

هنر محاسبه یاراه‌های میان بُر

در محاسبه اعداد

نوشته جرال د. بکلی

ترجمه حسن نصیرنیا

□ اشاره:

راه میان بُر تا چه حد ساده‌تر از راه حلّ معمولی است. نتیجه به دست آمده غالباً چنان شگفت‌آور است که باور کردنش مشکل می‌نماید و این خود انگیزه‌ای برای ایجاد عادت خوب بررسی درستی یا نادرستی نتایج است.

البته راه‌های میان بُر در محاسبه اعداد برای جایگزینی کار با ماشین حساب نیست. بلکه برعکس مجال برای بهره‌مندی از این هر دو شیوه محاسبه باقی است. دیری است که برای اعجاز الکترونیک در محاسبات پیچیده هیچ رقیبی پا به میدان نگذاشته است. اما در مورد مسأله‌های ساده‌تر یک راه میان بُر یا محاسبه ذهنی سریع، غالباً پاسخ را سریعتر از ماشین به دست می‌دهد. و این جاست که باید گفت: ابزارهای قدیمی و مورد اعتماد، یعنی مداد و کاغذ را نادیده نینگار. مداد و کاغذ کم هزینه‌اند، به آسانی حمل می‌شوند، هرگز به باتری نیاز ندارند، حاصل محاسبات را ثبت می‌کنند و از این رو می‌توان نتایج به دست آمده را بازبینی کرد. هر کدام از این دو، مزایای خاص خود را دارند. بنابراین، بسته به نیاز، می‌توان یکی از این روشها یا آسزهای از آنها را در حل مسأله‌ها به کار گرفت.

باید به خاطر داشت که بهترین شیوه دستیابی به سرعت، دقت و سهولت در محاسبه اعداد، انجام دادن تمرینهای پیگیر و منظم است. باشد که این مطالب شما را به درک بهتر از اصول حساب و شگفتیهای کار با اعداد رهنمون سازد. (۲)

آیا مایلید با سرعتی معادل دو یا سه برابر سرعت معمول، اعداد را محاسبه کنید؟ آیا مایلید با یک محاسبه سریع ذهنی، درستی یا نادرستی نتایج عملیات ماشین حساب خود را بررسی کنید؟

هرگز به دوستان و آشنایانی که بادقت کامل و سرعتی خیره‌کننده چنین محاسباتی را انجام می‌دهند، رشک نبرید، زیرا توانایی آنان در انجام دادن این گونه محاسبات، عموماً ذاتی نیست؛ شما نیز می‌توانید با پیروی از روشهای ارائه شده در این مقاله^(۱) به چنین مهارتهایی دست یابید.

هنر محاسبه یا چگونگی محاسبه سریع و آسان اعداد، روش درست و آزموده شده‌ای است که شما را در رویارویی با ریاضیات مورد استفاده در زندگی روزمره - انجام دادن عملیات مربوط به جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ... - یاری می‌دهد. در واقع پدید آورنده کتاب حاضر بر آن بوده است تا راه‌ها و شگردهای سریع و آسان محاسبه اعداد را که مدارس از ارائه آنها غفلت ورزیده‌اند، به خواننده بیاموزد.

برای هر راه میان بُر، چند مثال داده شده است تا خواننده به چگونگی کاربرد آن کاملاً آشنا شود. با این حال، کوشش شده است تا تمرینها و مثالها، کوتاه و مختصر باشد.

یکی از ویژگیهای روش مذکور، آن است که پاسخ مثالها همراه با برهان مربوط آمده است. برهان ارائه شده، نشان می‌دهد که استفاده از

(۱) برگرفته و ترجمه شده از کتاب:

Kelly, W. Gerald. Short - Cut Math. Dover Publications, Tm C. N. Y, 1984.

(۲) - م. برداشت از سخن ناشر کتاب و توضیح ناشر کتاب خارجی مشابه کتاب مورد ترجمه حاضر.

