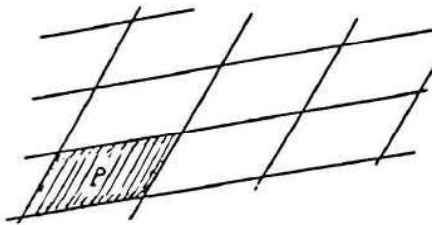
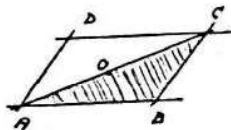


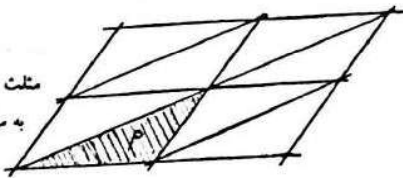
مسأله این است که در چه شرایطی و چگونه می‌توان همهٔ صفحه را به‌طور کامل یعنی بدون درز و جای خالی به‌وسیلهٔ خانواده‌ای از چندضلعیهای متساوی (قابل انطباق) مانند P پوشانید. به عبارت دیگر، فرض کنید عدد زیادی کارگر می‌خواهند زمین وسیعی را با آجرهای کاملاً یکسان n ضلعی آجرفرش کنند. چه شرطهایی باید برای عدد صحیح n ، طول ضلعهای آجرها، و اندازهٔ زاویه‌ها قائل شد؟ (زمین را مسطح و نامحدود در نظر می‌گیریم). به این سؤال در حالت‌های خاصی می‌توان فوراً جواب داد. مثلاً اگر $n = 4$ و P یک متوازی‌الاضلاع باشد، می‌توان صفحه را با متوازی‌الاضلاعها پوشانید و شکل زیر، الگوی مربوطه را فوراً به ذهن القا می‌کند:



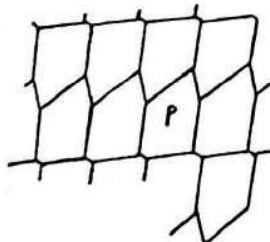
اصطلاحاً می‌گویند که متوازی‌الاضلاع، صفحه را فرش می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که هر مثلث دلخواه نیز صفحه را فرش می‌کند زیرا دو نمونه از یک مثلث که به‌طور مناسبی کنار هم نهاده شوند یک متوازی‌الاضلاع درست می‌کنند.



مثلث CDA از دوران مثلث ABC به مرکز O و به زاویهٔ ۱۸۰° حاصل شده است.



این مطلب نیز درست است که هر چهارضلعی، صفحه را فرش می‌کند. به طریق زیر می‌توان به این موضوع پی برد. قبلاً متذکر می‌شویم که هر شش‌ضلعی که یک جفت از اضلاع مقابلش موازی و مساوی باشند صفحه را فرش می‌کند:



سپس ملاحظه می‌کنیم که اگر دو نمونه از یک چهارضلعی به‌طور مناسبی کنار هم گذاشته شوند، یک شش‌ضلعی پدید می‌آید (که اضلاع مقابلش دوه‌دو موازی و برابرند):

چند مسأله حل نشده در هندسه مسطحه*

پیردلا هارپ *

ترجمهٔ علینقی زتد

کسی نیست که نداند مردم بابل تا چه اندازه به منطق و تقارن علاقه داشته‌اند. (خورخه لوتیس بورخس، لاتاری بابلی)

بخش مهمی از کار ریاضیدانان سعی در حل کردن مسأله‌های حل نشدهٔ ریاضی است. متأسفانه یک ناظر خارجی که کارش ریاضیات نیست به سختی می‌تواند بپذیرد که در ریاضی هم مسألهٔ حل نشده وجود دارد. اینان به غلط فکر می‌کنند که مذهب است در ریاضیات مطلبی برای تحقیق نیست و عذرشان هم این است که حتی کوچکترین اشاره به یک مسألهٔ تحقیقی معاصر برایشان غیر قابل فهم است.

با این وصف، استثنای کمی وجود دارد، مثلاً مسائلی که صورت آنها لااقل برای اکثر خوانندگان این مجله روشن باشد. هدف این مقاله، معرفی نمونه‌ای از این مسأله‌هاست که به‌طور طبیعی در هندسه مطرح می‌شوند. و تاکنون هیچ‌کس نتوانسته است به آنها کاملاً جواب بدهد. علل علاقه‌مندی محققان به این مسائل بسیار است و از آن جمله‌اند: گریزی و مسحورکنندگی شکلهایی که در آنها طرحی تکراری به‌کار رفته (نمونهٔ عالی این گریزی مثلاً در کارهای هنری اشتر (Escher) دیده می‌شود؛ مرجع [۸] را ببینید).

