

پارامترهای جبری متجانس

● دکتر احمد شرف الدین

مقدمه

به صورت $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ بنویسیم هیچ گاه از این معادله، معادله خطوط مستقیم به دست نمی آید.

برای فایق آمدن بر این مشکل پارامترهای جبری متجانس به کار می بریم یعنی معادله خط راست را به صورت $ax + by + c = 0$ می نویسیم که جمیع اوضاع خط راست را نشان می دهد و معادله دایره را به صورت $(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ می نویسیم به ازای $\lambda = 0$ خطوط راست به دست می آید.

مسئله ۱. معادله خطوطی را که از مبدأ مختصات بر منحنی C به معادله

$$(1) \quad y^2 - x - 2y + 1 = 0$$

تماس رسم می شوند بنویسید.

حل. معادله خطوطی را که بر مبدأ مختصات می گذرند به صورت زیر می نویسیم:

$$(2) \quad y = mx$$

جوابهای دستگاه معادله های زیر مختصات نقاط تقاطع منحنی C و خط به معادله (۲) می باشند:

$$(3) \quad \begin{cases} y^2 - x - 2y + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

از حذف لایین دو معادله دستگاه بالا، معادله زیر حاصل می شود:

$$(4) \quad m^2 x^2 - (1 + 2m)x + 1 = 0$$

جوابهای معادله (۴) طولهای نقاط تقاطع منحنی C و خط (۲) می باشند. شرط تماسی خط (۲) و منحنی C چنین است:

$$(5) \quad \Delta = 4m + 1 = 0$$

مفهوم پارامترهای جبری متجانس حائز اهمیت است. دانش آموزان باید از این مفهوم آگاهی داشته باشند. عدم آشنایی با این مفهوم موجب اشتباه در حل بعضی مسائل می شود. در سطرهای آینده در این مورد توضیح می دهیم و مثالهای متعدد ذکر می کنیم. این مثالها را طوری طرح کرده ایم که محاسبات آنها بسیار کوتاه باشد تا توجه دانش آموز کاملاً به درک نقش پارامترهای جبری متجانس متمرکز باشد.

پارامترهای هندسی و پارامترهای جبری

هر شرط مشخص کننده یک شکل هندسی یک پارامتر نامیده می شود مثلاً چون خط مستقیم با دو نقطه مشخص می شود می گوئیم خط مستقیم دو پارامتر دارد. دایره با سه نقطه اش مشخص می شود از این جهت می گوئیم دایره سه پارامتر دارد: هر نقطه از یک شکل یک پارامتر محسوب می شود مگر نقاط مخصوص مثلاً رأس بیضی دو پارامتر محسوب می شود. وقتی می گوئیم نقطه A رأس یک بیضی است یعنی این که نقطه A متعلق به بیضی است (یک شرط) و به علاوه یکی از محورهای بیضی از نقطه A می گذرد (شرط دوم).

هنگامی که معادله یک خط راست را در هندسه تحلیلی می نویسیم نمی توانیم اوضاع مختلف خط راست را به توسط دو پارامتر مشخص کنیم. به عنوان مثال اگر معادله خط را به صورت $y = px + q$ بنویسیم خطوط $x = a$ (خطوط موازی با محور y ها) را نمی توان با آن معادله به دست آورد. همچنین می دانیم که خط راست دایره های است که شعاع آن بی نهایت است. اگر معادله دایره را

$$(۱۱) \quad y^2 - 2y + 1 = 0$$

معادله (۱۱) دارای جواب مضاعف $y = 1$ است. پس خط $x = 0$ در نقطه‌ای به عرض $y = 1$ بر منحنی C مماس است.

ب. اگر $b \neq 0$ باشد معادله دوم دستگاه (۸) را به صورت زیر

$$(۱۲) \quad y = \frac{a}{b}x$$

می‌نویسیم: قرار می‌دهیم $m = \frac{a}{b}$ معادله (۱۲) به صورت $y = mx$ در می‌آید. در این صورت دستگاه معادله‌های (۸) به صورت دستگاه معادله‌های (۳) نوشته می‌شود و به وسیله آن معادله خط مماس دیگر به صورت (۶) به دست می‌آید. با این ترتیب با به کارگیری پارامترهای جبری متجانس یعنی با به کارگیری معادله (۷) معادله هر دو خط مماس را به دست می‌آوریم.

اگر معادله (۱) را به صورت $x = (y - 1)^2$ بنویسیم به آسانی معلوم می‌شود که منحنی C یک سهمی است که در نقطه $S(0, 1)$ بر محور y مماس است.

مسئله ۲. دایره C به معادله

$$(۱۳) \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

مفروض است. معادله خطوطی را که از مبدأ مختصات می‌گذرند و بردایره C مماسند بنویسید.

