

هندسه تحلیلی

(قسمت دوم)

محمد عابدی

مورد استفاده دانش آموزان چهارم ریاضی

۲: اگر جای دو سطر یا دو ستون درمیان را عوض کنیم مقدار درمیان درمها ضرب می شود مثلاً جای ستون اول و دوم را عوض نموده داریم:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} = a'b - ab' = -(ab' - a'b)$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۳: اگر دو سطر یا دو ستون درمیان مساوی باشند مقدار درمیان صفر است. مثلاً اگر دو سطر درمیان برابر باشند داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = \boxed{0}$$

۴: اگر یک سطر درمیان را در عددی ضرب کرده آن را با سطر دیگر جمع کنیم و یا یک ستون را در عددی ضرب کنیم و آن را با ستون دیگر جمع کنیم در مقدار درمیان تغییری حاصل نمی شود. مثلاً سطر دوم درمیان را در k ضرب نموده با سطر اول آن جمع می کنیم داریم:

$$\begin{vmatrix} a+a'k & b+b'k \\ a' & b' \end{vmatrix} =$$

۱۰- دترمیان

بخش مختصری از دترمیانها که در هندسه تحلیلی کاربرد دارند بررسی می کنیم. جدول 2×2 به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

را که شامل دو سطر و دو ستون می باشد دترمیان 2×2 می نامیم و مقدار آن را $ab' - a'b$ تعریف می کنیم، داریم:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

خواص دترمیان

۱: اگر یک سطر و یا یک ستون درمیان را در عددی ضرب کنیم مقدار درمیان در آن عدد ضرب می شود مثلاً سطر اول را در k ضرب نموده داریم:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a' & b' \end{vmatrix} = kab' - kba' = k(ab' - a'b)$$

$$= k \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

سطر i ام و ستون j ام به دست می آید مثلاً عضو b را که در سطر اول و ستون دوم قرار گرفته است در نظر گرفته درمینان ضریب این عضو به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

یعنی $\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$ می باشد. توجه داشته باشید خواصی که بیان

گردید برای هر دترمینان $n \times n$ برقرار می باشد حال دترمینان بالا را بر حسب ستون سوم بسط می دهیم حاصل این بسط با بسط قبلی برابر می باشد داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3}c' \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$= c(a'b'' - a''b') - c'(ab'' - a''b)$$

$$+ c''(ab' - a'b)$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که علامتها يك درمیان تغییر می کنند.

۱۱- حل دستگاه مبادلات به کمک دترمینان

۱: حل دستگاه دومعادله دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$b'(a + a'k) - a'(b + b'k) = ab' - a'b =$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۵: اگر جای تمامی سطرهارا با ستونها عوض کنیم مقدار

دترمینان تغییر نمی کند داریم:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

جدول 3×3 به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

را دترمینان 3×3 نامند و ثابت می کنند این دترمینان را می توان بر حسب هر سطر و یا هر ستون به صورت زیر بسط داد مثلاً بسط دترمینان فوق بر حسب سطر اول به شکل زیر می باشد:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$$

$$a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} =$$

$$a(b'c'' - b''c') - b(a'c'' - a''c') +$$

$$c(a'b'' - b''a')$$

اگر i را نماینده سطر و j را نماینده ستون هر يك از اعضای دترمینان بگیریم در این صورت هر عضو دترمینان را به صورت a_{ij} نمایش می دهند مثلاً عضو a_{33} یعنی عضوی که در سطر دوم و ستون سوم قرار گرفته است و علامت ضریب این عضو $(-1)^{2+3}$ یعنی منها می باشد و علامت ضریب عضو a_{ij} به صورت $(-1)^{i+j}$ است و دترمینان ضریب a_{ij} برابر است با دترمینانی که از حذف

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

تبصره ۱: شرط سازگار بودن دستگاه

$$\begin{cases} (۱) & ax + by = c \\ (۲) & a'x + b'y = c' \\ (۳) & a''x + b''y = c'' \end{cases}$$

را بنویسیم.

حل: می‌خواهیم بررسی کنیم چه شرطی باید وجود داشته باشد تا جواب معادلات (۱) و (۲) در معادله (۳) صدق نماید. دستگاه مزبور را به صورت

$$\begin{cases} ax + by + 0 \times z = c \\ a'x + b'y + 0 \times z = c' \\ a''x + b''y + 0 \times z = c'' \end{cases}$$

می‌نویسیم.

در این دستگاه z هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix}}$$

اگر دترمینان مخرج را بر حسب ستون سوم که تمامی اعضای آن صفر است بسط دهیم حاصل صفر می‌شود چون مخرج کسر صفر می‌باشد و z نیز مقداری دلخواه است، پس باید صورت کسر صفر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

مخرج کسرها را بالا دترمینان ضرایب مجهولات بوده و برای به دست آوردن صورت کسرها به جای ضرایب مجهول، اعداد معلوم c و c' را قرار داده سپس دترمینان ضرایب مجهولات را در صورت نظیر مجهول می‌نویسیم. این مطالب برای دستگاه سه معادله سه مجهولی نیز برقرار می‌باشد. داریم:

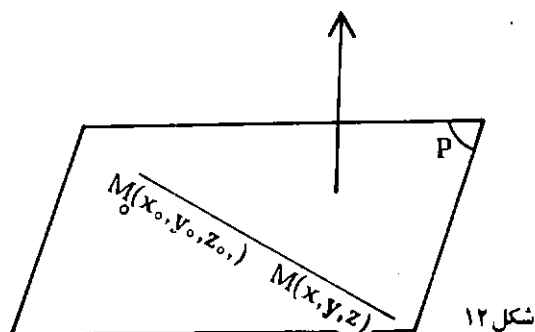
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

۱۲- معادله صفحه $N(A,B,C)$

بردار $\vec{N}(A,B,C)$ عمود بر صفحه P را در نظر می گیریم
و فرض می کنیم نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ در صفحه P باشد می دانیم
شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه دلخواه $M(x, y, z)$ در صفحه
 P باشد آن است که بردار $\vec{M_0M}$ بر بردار $\vec{N}$ عمود باشد داریم
(شکل ۱۲):



شکل ۱۲

$$\vec{N}(A,B,C) \cdot \vec{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{M_0M} = 0 \Rightarrow P \equiv$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

یا

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{-D}$$

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

مثال ۱: معادله صفحه ای را بنویسید که شامل خط (d)

با پارامترهای هادی (a, b, c) و خط d' با پارامترهای هادی
 (a', b', c') بوده از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ بگذرد.

حل: چون صفحه از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و

معادله آن به صورت

شود تا z دلخواه باشد زیرا جواب $\frac{0}{0}$ ، مبهم، یعنی دلخواه
است پس شرط سازگار بودن دستگاه آن می باشد دترمینان ضرایب
مجهولات یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

باشد.

تبصره ۲: شرط آنکه دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$$

جوابهایی غیر از $x = y = z = 0$ داشته باشد چیست؟

حل:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

اگر دترمینان صورت کسر را بر حسب ستون اول بسط دهیم حاصل
صفر می شود و در صورتی که مخارج کسر عددی مخالف صفر باشد
آن گاه $x = 0$ است، اما چون می خواهیم معادله جوابی غیر از
صفر داشته باشد باید مخارج کسر صفر شود تا جواب معادله به صورت
 $\frac{0}{0}$ یعنی عدد دلخواه در آید بنا بر این شرط جواب غیر صفر دستگاه
آن است که دترمینان ضرایب مجهولات یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

باشد.

$$(a' = 2, b' = 3, c' = 4)$$

باشد پس:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

این دترمینان را بر حسب سطر اول بسط داده داریم:

$$(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(3-2) - y(4-2) + z(2-2) = 0$$

$$\Rightarrow x+1-y=0 \Rightarrow$$

$$P \equiv x-y+1=0$$

مثال ۳: معادله صفحه‌ای را بنویسید که طول و عرض و ارتفاع از مبدأ آن به ترتیب a و b و c باشد.

حل: صفحه مزبور از نقاط

$$Q(0,0,c) \text{ و } N(0,b,0) \text{ و } M(a,0,0)$$

می‌گذرد، داریم:

$$\overrightarrow{MN}(-a,b,0) \text{ و } \overrightarrow{NQ}(0,-b,c)$$

صفحه از نقطه $M(x_0=a, y_0=0, z_0=0)$ گذشته و شامل دوخط با پارامترهای هادی $(-a,b,0)$ و $(0,-b,c)$ می‌باشد پس:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ 0 & -b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

می‌باشد و چون بردار عمود بر صفحه یعنی بردار

$$\vec{N}(A, B, C)$$

بر خطوط d و d' عمود می‌باشد پس:

$$Aa+Bb+Cc=0 \text{ و } Aa'+Bb'+Cc'=0$$

و شرط آنکه دستگاه معادله سه مجهولی

$$\begin{cases} (x-x_0)A+(y-y_0)B+(z-z_0)C=0 \\ aA+bB+cC=0 \\ a'A+b'B+c'C=0 \end{cases}$$

با مجهولهای A و B و C جوابهایی غیر از صفر داشته باشد آن است که دترمینان ضرایب A و B و C صفر باشد یعنی

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

مثال ۴: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه

$$M(1,2,3) \text{ و } N(2,3,4) \text{ و } P(-1,0,0)$$

بگذرد.

حل:

$$\overrightarrow{MN}(2-1, 3-2, 4-3) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{MN}(1,1,1) \text{ و } \overrightarrow{PN}(2+1=3, 3-0=3, 4-0=4)$$

یعنی می‌خواهیم معادله صفحه‌ای را بنویسیم که از نقطه

$$P(x_0=-1, y_0=0, z_0=0)$$

بگذرد و شامل دوخط با پارامترهای هادی

$$(a=1, b=1, c=1) \text{ و}$$

مثال ۵: معادلات صفحاتی را بنویسید که از محورهای مختصات بگذرند.

حل: چون صفحات از محورهای می گذرند پس از مبدأ مختصات نیز می گذرند و معادله آنها به صورت:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax + By + Cz = 0$$

اگر صفحه بر محور OZ بگذرد بردار عمود بر صفحه بر محورهای عمود بوده و تصویر آن روی محورهای صفر است یعنی

$$\vec{N}(A, B, 0)$$

و معادله صفحه به صورت $Ax + By = 0$ و معادله صفحه ای

که بر OY می گذرد به صورت $Ax + Cz = 0$ و معادله صفحه ای که بر OX می گذرد به صورت

$$By + Cz = 0$$

می باشد.