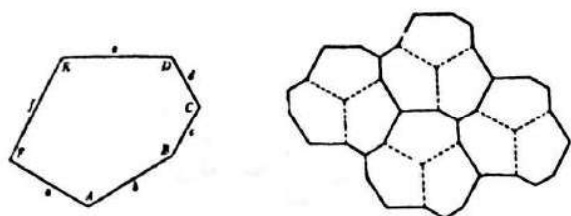
مطرح شدن بعضی مسائل تصمیم‌ناپذیری در منطق ریاضی (کارهای وانگ و برژه و رابینسن. بخش مراجع مقاله را ببینید).

اهمیت فیزیکی و نیز صنعتی بعضی از شبه‌بلورهای که اخیراً کشف شده‌اند و در حال حاضر جزء موضوعهای علمی داغ روز هستند (آلیاژهای جدید مثل آلیاژهای آلومینیم و منگنز، یا نیکل و کروم، همراه با ویژگیهای مکانیکی خارق‌العاده؛ به [۱۴] مراجعه کنید). ساختار این شبه‌بلورها، مسأله‌های هندسی جدیدی را مطرح می‌کنند که از نوع ذکر شده در بالا هستند.

متنی که در زیر می‌آید به سه بخش تقسیم می‌شود. بخش اول، معرفی مفهوم آجرفرشها، بخش دوم دربارهٔ تاب آجرفرشها، و بخش آخر دربارهٔ کاربرد آنها در منطق و فیزیک است.

۱. کدام چندضلعیها صفحه را فرش می‌کنند؟

چندضلعی P را که با یک آجر صاف نشان داده شده در نظر می‌گیریم. این چندضلعی را محدب می‌نامیم اگر دارای زاویه‌ای توراته نباشد.



(الف) شش ضلعی

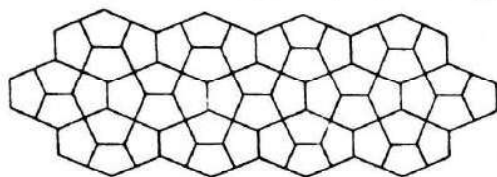
(ب) بخشی از آجر فرش

شش ضلعی نوع (۳): $e = f, c = d, a = b, A = C = E = \frac{2\pi}{3}$

شکل ۳

مسئله حل نشده مطلوب است شرطهای لازم و کافی برای اینکه پنج ضلعی محدب $P = ABCDE$ صفحه را فرش کند.

می دانیم که بعضی از پنج ضلعیها نمی توانند صفحه را فرش کنند. از آن جمله است پنج ضلعی منتظم (که پنج ضلعش برابر هم و هر زاویه اش $\frac{2\pi}{5}$ است). یادآوری می کنیم که بدون شک، کیلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) این مطلب را برای اولین بار ثابت کرده است. به طور کلی، تنها چند ضلعیهای منتظمی که می توانند صفحه را فرش کنند، ۳ و ۴ و ۶ ضلعی هستند. این امر را می توان به طور تجربی با تماشای کف حمامها تحقیق کرد. ولی به آسانی می توان پنج ضلعیهایی ارائه کرد که صفحه را فرش کنند. از این گونه پنج ضلعیها حتی در کف کوچه های قاهره هم دیده می شود:



ولی در مورد اینها هنوز محکی کلی، مانند محکی که برای شش ضلعیها وجود دارد، یافت نشده است. برای ملاحظه تاریخ پرمجرای این مسأله به [۱۳] مراجعه کنید. به نظر می آید این مسأله در بین سالهای ۱۹۶۸ تا ۱۹۷۵ حل شده باشد ولی راه حل آن بعداً مورد نقد و بازبینی ریاضیدانان باذوق غیر حرفه ای قرار گرفته است.

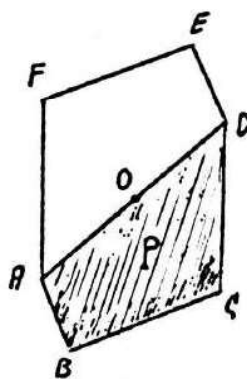
حل نشدن مسأله در مورد پنج ضلعیها همانقدر شگفت آور است که حل شدن آن در مورد n ضلعیهای محدب ($n \neq 5$). در مورد $n = 3$ ، $n = 4$ یا $n = 6$ ، به مطالب قبلی مراجعه کنید. اگر $n \geq 7$ ، یک n ضلعی محدب هرگز صفحه را فرش نمی کند. در این زمینه، قضیه های نیرومندتری پیدا شده اند: فرض می کنیم $P_1, P_2, P_3, \dots$ دنباله ای از چند ضلعیهای محدب باشند که به ترتیب دارای $n_1, n_2, n_3, \dots$ و $n_3, \dots$ ضلع هستند و در شرطهای زیر صدق می کنند:

(الف) $n_j \geq 7, j = 1, 2, 3, \dots$

(ب) دو مقدار ثابت α و β وجود دارند به قسمی که برای هر $j = 1, 2, 3, \dots$ مساحت P_j از سمت پایین به α محدود است و محیط P_j از سمت بالا به β .

