vec{b}$ یا $\vec{c} = \pm 2\vec{b}$ ، بنابراین در حالت

$\vec{c} = 2\vec{b}$ ، طول و عرض $\vec{c}$ ، دو برابر طول و عرض $\vec{b}$

خواهد بود:

$$\begin{cases} 2x+1=2(2x+y) \\ 2z+1=2(y+z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=0, y=\frac{1}{2}, z \in \mathbb{R}$$

به ازای $x=0$ و $y=\frac{1}{2}$ ، از معادله ی دوم دستگاه (۲) مقدار

z را پیدا می کنیم:

$$2x(2x+1) + y(2z+1) = 0$$

$$0 + \frac{1}{2}(2z+1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

پس در این حالت داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در حالت $\vec{c} = -2\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a} \parallel -2\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=-2(2x+y) \\ 2z+1=2(y+z) \end{cases} \Rightarrow x=0, y=-\frac{1}{2}$$

اگر این مقادیر را در معادله ی دوم دستگاه (۲) قرار دهیم،

نتیجه می شود:

$$0 - \frac{1}{2}(2z+1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

منبع مقاله و توضیح آن.....

در یکی از شماره های مجله ی «ریاضیات در مدرسه» (چاپ مسکو)، مقاله ای در ارتباط با این موضوع چاپ شده بود. من آن را ترجمه کردم و در کتاب «نخستین گام ها در المپادهای ریاضی» (جلد سوم، ویرایش دوم، انتشارات پیشروان-مبتکران) آوردم. با توجه به محتوای مقاله و قابل درک بودن آن برای دانش آموزان، فکر می کنم آوردن آن در مجله ی رشد برهان متوسطه به گونه ی دیگر، می تواند دیدگاه دیگری از کاربرد بردارها پیش روی دانش آموزان بگشاید. بر این اساس و با حفظ محتوای مقاله، مسائلی را متمایز از مسائل مطرح در آن کتاب، تنها برای چاپ در این مجله طرح و حل کرده ام. با توجه به برد وسیعی که مجله ی رشد برهان دارد، امیدوارم گروه وسیعی از دانش آموزان از آن بهره ببرند.