

مقالات کوتاه از مجلات

ریاضی معتبر جهان (۹)

William . Watkins and Joel Zeitlin

● ترجمه غلامرضا یاسی پور

$T_s(x)$ ، Polynomial، سروکار دارند که به ازای عددهای صحیح

و مثبت S و جميع عددهای حقیقی θ ، با

$$T_s(\cos \theta) = \cos(s \theta)$$

تعریف می‌شوند. درجه $T_s(x)$ برابر S و ضریب اصلی مربوطه

2^{s-1} است.

قضیه: فرض می‌کنیم $\psi_n(x)$ چند جمله‌ای مینیمال $\cos(2\pi/n)$ باشد

و $T_s(x)$ چند جمله‌ای چیشف را نمایش دهد.

(a) اگر $n = 2s + 1$ فرد باشد، آنگاه

$$T_{s+1}(x) - T_s(x) = 2^s \prod_{d|n} \Psi_d(x) \quad (2)$$

و

(b) اگر $n = 2s$ زوج باشد، آنگاه

$$T_{s+1}(x) - T_{s-1}(x) = 2^s \prod_{d|n} \Psi_d(x) \quad (3)$$

پیش از اثبات قضیه فوق، نشان می‌دهیم که چگونه از (۲) و (۳)

می‌توان به همان طریقی که اتحاد (۱) در محاسبه $\phi_n(x)$ به کار رفته

است، در محاسبه $\psi_n(x)$ استفاده کرد. به عنوان مثال؛ در محاسبه

$\psi_9(x)$ (چند جمله‌ای مینیمال $\cos(2\pi/9)$)، در معادله (۲)، با

فرض $S = 4$ و بعد $S = 1$ ، به دست می‌آوریم:

$$T_5(x) - T_1(x) = 16 \psi_1(x) \psi_5(x) \psi_9(x)$$

و:

$$T_4(x) - T_1(x) = 2 \psi_1(x) \psi_5(x)$$

در این صورت:

$$8 \psi_9(x) = \frac{T_5(x) - T_1(x)}{T_4(x) - T_1(x)}$$

محاسبه چهار چند جمله‌ای چیشف فوق آسان است. به عنوان مثال:

چند جمله‌ای مینیمال $\cos(2\pi/n)$

نتیجه‌ای قدیمی است که ریشه n ام اولیه واحد، یعنی،

$$\xi_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$$

در چند جمله‌ای گویایی از درجه $\phi(n)$ تعداد عددهای صحیح بین ۱

و n که نسبت به n اولند، صدق می‌کند.

معمولترین طریق محاسبه چند جمله‌ای مینیمال ξ_n موسوم به چند

جمله‌ای دایره بزی «Cyclotomic Polynomial» و نمایش داده شده

به $(\phi_n(x))$ از اتحاد:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x) \quad (1)$$

استفاده می‌کند. در این صورت، به عنوان مثال؛ $\phi_9(x)$ را می‌توان به

طریق آشنای زیر محاسبه کرد:

$$x^9 - 1 = \phi_1(x) \phi_3(x) \phi_9(x) \quad x^3 - 1 = \phi_1(x) \phi_3(x)$$

بنابراین:

$$\phi_9(x) = \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} = x^6 + x^3 + 1$$

اکنون قسمتهای حقیقی و انگاری ξ_n را در نظر می‌گیریم؛ یعنی

$\cos(2\pi/n)$ و $\sin(2\pi/n)$ را. اینها نیز عددهایی جبری هستند، اما

چگونه می‌توان چند جمله‌ایهای مینیمال آنها را محاسبه کرد؟

در ۱۹۳۳ لمر «D.H. Lehmer» [Leh] و [Niv] با استفاده از

چند جمله‌ایهای دایره‌بری روشی را برای محاسبه این چند جمله‌ایهای

مینیمال مشخص کرد.

در این مقاله، اتحادهایی مشابه (۱)، برای چند جمله‌ای مینیمال

$\psi_n(x)$ از $\cos(2\pi/n)$ ارائه می‌دهیم، که روشی دیگر در محاسبه

$\psi_n(x)$ به دست می‌دهد.

