

وارون ماتریس

تعریف، قضیه ها و مسأله ها

✱ ممید (ضا) امیری

قضیه یکتایی وارون در به دست آوردن وارون یک ماتریس، می تواند مؤثر باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. اگر $(YI + A)A = A(YI + A) = I$ بلافاصله از قضیه یکتایی وارون، نتیجه می شود $(YI + A) = A^{-1}$.

نکته مهم: اگر k یک عدد حقیقی و ناصفر باشد، در این صورت kI ماتریسی وارون پذیر و وارون آن $(\frac{1}{k})I$ است؛ زیرا:

$$(\frac{1}{k}I)(kI) = (kI)(\frac{1}{k}I) = (k \times \frac{1}{k})(I \times I) = 1 \times I = I$$

در نتیجه بنا به قضیه یکتایی وارون داریم:

$$(kI)^{-1} = (\frac{1}{k}I), (\frac{1}{k}I)^{-1} = (kI)$$

در قضیه بعدی، شرط برقراری قانون حذف در ضرب ماتریس ها بیان می شود:

قضیه: اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد (A^{-1} وجود داشته باشد) و B و C دو ماتریس دلخواه باشند، به طوری که AB و AC تعریف شود، در این صورت داریم:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

اثبات: چون A وارون پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد. حال، اگر طرفین فرض را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم، حکم به دست می آید.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

نتیجه ۱: در حالت خاص، اگر $A = [K]$ ماتریسی 1×1 باشد و $K \neq 0$ ، در این صورت داریم:

$$KB = KC \Rightarrow B = C$$

نتیجه ۲: اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد و داشته باشیم: $AB = \bar{O}$ ، در این صورت داریم: $B = \bar{O}$ ؛ زیرا:

$$AB = \bar{O} \Rightarrow AB = A\bar{O} \Rightarrow B = \bar{O}$$

قضیه: اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد، آن گاه $|A| \neq 0$ است. اثبات: طبق تعریف وارون داریم:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$$

$$\Rightarrow |A| \neq 0$$

وقتی صحبت از وارون می شود، بلافاصله وارون یک عدد حقیقی مانند a ، یعنی $\frac{1}{a}$ در ذهن تصور می شود و این خاصیت که حاصل ضرب هر عدد در وارونش، عضو خنثی در عمل ضرب، یعنی ۱ را نتیجه می دهد. ($a \times \frac{1}{a} = 1$) البته شرط $a \neq 0$ برای وجود $\frac{1}{a}$ ، شرطی لازم و کافی است و می توان به جای $\frac{1}{a}$ از نماد a^{-1} استفاده کرد. در مجموعه ماتریس ها نیز، شبه تعریف فوق برای وارون هر ماتریس، یک ماتریس مربعی وجود دارد و می توان از آن الهام گرفت!

تعریف: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و ماتریسی چون B وجود داشته باشد؛ به طوری که $AB = BA = I$ (ماتریس واحد از مرتبه n است) در این صورت، ماتریس B را وارون A می نامند و با A^{-1} نمایش می دهند. در این صورت، A را وارون پذیر یا نامفرد می نامیم.

تذکر: اگر $AB = BA = I$ ، A وارون B است و B نیز وارون A است؛ یعنی $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

مثال. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. نشان دهید که ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس A است.

حل: طبق تعریف، کافی است $AB = BA = I$ (در آینده، قضیه ای ثابت می کنیم که براساس آن، برای این که B وارون A باشد، کافی است $AB = I$ یا $BA = I$).

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریس، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و دارای دو وارون باشد. ثابت می کنیم این دو وارون باهم برابرند. فرض کنیم B و C هر دو وارون A باشند، پس طبق تعریف $AB = BA = I$ و $AC = CA = I$ ،

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

۲۴

برای دانش آموزان دوره متوسطه



$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = I$$

ستون زام A^* در واقع همان سطر زام
ماتریس همسازه است.

$$= [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}] \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = k$$

حال اگر $j = i$ ، واضح است که: $k = |A|$

$$i = j \Rightarrow k = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = |A|$$

و اگر $j \neq i$ ، ثابت می شود که $k = 0$ ؛ زیرا اگر فرض کنیم ماتریس

B فقط در سطر زام با A تفاوت داشته باشد، به جای سطر زام A از سطر

نام A استفاده کنیم؛ یعنی:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

سطر زام

ذکر این نکته لازم به نظر می رسد که عکس قضیه قبل نیز برقرار است و برای اثبات آن نیاز به ماتریس الحاقی داریم و خواهید دید که هنگام اثبات قضیه، به دستوری برای محاسبه A^{-1} در حالت کلی دست می یابیم.

