

پیشامد نامنتظر در قضیه وارون

فرض

حکم

برای دانش آموزان سال اول
و دوم متوسطه



$$\widehat{HBA} = \widehat{HCA} \quad , \quad \widehat{HAB} = \widehat{HCB}$$

۴. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد،

آن وقت:

$$\widehat{OAB} - \widehat{OBA} = \widehat{OBC} - \widehat{OCB} = \widehat{OCA} - \widehat{OAC}$$

۵. در مثلث متساوی الساقین، مرکز دایره محیطی

مثلث، روی «خط راست اوپلر» است (خط راست اوپلر، خط راستی است که از نقطه برخورد میانه ها و مرکز دایره محیطی مثلث گذشته باشد).

۶. در مثلث متساوی الساقین، نیمسازها زاویه های

مجاور به قاعده با هم برابرند.

راهنمایی برای اثبات قضیه های وارون

۱. در چهارضلعی ABCD، نقطه M را وسط AD و

نقطه N را وسط BC بگیرد. ثابت کنید مساحت مثلث

ABN با مساحت مثلث DCN برابر است. در این صورت،

AD با BC موازی، یعنی ABCD دوزنقه است.

می دانیم قضیه وارون یک قضیه، قضیه ای است که حکم

آن، فرض قضیه اصلی، و فرض آن، حکم قضیه اصلی

باشد. در این جا شش قضیه مستقیم داده شده است. همه

آن ها ساده و برای دانش آموزان سال های اول دبیرستان

شناخته شده اند. تلاش کنید وارون این قضیه را تنظیم و

ثابت کنید. شما درمی یابید که وارون قضیه ها، به مراتب از

قضیه های مستقیم دشوارترند.

قضیه های مستقیم

۱. در دوزنقه، پاره خط راستی که میان دو قاعده را به

هم وصل کند، دوزنقه را به دو شکل هم ارز (با مساحت های

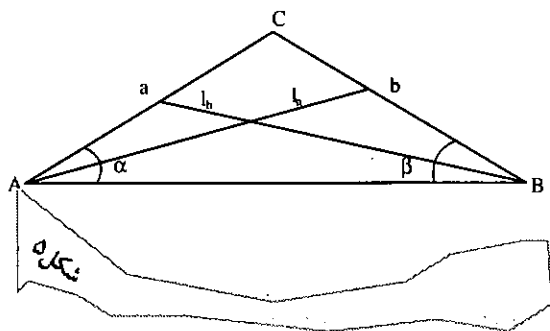
برابر) تقسیم می کند.

۲. در متوازی الاضلاع، مجموع فاصله های بین

میان های ضلع های روبه رو، برابر با نصف محیط است.

۳. اگر H نقطه برخورد ارتفاع ها در مثلث با زاویه های

حاده ABC باشد، داریم:



۶. تنظیم قضیه وارون به این ترتیب است: اگر در مثلث ABC، نیمسازهای درونی L_a و L_b برابر باشند، ضلع های ba هم طولی برابر دارند: $a=b$ (شکل ۵). اثبات را با برهان خلف انجام می دهیم. برای نمونه فرض کنید: $a > b$. در این صورت $\alpha > \beta$ (در مثلث زاویه بزرگ تر روبرو ضلع بزرگ تر است). طول نیمساز در مثلث با این دستورها به دست می آید:

$$L_a = \frac{\gamma bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad L_b = \frac{\gamma ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2}$$

این دو دستور را ثابت کنید.

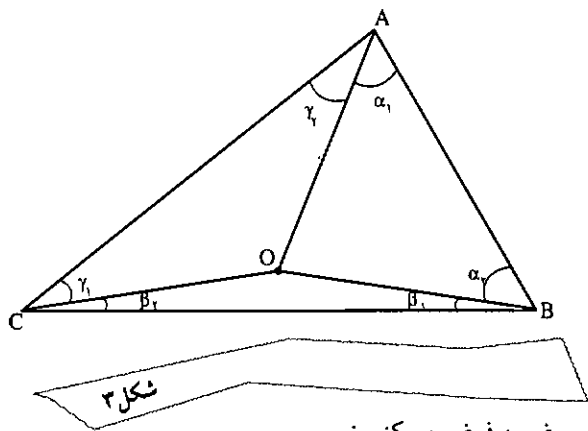
چون $\alpha > \beta$ و در ضمن $0 < \alpha < \pi$ و $0 < \beta < \pi$,

بنابراین $\cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2}$. به جز این، $\frac{b}{b+c} < \frac{a}{a+c}$ در واقع.

$$\frac{a}{a+c} - \frac{b}{b+c} = \frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)} > 0.$$

بنابراین به دست می آید: $L_a < L_b$ که با فرض تناقض دارد.

این ها نمونه هایی از قضیه هایی هستند که اثبات وارون آن ها، دشوار است. آیا شما چنین قضیه هایی را به خاطر دارید؟



وضع، فرض می کنیم:

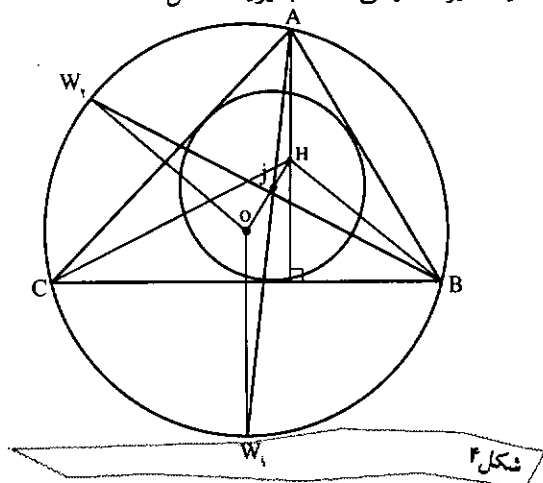
$$\alpha_1 > \alpha_2, \quad \beta_1 > \beta_2, \quad \gamma_1 > \gamma_2$$

در این صورت، با توجه به شکل داریم:

$$OB > OA, \quad OC > OB, \quad OA > OC$$

که از آن به دست می آید: $OB > OC$ و به تناقض می رسیم.

۵. ثابت کنید اگر مرکز دایره محاطی در مثلث، یعنی I روی خط راست اویلر باشد، مثلث، متساوی الساقین است. O را مرکز دایره محیطی، I را مرکز دایره محاطی، H را نقطه برخورد ارتفاع ها، M را وسط ضلع BC ، W_1 را نقطه برخورد نیمساز زاویه BAC با محیط دایره محیطی مثلث AB ، و W_2 را نقطه برخورد نیمساز زاویه ABC با محیط دایره محیطی مثلث بگیرد (شکل ۴).



به مثلث های متشابه HBJ و OW_1J ، HAI و OW_2I توجه کنید: به دست می آورید: $AC=BC$.

توجه کنید: به دست می آورید: $AC=BC$.