□ اصول روشهای میان بُرد در محاسبه اعداد

۱-۱- راههای اصلی ساده کردن محاسبات

شیوه‌های میان بُرد در محاسبه اعداد بر اساس تغییر دادن اعداد و عملیات «دشواره» به اعداد و عملیات آسانتر استوار است. برای مثال، در مورد یافتن حاصل جمع ۲۹ و ۳۶ می‌توان عدد ۱ را به ۲۹ اضافه و از ۳۶ کم کرد تا مسأله به شکل $۳۵ + ۳۰$ تبدیل شود. در این صورت پاسخ مسأله یعنی ۶۵ فوری به دست می‌آید. به این ترتیب، ملاحظه می‌شود که افزودن و کم کردن عدد ۱، مسأله را آسان می‌کند ولی تغییری در پاسخ نمی‌دهد. این اصل، یعنی اصلی «هم ارزی» که در محاسبه اعداد به عنوان روش میان بُرد مورد استفاده قرار می‌گیرد، دستیابی به پاسخ درست را آسانتر و سریعتر می‌کند.

از این روش نیز می‌توان در ضرب استفاده کرد. برای مثال، ۱۵×۲۸ را در نظر بگیرید. اگر ۲۸ را نصف ($= ۱۴$) و ۱۵ را دو برابر ($= ۳۰$) کنیم، مسأله به صورت ۳۰×۱۴ در می‌آید و چنان که می‌بینید پاسخ، یعنی ۴۲۰، با آسانی به دست می‌آید. و این همان نتیجه‌ای است که از ضرب ۱۵×۲۸ گرفته می‌شود.

سبب دشوار شدن محاسبات همواره «اندازه» اعداد نیست، بلکه «نوع» اعداد نیز می‌تواند مشکل آفرین باشد. البته می‌دانید که ضرب کردن یک عدد در ۱۰ بسیار آسانتر از ضرب کردن آن در ۹ است، هرچند که ۱۰ از ۹ بزرگتر است. با این حال، عدد «دشواره» ۹ را می‌توان به دو عدد «آسان» ۱۰ منهای ۱ (که برابر ۹ است) بدل کرد. بنابراین، برای ضرب کردن عددی در ۹، می‌توان آن را در ۱۰ ضرب و عدد مورد نظر (مضروب فیه) را از حاصل ضرب کم کرد. به این ترتیب:

$۳۳۳ = ۳۷۰ - ۳۷$ ، $۳۷ \times ۹ = ۳۷۰$. البته $۳۷ - ۳۷۰$ همان $(۱۰ - ۱) \times ۳۷$ است که جایگزین ۳۷×۹ شده است. هر دو روش، پاسخ واحدی به دست می‌دهد.

عددهای ۱۰، ۱، ۲ جزء آسانترین عددها هستند. همین طور عددهای ۱۰۰، ۱۰۰۰ و جز آنها و نیز سایر «عددهای مخوم به صفر» مانند ۲۰ و ۳۰ ... کار محاسبه را آسان می‌کنند. بنابراین اگر بتوان عدد دشواری را به یکی از این عددها تبدیل کرد، راه رسیدن به پاسخ سریع هموار می‌شود.

چه بسا که تبدیل یک عمل دشوار به دو یا سه عمل ساده کار محاسبه را آسانتر و سریعتر می‌کند؛ درست همان گونه که پیمودن یکایک پله‌های میان طبقه‌های اول و دوم یک ساختمان راحت‌تر از