قضیه: اگر A ماتریسی مربعی و $|A| \neq 0$ ، آن گاه A وارون پذیر است و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* \quad (A^* \text{ ماتریس الحاقی } A \text{ است})$$

اثبات: اگر A^* ماتریس الحاقی A باشد، ابتدا نشان می دهیم که:

$$AA^* = A^*A = |A|I \quad (1)$$

کتاب درسی برقراری رابطه (۱) را فقط برای ماتریس های 3×3 بررسی کرده است؛ ولی این رابطه در حالت کلی نیز برقرار است. در واقع، قبلاً متذکر شدیم که:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

$$|A| = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \dots + a_{jn}A_{jn}$$

حال، اگر بخواهیم تساوی (۱) را اثبات کنیم، باید نشان دهیم

درایه عمومی AA^* با درایه عمومی $|A|I$ برابر است.

درایه روی سطر نام و ستون زام = درایه عمومی AA^*

$$= \text{ستون زام } A^* \times \text{سطر نام } A$$

واضح است که دو سطر B با هم برابر و همواره $|B| = 0$ است و داریم:

$|B| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$ بر حسب سطر زام پس ثابت شد اگر $i \neq j$ ، همواره $k = 0$ ؛ یعنی:

$$\text{درایه عمومی } = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $A^*A = |A|I$. پس می توان نوشت:

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

که طرفین رابطه فوق را با توجه به فرض $(|A| \neq 0)$ اگر بر $|A|$

تقسیم کنیم یا در $\frac{1}{|A|}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I$$

و با توجه به قضیه یکتایی وارون، بلافاصله نتیجه می شود که:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

تذکر ۱: توجه داشته باشید که در حل مسأله ها یا پرسش های چهارگزینه ای، برای محاسبه (AA^*) یا (A^*A) با فرض معلوم بودن A، نیازی به نحاسبه وقت گیر A^* نیست و حاصل هریک، همان $(|A|I)$ است.

تذکر ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی 2×2 و دلخواه باشد و

$|A| \neq 0$ ، در این صورت، با توجه به تعریف A^* ، واضح است که

$$A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ (جای درایه های روی قطر اصلی عوض و قطر$$

فرعی در (-1) ضرب شده است) و طبق قضیه قبل داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نتیجه: تمام ماتریس های دوران حول مبدأ به اندازه α ، یعنی R_α

وارون پذیرند و $(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$ ؛ زیرا:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, |R_\alpha| = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow R_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = R$$

(جای درایه های قطر اصلی عوض و قطر منفی در (-1) ضرب و

همه درایه ها بر $|R_\alpha| = 1$ تقسیم شده اند.)

قضیه: اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه و $\alpha \neq 0$ و

$AB = \alpha I$ ، در این صورت A و B وارون پذیرند و $AB = BA$.

اثبات:

$$AB = \alpha I \Rightarrow |AB| = |\alpha I| \Rightarrow |A| |B| = \alpha^n |I| = \alpha^n$$

A و B وارون پذیرند $\Rightarrow |A| \neq 0, |B| \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$

حال، طرفین رابطه فرض را از چپ در A^{-1} و از راست در A

ضرب می کنیم؛ خواهیم داشت:

$$AB = \alpha I \Rightarrow A^{-1}(AB)A = A^{-1}(\alpha I)A$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)(BA) = \alpha(A^{-1}I)A \Rightarrow I(BA) = \alpha A^{-1}A = \alpha I$$

$$\Rightarrow BA = \alpha I$$

پس ثابت شد $AB = BA = \alpha I$.

