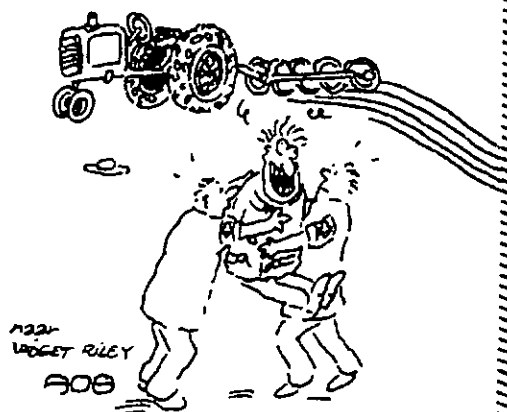


پوریسم

((PORISM))

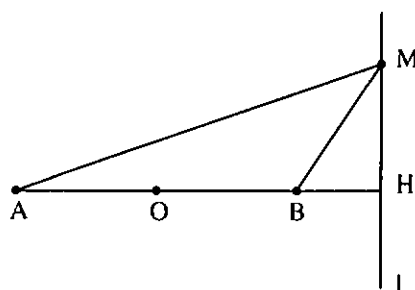
● دکتر احمد شرف الدین



چکیده

در هندسه، پوریسم، به مسأله‌ای گفته می‌شود که اگر در آن مسأله، شرط معینی برقرار باشد، دارای بی‌نهایت جواب باشد و اگر آن شرط برقرار نباشد، هیچ جوابی برای مسأله وجود نداشته باشد. در این مقاله، در مثالهای ۱ تا ۴ چند پوریسم ساده مطرح می‌کنیم تا دانش‌آموزان، مسائل پوریسم را بخوبی دریابند. سپس به شرح دو پوریسم مهم از اوپلر و اشتینر می‌پردازیم. در آنالیز ریاضی، هر جواب معادله $f(x) = x$ را یک نقطه ثابت تابع f می‌نامند. اگر بخواهیم به زبان آنالیز ریاضی صحبت کنیم، می‌توانیم بگوییم پوریسم یک مسأله هندسی است که تابعی که داده‌های آن را به هم مربوط می‌کند، دارای بی‌نهایت نقطه ثابت است.

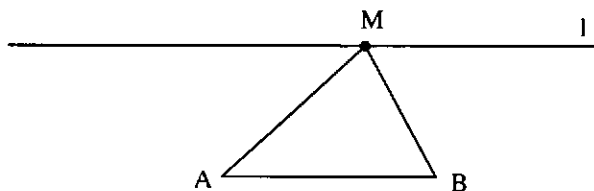
مثال ۱: در صفحه P دو نقطه A و B و خط l عمود بر خط AB مفروضند. بر خط l نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد.



حل: وسط پاره خط AB را نقطه O و نقطه برخورد دو خط l و AB را H می‌نامیم. اگر شرط $OH = 0$ برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و اگر این شرط برقرار نباشد، مسأله جوابی ندارد.

مثال ۲: در صفحه P خط l و دو نقطه A و B مفروضند؛ به طوری که دو خط l و AB موازیند. فاصله دو خط l و AB را h می‌نامیم. می‌خواهیم بر خط l نقطه M را چنان بیابیم که مساحت مثلث MAB برابر عدد معلوم s باشد.

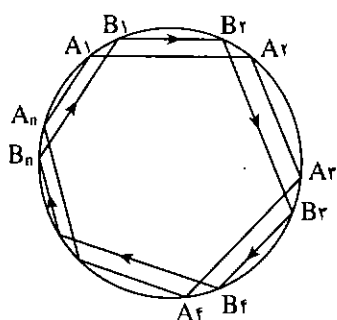
حل: طول پاره خط AB را a می‌نامیم. اگر شرط $s = \frac{1}{2}ah$ برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و اگر این شرط برقرار نباشد، مسأله دارای جواب نیست.



مثال ۳: مثلث ABC مفروض است. بر اضلاع AB ، BC و CA از این مثلث سه کمان دایره ADB ، BEC ، CFA در خارج مثلث رسم شده؛ به طوری که بترتیب کمان درخورهای سه زاویه معلوم α ، β و γ می‌باشند.

هیچ مثلثی وجود ندارد که بر مثلث ABC محیط باشد و سه رأس آن بر سه کمان مذکور قرار داشته باشند.