مثال ۶: پارامترهای هادی خط (d) فصل مشترک دو صفحه

$$P \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$Q \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

را بیابید.

حل: بردار $\vec{v}(a, b, c)$ از خط (d) که فصل مشترک دو صفحه P و Q می باشد را در نظر گرفته، بردار

$$\vec{N}(A, B, C)$$

که بر صفحه P عمود می باشد بر کلیه خطوط صفحه P یعنی

بر بردار $\vec{v}$ عمود است و نیز بردار $\vec{N}'(A', B', C')$ که بر صفحه

$$(x - a)bc - y(-ac) + z(ab) = 0$$

طرفین رابطه اخیر را بر abc بخش می کنیم:

$$\frac{x-a}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

مثال ۴: معادلات صفحاتی را بنویسید که بر صفحات

مختصات عمود باشند.

حل: صفحه ای که بر صفحه xoy عمود است موازی محورهای می باشد بنابراین بردار عمود بر صفحه، بر محورهای عمود می باشد و تصویر آن روی محورهای صفر است یعنی بردار

$$\vec{N}(A, B, 0)$$

و چون معادله صفحه به صورت

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

است. پس معادله صفحه عمود بر صفحه xoy به صورت

$$\boxed{Ax + By + D = 0}$$

می باشد یا می توانیم بگوییم چون تصویر هر نقطه از صفحه عمود بر صفحه xoy خطی است که روی صفحه xoy می باشد و معادله این خط که در صفحه xoy است به صورت

$$Ax + By + D = 0$$

می باشد و معادله صفحه عمود بر صفحه xoz به صورت

$$\boxed{Ax + Cz + D = 0}$$

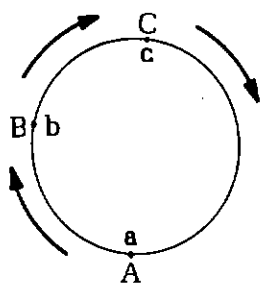
و معادله صفحه عمود بر صفحه yoZ به صورت

$$\boxed{By + Cz + D = 0}$$

می باشد.

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline B & C & A \\ B' & C' & A' \end{array} = \begin{array}{c|c|c} b & a & c \\ \hline C & A & A' \\ C' & A' & B' \end{array} = \begin{array}{c|c|c} c & a & b \\ \hline A & B & B' \\ A' & B' & C' \end{array}$$



برای یادگیری رابطه بالا تبدیلات دوری را روی حروف انجام می‌دهیم.

مثال ۷: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقاط

$$M(2, 3, 4) \text{ و } N(-1, 0, 2)$$

بگذرد و با دو صفحه

$$\begin{cases} R \equiv 2x + 2y - z = 1 \\ Q \equiv x + y + z = 2 \end{cases}$$

موازی باشد.

حل:

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} b & a & c \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} c & a & b \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{-2}$$

پارامترهای هادی فصل مشترك دو صفحه را که متناسب با ۳، ۵، -۲ می‌باشد می‌توان ۳، -۲، -۵ فرض نمود:

Q عمود است بر بردار $\vec{v}$ از صفحه Q عمود بوده داریم:

$$\vec{N} \perp \vec{v} \Rightarrow aA + bB + cC = 0$$

$$\vec{N}' \perp \vec{v} \Rightarrow aA' + bB' + cC' = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Aa + Bb = -cC \\ A'a + B'b = -cC' \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -cC & B \\ -cC' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} A & -cC \\ A' & -cC' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

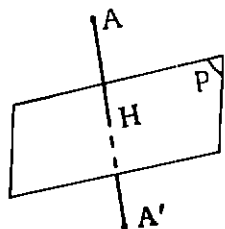
در دترمینانهای صورت جای دسئون را عوض نموده بنا بر این دترمینان در منها ضرب می‌شود و نیز از هرستون از C فاکتور گرفته داریم:

$$a = \frac{C \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \text{ و } b = \frac{C \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{-2} & (1) \\ \frac{b}{C} = \frac{c}{A} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{C} = \frac{c}{A} \\ \frac{b}{C'} = \frac{c}{A'} \end{cases} \Rightarrow$$

خود امتداد داده تا نقطه A' قرینه نقطه A به دست آید (شکل ۱۳):



شکل ۱۳

پارامترهای هادی عمود AA' ضرایب صفحه P یعنی $(1, 1, 1)$ می باشد و چون خط از نقطه

$$A(x_0 = -2, y_0 = 0, z_0 = 4)$$

می گذرد معادله آن به صورت:

$$AA' \equiv \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \Rightarrow$$

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{1} = t \Rightarrow$$

$$x = t - 2, y = t, z = t + 4$$

این خط را با صفحه P قطع می دهیم یعنی به جای x و y و z معادلات بالا را در معادله صفحه P قرار می دهیم داریم:

$$(t-2) + t + (t+4) - 1 = 0 \Rightarrow 3t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_H = -\frac{1}{3} - 2 = \boxed{-\frac{7}{3}} \text{ و}$$

$$y_H = \boxed{-\frac{1}{3}} \text{ و } z_H = -\frac{1}{3} + 4 = \boxed{\frac{11}{3}}$$

$$x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow -\frac{7}{3} = \frac{-2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow$$

