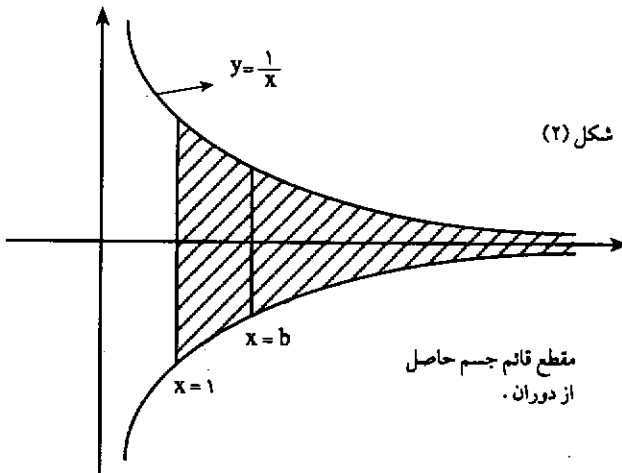
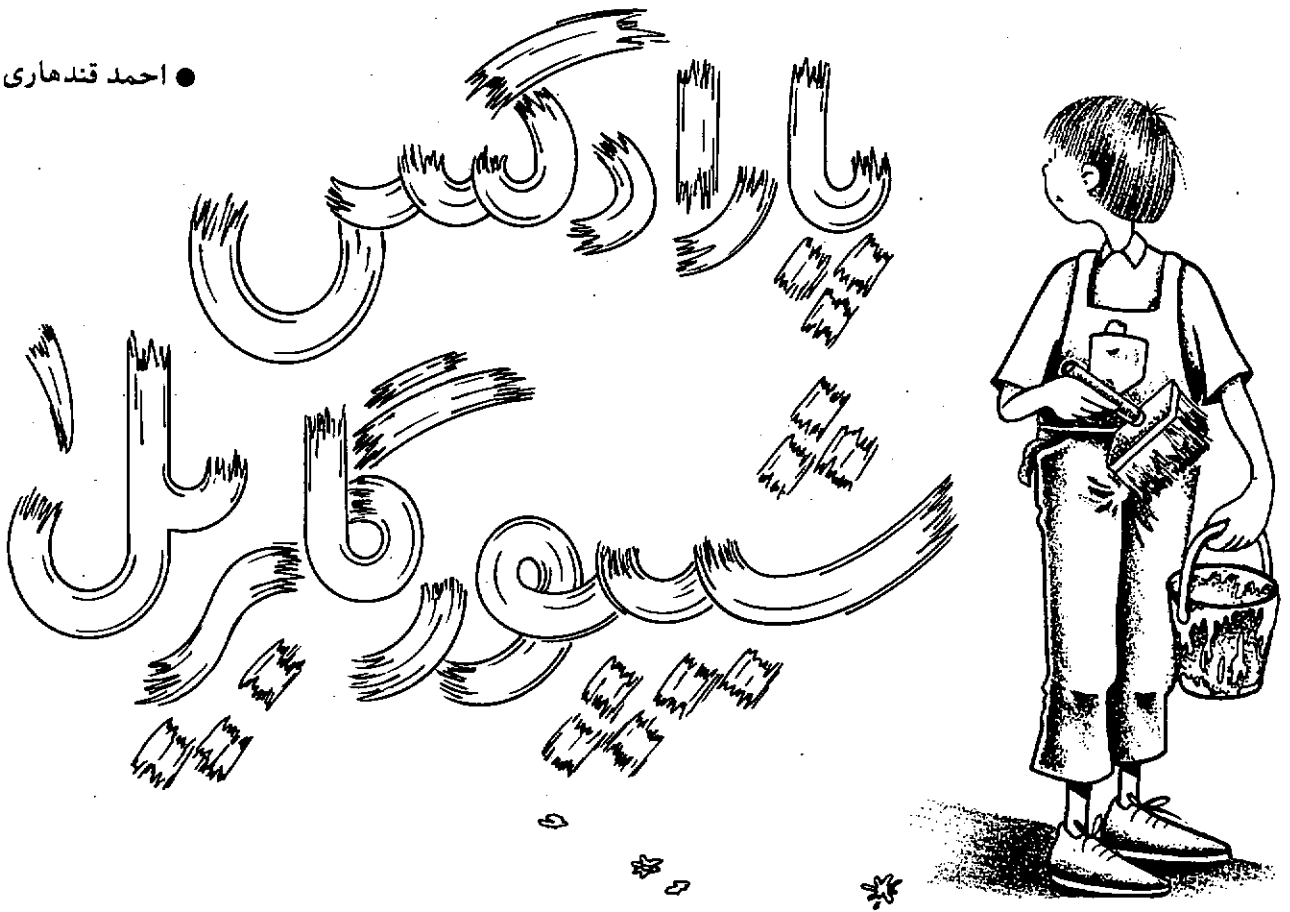