کوشش برای پیمودن آنها با یک جهش بلند است. برای مثال: در مورد ضرب ۶۴ در ۲۵ می‌توان ۴۶ را بر ۴ تقسیم ($= ۱۱$) و حاصل را در ۱۰۰ ضرب کرد تا نتیجه، یعنی ۱۶۰۰ به دست آید. این عمل بدان سبب نتیجه بخش است که تقسیم بر ۴ و ضرب در ۱۰۰، درست مانند ضرب کردن در $\frac{۱۰۰}{۴}$ (یعنی مساوی ۲۵) است. یک راه دیگر ساده کردن محاسبه آن است که عددها را به جزءهای آسانتر تقسیم کنید. برای مثال، در مورد تقسیم عددی بر ۱۶، می‌توان آن عدد را بر ۲ و سپس بر ۸ تقسیم کرد یا این که دوبار آن را بر ۴ تقسیم کرد، زیرا ۸×۲ و ۴×۴ هر کدام مساوی ۱۶ است. برای تقسیم ۲۲۴ بر ۱۶ می‌توان مقسوم را نصف کرد ($= ۱۲$) و حاصل را بر ۸ تقسیم کرد تا نتیجه ($= ۱۴$) به دست آید، یا این که ۲۲۴ را بر ۴ تقسیم ($= ۵۶$) و حاصل را بار دیگر به ۴ بخش کرد ($= ۱۴$). چنان که ملاحظه می‌شود، تقسیم ۲۲۴ بر ۱۶ همان نتیجه واحد، یعنی ۱۴ را می‌دهد؛ زیرا هر سه راه مذکور هم ارز هستند.

یک عدد را نیز می‌توان به ترتیبی دیگر به چند پاره تقسیم کرد، مثلاً تقسیم به یکان، دهگان، صدگان و ... زیرا انجام دادن محاسبه با یک عدد تقسیم شده به جزءهای کوچکتر، بسیار آسانتر خواهد بود. برای مثال، عدد ۶۱۳ را می‌توان به صورت $۶۰۰ + ۱۰ + ۳$ در آورد. چنانچه بخواهید عدد ۶۱۳ را در عدد دیگری مثل ۱۲ ضرب کنید، می‌توانید هر جزء را در آن عدد ضرب و نتیجه‌های به دست آمده را با هم جمع کنیم، به این ترتیب:

$$\begin{array}{rcl} ۶۰۰ \times ۱۲ & = & ۷۲۰۰ \\ ۱۰ \times ۱۲ & = & ۱۲۰ \\ ۳ \times ۱۲ & = & ۳۶ \\ \hline ۶۱۳ \times ۱۲ & = & ۷۳۵۶ \end{array}$$

علاوه بر روشهای معرفی شده در بالا، می‌توان با حذف یا آسان کردن روند محاسبه اعداد مانند «انتقال» در جمع و ضرب، «ده بریکه» در تفریق، «یجیدگیهای تقسیم» طولانی و لزوم به یاد سپاری نتایج به هنگام حل مسأله‌ها به طور ذهنی (که در نظر بسیاری از افراد دشوار است) راه‌های میان‌برد دیگری اندیشید.

۱-۲- نتایج دلخواه شما

در ضمن حل کردن مسأله، بهتر است فقط به «نتایج» هر مرحله بیندیشید و از پرداختن به جزئیات نالازم در آن مرحله خودداری کنید. برای مثال: به هنگام دیدن $۳۶ \div ۹$ بی‌درنگ به ۴ فکر کنید و

بیشتر اوقات می‌توانید با بهره‌مندی از هر دو روش ذهنی و نوشتاری به حداکثر سرعت همراه با درستی و دقت دست یابید. برای مثال، در مورد ضرب 49827 در 11 ، لازم نیست که تمامی جزئیات را یادداشت کنید یا به عنوان یک ورزش فکری با آن کلنجار بروید. بلکه کافی است که برخی از حاصل ضربها را یادداشت و آنها را جمع کنید تا پاسخ به دست آید، به این ترتیب:

$$49827$$

$$49827$$

همین‌طور اگر بخواهید 2184 را بر 24 تقسیم کنید، بهتر است نخست، آن را بر 3 تقسیم و حاصل یعنی 728 را بنویسید، تا ناگزیر به حفظ کردن آن نباشید، سپس آن را بر 8 تقسیم کنید تا نتیجه (91) به دست آید.