در این صورت نمی توان بخشی از صفحه را که شامل مربعی به ضلع $\alpha/32 + \beta/4$ باشد با آجرهایی متشکل از P_j ها فرش کرد [۹]. به ویژه، هرگز نمی توان با یک دنباله $P_1, P_2, P_3, \dots$ که در شرط (الف) صدق کنند، صفحه را فرش کرد.

برای مقادیر بزرگ n ، می توان مسأله را به چند ضلعیهای غیر محدب بسط داد. به عنوان مثال، کانوی (Conway) «مهره های هفت جزئی» را بررسی کرده است. این مهره ها شکلهایی هستند که از قراردادن ۷ مربع مساوی در کنار هم به دست می آیند؛ هر مربع باید دست کم یک ضلع مشترک با یک



چهارضلعی DEFA از دوران ABCD

حول O و به زاویه 180° پدید می آید.

این امر نشان می دهد که هر چهارضلعی (حتی اگر محدب نباشد) صفحه را فرش می کند.

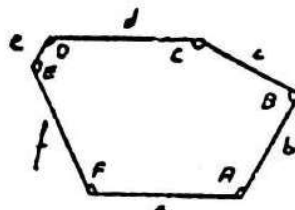
فرض می کنیم یک شش ضلعی محدب چون P داده شده باشد. دقیقاً می دانیم که P تحت چه شرایطی صفحه را فرش می کند. این نتیجه از رساله یکی از دانشجویان هیلبرت به نام راینهارت (۱۹۱۸) به دست می آید و ما آن را به صورت زیر بیان می کنیم.

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه یک شش ضلعی $P = ABCDEF$ صفحه را فرش کند این است که به یکی از صورتهای زیر باشد:

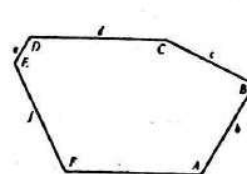
$$(1) \quad A + B + C = 2\pi, \quad a = d \quad (\text{حالتی که در بالا ذکر شد})$$

$$(2) \quad c = e, \quad a = d, \quad A + B + D = 2\pi$$

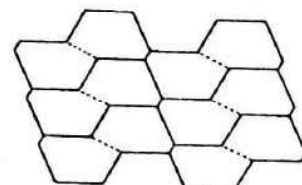
$$(3) \quad e = f, \quad c = d, \quad a = b, \quad A = C = E = 2\pi/3$$



شکلهایی که در زیر می بینید از مقاله کرشنر [۷] گرفته شده اند و قاعدتاً باید خواننده را قانع کنند که شش ضلعیهای نوع (۱) و (۲) و (۳)، صفحه را فرش می کنند. عکس قضیه را ثابت نخواهیم کرد.



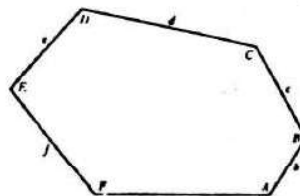
(الف) شش ضلعی



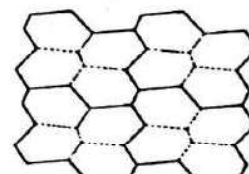
(ب) بخشی از آجر فرش

شش ضلعی نوع (۱): $A + B + C = 2\pi$ و $a = d$

شکل ۶



(الف) شش ضلعی

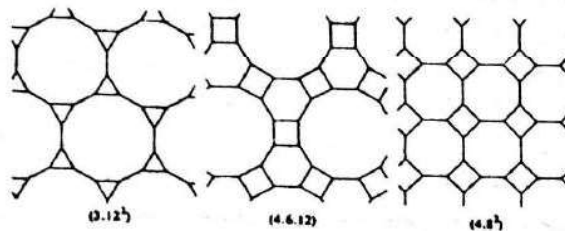
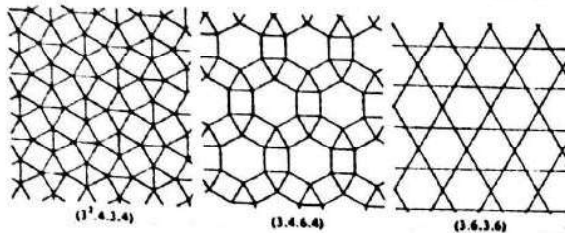
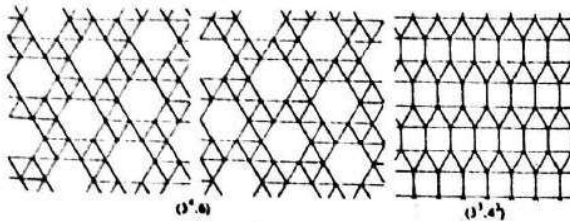