مثال ۴: دایره (O) و n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ محاط در آن را در نظر می‌گیریم. در دایره (O)، n ضلعی $B_1B_2 \dots B_n$ را چنان محاط کنید که اضلاع $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_nB_1$ بترتیب موازی اضلاع $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$ باشند.

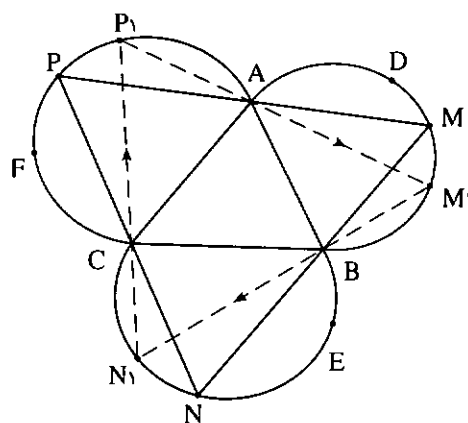


حل: اگر n زوج باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است؛ یعنی هر نقطه دلخواه B_1 که بر محیط دایره بگیریم و خط B_1B_2 را موازی خط A_1A_2 رسم کنیم و سپس خط B_2B_3 را موازی خط A_2A_3 رسم کنیم و عمل ترسیمات متوالی را ادامه دهیم تا به نقطه B_n برسیم، آن‌گاه خط B_nB_1 موازی خط A_nA_1 خواهد بود. اما اگر n فرد باشد، مسأله دارای جواب نیست.

برای اثبات بر دایره (O) جهت مثبت مثلثاتی را به عنوان جهت مثبت اختیار می‌کنیم. اگر دو نقطه M و N بر محیط دایره (O) اختیار کنیم، طول کمان MN را مثبت محسوب می‌کنیم؛ در صورتی که جهت حرکت از M به N در جهت مثبت مثلثاتی باشد و در غیر این صورت، اندازه جبری کمان MN را منفی محسوب می‌کنیم.

اکنون اندازه جبری کمان A_1B_1 را بر محیط دایره جهت دار (O) به I نشان می‌دهیم. اندازه جبری کمان A_2B_2 برابر (-1) می‌باشد و اندازه جبری کمان A_3B_3 برابر (-1) است؛ یعنی برابر 1. اندازه جبری کمان A_nB_n برابر $(-1)^{n+1}$ است. اگر n زوج باشد، این مقدار برابر (-1) است و لذا اگر n زوج باشد، دو کمان A_1B_1 و A_nB_n هم‌طول و ناهمسو می‌باشند؛ پس دو خط A_1A_n و B_1B_n موازی می‌باشند، و اگر n فرد باشد، دو کمان A_1A_n و B_1B_n هم‌طول و همسو می‌باشند و لذا دو خط A_1A_n

بر مثلث ABC مثلثی چون MNP محیط کنید؛ به طوری که سه رأس M، N، P بترتیب بر کمانهای ADB، BEC، CFA قرار داشته باشند.



حل: اگر شرط

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1)$$

برقرار باشد، می‌توان بی‌نهایت مثلث بر مثلث ABC محیط کرد؛ به طوری که سه رأس آنها بر سه کمان یاد شده قرار داشته باشند و اگر شرط (۱) برقرار نباشد، هیچ مثلثی وجود ندارد که بر مثلث ABC محیط باشد؛ به طوری که سه رأس آن بر سه کمان یاد شده قرار داشته باشند.

برای اثبات چنین می‌گوییم: نقطه دلخواه M_1 را بر کمان ADB اختیار می‌کنیم و آن را به نقطه B وصل می‌کنیم. نقطه برخورد خط M_1B را با کمان BEC به N_1 نشان می‌دهیم. سپس نقطه N_1 را به نقطه C وصل می‌کنیم و نقطه برخورد خط N_1C را با کمان AFC به P_1 نمایش می‌دهیم. از نقطه P_1 به نقطه A وصل می‌کنیم و نقطه برخورد خط P_1A را با خط M_1B به L نشان می‌دهیم. چون مقدار دو زاویه CP_1A و BN_1C بترتیب برابر β و γ می‌باشند، پس مقدار زاویه ALB برابر:

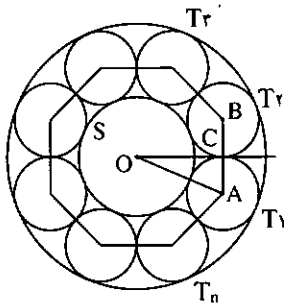
$$180^\circ - (\beta + \gamma)$$

می‌باشد. حال اگر بخواهیم که نقطه L بر کمان ADB قرار داشته باشد، باید شرط $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ وجود داشته باشد.