بافراگیری برخی از راه‌های میان‌بُر ارائه شده در این سلسله مقاله‌ها، خواهید توانست مسأله‌ها را به‌طور ذهنی یا حتی نظری حل کنید. برخی دیگر از راه‌های میان‌بُر به شما نشان می‌دهد که بهترین راه حل آن است که در پارهای موارد صرفاً به مداد و کاغذ اکتفا کنید و یا این‌که فقط نکات مهم مراحل حل مسأله را یادداشت کنید تا به نتیجه درست و سریع برسید. به هر حال، در نهایت بسته به تصمیم و تشخیص شماست که چه مقدار از حل مسأله را در ذهن انجام دهید و چه مقدار را یادداشت کنید، تا به نتیجه‌ای درست و سریع برسید. با این‌که سرعت در حل مسأله یک عامل مطلوب به شمار می‌آید، ولی آشکار است که استفاده از یک راه‌حل میان‌بُر که منجر به پاسخ نادرست شود، کاری بی‌حاصل است. در صورت لزوم، در مراحل نخست‌ترین تمرین بهتر است از راه‌های طولانی‌تر استفاده کنید تا به نتیجه درست دست یابید.

۱-۴ - برآورد پاسخ تقریبی و گرد کردن اعداد

پیش از حل مسأله و یافتن پاسخ، لازم است میزان درستی و دقت پاسخ خود را مشخص کنید. چنانچه پیشاپیش پاسخ تقریبی مسأله را بدرستی تخمین بزنید، می‌توانید از بسیاری محاسبات غیرضروری ارقام صرف‌نظر و در وقت صرفه‌جویی کنید. یافتن پاسخ تقریبی مستلزم آن است که «ارقام مهم» تشکیل دهنده اعداد مسأله - ارقامی که برای تخمین شما اهمیت دارند - را مشخص کنید.

از وارد شدن به جزئیات محاسبه، یعنی گفتن: 260 تقسیم بر 9 می‌شود 4 مرتبه، صرف‌نظر کنید. همین‌طور مثلاً به‌هنگام انجام دادن عمل جمع $8 + 11 + 5$ ، اگر بگویید: 50 به‌علاوه 11 می‌شود 16 ، به‌علاوه 8 می‌شود 24 ، کاری جز گند کردن روند محاسبه انجام نداده‌اید. پس بهتر است در ضمن محاسبه، فقط به: 240 و 160 بسنجید.

تا می‌توانید واژه‌های مورد استفاده در هر محاسبه را حذف و ذهن خود را بر نتایج متمرکز کنید، چه حل مسأله‌ها بدون ذکر واژه‌ها، سریع‌تر انجام می‌شود. اعداد و محاسبات مانند: حروف الفبا و خواندن هستند. وقتی به واژه‌ای برمی‌خورید، برای هجی کردن یک یک حروف مکث نمی‌کنید، بلکه آن واژه را به‌طور کلی مشاهده و درک می‌کنید. همین‌طور برای دریافتن تک تک واژه‌ها توقف نمی‌کنید، بلکه واژه‌ها را کلاً باهم می‌خوانید و به مفهوم کلی آنها می‌اندیشید. اگر در مورد اعداد و محاسبات همین کار را بکنید، مسأله‌ها با سرعت و سهولت بیشتری حل می‌شود.

۱-۳ - آمیختن فعالیت‌های ذهنی و نوشتاری برای گرفتن بهترین نتیجه‌ها در ریاضی

هدف از ارائه راه‌های میان‌بُر در محاسبات تنها حل مسأله به‌طور ذهنی یا آبی نیست؛ هرچند که با استفاده از آنها می‌توانید به چنین منظوری برسید. صرف‌اندکی وقت برای یادداشت کردن نکات مهم در جریان محاسبات، غالباً با سرعت بخشیدن در کار کمک می‌کند. به نکه‌ای که در پی می‌آید توجه کنید، تا موضوع برایتان روشن‌تر شود: با هر محاسبه، ذهن ما توجه دو فرآیند می‌شود: (۱) توجه کافی برای درک هر مرحله از مسأله و (۲) ثبت و ضبط نتایج هر مرحله برای استفاده در مرحله‌های بعد. طبعاً هرچه یک مسأله ریاضی طولانی‌تر و پیچیده‌تر باشد و برای حل آن تنها به فعالیت ذهنی خود اکتفا کنید، ناگزیرید موارد بیشتری را به ذهن بسپرد و به همان نسبت میزان اشتباه‌های احتمالی شما افزون‌تر خواهد شد.