حل. معادله خطوطی که بر مبدأ مختصات می‌گذرند به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱۴) \quad y = mx$$

مختصات نقاط تقاطع دایره C و خط (۱۴) جوابهای دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(۱۵) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه (۱۵) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(۱۶) \quad (1 + m^2)x^2 - 2(1 + 2m)x + 4 = 0$$

شرط تماس خط (۱۴) و دایره (۱۳) چنین است:

$$\Delta = 4m - 2 = 0$$

$$m = \frac{2}{4}$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

معادله خط مماس چنین است:

$$(۶) \quad y = -\frac{1}{4}x$$

معادله (۱) معادله یک سهمی است و نقطه $O(0, 0)$ روی منحنی C قرار ندارد زیرا مختصات نقطه O در معادله (۱) صدق نمی‌کنند. پس چرا فقط یک معادله برای خطوط مماس به دست آمده است؟

علت آن است که در نوشتن معادله خط، پارامتر جبری متجانس به کار نبوده‌ایم. معادله کلی خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند به صورت (۲) نیست که به صورت زیر است:

$$(۷) \quad ax = by$$

در معادله (۲) هیچ مقداری نمی‌توان به m نسبت داد تا خط نمایش آن محور y ها باشد. معادله (۲) کلیه خطوط مابعد مبدأ مختصات را نشان می‌دهد بجز خط y'/y را. در مسئله (۱)، محور y ها مماس بر سهمی C است. معادله (۲) محور y را نشان نمی‌دهد، از این جهت دستگاه معادله‌های (۳) فقط معادله یک خط مماس را به دست داده است.

برای جست‌وجوی معادله‌های خطوط مماس، دستگاه معادله‌های زیر را می‌نویسیم:

$$(۸) \quad \begin{cases} y^2 - x - 2y + 1 = 0 \\ ax = by \end{cases}$$

لازم بین دو معادله حذف می‌کنیم. چنین می‌نویسیم:

$$(۹) \quad y = \frac{a}{b}x$$

اما این هنگامی ممکن است که $b \neq 0$ باشد. پس دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف. اگر $b = 0$ باشد در این صورت معادله دوم دستگاه (۸) می‌شود:

$$(۱۰) \quad x = 0$$

حال بررسی می‌کنیم که آیا خط به معادله (۱۰) بر منحنی C مماس است یا نه. در معادله اول دستگاه به جای x مقدار آن یعنی صفر قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

از حذف y بین دو معادله دستگاه معادله‌های (۱۹)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$(20) \quad (p^2 - p - 2)x^2 + (2pq - q + 2)x + q^2 - 1 = 0$
جوابهای معادله (۲۰) طولهای نقاط تقاطع خط (۱۸) و نمودار معادله (۱۷) اند. اگر نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست تشکیل شده باشد می‌توان p و q را طوری انتخاب کرد که معادله (۲۰) دارای بی‌نهایت جواب باشد. برای آن‌که معادله (۲۰) دارای بی‌نهایت جواب باشد لازم و کافی است هر سه ضریب آن صفر باشند یعنی:

$$(21) \quad \begin{cases} p^2 - p - 2 = 0 \\ 2pq - q + 2 = 0 \\ q^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه معادله‌ها چنین است:

$$\begin{cases} p = -1 \\ q = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

پس نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست به معادلات زیر تشکیل شده‌اند.

$$y = -x + 1 \quad y = 2x - 1$$

تبصره: سؤال (۳) را می‌توان به صورت زیر مطرح کرد:

عبارت زیر را به حاصل ضرب دو عبارت درجه اول بر حسب x و y تجزیه کنید.

$$-2x^2 + y^2 - xy + 2x - 1$$

توجه. سؤال (۴) که در مطلق آورده می‌شود از همان نوع سؤال (۳) است. در حل سؤال (۳) نیازی به بکارگیری پارامترهای جبری متجانس نبود. اما در حل سؤال (۴) باید پارامترهای جبری متجانس به کار ببریم. سؤال (۳) را فقط از این نظر مطرح کردیم که ذهن خواننده برای سؤال (۴) آماده شود.

سؤال ۴. ثابت کنید نمودار معادله زیر از دو خط راست تشکیل شده است:

$$(22) \quad x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0$$

حل. معادله خط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{2}{x}x$$

نقطه O (مبدأ مختصات) در خارج از دایره C است زیرا مختصات مرکز دایره C عبارت است از $(1, 2)$ و شعاع آن $r = 1$ است. فاصله O از مرکز دایره $\sqrt{5}$ است.

چرا با وجود آن‌که نقطه O خارج از دایره است برای خطوط مماس فقط یک معادله به دست آمده است. علت این امر آن است که در نوشتن معادله خطوط مار بر مبدأ مختصات پارامترهای جبری متجانس به کار نبرده‌ایم. برای به دست آوردن جواب کامل، معادله خطوط مار بر مبدأ مختصات را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ax = by$$

و سپس همان شیوه استدلال سؤال (۱) را به کار می‌بریم. معادله هر دو خط مماس به دست می‌آید.