اتحادهای مزبور با چند جمله‌ایهای چیشف «Chebychev»

$$Q(\xi_n) \supseteq Q(\cos(2\pi/n)) \supseteq Q$$

برای محاسبه درجه بسط $Q(\cos(2\pi/n))$ روی Q ،
ملاحظه می‌کنیم که

$$[Q(\xi_n) : Q] = \phi(n)$$

و:

$$[Q(\xi_n) : Q(\cos(2\pi/n))] = 1 \text{ یا } 2$$

زیرا ریشه‌ای از چند جمله‌ای درجه دوم زیر است:

$$x^2 - (2\cos(2\pi/n))x + 1$$

اکنون اگر $n \geq 3$ ، ξ_n حقیقی نیست و بنابراین:

$$[Q(\xi_n) : Q(\cos(2\pi/n))] = 2$$

به این ترتیب داریم:

$$\deg \Psi_n(x) = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ \phi(n)/2 & n \geq 3 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

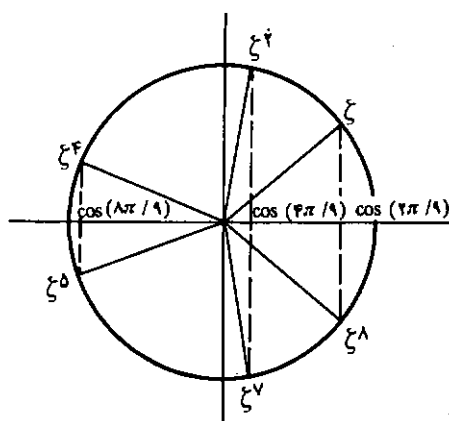
(درجه = deg)

برای پیشرفت بیشتر، نیاز به یافتن ریشه‌های $\psi_n(x)$ ، یعنی، مزدوجهای $\cos(2\pi/n)$ داریم. $\cos(2\pi/n)$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4, 6$ گویا و بنابراین $\psi_n(x)$ خطی است و دقیقاً یک ریشه دارد.

اما به ازای مقدارهای دیگر n ، $\phi(n)/2 \geq 2$ و به این ترتیب $\psi_n(x)$ بیش از یک ریشه دارد. این ریشه‌ها کدام هستند؟ برای به دست دادن مثالی خاص، ریشه‌های چند جمله‌ای درجه سوم زیر کدام هستند؟

$$\Lambda\psi_9(x) = 8x^3 - 6x + 1$$

البته ریشه‌های $\phi^9(x)$ عبارت است از که در آن $\xi^9 = \xi$.



$$T_5(\cos\theta) = \cos(5\theta)$$

$$= \operatorname{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^5] \quad (\operatorname{Re} = \text{قسمت اصلی})$$

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1 - \cos^2\theta) + 5\cos\theta(1 - \cos^2\theta)^2$$

$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

بنابراین:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

به همین ترتیب:

$$T_6(x) = 8x^6 - 8x^4 + 1$$

$$T_7(x) = 2x^7 - 1$$

و:

$$T_1(x) = x$$

به این ترتیب:

$$\Lambda\psi_9(x) = \frac{T_5(x) - T_6(x)}{T_7(x) - T_1(x)} = 8x^3 - 6x + 1$$

در ضمن قضیه مورد نظر بر این است که یا:

$$T_{s+1}(x) - T_{s-1}(x) \quad \text{یا} \quad T_{s+1}(x) - T_s(x)$$

(بسته به این که n فرد یا زوج باشد) به ازای $\cos(2\pi/n)$ چند جمله‌ای گویایی نیست شونده است. اما، چند جمله‌ای نیست شونده آشکارتری به ازای $\cos(2\pi/n)$ عبارت است از: $T_n(x) - 1$ ، زیرا:

$$T_n(\cos(2\pi/n)) = \cos(2\pi) = 1$$

چند جمله‌ایهای مورد بحث توسط اتحادهای زیر مرتبط هستند:

[Riv, P.5]

$$(x-1)(T_{s+1}(x)-1) = (T_{s+1}(x)-T_s(x))^2$$

$$2(x^2-1)(T_s(x)-1) = (T_{s+1}(x)-T_{s-1}(x))^2$$

به این ترتیب $\cos(2\pi/n)$ ، هنگامی که $n > 2$ ، ریشه دوگانه $T_n(x) - 1$ است.