(ب) بخشی از آجر فرش

شش ضلعی نوع (۲): $A + B + D = 2\pi$ و $c = e, a = d$

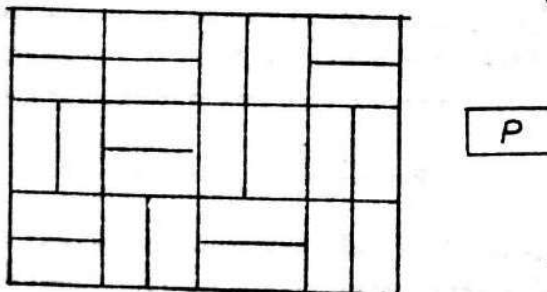
شکل ۷

یک آجر فرش را تناوبی می‌نامیم اگر دو انتقال در امتدادهای مختلف وجود داشته باشند که آجر فرش را به خودش تبدیل کنند.

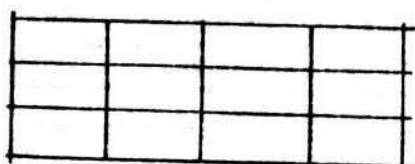


هشت آجر فرش یکتاخت غیرمنتظم. در هر یک از اینها، آجرها از چند ضلعهای مستطی تشکیل شده‌اند و تقارنهایی در آجر فرش وجود دارد که هر رأس مفروض را به رأسهای دیگر منتقل می‌کند. یکی از آجر فرشها به دو گونه، که یکی قرینه آینه‌ای دیگری است، دیده می‌شود. بدون شک، کیلر در ابتدای قرن ۱۷ فهمیده بود که این آجر فرشها از یک خانواده‌اند.

مانند مثال اول، خانواده‌ای چون $P_1, P_2, \dots, P_k$ را که به یک مربع مستطیل بدل شده است ($k=1$) در نظر می‌گیریم. طول این مستطیل دو برابر عرض آن است. به آسانی می‌توان یک آجر فرش غیرتناوبی از نسخه بدل‌های P ساخت، مثلاً با آجر فرش کردن به صورت مربع و تقسیم «تصادفی» مربع به دو مستطیل.

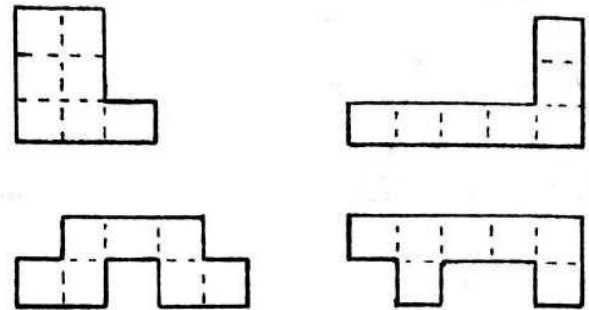


ولی باز با همین مربع مستطیل می‌توان آجر فرشهای تناوبی نیز به وجود آورد.

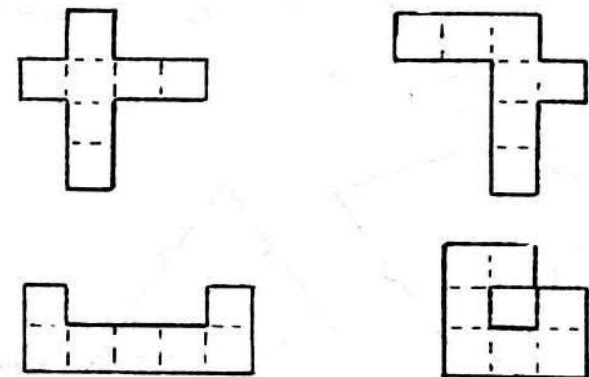


↑ →
دو انتقال که تناوبی بودن آجر فرش را نشان می‌دهند.

مربع قبلی داشته باشد. صد و هشت عدد از این مهره‌های هفت‌جزئی وجود دارند و صد و چهار تایی آنها صفحه را فرش می‌کنند.



چهارتا از ۱۰۴ مهره هفت‌جزئی که صفحه را فرش می‌کنند. دویازل حل شده در آخر مقاله را ملاحظه کنید.



۴ مهره هفت‌جزئی که صفحه را فرش نمی‌کنند.

به همین ترتیب، ۳۶۹ مهره هشت‌جزئی وجود دارند و ۳۴۳ تایی آنها صفحه را فرش می‌کنند و در مقابل، مهره‌های دوجزئی و هر دو مهره سه‌جزئی و هر پنج مهره چهارجزئی و هر دوازده مهره پنج‌جزئی و هر سی و پنج مهره شش‌جزئی صفحه را فرش می‌کنند [۴].

