

قضیه: در هر مثلث سه ارتفاع هم‌سند (از یک نقطه می‌گذرند).
 عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۱)، با رعایت تساوی‌های (۲)،
 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۳) \quad \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) \\ + \overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$$

در عبارت (۳)، تمرین‌ها را انجام می‌دهیم. شش جمله به دست می‌آید. مجموع هر دو قرینه صفر است. پس عبارت (۳) برابر صفر است. پس رابطه‌ی (۱) محقق است.

اثبات هم‌رسی سه ارتفاع مثلث

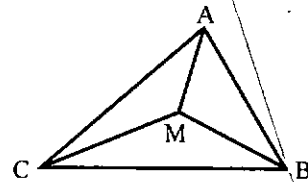
مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع AD و BE را H می‌نامیم. با رعایت حکم یاد شده در سطرهای پیشین چنین می‌نویسیم:

$$(۴) \quad \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

چون خط HB بر خط AC و نیز خط HD بر خط BC عمود

برهان یکم
 ابتدا یک حکم برداری مطرح و آن را ثابت می‌کنیم.
 مثلث ABC و نقطه‌ی M را در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$(۱) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$



برای اثبات درستی رابطه‌ی (۱)، رابطه‌های مسلم زیر را در نظر می‌گیریم:

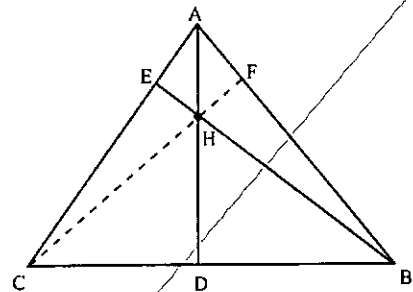
$$(۲) \quad \begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \end{cases}$$

چند برهان برای قضیه‌ی
 هم‌رسی سه ارتفاع مثلث

• دکتر احمد شرف‌الدین

است، پس دو رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$(5) \quad \begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$$



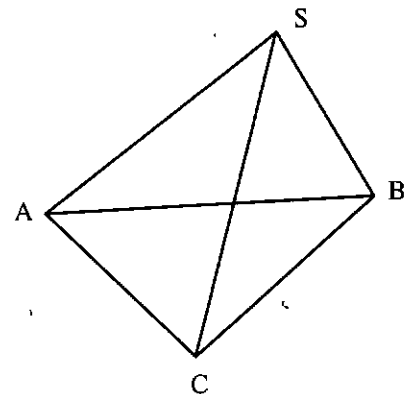
از رابطه‌ی (۴) و رابطه‌های (۵)، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$(6) \quad \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

از رابطه‌ی (۶) نتیجه می‌شود که خط HC بر خط AB عمود است. پس سه ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

تعمیمی از قضیه‌ی هم‌رسی سه ارتفاع مثلث

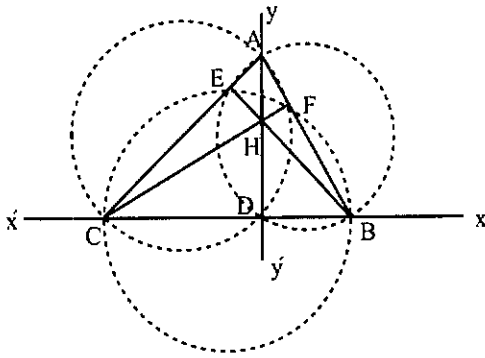
چهار وجهی SABC را در نظر می‌گیریم. اگر یال SA بر یال BC، و یال SB بر یال AC عمود باشد، آن‌گاه یال SC بر یال AB عمود است (به بیان کوتاه، اگر دو جفت یال مقابل برهم عمود باشند، دو یال دیگر برهم عمودند).