اکنون سؤال دیگری در شماره (۴) مطرح می‌کنیم که اگر در حل آن پارامترهای جبری متجانس به کار نبریم دچار اشتباه می‌شویم. برای این منظور ابتدا با حل سؤال (۳) ذهن خواننده را آماده می‌کنیم و سپس سؤال (۴) را که هدف اصلی، است مطرح می‌کنیم.

مسئله ۳. معادله درجه دوم

$$(17) \quad -2x^2 + y^2 - xy + 2x - 1 = 0$$

مفروض است. ثابت کنید نمودار این معادله از دو خط راست تشکیل شده است.

حل: معادله خطوط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(18) \quad y = px + q$$

دستگاه معادله‌های زیر، مختصات نقاط تقاطع خط (۱۸) و نمودار (۱۷) را به دست می‌دهد:

$$(19) \quad \begin{cases} -2x^2 + y^2 - xy + 2x - 1 = 0 \\ y = px + q \end{cases}$$

اگر نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست تشکیل شده باشد آنگاه می‌توان مقادیر p و q را طوری اختیار کرد که خط (۱۸) نمودار (۱۷) را در بی‌نهایت نقطه قطع کند.

در سطور زیر پارامترهای جبری متجانس به کار می‌بریم تا بر مشکل فایق آییم.

برای حل مسأله، معادله خط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(28) \quad ax + by + c = 0.$$

مختصات نقاط تقاطع خط به معادله (۲۸) و نمودار معادله (۲۲) جوابهای دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(29) \quad \begin{cases} x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف. اگر $h = 0$ باشد آنگاه معادله دوم دستگاه معادله‌های

(۲۹) به صورت $x = \alpha$ (خطوط موازی محور y ها) در می‌آید. حال بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان مقداری به α نسبت داد تا خط $x = \alpha$ بخشی از نمودار معادله (۲۲) باشد. برای این منظور α باید بتواند مقداری بگیرد که تساوی زیر به‌ازای جميع مقادیر y برقرار باشد:

$$\alpha^2 + \alpha y - 2\alpha - y + 1 = 0.$$

و یا

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + y(\alpha - 1) = 0.$$

پس باید دو تساوی زیر باهم برقرار باشند:

$$\alpha - 1 = 0.$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

به‌ازای $\alpha = 1$ هر دو تساوی برقرار است پس خط $x = 1$ بخشی از نمودار معادله (۲۲) است.

ب. اگر $h \neq 0$ باشد معادله (۲۸) را به صورت $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $\frac{-a}{b} = p$ و $\frac{-c}{b} = q$. در این صورت

معادله (۲۸) به صورت $y = px + q$ نوشته می‌شود و دستگاه

معادله‌های (۲۹) به صورت دستگاه معادله‌های (۲۴) در می‌آید که

به‌وسیله آن بخش دیگر نمودار معادله (۲۲) به صورت معادله (۲۷) به دست می‌آید.

$$(23) \quad y = px + q$$

دستگاه معادله‌های زیر مختصات نقاط تقاطع خط (۲۳) و نمودار معادله (۲۲) را به دست می‌دهند.

$$(24) \quad \begin{cases} x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0 \\ y = px + q \end{cases}$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه (۲۴) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(25) \quad (1 + p)x^2 + (q - p - 2)x - q + 1 = 0.$$

جوابهای معادله (۲۵) طولهای نقاط تقاطع خط (۲۳) و نمودار (۲۲) اند. اگر نمودار (۲۲) متشکل از دو خط راست باشد آنگاه می‌توان مقادیر p و q را طوری اختیار کرد که معادله (۲۵) دارای بی‌نهایت جواب باشد. برای آن که معادله (۲۵) دارای بی‌نهایت جواب باشد لازم و کافی است که هر سه ضریب آن صفر باشند یعنی:

$$(26) \quad \begin{cases} 1 + p = 0 \\ -q + 1 = 0 \\ q - p - 2 = 0 \end{cases}$$

جواب این دستگاه معادلات چنین است:

$$p = -1 \quad \text{و} \quad q = 1$$

پس معادله (۲۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(27) \quad y = -x + 1$$

اما، معادله (۲۲) از درجه دوم است و نمی‌تواند فقط شامل یک خط باشد.

نقص حل در کجاست؟ نقص حل ما، این است که پارامترهای

جبری متجانس به کار نبرده‌ایم. معادله (۲۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - 1)(y + x - 1) = 0.$$

پس نمودار معادله (۲۲) از دو خط راست به معادله‌های $x - 1 = 0$

و $y + x - 1 = 0$ تشکیل شده است. در معادله (۲۳) نمی‌توان

مقادیری به p و q نسبت داد تا آن معادله به صورت $x - 1 = 0$ در

آید. از این جهت است که با به کارگیری معادله (۲۳) نتوانستیم معادله

هر دو خط تشکیل دهنده نمودار معادله (۲۳) را به دست آوریم.