

چند نکته درباره $f(x)$ ها

● احمد قندهاری

پنج مورد رابه صورتهای زیر نام گذاری می کنیم :

۱- مسأله اصلی $f(x)$:

یعنی $f(x)$ معلوم است، می خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. بدیهی است برای محاسبه $f(h(x))$ باید در تساوی $f(x)$ به جای هر x ، $h(x)$ را قرار دهیم. توجه کنید، این عمل یک جایگذاری است، به معنی این که $h(x)$ با x برابر نمی باشد.

مثال (۱): اگر $f(x) = 3x - 4x^2$ ، آن گاه $f(\sin \alpha)$ را بیابید.

حل: باید در تساوی $f(x)$ به جای هر x ، $\sin \alpha$ را قرار دهیم :

$$\Rightarrow f(\sin \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^2 \alpha$$

اگر کمی دقت کنیم، با توجه به فرمول :

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

می توان نوشت :

$$f(\sin \alpha) = \sin 3\alpha$$

مثال (۲): اگر $f(x) = x^5$ ، آن گاه $f(f(f(x)))$ را بیابید.

حل: محاسبه $f(f(x))$ چنین است که باید در تساوی $f(x)$ ، به جای هر x ، $f(x)$ را قرار دهیم، $f(f(x))$ را $h(x)$ می نامیم.

$$h(x) = f(f(x)) = (x^5)^5 = x^{25}$$

$$f(f(f(x))) = f(h(x)) = f(x^{25}) = (x^{25})^5 = x^{125}$$

هر عبارت بر حسب x را می توان با $f(x)$ نشان داد^۱.

به عنوان مثال: $f(x) = 2x - 4$ ، $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ،

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ، $f(x) = \sin^2 x - 1$ ، $f(x) = \text{Arctan } x$ و...

بحث این مقاله در مورد انواع $f(x)$ ها است و می خواهیم درباره پنج مورد اساسی مربوط به $f(x)$ ها مطالبی را به شرح زیر عنوان کنیم :

۱- فرض کنیم $f(x)$ معلوم است، می خواهیم $f(h(x))$ را بیابیم.

۲- فرض کنیم $f(g(x))$ معلوم است، می خواهیم $f(x)$ را بیابیم.

۳- رابطه ای مانند $af(h(x)) + bf(t(x)) = g(x)$ مفروض است. می خواهیم $f(x)$ را پیدا کنیم.

۴- فرض کنیم $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است، می خواهیم $g(x)$ را پیدا کنیم.

۵- فرض کنیم $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است، می خواهیم $g(x)$ را پیدا کنیم. حال به توضیح و تشریح هریک از موارد پنج گانه گفته شده می پردازیم. برای آنکه مطلب بهتر به خاطر بماند، این

۱- اول کلمه function است که به طور معمول به عنوان ضابطه تابعی از x به کار می رود.

نتیجه:

$$f(x) = x^n \Rightarrow \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{\text{مرتبه } m} = x^{n^m}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

۲- مسأله یافتن $f(x)$:

یعنی $f(h(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم.
روش اول: $h(x)$ را مساوی a فرض می‌کنیم، از این جا x را پیدا کرده، در مسأله قرار می‌دهیم.

مثال (۱): اگر $f(2x-1) = 4x^2 - 4x + 5$ آن گاه $f(x)$ را

بیابید.

$$2x-1=a \Rightarrow x=\frac{a+1}{2}$$

$$f(a)=4\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-4\left(\frac{a+1}{2}\right)+5$$

$$=4\left(\frac{a^2+2a+1}{4}\right)-2(a+1)+5$$

$$=a^2+2a+1-2a-2+5$$

$$=a^2+4$$

حل:

حال به جای a ، x را قرار می‌دهیم:

روش دوم: عبارت سمت راست را بر حسب $(2x-1)$ می‌نویسیم (اگر مقدور باشد)، سپس در کل تساوی $(2x-1)$ را به x تبدیل می‌کنیم. بهتر است این را روش تبدیل بنامیم.

$$f(2x-1)=4x^2-4x+1+4$$

$$f(2x-1)=(2x-1)^2+4 \quad 2x-1 \xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2+4$$

روش سوم: روش عددگذاری است که به طور معمول در تست‌های رایج است، فرض کنید این مثال به صورت تست زیر باشد:

اگر $f(2x-1) = 4x^2 - 4x + 5$ ، آن گاه $f(x)$ کدام است؟

$$x^2 - 4 \quad (2) \quad x^2 + x + 3 \quad (1)$$

$$x^2 + 3 \quad (4) \quad x^2 + 4 \quad (3)$$

حل: به جای x عددی مانند (۱) قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f(1) = 4 - 4 + 5 \Rightarrow f(1) = 5$$

حال می‌گوییم گزینه‌ای درست است که $f(1)$ آن (۵) باشد.