برهان دوم

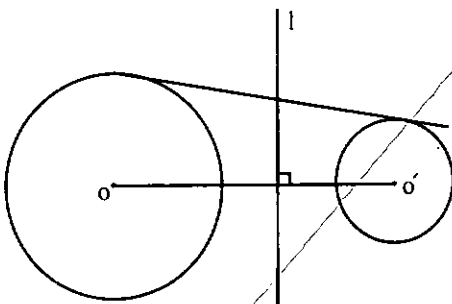
مثلث ABC و سه ارتفاع AD، BE و CF را در نظر می‌گیریم. سه دایره به قطرهای BC، CA و AB را به ترتیب α ، β و γ می‌نامیم. دو دایره β و γ یکدیگر را در نقطه‌ی D قطع می‌کنند. پس خط AD محور اصلی دو دایره β و γ است (تعریف محور

اصلی در ادامه آمده است). با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود که ارتفاع BE، محور اصلی دو دایره α و γ است و ارتفاع CF محور اصلی دو دایره α و β است. بنابراین یکی از قضیه‌های هندسه می‌دانیم که سه محور اصلی سه دایره هم‌رسند، پس سه ارتفاع هر مثلث هم‌رسند.



تعریف محور اصلی دو دایره

مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که قوت آن‌ها نسبت به دو دایره‌ی واقع در آن صفحه برابر باشد، خطی است عمود بر خط مرکزهای آن دو دایره. در شکل زیر



دو دایره به مرکزهای O و O' رسم شده است. خط l محور اصلی دو دایره‌ی O و O' است. هنگامی که دو دایره خارج یکدیگر باشند، محور اصلی از وسط مماس‌های مشترک می‌گذرد.

برهان سوم

مثلث ABC و سه ارتفاع AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. دستگاه مختصات xy را چنان اختیار می‌کنیم که محور x'x آن منطبق بر خط CB و نقطه‌ی D مبدأ آن باشد. محور y'y آن منطبق بر ارتفاع AD اختیار می‌کنیم. اندازه‌ی جبری برداری $\overrightarrow{DA}$ را روی محور

پس $\overline{DH} = \overline{DK}$ ، و در نتیجه سه ارتفاع مثلث هم‌رسانند.
 برای محاسبه‌ی DK دو راه می‌توان پیمود: یکی آن‌که معادله‌ی
 خط CF را بنویسیم و عرض از مبدأ آن را حساب کنیم که همان
 تساوی (۹) به دست می‌آید. راه دوم، یعنی راه خیلی ساده‌تر، آن
 است که در عبارت طرف راست تساوی (۹)، جای m و n را عوض
 کنیم. آن‌گاه تساوی (۹) حاصل می‌شود، زیرا اگر در معادله‌ی (۷)
 جای m و n را عوض کنیم، معادله‌ی خط CF حاصل می‌آید.

برهان چهارم

قضیه‌ی سوارا به کار می‌گیریم:

قضیه‌ی سوا: مثلث ABC و سه نقطه‌ی D ، E و F را به ترتیب
 بر خط‌های BC ، CA و AB در نظر می‌گیریم. محورهای $r'r$ ،
 $s's$ و $t't$ را به ترتیب بر خط‌های BC ، CA و AB اختیار می‌کنیم (با

جهت دلخواه). اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DB}$ را روی
 محور $r'r$ به ترتیب با $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DB}$ ، اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{EC}$

و $\overrightarrow{EA}$ را روی محور $s's$ به ترتیب با $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{EA}$ ، و اندازه‌های

جبری دو بردار $\overrightarrow{FA}$ و $\overrightarrow{FB}$ را روی محور $t't$ به ترتیب با

$y'y$ ، به h نمایش می‌دهیم و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$
 را روی محور $x'x$ به ترتیب m و n می‌نامیم.

معادله‌ی خط BE را در دستگاه مختصات xy می‌نویسیم.

ضریب زاویه‌ی خط AC برابر $\frac{h}{-n}$ است. پس ضریب زاویه‌ی خط

BE که بر خط AC عمود است، برابر $\frac{n}{h}$ می‌شود. معادله‌ی خط

BE چنین است:

$$(۷) \quad y = \frac{n}{h}(x - m)$$

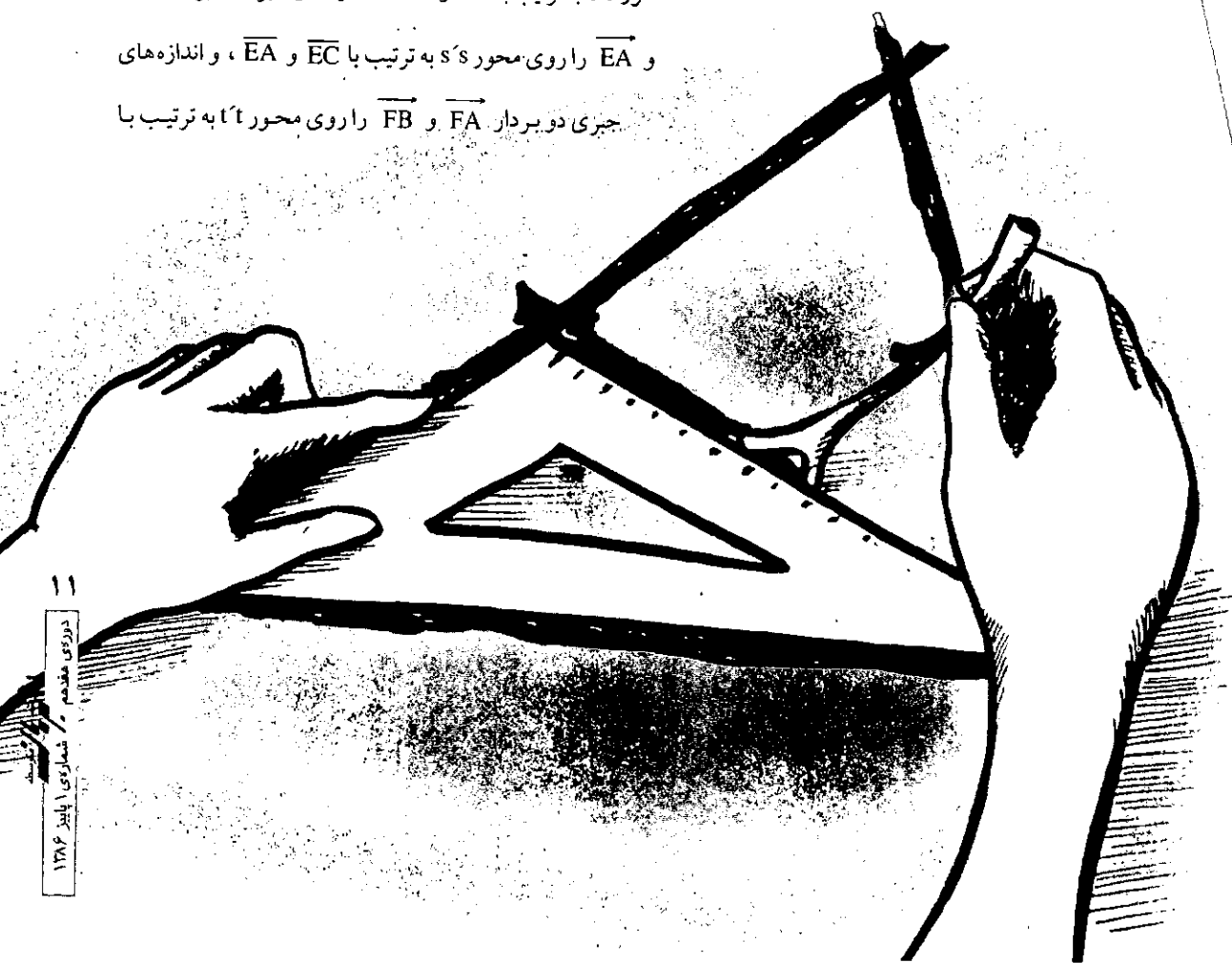
اگر H نقطه‌ی برخورد دو خط BE و DA باشد، از معادله‌ی

(۷) نتیجه می‌شود:

$$(۸) \quad \overline{DH} = -\frac{nm}{h}$$

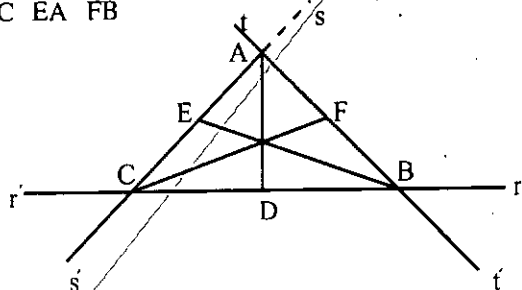
اگر K نقطه‌ی برخورد خط CF و DA باشد، چنین داریم:

$$(۹) \quad \overline{DK} = -\frac{mn}{h}$$



$\overline{FA}$ و $\overline{FB}$ نشان می‌دهیم. اگر سه خط AD ، BE و CF هم‌مرس باشند، رابطه‌ی زیر مسلم است و برعکس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$$