$$-14 = -6 + 2x_{A'} \Rightarrow \boxed{x_{A'} = -\frac{4}{3}}$$

$$\vec{NM}(2+1, 3-0, 4-2) \Rightarrow$$

$$\vec{NM}(3, 3, 2)$$

از نقطه N خطی به موازات بردار $\vec{v}(5, -3, -2)$ رسم نموده این خط در صفحه مطلوب می باشد حال باید معادله صفحه ای را بنویسیم که از نقطه N بگذرد و شامل بردارهای $\vec{NM}$ و $\vec{v}$ باشد داریم:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1)(-6+6) - y(-6-10) +$$

$$(z-2)(-9-15) = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1)(0) + 16y + (z-2)(-24) = 0 \Rightarrow$$

$$16y - 24z + 48 = 0$$

$$\boxed{P \equiv 2y - 3z + 6 = 0}$$

مثال ۸: مختصات قرینه نقطه $A(-2, 0, 4)$ را نسبت به صفحه ای که طول و عرض و ارتفاع از مبدأ آن (1) می باشد کدام است؟

حل:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow P \equiv x + y + z - 1 = 0$$

از نقطه A عمود AH را بر صفحه P فرود آورده آن را به اندازه

$$P \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

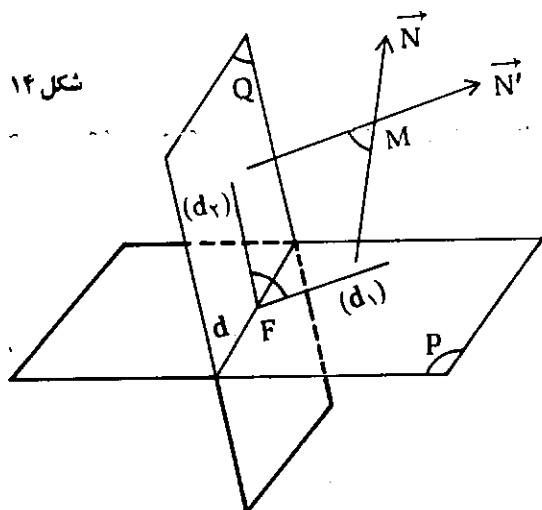
۱۳- زاویه بین دو صفحه و زاویه بین خط و صفحه

برای به دست آوردن زاویه بین دو صفحه P و Q از نقطه F روی خط (d) فصل مشترک دو صفحه عمودهای d_1 و d_2 را در دو صفحه P و Q رسم می‌کنیم. زاویه بین این دو عمود یعنی زاویه $\hat{F}$ زاویه بین دو صفحه می‌باشد اگر از نقطه M خارج دو صفحه دو عمود بردو صفحه P و Q فرود آوریم چون اضلاع این زاویه بر اضلاع زاویه $\hat{F}$ عمودند لذا دو زاویه $\hat{M}$ و $\hat{F}$ یا مساوی‌اند و یا مکمل‌اند. اگر معادلات دو صفحه P و Q را به صورت:

$$P \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Q \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

در نظر بگیریم، چون بردار $\vec{N}(A, B, C)$ و بردار $\vec{N}'(A', B', C')$

می‌باشند (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

$$y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{0 + y_{A'}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{A'} = -\frac{2}{3}}$$

$$z_H = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{11}{3} = \frac{4 + z_{A'}}{2} \Rightarrow$$

$$22 = 12 + 3z_{A'} \Rightarrow \boxed{z_{A'} = \frac{10}{3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{A' \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{10}{3} \right)}$$

مثال ۹: معادله صفحه‌ای را که از نقاط

$$Q(x_2, y_2, z_2) \text{ و } N(x_1, y_1, z_1) \text{ و } M(x_1, y_1, z_1)$$

می‌گذرد به صورت دترمینان بنویسید.

حل: چون صفحه از نقاط M و N و Q می‌گذرد مختصات

این نقاط در معادله صفحه

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

صدق می‌کند داریم:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

شرط آنکه دستگاه چهار معادله چهار مجهولی با مجهولات A و B و C و D جوابی غیر از صفر داشته باشد آن است که دترمینان ضرایب مجهولات صفر باشد یعنی:

مسلماً اگر دو صفحه برهم منطبق باشند

بنابراین:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

خواهد بود.

برای به دست آوردن زاویه بین خط d و صفحه

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

فرض می‌کنیم خط d صفحه P را در نقطه A قطع کند از نقطه M روی خط (d) عمود MH را بر صفحه P فرود می‌آوریم. زاویه حاده $\widehat{HAM} = \alpha$ زاویه بین خط d و صفحه P می‌باشد (شکل ۱۵). اگر بردار $\vec{v}(a, b, c)$ باشد چون بردار عمود بر صفحه که در امتداد HM می‌باشد به تصاویر (A, B, C) است بنابراین

$$\cos(\vec{v}, \vec{HM}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha =$$

$$\frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

بخصوص اگر خط d با صفحه موازی باشد داریم:

$$\sin \alpha = 0 \iff Aa + Bb + Cc = 0$$

مثال ۱۰: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه

$$M(1, 0, 0)$$

بگذرد و بردو صفحه

$$Q \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

عمود باشد.