ملاحظه می‌کنیم هم گزینه (۱) درست است و هم گزینه (۳)، حال عددی دیگری مانند (۰) را به جای x قرار می‌دهیم.

$$f(-1) = 0 - 0 + 5 \Rightarrow f(-1) = 5$$

مثال (۳): اگر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ، آن گاه $f(f(\frac{1}{x}))$ را

$(x \neq 0)$ بیابید.

حل: ابتدا $f(\frac{1}{x})$ را $h(x)$ می‌نامیم و آن را تشکیل می‌دهیم:

$$h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

سپس $f(f(\frac{1}{x}))$ که همان $f(h(x))$ است را تشکیل می‌دهیم:

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = h(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1-x$$

در سه مثال ذکر شده، $f(x)$ شامل یک متغیر x بود، ولی ممکن است f شامل چند متغیر باشد که آن را به صورتهای زیر نشان می‌دهیم:

$$f(x, y, z, \dots), f(x, y, z), f(x, y)$$

به مثالهای زیر دقت کنید:

مثال (۴): اگر $f(x, y) = x^2 + 4xy$ ، آن گاه $f(\sin \alpha, \cos \alpha)$ را

بیابید.

حل: برای ساختن $f(\sin \alpha, \cos \alpha)$ باید به جای x ، $\sin \alpha$ و به جای y ، $\cos \alpha$ را قرار دهیم:

$$f(\sin \alpha, \cos \alpha) = \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \sin^2 \alpha + 2 \sin 2\alpha$$

مثال (۵): اگر $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ ، آن گاه

$f(a-b, b-c, c-a)$ را بیابید.

حل: باید به جای x ، $(a-b)$ و به جای y ، $(b-c)$ و به جای z ، $(c-a)$ را قرار دهیم:

$$f(a-b, b-c, c-a) = (a-b)(b-c) +$$

$$(b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)$$

اگر سمت راست را در هم ضرب و جمع جبری کنیم:

$$f(a-b, b-c, c-a) = ab + ac + bc - (a^2 + b^2 + c^2)$$

حل: روش اول

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$

داشتیم: $f(x+y, x-y) = xy \Rightarrow f(a, b) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2}$

$$\Rightarrow f(a, b) = \frac{a^2 - b^2}{4} \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{4}$$

روش دوم (روش تبدیل):

می‌دانیم که:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = ab$$

$$\Rightarrow f(x+y, x-y) = x \cdot y = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

حال $(x+y)$ را به x و $(x-y)$ را به y تبدیل می‌کنیم:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{4}$$

مثال (۶): اگر

$$f(x+y, x-y) = 2 \sin x \sin y + \cos x + \cos y$$

آن گاه $f(x, y)$ را بیابید.

حل: روش تبدیل:

$$\begin{cases} 2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$f(x+y, x-y) = \cos(x-y) - \cos(x+y) +$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

حال $(x+y)$ را به x و $(x-y)$ را به y تبدیل می‌کنیم:

$$f(x, y) = \cos y - \cos x + 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$$

مثال (۷): اگر $x < 0$ و $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ آن گاه $f(x)$ را

بیابید.

توجه:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} = \sqrt{2x^2} \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\sqrt{2} = -\sqrt{2x^2} \\ x < 0 \end{cases}$$

حال بین دو گزینه (۱) و (۳) امتحان می‌کنیم، درگزینه (۱)
 $f(-1) = 3$ ولی درگزینه (۳)، $f(-1) = 5$ پس گزینه (۳)
 درست است. ممکن است در تستها با همان عمل اول گزینه
 جواب مشخص شود.

مثال (۲): اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ آن گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: از روش تبدیل استفاده می‌کنیم.

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

مثال (۳): اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$ آن گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: از روش تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right]^2 - 2 = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right]^2 - 2$$

$$x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2)^2 - 2$$

توجه: ممکن است روش تبدیل در یک مسأله مقدور نباشد.