اگر شرط یاد شده برقرار باشد، بر مثلث ABC می‌توان بی‌نهایت مثلث محیط کرد؛ به طوری که سه رأس آن بر سه کمان ADB، BEC و CFA قرار داشته باشند و اگر شرط یاد شده برقرار نباشد،

و $B_n B_1$ موازی نیستند.

مماس داخلند، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم چه رابطه‌ای بین r ، R و n موجود باشد تا دایره T_n بر دایره T_1 مماس گردد.

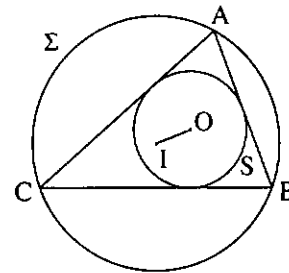


دو پوریسم مهم

در سطور آینده، دو پوریسم مهم ذکر می‌کنیم. پوریسم اول از یکی از قضیه‌های هندسی اویلر نتیجه می‌شود. پوریسم دوم از پوریسمهای بسیار جالب است که از کارهای ژاکوب اشتینر، هندسه‌دان برجسته قرن نوزدهم است.

پوریسم اویلر: دایره $S(I, R)$ محاط در دایره $\Sigma(O, R)$ داده شده است.

مثلی در دایره Σ محاط کنید که بر دایره S محیط باشد.



حل: می‌توانیم هر یک از این دایره‌ها را دایره اول تلقی کنیم که بر دایره دوم و بر آخرین دایره مماس می‌باشد. دو دایره مماس متوالی به مرکزهای A و B را که در نقطه C مماسند، در نظر می‌گیریم. خط مماس OC بر خط‌المركزین AB عمود است. برای آن که حلقه دایره‌ها پس از یک دور بسته شود؛ یعنی دایره T_n بر دایره T_1 مماس شود، باید شرط زیر برقرار باشد.

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{AC}{OA}$$

و چون $\overline{AC} = \frac{1}{4}(R-r)$ و $\overline{OA} = \frac{1}{4}(R+r)$ ، پس باید داشته باشیم:

$$(1) \sin \frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$

اگر شرط (۱) برقرار باشد، حلقه دایره‌ها پس از یک دور، بسته می‌شود و مسأله دارای بی‌نهایت جواب است؛ زیرا هر نقطه از دایره S را می‌توان یک نقطه تماس دایره T_1 با دایره S دانست. به عبارت دیگر، با چرخاندن یکی از جوابها (یعنی حلقه دایره‌ها) به اندازه زاویه دلخواه، یک جواب دیگر به دست می‌آید.

تبصره: اگر بخواهیم که پس از k دور چرخیدن دور دایره S ، دایره آخری، یعنی دایره T_n ، به دایره T_1 مماس شود، باید داشته باشیم:

$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$

طرز رسم شکل پوریسم

می‌خواهیم دو دایره هم مرکز رسم کنیم؛ به طوری که در حلقه

برای حل این مسأله، از قضیه زیر که از آن اویلر است، استفاده می‌کنیم:

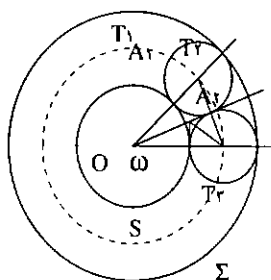
قضیه: اگر شعاع دایره محیطی یک مثلث، برابر R ، شعاع دایره محاط در آن، برابر r و طول خط‌المركزین برابر d باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

اگر در مسأله موردنظر داشته باشیم:

$$(1) \overline{OI}^2 = R^2 - 2rR$$

آنگاه بی‌نهایت جواب داریم؛ یعنی بی‌نهایت مثلث وجود دارد که در دایره Σ محاط و بر دایره S محیط باشند و اگر رابطه (۱) بین سه مقدار R ، r و $\overline{OI}$ برقرار نباشد، مسأله دارای جواب نیست. پوریسم اشتینر: پوریسم اشتینر را ابتدا در حالت خاص (در قسمت الف) و سپس در حالت کلی (در قسمت ب) مطرح می‌کنیم. الف. دو دایره هم مرکز $S(O, r)$ و $\Sigma(O, R)$ را در نظر می‌گیریم. یک سلسله دایره‌های $T_1, T_2, \dots, T_n$ را که دایره S مماس خارجند و به علاوه بر دایره S مماس خارج و بر دایره Σ



حل: برای حل، دو قضیه یاد شده زیر را به کار می گیریم:
قضیه الف. به وسیله انعکاس می توان دو دایره غیر مشخص غیر متقاطع را به دو دایره هم مرکز تبدیل کرد.