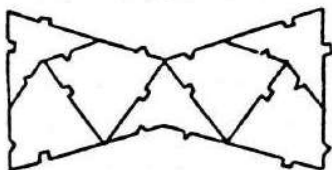
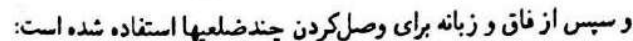
۲. تناوب

یک تعمیم طبیعی مسأله مورد بحث چنین بیان می‌شود: فرض می‌کنیم که $P_1, P_2, \dots, P_k$ خانواده‌ای (متناهی) از چند ضلعهای مسطح باشند که به عنوان آجرهای الگو در نظر گرفته شده‌اند. (دیگر k لزوماً برابر با یک نیست و چند ضلعها می‌توانند محدب نباشند). آیا آجر فرشی از صفحه توسط چند ضلعها وجود دارد که هر یک از آنها با یکی از این الگوها قابل انطباق باشد؟ اگر جواب مثبت است ویژگیهای این آجر فرش چه باید باشد؟

پیش از آنکه مسأله حل نشده را در این زمینه بیان کنیم، به عنوان مثال، خانواده‌های جالب توجهی از این آجر فرشها را ذکر می‌کنیم. برای اینها k برابر با ۲ و یا ۳ است. اینها آجر فرشهایی هستند که نیمه‌منتظم نامیده می‌شوند؛ هر آجر یک چند ضلعی منتظم است. دو آجری که به هم وصل می‌شوند دارای یک رأس مشترک‌اند و یا در یک ضلع کامل اشتراک دارند. رأسهای آجر فرش همه از یک نوع هستند. باز هم کیلر بود که برای اولین بار مشاهده کرد (ثابت کرد؟) که شکل‌های حاصل، صرف‌نظر از مقیاس، همه آجر فرشهای نیمه‌منتظم و غیرمنتظم را به ما می‌دهند. شکل‌های زیر از مرجع [۶] برداشته شده است.

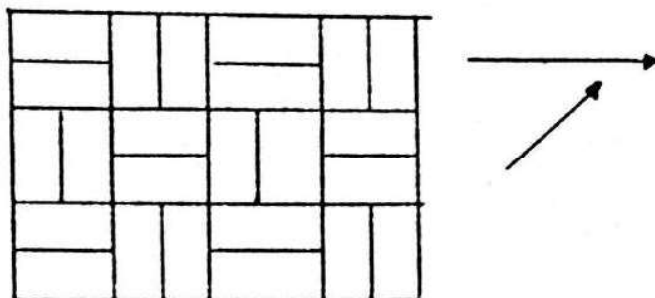


ابتدا راسهای چهار ضلعیها با H و T مشخص شده اند:



وجود دارد. بی‌نظمیهای خاصه، بر این آفرینش، حاکم است. مثلاً:

شکل زیر، پازل بزرگتری را نشان می‌دهد که در آن، یادداکها سفید



دو انتقال که تاوی، بودن آجر فرش را نشان می‌دهند.

مسأله حل نشده. آیا چندضلعی وجود دارد که صفحه را فرش کند ولی بتوان صفحه را با آن به طور تناوبی فرش کرد؟
(حاشیه برای ریاضیدانان: هیلبرت در بخش دوم از مسأله هجدهم خود این سوال را مطرح می کند که آیا چندضلعی وجود دارد که صفحه را فرش کند ولی ناحیه اصلی گروه تقارن یک آجرفرش نباشد؟ جواب این سؤال مثبت است. هیش (Heesch) در سال ۱۹۳۵ بر مبنای یک مثال پیچیده سه بعدی که راینهارت در ۱۹۲۸ مطرح کرده بود، جواب این مسأله را ارائه کرد و ده ضلعی (غیرمحدب) مناسبی به دست آورد. و بالاخره، کرشنر سه نوع پنج ضلعی محدب پیدا کرد که جواب مسأله هیلبرت را به دست می دهند. با این همه، آجرفرشهای این مثالها همه تناوبی هستند. آجرفرشها یک هسته بنیادی متشکل از تعدادی متناهی الگو دارند که به طور تناوبی تکرار می شود. به آجرفرشهای شش ضلعیهای بخش یک مراجعه کنید).

مشابه مسأله قبل در مورد خانواده $P_1, P_2, \dots, P_k$, $k > 1$ در همین اواخر حل شده است. درواقع، مثالهایی از خانواده‌هایی که نمی‌توانند صفحه را به‌طور تناوبی فرش کنند ولی قادر به فرش کردن صفحه‌اند، به‌ازای

(1964, 1965) $k > 1 \dots$

$$k = 6 \quad (\text{رامينسن، ۱۹۷۱})$$

$k = 2$ (میزوز، ۱۹۷۴)

میداد شده است.