حل: اگر از نقطه M دو عمود بر صفحات Q و R فرود

آوریم صفحه $P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ که از این دو عمود می‌گذرد جواب مسأله است چون صفحه P بر صفحات

$$\cos(\vec{N}, \vec{N}') = \cos \hat{M} = \cos \hat{F} =$$

$$\frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

چون معمولاً زاویه حاده بین دو صفحه را در نظر می‌گیریم لذا $AA' + BB' + CC'$ را در داخل قدرمطلق نوشتیم. اگر دو صفحه برهم عمود باشند

$$\cos \hat{F} = \cos 90^\circ = 0$$

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

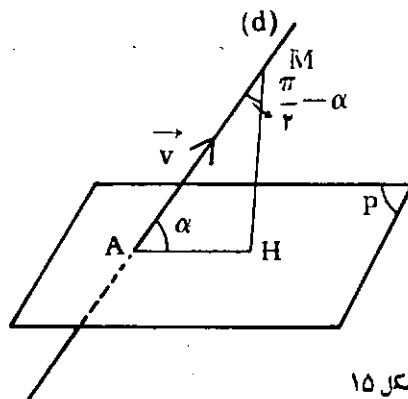
تبصره: اگر دو صفحه Q و P موازی باشند بردارهای عمود

بر این دو صفحه، یعنی بردار $\vec{N}(A, B, C)$ با بردار

$$\vec{N}'(A', B', C')$$

موازی خواهد بود و داریم:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$



شکل ۱۵

$$\sin \alpha = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2+1+0|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

مثال ۱۲: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $M(1, 1, 1)$ بگذرد و با صفحه $x+y-z=1$ موازی باشد و با محور y زاویه 60° بسازد.

حل: پارامترهای هادی خط (d) را (a, b, c) گرفته چون این خط موازی صفحه $P \equiv Ax+By+Cz+D=0$ است داریم:

$$Aa+Bb+Cc=0 \Rightarrow$$

$$1 \times a + 1 \times b + (-1)c = 0 \Rightarrow$$

$$a+b-c=0$$

$$\cos \beta' = \beta = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2b^2$$

$$\Rightarrow a^2+c^2=2b^2 \text{ و } a+b-c=0 \Rightarrow$$

$$c=a+b \Rightarrow a^2(a+b)^2=2b^2 \Rightarrow$$

$$2a^2+2ab+b^2=2b^2 \Rightarrow$$

$$2a^2+2ab=2b^2 \Rightarrow a^2+ba-b^2=0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta} b}{2}$$

$$c=b+a=b+\frac{-b \pm \sqrt{\Delta} b}{2} \Rightarrow$$

Q و R عمود است پس داریم:

$$P \perp Q \Rightarrow A(1)+B(1)+C(1)=0,$$

$$P \perp R \Rightarrow A(2)+B(-1)+C(1)=0$$

و چون صفحه از نقطه $M(x_0=1, y_0=0, z_0=0)$ می‌گذرد، معادله آن به صورت:

$$P \equiv A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow A(x-1)+By+Cz=0$$

شرط آنکه دستگاه

$$\begin{cases} (x-1)A+yB+zC=0 \\ A+B+C=0 \\ 2A-B+C=0 \end{cases}$$

نسبت به مجهولات A و B و C جوابهایی غیر از صفر داشته باشد آن است که:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(1+1)-y(1-2)+z(-1-2)=0$$

$$\Rightarrow 2x-2+y-3z=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{P \equiv 2x+y-3z-2=0}$$

مثال ۱۱: زاویه خط (d) به معادله

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-2}$$

و صفحه P به معادله $x+y+z=0$ کدام است؟

حل:

$$a=2, b=1, c=-2$$

$$A=1, B=1, C=0$$

$$\vec{FM}(x_0, y_0, z_0 + \frac{D}{C}), \vec{N}(A, B, C)$$

$$\vec{FM} \cdot \vec{N} = Ax_0 + By_0 + C(z_0 + \frac{D}{C})$$

$$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = |\vec{N}| \times$$

$$(\vec{N} \text{ بردار روی } \vec{FM} \text{ بردار روی بردار } \vec{N}) =$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \times FL = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \times HM$$

$$\Rightarrow \boxed{HM = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

مثال ۱۳: معادله صفحه نیمسازهای صفحات

$$Q \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$$R \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

را بنویسید.

حل: اگر نقطه $M(x, y, z)$ فاصله‌اش از دو صفحه Q

و R به یک اندازه باشد آنگاه نقطه M روی صفحه نیمساز Q و

R می‌باشد و برعکس اگر نقطه M روی صفحه نیمساز باشد

فاصله‌اش از دو صفحه Q و R به یک اندازه خواهد بود پس:

$$Q \text{ فاصله } M \text{ از صفحه } = MH =$$

$$\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$R \text{ فاصله } M \text{ از صفحه } = MH' =$$

$$\frac{|A'x + B'y + C'z + D'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$c = \frac{b \pm \sqrt{\Delta} b}{2}$$

$$\text{پارامترهای هادی} = b \left(\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right)$$

$$b, b \left(\frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right), \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}, 1, \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$d \equiv \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \Rightarrow$$

$$d \equiv \frac{x - 1}{\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{\frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}} \Rightarrow$$

$$d \equiv \left[\frac{x - 1}{\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{1 \pm \sqrt{\Delta}} \right]$$