برای آغاز اثبات قضیه مورد نظر، به حقایق چند در مورد درجه مزدوجهای $\cos(2\pi/n)$ روی عددهای گویای Q نیازمندیم. از آن جا که

$$\cos(2\pi/n) = (\xi_n + \xi_n^{-1})/2$$

داریم:

$$\begin{aligned}
& T_{s+1}(\cos(\pi k/n)) - T_s(\cos(\pi k/n)) \\
&= \cos(\pi k(s+1)/n) - \cos(\pi ks/n) \\
&= \cos(\pi k(n+1)/n) - \cos(\pi k(n-1)/n) \\
&= \cos(\pi k + \pi k/n) - \cos(\pi k - \pi k/n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

بنابراین، $\cos(\pi k/n)$ نیز ریشه‌ای از سمت چپ (۲) است. اکنون از آن جاکه ضریب اصلی $T_{s+1}(x)$ عبارت است از: 2^s ، اتحاد (۲) به اثبات می‌رسد.

اثبات قسمت (b) به همین ترتیب است، اما در این حالت درجه سمت راست (۳) به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \deg(\Psi_d(x)) &= \deg(\Psi_1(x)) + \deg(\Psi_\gamma(x)) \\
&+ \frac{1}{\gamma} \sum_{d|n, d>\gamma} \phi(d) = \gamma + \frac{1}{\gamma}(n-\gamma) = s+1
\end{aligned}$$

که با درجه سمت چپ (۳) در توافقی است.

باز هم چند جمله‌ای‌های واقع بر سمت راست و سمت چپ (۳) دقیقاً دارای $s+1$ ریشه:

$\cos(\pi k/n)$, $0 \leq k \leq s$
و ضریب اصلی یکسان هستند. برای ملاحظه این که $\cos(\pi k/n)$ ریشه سمت چپ (۳) است، به محاسبه‌های زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}
& T_{s+1}(\cos(\pi k/n)) - T_{s-1}(\cos(\pi k/n)) \\
&= \cos(\pi k(s+1)/n) - \cos(\pi k(s-1)/n) \\
&= \cos(\pi k(n+2)/n) - \cos(\pi k(n-2)/n) \\
&= \cos(\pi k + 2\pi k/n) - \cos(\pi k - 2\pi k/n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

تبصره. وگنر «K.W. Wegner [Weg] فهرستی از چند جمله‌ای‌های مینیمال (همیلاً از درجه‌ای کمتر از هشت) را در مورد تابعهای مثلثاتی زاویه‌های مشخص به دست داده است، که ضریبهای گویای 2π هستند. نیون «I.Niven» در گزارش خود به نام عدددهای گنگ «Irrational Numbers [Niv, P.39]»، فرمولی در مورد درجه چند جمله‌ای مینیمال تاوانت هر مضرب گویای 2π به دست داده است.

ریشه‌های مزبور در جفتهای:

$$\cos(\pi k/9) \pm i \sin(\pi k/9) \quad k = 1, 2, 4$$

تنها با سه جزء حقیقی متمایز:

$$\cos(\pi/9), \cos(4\pi/9), \cos(8\pi/9)$$

رخ می‌دهند. سه کسینوس مزبور ریشه‌های $\psi_9(x)$ هستند. حالت عمومی مورد فوق عبارت است از:

لم. اگر $n \geq 3$ ، آنگاه ریشه‌های $\psi_n(x)$ عبارت است از $\cos(\pi k/n)$ ، به ازای $0 \leq k \leq s$ و $(k, n) = 1$. (s چون در قضیه مورد بحث تعریف شده است.)