در اینجا خانوادهٔ پهنوز را شرح می‌دهیم. ابتدا یک لوزی در نظر می‌گیریم که دارای زاویهٔ حاده $\angle 2\pi/5 = 72^\circ$ و زاویهٔ منفرجه $\angle 3\pi/5 = 108^\circ$ است و طول ضلع آن (برحسب یک واحد مناسب) برابر است با

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803 \dots$$

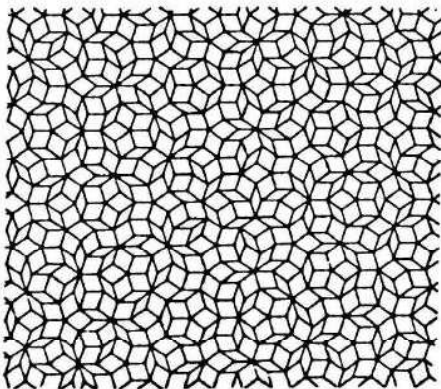
قطر بزرگ این لوزی را به دو پاره‌خط به طولهای Φ و ۱ تقسیم می‌کنیم و نقطه تقسیم را به دو رأس لوزی که زاویه منفرجه دارند وصل می‌کنیم و لوزی را در امتداد دو پاره‌خط حاصل می‌بریم. بدین ترتیب، دو چهارضلعی به دست می‌آوریم که به نامهای ییکان و بادبادک معروف‌اند و اساساً دو آجر پیروز هستند. مطابق شکل، هر رأس را با H یا T مشخص می‌کنیم. در فرش‌کردن مجاز نیستیم رأس H را به رأس T بچسبانیم. این محدودیت را می‌توان به وسیلهٔ دو نوع فاق و زبانه کوچک عملی کرد به قسمی که جفت‌کردن آجرهایی که می‌توان آنها را در کنار هم قرار داد درست حالت حل پازل معمولی را پیدا می‌کند.

نشان می‌دهد که تحقیقات مجرد ممکن است در مباحثی دور از انتظار، نتایجی به دست دهد. یک قطره مرکب از آلومینیم و منگنز، در نسبتهای مناسب، وقتی روی یک صفحه مسی سرد که به سرعت دوران می‌کند می‌افتد، خیلی فوری سرد می‌شود (منظور از دوران دادن صفحه، پخش کردن قطره است و دلیل استفاده از مس این است که مس هادی خوبی برای گرما و سرماست). مواد حاصل را می‌توان به وسیله اشعه X و یا میکروسکوپ الکترونیک بررسی کرد. یکی از جالب‌ترین اصول در بلورشناسی این است که تقارن دورانی در شکلهای مشاهده شده، همیشه مربوط به دورانهایی به اندازه

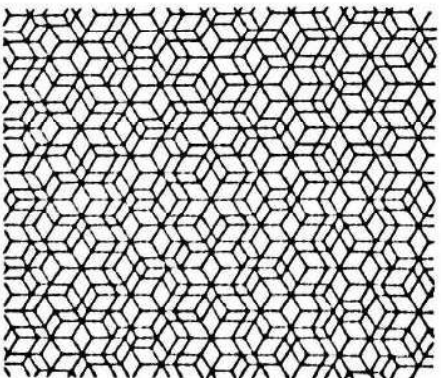
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

دور کامل است. ولی آزمایش روی $Al - Mn$ نشان می‌دهد که تقارن آن در $\frac{1}{8}$ دور است! [۱۴]. در مورد یک آلیاژ دیگر یعنی $Ni - Cr$ ، تقارن در $\frac{1}{4}$ دور ملاحظه شده است.

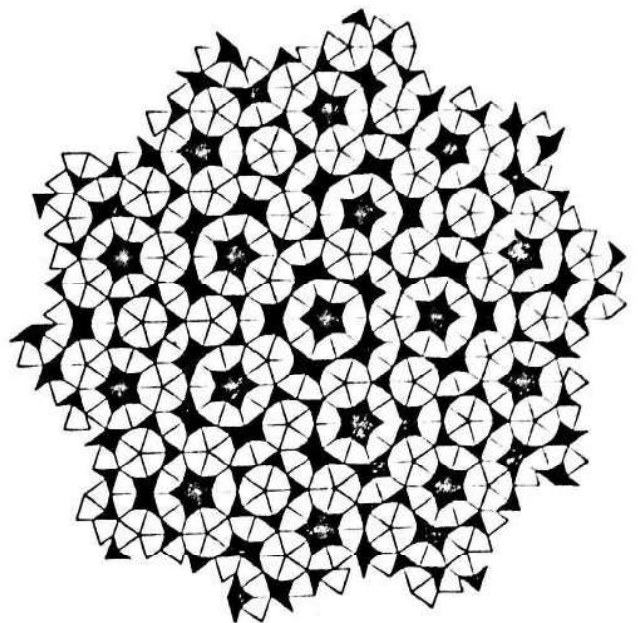
آرایش هندسی آنها در آلیاژهای نامتعارف هنوز شناخته نشده است، ولی فرضی که بیش از همه قابل قبول به نظر می‌آید، یک آرایش شبه‌تناوبی است که بعضی از مقاطع مسطح آن آجر فرش پنروز را درست می‌کند، مانند دو حالت زیر که دونو وکاتس در ۱۹۸۵ بررسی کرده‌اند. این آجر فرشها که به ترتیب ۲ و ۳ الگوی آجر دارند از آجر فرشهای مذکور در بالا متمایزند و در آنها بعضی انطباقها، براساس قواعدی مشابه «رئوس نوع T نباید به رئوس نوع H چسبانده شوند»، مجاز نیست. این آجر فرشها از خاصیت‌های (الف) تا (پ) که در بخش (۲) آمد تبعیت می‌کنند.