۱۴- فاصله نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه

$$P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

در معادله صفحه به جای x و y صفر قرار داده

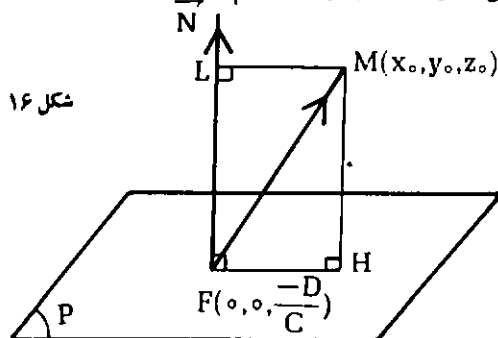
$$z = \frac{-D}{C}$$

به دست می‌آید. نقطه $F(0, 0, \frac{-D}{C})$ نقطه‌ای از صفحه

می‌باشد. از نقطه F عمودی بر صفحه P اخراج نموده بردار

$$\vec{N}(A, B, C)$$

را روی این عمود در نظر گرفته داریم:



شکل ۱۶

موازی اند. در صفحه P نقطه M به طول و عرض صفر را در نظر گرفته در نتیجه $z = 2$ می شود پس نقطه $M(0, 0, 2)$ در صفحه P می باشد از این نقطه عمود MH را بر صفحه Q فرود آورده طول این عمود فاصله دو صفحه می باشد.

$$MH = \frac{|2 \times 0 + 2 \times 0 + 2 \times 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{12}} = \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

و به طور کلی اگر دو صفحه

$$P \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Q \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

موازی باشند یعنی

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = K$$

$$A' = AK, B' = BK, C' = CK \Rightarrow$$

$$AKx + BKy + CKz + D' = 0 \Rightarrow$$

$$Ax + By + Cz + \frac{D'}{K} = 0, \frac{D'}{K} = L \Rightarrow$$

$$Q \equiv Ax + By + Cz + L = 0$$

نقطه مانند $M(0, 0, -\frac{D}{C})$ در روی صفحه P در نظر گرفته

فاصله نقطه M از صفحه Q فاصله بین دو صفحه می باشد:

$$MH = \frac{|A(0) + B(0) + C(-\frac{D}{C}) + L|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \boxed{\frac{|L - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

$$= \frac{|A'x + B'y + C'z + D'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \Rightarrow$$

$$P \equiv \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \pm \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

مثال ۱۴: معادله کره ای را بنویسید که مرکزش نقطه

$$C(1, 1, 1)$$

بوده و بر صفحه $x + 2y + 2z = -4$ مماس باشد.

حل: اگر از مرکز کره به نقطه تماس وصل کنیم بر صفحه مماس عمود است بنابراین فاصله مرکز کره تا صفحه مماس شعاع کره می باشد داریم:

$$P \equiv x + 2y + 2z + 4 = 0$$

$$CH = R = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$\frac{|1 + 2(1) + 2(1) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow R = 3$$

معادله کره: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 9$

$$\Rightarrow \boxed{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9}$$

مثال ۱۵: مطلوب است فاصله دو صفحه

$$P \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ Q \equiv \begin{cases} 2x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

حل: چون $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{1}{2}$ می باشد دو صفحه

و سطر دوم آن (a, b, c) و سطر سومش (a', b', c') می باشد به دست می آید.

مثال ۱: بردار یکانی حاصلضرب خارجی بردارهای

$$\vec{v}_1(0, -1, -2) \text{ و } \vec{v}_2(1, 2, 3)$$

کدام است؟

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-4+2) - \vec{j}(-2-0) + \vec{k}(-1-0) \\ &= -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \text{ و } \vec{u} = \vec{v} \text{ بردار واحد} \\ &= \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}} \\ &= \boxed{-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}} \end{aligned}$$

مثال ۲: حجم هرم $OABC$ را که در آن O مبدأ مختصات و $A(1, 0, 0)$ و $B(0, 2, 0)$ و $C(0, 0, 3)$ می باشد کدام است؟

حل:

$$\vec{AB}(a = -1, b = 2, c = 0)$$

$$\vec{AC}(a' = -1, b' = 0, c' = 3)$$

معادله صفحه ABC که از نقطه $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 3)$ می گذرد به صورت زیر است:

مثلاً برای به دست آوردن فاصله دو صفحه فوق طریق معادله صفحه Q را بر (2) تقسیم کرده داریم:

$$\begin{aligned} P &\equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases} \\ Q &\equiv \end{aligned}$$

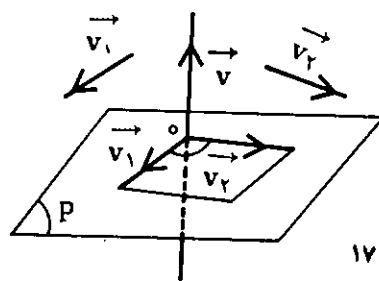
$$MH = \frac{|2 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

۱۵- حاصلضرب خارجی دو بردار بر حسب تصاویر آنها

می دانیم که اگر $\vec{v}_1(a, b, c)$ و $\vec{v}_2(a', b', c')$ باشند، حاصلضرب خارجی آنها $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ برابر است با:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{i}(bc' - cb') - \vec{j}(ac' - ca') +$$

$$\vec{k}(ab' - ba') = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$



شکل ۱۷

حاصلضرب خارجی دو بردار

$$\vec{v}_2(a', b', c') \text{ و } \vec{v}_1(a, b, c)$$

بردار می باشد که از بسط دترمینانی که سطر اول آن

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 7 = \frac{7}{2}$$

چون حجم هرم برابر است با سطح قاعده ضرب در ثلث ارتفاع داریم:

$$V_{\text{هرم}} = S_{ABC} \times \frac{OH}{3} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{6}{7}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = \boxed{1}$$