از طرفی اگر تمامی نکات مهم مسأله را یادداشت کنید، ناچار خواهید بود که نتایج یکایک مرحله‌ها را به ذهن بسپرد. بلکه در عوض خواهید توانست فکر خود را بر راه حل متمرکز کنید. با این‌که یادداشت برداری ممکن است زمان بیشتری بگیرد، ولی احتمال بروز اشتباه را کم می‌کند و این در نهایت، موجب صرفه‌جویی در وقت خواهد شد.

البته مجموع ارقام عدد ۳۸، عدد ۲ نیست، بلکه ۱۱ است. اما پس از طرح نه نه آن (کم کردن ۹ از ۱۱) باقیمانده ۲ می‌شود که همان باقیمانده تقسیم ۳۸ بر ۹ است.

برای طرح نه نه و به دست آوردن باقیمانده‌ها می‌توانید به چهار روش زیر عمل کنید:

الف: طرح نه نه از طریق تقسیم:

عدد را بر ۹ تقسیم کنید تا باقیمانده به دست آید:

باقیمانده	عدد
۱	۴۶
۴	۵۸
۰	۱۹۸
۵	۶۳۶۸

ب: طرح نه نه از طریق جمع:

ارقام تشکیل دهنده عدد را جمع کنید و چنانچه مجموع ارقام تشکیل دهنده حاصل جمع از یک رقم بیشتر شد، آنها را نیز جمع کنید تا یک باقیمانده یک رقمی به دست آید. در صورتی که باقیمانده ۹ باشد و یا عددی باشد که توسط ۹ عاد شود، باقیمانده را صفر تلقی کنید:

باقیمانده	عدد
۱	$۱ + ۰ = ۱$; $۴۶ : ۴ + ۶ = ۱۰$
۴	$۱ + ۳ = ۴$; $۸۵ : ۸ + ۵ = ۱۳$
۰	$۱ + ۸ = ۹$; $۱۹۸ : ۱ + ۹ + ۸ = ۱۸$
۵	$۲ + ۳ = ۵$; $۶۳۶۸ : ۶ + ۳ + ۶ + ۸ = ۲۳$

ج: طرح نه نه از طریق تفریق:

ارقام تشکیل دهنده عدد را جمع کنید و هر بار که حاصل جمع برابر ۹ یا از ۹ بیشتر شد، ۹ را از آن کم کنید. این عمل را چندان تکرار کنید تا باقیمانده نهایی از ۹ کمتر شود.

باقیمانده	عدد
۱	$۴۶ : ۴ + ۶ = ۱۰ ; - ۹ = ۱$
۴	$۸۵ : ۸ + ۵ = ۱۳ ; - ۹ = ۴$

برای مثال: اگر بهای ۲ عدد مداد ۱۹۷ ریال باشد، در محاسبه بهای ۳ عدد مداد مرتکب اشتباه فاحشی نخواهید شد، چه می‌توان پیش از حل مسأله تخمین زد که پاسخ در حدود ۳۰۰ ریال است. یا اگر بخواهید دیواری به مساحت ۲۳۸۶ متر مربع را رنگ کنید و بدانید که هر قوطی بزرگ رنگ ۵۰ متر مربع را می‌پوشاند، در صورتی که عدد مساحت را گیرد کنید ($= ۲۵۰۰$ متر مربع)، می‌توانید میزان تقریبی رنگ مصرفی را به طور ذهنی سریعتر از استفاده از مداد و کاغذ محاسبه کنید.