لم فوق بسادگی از این حقیقت نتیجه می‌شود که $-Q$ خود ریخت $\sigma(\xi_n)$ داده شده توسط $\sigma(\xi_n) = \xi_n^k$ ، به ازای $(k, n) = 1$ ، $\pi \cos(\pi/n)$ را به $\cos(\pi k/n)$ می‌فرستد:

$$\begin{aligned}
\sigma(\cos(\pi/n)) &= \sigma((\xi_n + \xi_n^{-1})/2) \\
&= (\xi_n^k + \xi_n^{-k})/2 = \cos(\pi k/n)
\end{aligned}$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(\Psi_n(\cos(\pi/n))) = \Psi_n(\sigma(\cos(\pi/n))) \\
&= \Psi_n(\cos(\pi k/n))
\end{aligned}$$

و بنابراین: $\phi(n)/2$ عدد از $\cos(\pi k/n)$ ها، که در آنها $(k, n) = 1$ و $0 \leq k \leq s$ ریشه‌های $\psi_n(x)$ هستند.

اکنون برای اثبات قسمت a ی قضیه $n = 2s+1$ فرد است، کافی است که نشان دهیم دو طرف (۲) دارای ریشه‌های یکسان و ضریب اصلی یکسان هستند. درجه سمت راست (۲) عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \deg(\Psi_d(x)) &= \deg(\Psi_1(x)) + \frac{1}{\gamma} \sum_{d|n, d \neq 1} \phi(d) \\
&= 1 + \frac{1}{\gamma}(n-1) = s+1
\end{aligned}$$

که با درجه سمت چپ (۲) سازگار است. سمت چپ و سمت راست (۲) دقیقاً دارای $s+1$ ریشه است: $\cos(\pi k/n)$, $0 \leq k \leq s$ ، که جمیع آنها متمایز هستند.

برای ملاحظه این مطلب فرض می‌کنیم: $(k, n) = g$ ، بنابراین:

$$k = k'g, n = dg, (k', d) = 1$$

در این صورت از لم فوق:

$$\cos(\pi k/n) = \cos(\pi k'/d)$$

ریشه‌ای از $\psi_d(x)$ است، که عاملی از عبارت سمت راست (۲) است.

در سمت چپ (۲)،

[Van] B.L. Van der Waerden , Modern Algebra (English Translation) , 2nd ed. ,Ungar , New York , 1953.

[Weg] Kenneth W. Wegner Equations with trigonometric Values as roots , *American Mathematical Monthly* , 66 (1959) 52 - 53

Department of Mathematics

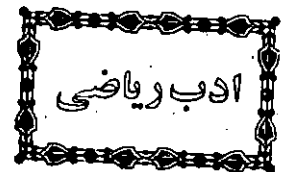
California State University , Northridge

Northridge , CA 91330

[Leh] D.H. Lehmer , A note on trigonometric algebraic numbers , *American Mathematical Monthly* , 40 (1933) 165 - 166

[Niv] Ivan Niven , *Irrational Numbers* , MAA , Washington , D.C. , 1956.

[Riv] T.J. Rivlin , *Chebyshev Polynomials From Approximation Theory to Algebra and Number Theory* , 2nd ed. , Wiley , New York , 1990



— بابلیان سالهای ۲۰۰۰ - ۲۲۰۰ پیش از میلاد می توانستند مربع و مستطیل و مثلث متساوی الساقین را مساحت کنند؛ اطلاعی درباره قضیه فیثاغورس داشتند، و می دانستند که زاویه حاوی نصف دایره زاویه راست است.

می توانستند حجم متوازی السطوح و استوانه قائم و مخروط ناقص و هرم ناقص مربع القاعده را پیدا کنند. راهی که برای تعیین حجم هرم ناقص مربع القاعده داشتند کمی باره مصریان اختلاف داشت و آن را می توان چنین بیان کرد:

$$V = h \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right]$$

تاریخ علم. جورج سارتن، احمد آرام