نتیجه: در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$ ، در این صورت از

تساوی $AB = I$ نتیجه می شود که A و B وارون پذیرند و $BA = I$ و

طبق تعریف وارون، فقط از $AB = I$ می توان نتیجه گرفت که A وارون

B و B وارون A است.

ویژگی های وارون در ماتریس ها

اگر A و B ماتریس هایی مربعی، هم مرتبه و وارون پذیر باشند و

λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت، ویژگی های زیر همگی

برقرارند.

تذکر: برای اثبات این که دو ماتریس وارون یکدیگر باشند، کافی

است ضرب آن ها مساوی با I شود.

$$\text{ویژگی ۱: } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اثبات

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

چون حاصل ضرب این دو ماتریس I است، پس طبق قضیه یکتایی،

باید وارون یکدیگر باشند، یعنی $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$\text{ویژگی ۲: } (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

$$\text{اثبات: } (\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = (\lambda \times \frac{1}{\lambda})(AA^{-1}) = 1 \times I = I$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}A^{-1} = (\lambda A)^{-1}$$

ویژگی ۳: اگر A^t ترانزاده A باشد، داریم:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

اثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^t = I^t \Rightarrow (A^{-1})^t A^t = I$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

تذکره ۱: ویژگی ۱ در حالت کلی نیز برقرار و قابل تعمیم است؛ یعنی:

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

(به کمک استقراء تساوی بالا را ثابت کنید.)

و اگر $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$ ، در این صورت داریم:

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

تذکره ۲: برای وارون حاصل جمع، رابطه و فرمولی وجود ندارد؛

یعنی برای محاسبه $(A+B)^{-1}$ می باید A و B را با هم جمع کنیم و

سپس وارون حاصل را به دست آوریم.

تذکره ۳: توان منفی در ماتریس ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

تذکره ۴: وارون هر ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) ماتریسی بالا

مثلثی (پایین مثلثی) است.

تذکره ۵: هر ماتریس بالا (پایین) مثلثی که تمام درایه های روی

قطر در آن ناصفر باشند، وارون پذیر است.

تذکره ۶: در هر ماتریس قطری و وارون پذیر $(\forall i; a_{ii} \neq 0)$ برای

محاسبه وارون، کافی است درایه های روی قطر را وارون کنیم. به

مثال توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

مسائل حل شده

* مسئله ۱: اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد، آن گاه داریم:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

اثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |A||A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

* مسئله ۲: اگر A ماتریسی $n \times n$ و وارون پذیر و A^* ماتریس

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

اثبات:

$$AA^* = |A|I \Rightarrow |A||A^*| = ||A|I| = |A|^n |I| = |A|^n$$

$$\Rightarrow |A^*| = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی 2×2 باشد، همواره داریم: $|A^*| = |A|$ ؛ و

اگر A ماتریسی $n \times n$ و n فرد باشد، همواره $|A^*|$ عدد مربع کاملی است.

* مسئله ۳: اگر A ماتریسی $n \times n$ ، وارون پذیر و $(A^*)^*$

ماتریس الحاقی الحاقی A باشد، آن گاه داریم:

$$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

اثبات: می دانیم حاصل ضرب هر ماتریس در الحاقی خودش،

مضربی از I خواهد بود که آن مضرب دترمینان خود آن است. پس

می توان نوشت:

$$(A^*)(A^*)^* = |A^*|I \Rightarrow A[(A^*)(A^*)^*] = A(|A^*|I)$$

$$\Rightarrow (AA^*)(A^*)^* = |A^*|(AI) \Rightarrow (|A|I)(A^*)^* = |A^*|A$$

$$\Rightarrow |A|(|A^*)^*) = |A|^{n-1} A \Rightarrow (A^*)^* = \frac{|A|^{n-1}}{|A|} A$$

$$\Rightarrow (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

نتیجه: اگر A ماتریسی 2×2 باشد، در این صورت الحاقی الحاقی

A با خود A برابر است.

* مسئله ۴: اگر A ماتریسی پوچ توان از مرتبه n باشد، در این صورت $(I - A)$

(A وارون پذیر و وارون آن، ماتریس $(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})$ است.