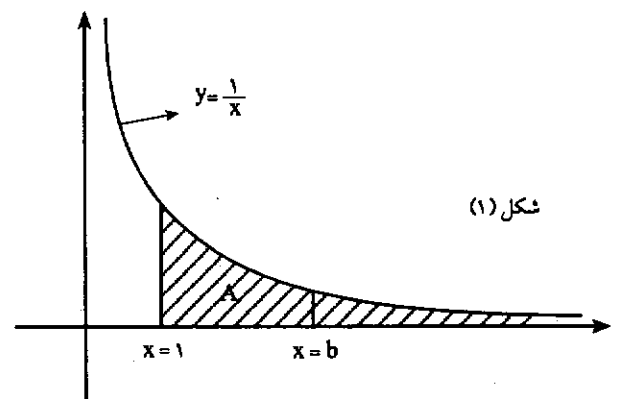
● احمد قندهاری



شکل (۲)

در این مقاله، این تناقض وجود دارد که: یک بار ثابت می‌شود، تمام رنگ‌های دنیا برای رنگ کردن یک سطح کافی نیست و از طرف دیگر، ثابت می‌شود با مختصر رنگی، می‌توان همان سطح را رنگ کرد. طرح مسأله به صورت زیر است.

تابع حقیقی با ضابطه $y = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$ را در نظر می‌گیریم، نمودار تابع را در صفحه محاورهای مختصات رسم می‌کنیم.



شکل (۱)

۱. می‌خواهیم ثابت کنیم سطح زیر منحنی به معادله $y = \frac{1}{x}$ ، $x \geq 1$ و محور x ها را نمی‌توان با همه رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

۲. جسم نامتناهی حاصل از دوران این سطح حول محور x ها را با π واحد مکعب رنگ می‌توان رنگ کرد. (که در این صورت، سطح جانبی جسم حاصل، هم رنگ خواهد شد.)

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\pi \int_1^b \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} dx$$

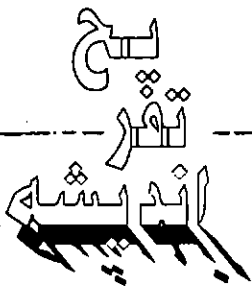
$$S = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$$

محاسبه این انتگرال مشکل است، ولی توجه داشته باشیم که:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} > \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$S > \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\pi \ln b) = +\infty$$

پس سطح جانبی جسم، نامتناهی است و همه رنگ‌های دنیا برای رنگ کردن آن کافی نیست؛ در حالی که در حل (۲) نتیجه گرفتیم که سطح جانبی به همراه حجم جسم با π واحد مکعب رنگ، رنگی خواهد شد.



بزرگترین عدد درستی که باید، به ازای جمیع مقادیر عدد درست n ، حاصل $n^5 - 5n^3 + 4n$ باشد، چیست؟

جواب: ۱۲۰

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \quad \text{حل:} \\ &= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که $(n^5 - 5n^3 + 4n)$ برابر حاصلضرب پنج عدد صحیح متوالی است؛ بنابراین بر ۵ بخش پذیر است. گذشته از این، حاصلضرب مزبور باید شامل یک جفت عدد صحیح زوج متوالی باشد، و یکی از این اعداد صحیح بر ۴ بخش پذیر است. حاصلضرب مورد بحث باید دست کم شامل مضربی از ۳ نیز باشد. بنابراین:

$$(n^5 - 5n^3 + 4n) \text{ همواره مضربی از } 5 \times 4 \times 2 \times 3 = 120 \text{ است.}$$

۳. سطح جانبی این جسم حاصل از دوران این سطح را نمی‌توان با همه رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

حل (۱): در حقیقت سؤال این است که آیا سطح A در شکل (۱) متناهی است؟

اگر سطح متناهی باشد، می‌توان آن را رنگ کرد؛ چنانچه سطح نامتناهی باشد، با همه رنگ‌های دنیا نمی‌توان آن را رنگ کرد. حال به محاسبه اندازه سطح A می‌پردازیم.

$$A \text{ اندازه} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(x) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b) = +\infty$$

پس مقدار سطح A نامتناهی است و نمی‌توان آن را با همه رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

حل (۲): حال حجم جسم حاصل از دوران سطح نامتناهی A را حول محور xها محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم جسم نامتناهی} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \pi \int_1^b y^2 dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \pi \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \pi \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = \pi \text{ واحد مکعب}$$

پس حجم جسم نامتناهی حاصل از دوران سطح نامتناهی A حول محور xها، برابر ۵ واحد مکعب است. پس می‌توان آن را با π واحد مکعب رنگ، پر از رنگ کرد. در این صورت، سطح جانبی جسم هم رنگی خواهد شد؛ در حالی که نصف مقطع عرضی آن را که همان سطح نامتناهی A باشد، نمی‌توان رنگ کرد. [حل (۱)]

در ریاضی، این جسم به شیپور گابریل معروف است. حل (۳): سطح جانبی جسم نامتناهی را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b 2\pi y dS, \quad \text{اندازه سطح جانبی}$$

$$dS = \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$S = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} \sqrt{1+y'^2} dx$$