مانند مثال زیر:

مثال (۴): اگر $x > 0$ و $x > \frac{1}{x}$ و $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ آن گاه $f(x)$ را بیابید.

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

حل:

طرفین تساوی را به توان (۲) می‌رسانیم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2 \text{ می‌کنیم: } x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = a^2 - 4 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 - 4$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4} \quad : x > \frac{1}{x} \text{ و } x > 0$$

$$x + \frac{1}{x} = a \text{ و } x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$$

$$: f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$f(a) = a\sqrt{a^2 - 4} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$$

مثال (۵): اگر $f(x+y, x-y) = x \cdot y$ آن گاه $f(x, y)$ را

بیابید.

$$\Rightarrow f \circ f \circ f(\sqrt{\cos 2\alpha}) = f(\sqrt{\cos 2\alpha}) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow f \circ f \circ f \circ f(\sqrt{\cos 2\alpha}) = f(\operatorname{tg} \alpha) = \sqrt{\cos 2\alpha}$$

به همین ترتیب نتیجه می گیریم:

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرتبۀ } 2n}(\sqrt{\cos 2\alpha}) = \sqrt{\cos 2\alpha}$$

حال به روش استقراء ثابت می کنیم:

$$n=1 \Rightarrow f \circ f(\sqrt{\cos 2\alpha}) = \sqrt{\cos 2\alpha} \quad \text{داشتیم}$$

$$n=k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرتبۀ } 2k}(\sqrt{\cos 2\alpha}) = \sqrt{\cos 2\alpha}$$

$$n=k+1 \Rightarrow \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرتبۀ } 2(k+1)}(\sqrt{\cos 2\alpha}) = \sqrt{\cos 2\alpha}$$

$$= \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرتبۀ } 2k}(\sqrt{\cos 2\alpha}) = f \circ f(\sqrt{\cos 2\alpha}) = \sqrt{\cos 2\alpha}$$

مثال ۱۱: اگر برای عددهای حقیقی x, y و عدد طبیعی n داشته باشیم: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و $f(1) \neq 0$ ثابت کنید:

$$f(n) = nf(1)$$

$$n=1 \Rightarrow f(1) = f(1)$$

فرض می کنیم به ازای $n=k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $f(k) = kf(1)$. حال ثابت می کنیم به ازای $n=k+1$ نیز رابطه فوق برقرار است:

$$\begin{cases} x=k \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow f(k+1) = f(k) + f(1) \\ f(k+1) = kf(1) + f(1) \\ \Rightarrow f(k+1) = (k+1)f(1)$$

۳- مسأله گسترده $f(x)$

مسائلی است به صورت $af(h(x)) + bf(t(x)) = g(x)$ می خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم. باید عملی انجام دهیم که $h(x)$ و $t(x)$ به یکدیگر تبدیل شوند. آن گاه دستگاه حاصل را حل کرده و $f(x)$ را محاسبه می کنیم.

مثال ۱: اگر $3f(x) + 2f(-x) = 10x - 12$ ، آن گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: اگر در رابطه بالا x به $-x$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$3f(-x) + 2f(x) = -10x - 12$$

حال با رابطه اولیه یک دستگاه می سازیم.

حل: روش تبدیل

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

حال $\left(\frac{y}{x}\right)$ را به x تبدیل می کنیم:

$$f(x) = -\sqrt{1+x^2}$$

مثال (۸): اگر $f\left(\frac{x-4}{y+5}\right) = \frac{y-x+9}{x+y+1}$ ، آن گاه $f\left(\frac{y}{x}\right)$

رایباید.

حل: روش تبدیل

$$f\left(\frac{x-4}{y+5}\right) = \frac{(y+5)-(x-4)}{(x-4)+(y+5)}$$

حال $(x-4)$ را به y و $(y+5)$ را به x تبدیل می کنیم.

$$\Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x-y}{y+x}$$

مثال (۹): اگر

$$f(\sin 2\alpha) \cdot f\left(\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

بیابید.