اثبات: چون $IA = AI$ ، پس اتحاد زیر برقرار است:

$$(I^n - A^n) = (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})$$

$$\xrightarrow{A^n = \vec{0}} (I - A)(I + A + \dots + A^{n-1}) = I$$

یکتایی وارون

$$\longrightarrow (I - A)^{-1} = (I + A + \dots + A^{n-1})$$

تمرین: در مسئله قبل، اگر مرتبه پوچ توانی ماتریس یعنی n فرد

باشد، ثابت کنید $(A+I)$ وارون پذیر و وارون آن $(A^{-1} + A^{-2} + \dots + I)$

است.

* مسئله ۵: اگر ماتریس A در چند جمله ای

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha x + \beta = 0$$

A وارون پذیر و وارون آن ماتریس زیر است.

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\alpha_n}{-\beta} x^{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{-\beta} x^{n-2} + \dots + \frac{\alpha}{-\beta} I \end{array} \right)$$

اثبات: طبق فرض، ماتریس A در چند جمله ای داده شده صدق

می کند. پس:

$$\alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha A + \beta I = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_n A^n + \dots + \alpha A = -\beta I \Rightarrow A(\alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha I) = -\beta I$$

$$\Rightarrow A \left(\frac{\alpha_n}{-\beta} A^{n-1} + \dots + \frac{\alpha}{-\beta} I \right) = I$$

یکتایی وارون

$$\longrightarrow A^{-1} = \left(\frac{\alpha_n}{-\beta} A^{n-1} + \dots + \frac{\alpha}{-\beta} I \right)$$

برای دانش آموزان دوره متوسطه

برای مثال، اگر A ماتریسی مربعی و در معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ صدق کند، در این صورت داریم:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{2} A - 2I \right)$$

مسئله ۶: اگر A ماتریسی وارون پذیر و B هم مرتبه A و ماتریس های $(A+B)$ و $(A-B)$ نیز وارون پذیر باشند، ثابت کنید:

الف) $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

ب) $(A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)^{-1}$

اثبات: الف) ثابت می کنیم دو طرف تساوی با یک مقدار مساوی اند.

سمت چپ تساوی $= (A+B)(I - A^{-1}B)$

$$= A - IB + B - BA^{-1}B = A - B$$

سمت راست تساوی $= (I - BA^{-1})(A+B)$

$$= A + B - BI - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$$

ب) کافی است دو طرف رابطه الف را وارون کنیم:

$$\left[(A+B)A^{-1}(A-B) \right]^{-1} = \left[(A-B)A^{-1}(A+B) \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}(A^{-1})^{-1}(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}(A-B)^{-1}$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)^{-1}$$

مسئله ۷: اگر A و B ماتریس های وارون پذیر و تعویض پذیر باشند،

ثابت کنید:

الف) A و B^{-1} تعویض پذیرند.

ب) A^{-1} و B تعویض پذیرند.

ج) A^{-1} و B^{-1} تعویض پذیرند.

اثبات:

الف) $AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1}$

$$(B^{-1}A)(\underbrace{BB^{-1}}_I) = (\underbrace{B^{-1}B}_I)(AB^{-1}) \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$$

ب) $AB = BA \Rightarrow A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$

$$(\underbrace{A^{-1}A}_I)(BA^{-1}) = (A^{-1}B)(\underbrace{AA^{-1}}_I) \Rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$$

ج) $AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

مسئله ۸: اگر A و B ماتریس هایی متقارن و وارون پذیر و

تعویض پذیر باشند، ثابت کنید ماتریس های A^{-1} و B^{-1} نیز متقارن اند.

و سپس، با توجه به مسئله ۷ نتیجه بگیرید که ماتریس های $(A^{-1}B)$ ،

(AB^{-1}) و $(A^{-1}B^{-1})$ نیز متقارن اند.

اثبات: باید ثابت کنیم ترانژاده های A^{-1} و B^{-1} با خودشان برابر

است.

(چون A متقارن است، $A^t = A$)

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A$$

$$(B^{-1})^t = (B^t)^{-1} = B$$

حال، چون A^{-1} و B^{-1} متقارن و با A و B تعویض پذیرند، یعنی:

$$(A^{-1}B^{-1}) = (B^{-1}A^{-1}) \text{ و } (AB^{-1} = BA^{-1}) \text{ و } (A^{-1}B = BA^{-1})$$

(مسئله قبل ثابت شد.) و این نکته که ضرب دو ماتریس متقارن و

تعویض پذیر، ماتریسی متقارن است؛ حکم به اثبات می رسد.