مثال ۳: معادله پارامتری خط (d) فصل مشترك صفحات

$$P \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$$

کدام است؟

حل: به جای z صفر قرار داده x و y را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow y=1 \Rightarrow M_0(1, 1, 0)$$

فصل مشترك دو صفحه یعنی خط (d) بر بردارهای عمود بر صفحه یعنی بردارهایی که تصاویرشان ضرایب صفحه می باشند عمود می باشد. اگر $\vec{v}$ را برداری از خط d بگیریم چون بردار $\vec{v}$ بر بردارهای:

$$\vec{v}_1(2, -1, 3) \text{ و } \vec{v}_2(1, 1, 1)$$

عمود است پس:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(3+1) - \vec{j}(3-2) + \vec{k}(-1-2)$$

$$P_{ABC} = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$x(6-0) - y(-3-0) + (z-3)(0+2) = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

برای به دست آوردن ارتفاع هرم باید فاصله رأس O را از صفحه بالا به دست آوریم:

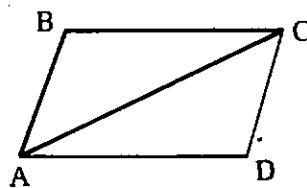
$$OH = \frac{|6(0) + 3(0) + 2(0) - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{6}{7}}$$

اگر روی مثلث ABC متوازی الاضلاع ABCD را بسازیم

مساحت مثلث ABC (شکل ۱۸) $\frac{1}{2}$ مساحت متوازی الاضلاع

می باشد و می دانیم اندازه این مساحت برابر است با اندازه

حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.



شکل ۱۸

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$$

$$(\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} = -2(\vec{j} + \vec{k}) = -2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} \circ \vec{C} = (0)(-2) + (1)(0) + (1)(0) = 0$$

$$(\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A} = 0$$

$$(\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A} = -2\vec{j} - 2\vec{k} \quad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A}$$

$$\vec{d} \equiv \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{d} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = 0 - 3t = -3t \end{cases}$$

معادلات پارامتری خط (d)

مثال ۴: درستی رابطه

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A}$$

را برای بردارهای

$$\vec{C}(-2, 0, 0) \text{ و } \vec{B}(0, 1, 1) \text{ و } \vec{A}(1, 2, 3)$$

بررسی نمایید.

حل:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{A} \times \vec{B}(-1, -1, 1)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -2\vec{j} - 2\vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{A} \circ \vec{C} = (1)(-2) + 2(0) + 3(0) = -2 \Rightarrow$$

رابطه بالا به نام رابطه ضرب برداری سه گانه معروف بوده و ثابت می کنند این رابطه همواره بین سه بردار برقرار می باشد.

۱۶- ضرب عددی سه گانه سه بردار

ضرب عددی سه گانه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ به صورت

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C}$$

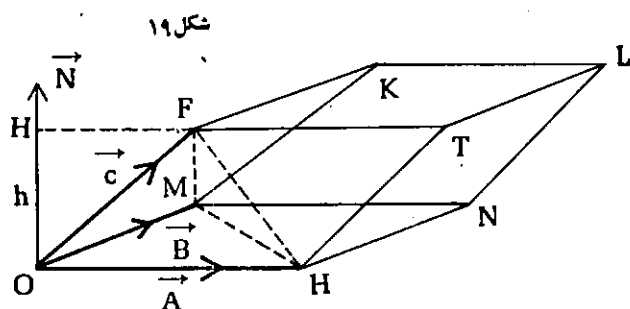
که برابر یک عدد می باشد تعریف می شود. روی

سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ متوازی السطوحی می سازیم و بردار

$\vec{N} = \vec{A} \times \vec{B}$ برداری عمود بر صفحه OMNH است و اندازه

آن برابر است با عدد مساحت متوازی الاضلاع OMNH از

طرفی داریم:



$$\vec{N} \circ \vec{C} = |\vec{N}| \times \text{بردار } \vec{C} \text{ روی بردار } \vec{N}$$

$$= S_{OMNH} \times \overline{OH} \quad (\text{شکل ۱۹})$$

چون S_{OMNH} سطح قاعده متوازی السطوح و قدر مطلق $\vec{OH}$ ارتفاع متوازی السطوح می باشد لذا قدر مطلق

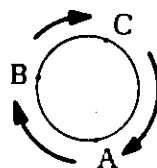
$$\vec{N} \circ \vec{C} = (\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C}$$

حجم متوازی السطوحی است که روی بالهای بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می شود. از طرفی با استفاده از تبدیل دوری $(A \text{ به } B)$ و $(B \text{ به } C)$ و $(C \text{ به } A)$ می توان ثابت کرد:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \circ \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \circ \vec{B} \Rightarrow$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \circ \vec{A} = \vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C}) \Rightarrow$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C} = \vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C})$$



اگر $\vec{A}(a, b, c)$ و $\vec{B}(a', b', c')$ و $\vec{C}(a'', b'', c'')$ داریم:

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= (b'c'' - c'b'')\vec{i} - (a'c'' - a''c')\vec{j}$$

$$+ (a'b'' - a''b')\vec{k} : \vec{A}(a, b, c)$$

$$\vec{B} \times \vec{C} (b'c'' - c'b'', -(a'c'' - a''c'), a'b'' - a''b')$$

$$\Rightarrow \vec{A} \circ (\vec{B} \times \vec{C}) = a(b'c'' - c'b'')$$

$$- b(a'c'' - a''c') + c(a'b'' - a''b') =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

یعنی $(\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C}$ برابر است با دترمینان 3×3 که سطرهای آن به ترتیب تصاویر بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می باشد و قدر مطلق این دترمینان برابر است با حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می شود.