قضیه ب. دو دایره (C, R) و (C_1, R_1) را که طول خط مرکزین آنها d است، در نظر می گیریم. منعکس آنها را نسبت به یک نقطه O بترتیب دایره های (C', R') و (C'_1, R'_1) می نامیم و طول خط مرکزین دو دایره اخیر را d' می نامیم. عبارت

$$\frac{d'^2 - R'^2 - R_1'^2}{RR_1} \text{ در برابر تبدیل انعکاس پایاست؛ یعنی:}$$

$$\frac{d'^2 - R'^2 - R_1'^2}{RR_1} = \pm \frac{d'^2 - R'^2 - R_1'^2}{R'R'_1}$$

کسر سمت راست، دارای علامت $(+)$ است؛ اگر توانهای نقطه O نسبت به دو دایره (C, R) و (C_1, R_1) هم علامت باشند و در غیر این صورت، علامت کسر سمت راست $(-)$ است.

دو دایره S و Σ را به وسیله تبدیل انعکاس، به دو دایره هم مرکز تبدیل می کنیم. مسأله، به مسأله دو دایره هم مرکز برمی گردد؛ به شرط آن که حلقه دایره ها پس از یک دور چرخش به دور دایره S ، بسته شود؛ یعنی دایره T_n .

به دایره T_1 مماس شود، آن است که:

$$(1) \sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R+r)^2 + d^2}$$

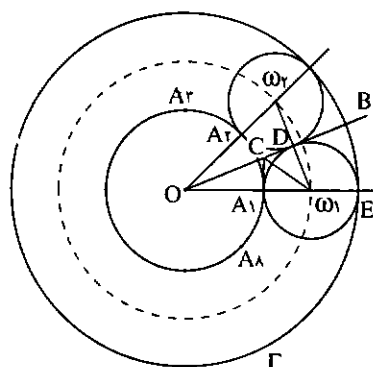
شرط آن که حلقه دایره ها پس از k دور چرخش به دور دایره S ، بسته شود، آن است که:

$$(2) \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R+r)^2 + d^2}$$

اگر رابطه (۱) یا (۲) برقرار باشد، مسأله دارای بی نهایت جواب

بین این دو دایره بتوان n دایره مساوی (مثلاً ۸ دایره) رسم کرد که دو به دو مماس باشند و به علاوه، بر دایره داخلی، مماس خارج و بر دایره خارجی، مماس داخل باشند.

یک دایره دلخواه (O) رسم می کنیم. محیط این دایره را به وسیله نقاط $A_1, A_2, \dots, A_8$ به هشت کمان مساوی تقسیم می کنیم. مماس A_1C را بر دایره (O) رسم می کنیم تا خط OB نیمساز زاویه A_1OA_2 را در نقطه C قطع کند. نیمساز زاویه A_1CB را رسم می کنیم تا خط OA_1 را در نقطه ω_1 قطع کند. عمود ω_1D را بر خط OC فرود می آوریم. چنین داریم $\omega_1A_1 = \omega_1D$ (خاصیت نیمساز). دایره ای به مرکز O و شعاع $O\omega_1$ رسم می کنیم تا خطهای $OA_2, OA_3, \dots, OA_8$ را بترتیب در نقاط $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_8$ قطع کند. هشت دایره مساوی با مرکزهای $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ و با شعاع ω_1A_1 رسم می کنیم. نقطه برخورد خط OA_1 با دایره به مرکز ω_1 و شعاع ω_1A_1 را به E نشان می دهیم. دایره به مرکز O و شعاع OE را دایره Γ می نامیم. هشت دایره یاد شده بر دایره O ، مماس خارج و بر دایره Γ ، مماس داخلند. شکل حاصل یعنی شکل زیر، همان شکل مطلوب است.