مسئله ۹: اگر A ماتریسی $n \times n$ و هم مرتبه با ماتریس وارون پذیر B

باشد، ثابت کنید: $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$

اثبات: به استقراء روی n داریم:

تساوی برقرار است $n=1 \Rightarrow (B^{-1}AB)^1 = B^{-1}A^1B$

فرض استقراء $n=k \Rightarrow (B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^k B$

حکم استقراء $n=k+1 \Rightarrow (B^{-1}AB)^{k+1} = B^{-1}A^{k+1}B$

$$(B^{-1}AB)^{k+1} = (B^{-1}AB)^k (B^{-1}AB) \stackrel{\text{فرض}}{=} (B^{-1}A^k B)(B^{-1}AB)$$

$$= (B^{-1}A^k (BB^{-1})AB) = B^{-1}A^k (IA)B$$

$$= B^{-1}A^k AB = B^{-1}A^{k+1}B$$

مسئله ۱۰: اگر یکی از دو ماتریس A یا B وارون پذیر باشند، ثابت

کنید:

$$|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I|$$

اثبات: فرض کنیم A وارون پذیر باشد. پس داریم:

$$AA^{-1} = I, |A| |A^{-1}| = 1, \text{ لذا با توجه به ویژگی های دترمینان ها داریم:}$$

$$|AB - \lambda I| = |A^{-1}| |A| |AB - \lambda I| = |A^{-1}| |AB - \lambda I| |A|$$

$$= |A^{-1}(AB - \lambda I)A| = |(A^{-1}AB - \lambda IA^{-1})A|$$

$$= |(IB - \lambda A^{-1})A| = |BA - \lambda A^{-1}A| = |BA - \lambda I|$$

مسئله ۱۱: اگر A و B ماتریس های مربعی و هم مرتبه و

$AB=BA$ باشد، در این صورت ثابت کنید که اگر A وارون پذیر باشد،

B نیز وارون پذیر خواهد بود و داریم: $A^{-1} + B^{-1} = I$

اثبات: چون A وارون پذیر است، پس داریم:

$$AB = A + B \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(A + B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I B = \underbrace{(A^{-1}A)}_I + (A^{-1}B) \Rightarrow B = I + A^{-1}B$$

$$\Rightarrow B - A^{-1}B = I \Rightarrow B(I - A^{-1}) = I$$

$$\Rightarrow |B| |I - A^{-1}| = 1 \Rightarrow |B| \neq 0. \text{ (} B \text{ وارون پذیر است.)}$$

$$B(I - A^{-1}) = I \xrightarrow{\text{بکامی وارون}} (I - A^{-1}) = B^{-1} \Rightarrow I = A^{-1} + B^{-1}$$

مسئله ۱۲: اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر و هم مرتبه باشند،

ثابت کنید:

$$(AB)^* = B^* A^*$$

توجه: مسائلی را که با علامت * مشخص شده است، می‌توانید به عنوان قضیه‌هایی در حالت کلی در نظر بگیرید.

تمرین

۱. ثابت کنید اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد، A^n نیز وارون پذیر

$$\text{است و داریم: } (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

۲. ثابت کنید اگر A ماتریسی وارون پذیر و متقارن (پاد متقارن)

باشد، A^{-1} نیز متقارن (پاد متقارن) است.

۳. اگر ماتریس A در معادله $A^2 + 2A^2 - 3A - 2I = 0$

صدق کند، وارون A را بیابید.

۴. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و وارون پذیر باشند و

$AB = BA$ و هر دو خود توان باشند، ثابت کنید که برای هر عدد

حقیقی $\lambda \neq 1$ ، ماتریس $D = \lambda AB + I$ وارون پذیر است و داریم:

$$D^{-1} = I - \frac{\lambda}{1+\lambda} AB$$

(راهنمایی: $DD^{-1} = I$ را تحقیق کنید.)