(الف) مقطعی از آجر فرش سه‌بعدی که بر محوری از مرتبه ۵ عمود است. آجر فرش پنروز تمیم‌یافته.



(ب) مقطعی از آجر فرش سه‌بعدی که بر محوری از مرتبه ۳ عمود است.



۳. کاربردها

اهمیت مسأله آجر فرش خیلی فراتر از موضوع هندسه مسطحه است. مثلاً وانگ در سال ۱۹۶۱ به دنبال کارهایی در منطق ریاضی به طرح مسأله‌ای از نوع مسائل مذکور در بخش ۲ سوق داده شد:

این مسأله عبارت بود از اینکه آیا اولین سؤال بخش دو، به معنای فنی کلمه که رابینسن به کار برده، تصمیم‌پذیر است یا نه. به دیگر سخن آیا برنامه‌ای کامپیوتری وجود دارد که با در دست داشتن یک خانواده $P_1, P_2, \dots, P_k$ از چند ضلع‌های مسطح نشان دهد که این خانواده می‌تواند صفحه را فرش کند یا نه، و یا آنکه چنین برنامه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد. کلمه «برنامه» را در اینجا باید به معنای وسیع و نظری آن در نظر گرفت که در این معنا، کامپیوتر محدودیتی از نظر حافظه و سرعت ندارد. (برای آشنایی با مسائل تصمیم‌ناپذیری از دیدگاه ریاضی، مثلاً می‌توان [۲] را مطالعه کرد). معلوم شده است که مسأله وانگ هم‌ارز با وجود خانواده‌ای چون $P_1, P_2, \dots, P_k$ از آجرهایی است که صفحه را اجباراً به صورت غیرتناوبی فرش می‌کنند.

بنابراین، پاسخ منفی است یعنی خانواده‌هایی وجود دارند که می‌توانند صفحه را فرش کنند، و اجباراً به صورت غیرتناوبی فرش می‌کنند. به این ترتیب، مسأله تعیین اینکه خانواده‌ای مفروض صفحه را فرش می‌کند یا نه، علی‌الاصول به وسیله کامپیوتر حل‌نشده‌ای است. (کارهای برژه و رابینسن که قبلاً ذکر شد). به همین ترتیب، اینکه خانواده‌ای از مهره‌های چند جزئی صفحه را فرش می‌کند یا نه، تصمیم‌ناپذیر است یا به عبارت دیگر، این مسأله به وسیله کامپیور قابل حل نیست [۵].

چیزی که باعث می‌شود موضوع این مقاله به طرز غیرمنتظره‌ای امروزی باشد، ارتباط آن با مقوله‌ای کاملاً متمایز یعنی فیزیک فلزات است و این امر

۱. سؤال اولیه وانگ این قدر بلندپروازانه نیست زیرا آجرهای الگو، یعنی $P_1, P_2, \dots, P_k$ مقیدند که شکل خاصی داشته باشند: مرجهایی همه به یک قد یا زبانه‌ها و فانها (یا رنگهای مختلف روی ا ضلاع. به علاوه، رئوس آجر فرشها مقیدند به اینکه یک «چهارضلعی بندی» منتظم صفحه را پدید آورند. برژه و سپس رابینسن نشان دادند که این سؤال اولیه تصمیم‌ناپذیر است.

8. LOCHER, J. L. et al *Le monde de M. C. Escher*. Ed. du Chêne, Paris 1972.
9. NIVEN, I. Convex polygons that cannot tile the plane. *Amer. Math. Monthly* 85-10 (1978), 785-792.
10. PENROSE, R. The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bull. Inst. Math. Appl.* 10 (1974), 266-271, et Pentaplexity, *Eureka* 39 (1978), 16-22 Voir aussi: M. GARDNER, Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles, *Sci. Amer.* 236 (janvier 1977), 110-121.
11. REINHARDT, K. *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*. Dissertation der Naturwiss. Fakultät, Universität Frankfurt/Main, Borna 1918.
12. ROBINSON, R. M. Undecidability and non periodicity for tiling of the plane. *Inventiones Math.* 12 (1971), 177-209. Voir aussi: *Inventiones Math.* 44 (1978), 259-264.
13. SCHATTSCHEIDER, D. Tiling the plane with congruent pentagons. *Math. Mag.* 51 (1978), 29-44. Voir aussi: In praise of amateurs, in *The mathematical Gardner*, op. cité, 140-166.
14. SHECHTMAN, D. I. BLECH, D. GRATIAS and J.W. CAHN. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.* 53 (1984), 1951-1953.
15. WANG, H. Proving theorems by pattern recognition -11. *Bell System Tech. J.* 40 (1961), 1-41. Voir aussi: Games, logic and computers, *Sci. Amer.* 213 (novembre 1965), 98-106.