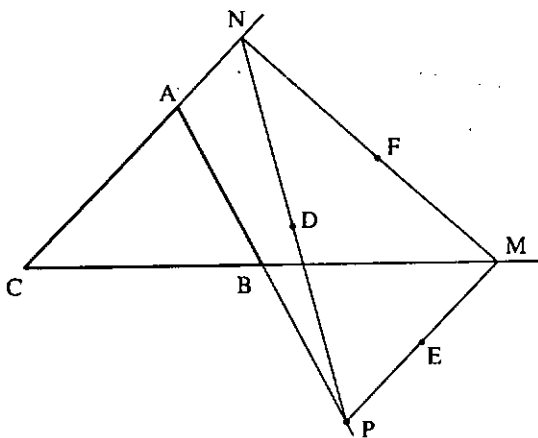
ب. دو دایره $S(O, r)$ و $\Sigma(\omega, R)$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که دایره S داخل دایره Σ باشد. یک سلسله دایره های $T_1, T_2, \dots, T_n$ را که دو به دو مماس خارجند و به علاوه بر دایره S ، مماس خارج و به دایره Σ ، مماس داخلند، در نظر می گیریم. فاصله دو مرکز را d می نامیم. چه رابطه ای باید بین R, r و d برقرار باشد تا حلقه دایره های $T_1, T_2, \dots, T_n$ پس از یک دور بسته شود؛ یعنی دایره T_n بر دایره T_1 مماس شود.

نقطه L از این محور به دست می آید. پس y تابع x است که آن را به صورت $y = f(x)$ نشان می دهیم.

اگر نقطه M_1 در جایی از خط BC انتخاب شود که نقطه L بر آن منطبق گردد، در این صورت، نقطه M_1 یک رأس مثلث محاطی مطلوب می باشد. طول نقطه M_1 جواب معادله $y = f(x)$ است. x نقطه ثابت تابع f است.

تابع f یک تابع هموگرافیک است که می توان به آسانی ضرایب آن را به دست آورد.

تبصره: در هندسه، وقتی می گویم که در مثلث ABC مثلی محاط کنید که دارای فلان خاصیت باشد، منظور آن است که سه رأس مثلث مطلوب، بر سه خط AB ، BC و CA قرار داشته باشند و دارای خاصیت مورد نظر باشند. شکل زیر، یکی از حالت های مسئله را نشان می دهد.



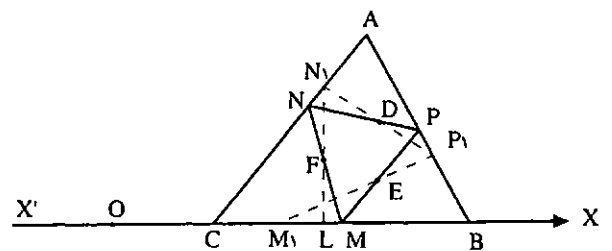
است؛ زیرا از هر یک از وضعیتهای حلقه دایره های مسئله اشتینر در حالت الف، یک جواب برای مسئله اشتینر در حالت ب حاصل می شود.

نقطه ثابت

تابع f از متغیر حقیقی x را در نظر می گیریم. هر جواب معادله $f(x) = x$ یک نقطه ثابت تابع f نامیده می شود. این موضوع در آنالیز ریاضی مطرح می گردد. اگر بخواهیم مسئله پورسم را به زبان آنالیز ریاضی بیان کنیم، می توانیم بگوییم که پورسم یک مسئله هندسی است، که تابعی که داده های آن را به هم مربوط می کند، دارای بی نهایت نقطه ثابت است. به کمک نقطه ثابت، می توان تعداد زیادی از قضیه های هندسه، از جمله قضیه مشهور پاسکال (خاصیت شش ضلعی محاط در دایره) را ثابت کرد.

در مثال ساده و زیبای زیر، کاربردی از نقطه ثابت را برای دانش آموزان یاد می کنیم.

مسئله: در صفحه P مثلث ABC و سه نقطه D ، E و F مفروضند. مثلث MNP را در مثلث ABC طوری محاط کنید که خطوط NP ، PM و MN به ترتیب از سه نقطه D ، E و F بگذرند.



حل: محور $x'Ox$ را منطبق بر خط BC اختیار می کنیم. نقطه دلخواه M_1 را بر محور $x'Ox$ در نظر می گیریم و اندازه جبری بردار $\overrightarrow{OM_1}$ را روی محور $x'Ox$ به x نشان می دهیم. نقطه M_1 را به نقطه E وصل می کنیم و محل برخورد خط M_1E را با خط AB به P_1 نشان می دهیم. نقطه برخورد P_1D را با خط AC به N_1 و نقطه برخورد خط N_1F را با خط BC به L نشان می دهیم. اندازه جبری بردار $\overrightarrow{OL}$ را روی محور $x'Ox$ به y نشان می دهیم. به ازای هر نقطه M_1 از محور $x'Ox$ یک و فقط یک