۵. اگر V ماتریسی وارون پذیر و $V^{-1} = V^t$ و D ماتریسی قطری

باشد و داشته باشیم: $AV = VD$ ، ثابت کنید که A ماتریسی متقارن

است.

۶. اگر B ماتریسی وارون پذیر باشد، ثابت کنید که:

$$|B^{-1}AB - \lambda I| = |A - \lambda I|$$

(راهنمایی: از تساوی $\lambda I = B^{-1}(\lambda I)B$ استفاده کنید.)

$$7. \text{ ثابت کنید: } \left| \left((A^*)^* \right)^* \right| = |A|^{(n-1)^2}$$

۸. ثابت کنید که اگر A ماتریسی پایین مثلثی باشد، در این

صورت A^* (ماتریس الحاقی A) نیز پایین مثلثی است. (ماتریس

همسازه A ، یعنی N چگونه است؟)

۹. دو ماتریس A و B را در صورتی هم نشیست با هم می‌نامیم که

ماتریسی وارون پذیر چون D باشد؛ به قسمتی که داشته

باشیم: $B = D^t A D$. ثابت کنید رابطه هم نشیستی در ماتریس هائیک

رابطه هم ارزی است.

$$10. \text{ اگر داشته باشیم: } A = [a_{ij}]_{3 \times 3} \text{ و } a_{ij} = \frac{(i+j)!}{i!j!}, \text{ نشان$$

دهید که A وارون پذیر است و وارون آن را بیابید.

۱۱. اگر A و B ماتریس‌هایی وارون پذیر باشند و داشته باشیم:

$$(AB)^t = A^t B^t$$

اثبات: (توجه دارید که $|AB| = |BA| = |A||B| \neq 0$)

$$\frac{1}{|AB|} (AB)^* = (AB)^{-1}, \quad \frac{1}{|B|} B^* = B^{-1}, \quad \frac{1}{|A|} A^* A^* = A^{-1}$$

$$\text{از طرفی: } (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = \left(\frac{1}{|B|} B^* \right) \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) = \frac{1}{|BA|} B^* A^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|AB|} (AB)^* = \frac{1}{|BA|} B^* A^* \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$$

تذکر: این مسأله قابل تعمیم است؛ یعنی در حالت کلی داریم:

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^* = A_n^* \dots A_2^* A_1^*$$

*مسأله ۱۳: ثابت کنید:

$$|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$$

اثبات: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، داریم:

$$\text{ثابت کردیم: } |(A^*)^*| = |A^*|^{n-1} = (|A|^{n-1})^{n-1} = |A|^{(n-1)^2}$$

مسأله ۱۴: اگر A ماتریسی متقارن ($A^t = A$) و وارون پذیر

باشد، ثابت کنید (A^*) نیز متقارن است.

اثبات:

$$AA^* = A^* A = |A|I \Rightarrow (A^* A)^t = (|A|I)^t$$

$$A^t (A^*)^t = (|A|I)^t \Rightarrow (AA^*)^t = |A|I$$

(ماتریس $|A|I$ قطری و در نتیجه متقارن است.)

$$\Rightarrow A(A^*)^t = |A|I \Rightarrow AA^*$$

$$\Rightarrow A(A^*)^t = AA^* \xrightarrow{A \text{ وارون پذیر}} (A^*)^t = A^* \Rightarrow \text{مقارن است}$$

مسأله ۱۵: اگر A و B ماتریس‌های هم مرتبه و هر دو وارون پذیر

باشند و داشته باشیم: $(AB)^t = A^t B^t$ ، ثابت کنید A و B

تعویض پذیرند.

اثبات:

$$(AB)^t = (AB)(AB) = ABAB$$

$$\text{طبق فرض: } (AB)^t = A^t B^t = AAB B$$

$$\Rightarrow ABAB = AAB B \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ وارون پذیر}} A^{-1}(ABAB)B^{-1}$$

$$= A^{-1}(AAB B)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A^{-1}A}{I} \right) B A \left(\frac{B B^{-1}}{I} \right) = \left(\frac{A^{-1}A}{I} \right) A B \left(\frac{B B^{-1}}{I} \right) \Rightarrow BA = AB$$