حاصل می‌شود:

$$\overline{DC} = -b \cos C$$

پس:

$$(11) \quad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c \cos B}{b \cos C}$$

با همان شیوه‌ی محاسبه، تساوی‌های زیر به دست می‌آیند:

$$(12) \quad \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\frac{a \cos C}{c \cos A}$$

$$(13) \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{b \cos A}{a \cos B}$$

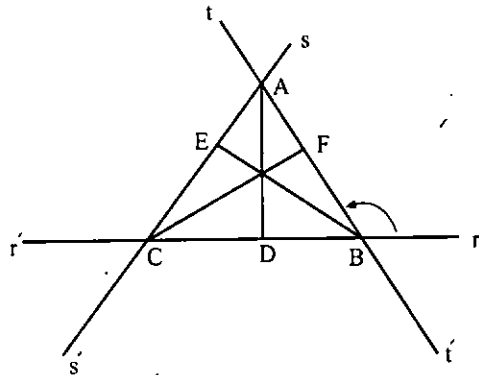
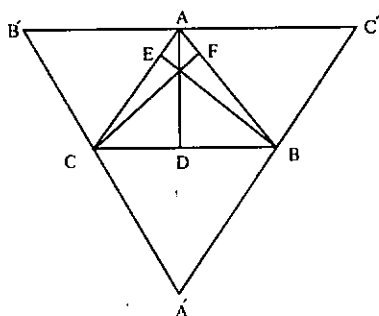
از سه رابطه‌ی (۱۱)، (۱۲) و (۱۳)، تساوی (۱۰) حاصل می‌شود. بنابراین سه ارتفاع مثلث هم‌رسند.

به‌کارگیری قضیه‌ی سوا برای اثبات هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث

مثلث ABC و سه ارتفاع AD ، BE و CF را در نظر می‌گیریم.

مثلث ABC و ارتفاع‌های AD ، BE و CF آن را در نظر

می‌گیریم.



ثابت می‌کنیم رابطه‌ی زیر محقق است و از آن نتیجه می‌گیریم که سه ارتفاع مثلث هم‌رسند.

$$(10) \quad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$$

طول‌های اضلاع مقابل به زاویه‌های A ، B و C را به ترتیب با a ، b و c نشان می‌دهیم. چنین داریم:

$$\overline{DB} = -\overline{BD} = -|\overline{BA}| \cos(rBA) = (-c)(-\cos B)$$

پس:

$$\overline{DB} = c \cos B$$

با بیان شیوه‌ی استدلال، مقدار $\overline{DC}$ را حساب می‌کنیم که چنین

از نقطه‌ی A خط $B'C'$ را موازی خط BC ، از نقطه‌ی B خط $A'C'$ را موازی خط AC ، و از نقطه‌ی C خط $A'B'$ را موازی خط AB رسم می‌کنیم. چون چهارضلعی $AB'CB$ متوازی‌الاضلاع است، پس: $AB' = CB$. و نیز چون چهارضلعی $AC'BC$ متوازی‌الاضلاع است، پس: $AC' = CB$ و در نتیجه: $AB' = AC'$. یعنی نقطه‌ی A وسط ضلع $B'C'$ است. با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود که نقطه‌ی B وسط پاره خط $A'C'$ و نقطه‌ی C وسط پاره خط $B'A'$ است.

اکنون می‌گوییم: خط AD که بر خط BC عمود است، عمودمنصف پاره خط $B'C'$ است. پس ارتفاع‌های مثلث ABC ، عمودمنصف‌های مثلث $A'B'C'$ هستند. می‌دانید که عمودمنصف‌های هر مثلث هم‌رسند (چرا؟)، پس ارتفاع‌های هر مثلث هم‌رسند.