حل: $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ فرض می شود.

$$f\left(2x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \times \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f\left(2x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \times \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow f(2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$\Rightarrow f(\sin 2\alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$$

مثال (۱۰): اگر $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ و $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، آن گاه

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرتبۀ } 2n}(\sqrt{\cos 2\alpha}), n \in \mathbb{N}$$

حل:

$$f\sqrt{\cos 2\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f \circ f(\sqrt{\cos 2\alpha}) = f(\operatorname{tg} \alpha) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \alpha \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)} = \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos 2\alpha}$$

$$2g(x) - 3 = 6x^2 + 4x^2 - 1 \Rightarrow 2g(x) = 6x^2 + 4x^2 + 2 \\ \Rightarrow g(x) = 3x^2 + 2x^2 + 1$$

مثال ۲: اگر $f(x) = 4x - 5$ و $f(g(x)) = 8x^2 + 8x - 1$ را بیابید.

$$f(g(x)) = 8x^2 + 8x - 1 \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow 4g(x) - 5 = 8x^2 + 8x - 1 \Rightarrow g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$g(f(x)) = g(4x - 5) = 2(4x - 5)^2 + 2(4x - 5) + 1$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = 32x^2 - 72x + 41$$

۵ - مسأله ترکیبی

وقتی $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساخت $g(f(x))$ ، مسأله به شماره ۲ درس (مسأله یافتن $f(x)$ تبدیل می‌شود).

مثال ۱: اگر $f(x) = 2x - 5$ و $g(f(x)) = 4x^2 - 20x + 1$ را بیابید.

$$g(f(x)) = 4x^2 - 20x + 1 \quad \text{حل:}$$

$$g(2x - 5) = 4x^2 - 20x + 1$$

$$g(2x - 5) = (2x - 5)^2 - 24$$

حال $(2x - 5)$ را به x تبدیل می‌کنیم:

$$g(x) = x^2 - 24$$

تمرین:

۱- اگر $f(x) = \frac{4}{x-4}$ ، $x \neq 4$ ، $x \neq 0$ ، آن گاه $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ را بیابید.

۲- اگر $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sin x \cdot \cos x$ ، آن گاه $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ را بیابید.

۳- اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، آن گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۴- اگر $f(x-1) + 3f(1-x) = 4x$ ، آن گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۵- اگر $f(\frac{x+1}{y+1}) = \frac{x+y+2}{x+1}$ ، آن گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۶- اگر $x = 2f(x^2) + f(-x^2)$ ، آن گاه $f(x^2)$ را بیابید.

۷- اگر $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ ، آن گاه $f(\frac{1}{y})$ را بیابید.

۸- اگر $f(g(x)) = -f(x)$ ، $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، آن گاه $g(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} 3f(x) + 2f(-x) = 10x - 12 \\ 3f(-x) + 2f(x) = -10x - 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9f(x) + 6f(-x) = 30x - 36 \\ -6f(-x) - 4f(x) = 20x + 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5f(x) = 50x - 12 \Rightarrow f(x) = 10x - \frac{12}{5}$$

مثال ۲: اگر $2f(2x-3) + f(3-2x) = 8x + 20$ ، آن گاه $f(4x-1)$ را بیابید.

حل: $x = \frac{a+3}{2}$ فرض می‌شود $2x-3 = a$ در صورت مسأله قرار می‌دهیم:

$$2f(a) + f(-a) = 4a + 32$$

حال مانند مثال قبل a را به $-a$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f(-a) + f(a) = -4a + 32 \\ 2f(a) + f(-a) = 4a + 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(a) = -12a \Rightarrow f(a) = 4a$$

$$\Rightarrow f(4x-1) = 4(4x-1) \Rightarrow f(4x-1) = 16x - 4$$

مثال ۳: اگر $f(\sin x) + 2f(\cos x) = 2\sin^2 x$ ، آن گاه $f(\tan x)$ را بیابید.

حل: x را به $(\frac{\pi}{2} - x)$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) + 2f(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 2\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\cos x) + 2f(\sin x) = 2\cos^2 x \\ f(\sin x) + 2f(\cos x) = 2\sin^2 x \end{cases} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$-3f(\cos x) = 2\cos^2 x - 4\sin^2 x$$

$$-3f(\cos x) = 2\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x$$

$$-3f(\cos x) = 6\cos^2 x - 4 \Rightarrow f(\cos x) = -2\cos^2 x + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(\tan x) = -2\sec^2 x + \frac{4}{3}$$

۴ - مسأله ترکیبی

وقتی $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. در این شرایط با توجه به ساخت $f(g(x))$ ، $f(x)$ به راحتی محاسبه می‌شود.

مثال ۱: اگر $f(x) = 2x - 3$ و $f(g(x)) = 6x^2 + 4x^2 - 1$ را بیابید.

$$f(g(x)) = 6x^2 + 4x^2 - 1 \quad \text{حل:}$$