مراجع دیگر، که از ۱۹۸۶ به بعد انتشار یافته‌اند:

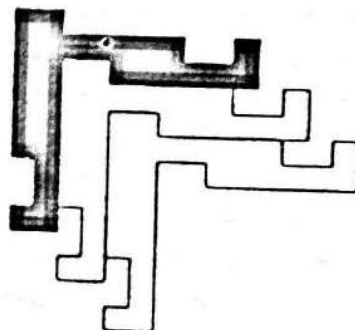
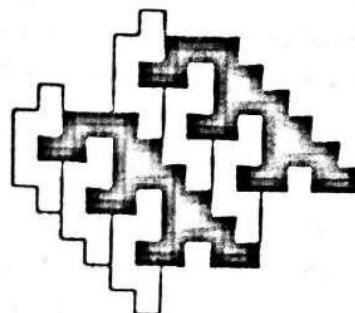
- DANZER, L. Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals. *Discrete Math.* 76 (1989), 1-7.
- GRATIAS, D. Les quasi-cristaux. *La Recherche* 178 (juin 1986), 788-798.
- GRATIAS, D. et M. DUNEAU. *Les quasi-cristaux*. Cours du troisième cycle de la physique en Suisse romande. 416 1987.
- GRATIAS, D. and L. MICHEL (éditeurs). International Workshop on aperiodic crystals. *J. de Physique, suppl. au n° 7* (juillet 1986).
- GRUNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. *Tilings and patterns*. Freeman, 1987.
- KATZ, A. Theory of matching rules for the 3-dimensional Penrose tilings. *Comm. Math. Phys.* 118 (1988), 263-288.
- NELSON, D. R. Quasicrystals. *Sci. Amer.* 255 (août 1986), 32-41.
- OGUEY, G., M. DUNEAU and A. KATZ. A geometrical approach to quasiperiodic tilings. *Comm. Math. Phys.* 118 (1988), 99-118.

• Pierre de la Harpe, "Quelques problèmes non résolus en géométrie plane", *L'Enseignement Mathématique*, t. 35 (1989) 227-243.

• پیردلاهارپ، بخش ریاضی دانشگاه ژنو

در شکل (الف) می‌توان تقارنهای موضعی پنج ضلعها را، که فراوانی آنها به آسانی قابل تشخیص است، مشاهده کرد.

مطالعه آجرفرشها در فیزیک، هندسه، منطق، و کامپیوتر، مفید و مطرح است. نادیده گرفتن جنبه‌های مختلف این موضوع باعث کم شدن غنای آن خواهد شد.



مراجع

1. BERGER, R. *The undecidability of the domino problem*. Mem. Amer. Math. Soc. 66 (1966).
2. DAVIS, M. Hilbert's tenth problem is unsolvable. *Amer. Math. Monthly* 80-3 (1973), 233-269.
3. DUNEAU, M. and A. KATZ. Quasiperiodic patterns. *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985), 2688-2691. Voir aussi: Paver l'espace: un jeu mathématique pour les physiciens. *La Recherche* 167 (juin 1985), 816-819.
4. GARDNER, M. More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds and polyhexes. *Sci. Amer.* 233 (août et sept. 1975), 112-115 et 180. Voir aussi: On tessellating the plane with convex polygon tiles, *Sci. Amer.* 233 (juillet 1975), 112-117, ainsi que: SCHATTSCHEIDER, D. Will it tile? try the Conway criterion! *Math. Mag.* 53-4 (1980), 224-233.
5. GOLOMB, S. W. Tiling with sets of polyominoes. *J. Combinatorial Theory* 9 (1970), 60-71. Voir aussi: Tiling with polyominoes, *ibid.* 1 (1966), 280-296.
6. GRUNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. Some problems on plane tilings, in *The mathematical Gardner*, édité par D. A. Klarner, Wadsworth Intern. (1981), 140-166. Voir aussi: Tiling with congruent tiles. *Bull. Amer. Math. Soc.* 3 (1980), 951-973.
7. KERSHNER, R. B. On paving the plane. *Amer. Math. Monthly* 75-8 (1968), 839-844.