۱-۵- امتحان کردن پاسخ مسأله از طریق «طرح نه نه»

می‌توان پاسخ مسأله را با حل کردن دوباره آن، یا به روش بازینی به ترتیب معکوس و یا به روشی دیگر امتحان کرد. حل کردن دوباره مسأله به روشی متفاوت با روش معمول سبب می‌شود که از تکرار اشتباهی که ممکن است بر حسب معمول پیش آید، جلوگیری گردد.

برای بازینی پاسخ مسأله‌های مربوط به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم راه‌های مختلفی وجود دارد که در مقاله‌های بعدی (در فصلهای راجع به هریک از چهار عمل اصلی که در شماره‌های آتی مجله خواهد آمد) به تفکیک از آنها سخن خواهیم گفت.

یکی از راه‌های مذکور، طرح کردن نه نه عدد پاسخ مسأله است که می‌توان از آن در مورد چهار عمل اصلی استفاده کرد. این روش بر مبنای خاصیت جالب توجه عدد ۹ استوار است. هرگاه عددی بر ۹ تقسیم شود، باقیمانده برابر خواهد بود با حاصل جمع رقمهای تشکیل دهنده آن عدد (مقسوم) یا حاصل جمع رقمهای تشکیل دهنده مقسوم پس از طرح کردن نه نه آن. شاید این خاصیت عدد ۹ شگفت‌انگیز به نظر آید، اما درک و فهم آن با توجه به مثالهای زیر آسان خواهد بود:

- مثال (۱): $۷ =$ باقیمانده و $۱۶ \div ۹ = ۱$

مجموع ارقام عدد ۱۶ (یعنی $۷ = ۱ + ۶$) برابر است با باقیمانده تقسیم ۱۶ بر ۹.

- مثال (۲): $۶ =$ باقیمانده و $۲۴ \div ۹ = ۲$

مجموع ارقام عدد ۲۴ ($۶ = ۲ + ۴$) نیز با ۶ برابر است.

- مثال (۳): $۲ =$ باقیمانده و $۳۸ \div ۹ = ۴$

19A: $1+9=10$; $-9=1$; $+8=9$; $-9=0$.

همچنین : $۱۹۸ : ۱ + ۹ + ۸ = ۱۸ ; -۹ = ۹ ; -۹ =$.

مجموعين : $7+3+7+8=23$; $-9=14$; $-9=5$

د: طرح نه نه از طریق حذف کردن ۹ ها:

در خاتمه باید دانست که هیچ یک از روشهای امتحان کردن پاسخ
مسأله، برهانی قاطع بر درستی پاسخ ارائه نمی‌دهد، زیرا همواره این
احتمال هست که در حین بازیابی درستی یا نادرستی پاسخ نیز مرتکب
اشتباه شوید و این تأییدی اشتباه‌آمیز بر عمل قبلی باشد. بااین حال،
هرگاه کار بازیابی مسأله را تمام کردید، معمولاً می‌توانید بپذیرید که
پاسخ درست است.

باقیمانده	عدد
$-9 = 1$; $4 + 6 = 10$; هیچ ۹ نیست که حذف شود	۴۶ :
$-9 = 4$; $8 + 5 = 13$;	۸۵ :

ادب ریاضی

اگر دو عدد مضرب (گویا) با هم مساوی باشند این نکته کاملاً بدیهی است که جذر این دو عدد نیز با هم مساوی هستند، به این طریق از تساوی $۶ = ۳ \times ۲$ چنین نتیجه می‌شود که:

$$\sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4}$$

لیکن این نکه به هیچ وجه بدیهی نیست که

$$\sqrt{Y} \times \sqrt{Z} = \sqrt{Y \times Z}$$

و بنابراین تساوی $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ نیز به هیچ وجه محقق نیست.

اکنون که هیچ گونه قطعی بر حقیقت رابطه $\sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$ که در مدرسه متوسطه همچون واقعی تدریس می شود وجود ندارد، خوب است در این باره مطالعه بیشتری کنیم و علت این موضوع را درک کنیم.

مسأله در این است که باید جذر اعداد ۲ و ۳ و ۶ را استخراج کرد