تصوره مهم: اگر در شکل (۲۵) از نقطه F به نقاط M و O و H وصل کنیم حجم هرم $FOMH$ که رأس آن F و قاعده اش مثلث OMH می باشد برابر است با سطح قاعده مثلث OMH ضرب در ثلث ارتفاع OH . از طرفی

$$S_{OMH} = \frac{1}{3} S_{OMNH}$$

می باشد پس:

$$V_{هرم} = S_{OMH} \times \frac{h}{3} = \frac{1}{3} S_{OMNH} \times \frac{h}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \times S_{OMNH} \times h = \frac{1}{6} \times \text{حجم متوازی السطوح}$$

بنابراین اگر بردارهای

$$\vec{C}(a'', b'', c''), \vec{B}(a', b', c'), \text{ و } \vec{A}(a, b, c)$$

بالهای همسر (متقارب) در نقطه O باشند قدر مطلق حجم هرم برابر است با:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

مثال ۱: حجم متوازی السطوح $OMNHFKLT$ که

در آن $O(0, 0, 0)$ و $M(2, 3, 4)$ و $H(-2, -1, 2)$ و

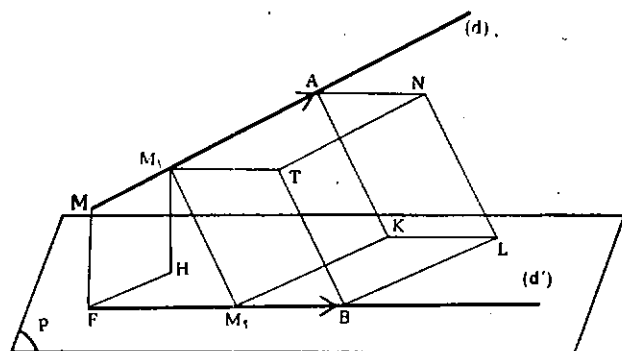
۱۷- محاسبه فاصله عمود مشترک دو خط متناظر

فرض می‌کنیم دو خط

$$d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$d': \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$$

متناظر باشند. می‌خواهیم طول پاره‌خطی را که متکی به دو خط مذکور بوده و بر این دو خط عمود می‌باشد محاسبه کنیم:



شکل ۲۰

فرض می‌کنیم نقطه $M_1(x_0, y_0, z_0)$ و $M_2(a, b, c)$ و نقطه $M_3(x'_0, y'_0, z'_0)$ و $M_4(a', b', c')$ باشد روی بردارهای $\vec{M_1M_2}$ و $\vec{M_3M_4}$ متوازی السطوحی می‌سازیم. از نقطه M_1 عمود M_1H را بر صفحه قاعده متوازی السطوح فرود می‌آوریم. از نقطه H خطی موازی d رسم می‌کنیم تا خط d' را در نقطه F قطع کند. از نقطه F عمودی بر صفحه (P) اخراج می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع نماید. FM عمود مشترک دو خط d و d' است زیرا چون FM بر صفحه (P) عمود است بر کلیه خطوط صفحه P من جمله بر خط d' و FM عمود است چون خط d با خط FH موازی می‌باشد پس FM بر خط d هم عمود است بنا بر این $FM = HM_1$ که بر دو خط d و d' متکی و بر آنها عمود است عمود مشترک دو خط d و d' است و سطح قاعده

$F(-1, 0, -2)$ می‌باشد کدام است (شکل ۱۹)؟

حل:

$$\vec{OH}(-2, -1, 4) \text{ و } \vec{OM}(2, 3, 4) \text{ و}$$

$$\vec{OF}(-1, 0, -2)$$

$$V_{\text{حجم}} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$|-2(-6-0) + 1(-4+2) + 4(0+2)|$$

$$= |12 + 12| \Rightarrow \boxed{V=24} \text{ واحد حجم}$$

مثال ۲: حجم هرم $OABC$ را که در آن O مبدأ

مختصات

$$C(-2, 1, -3) \text{ و } B(-1, -2, -4) \text{ و } A(1, 2, 3)$$

می‌باشد کدام است؟

حل:

$$\vec{OA}(1, 2, 3) \text{ و } \vec{OB}(-1, -2, -4) \text{ و}$$

$$\vec{OC}(-2, 1, -3)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} |1(6+4) - 2(3-8) + 3(-1-2)|$$

$$= \frac{1}{6} |10 + 10 - 15| = \frac{1}{6} \times 5 = \boxed{\frac{5}{6}} \text{ واحد حجم}$$

$$\vec{M_A} \times \vec{M_B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 26\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, |\vec{M_A} \times \vec{M_B}|$$

$$= \sqrt{26^2 + (-15)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{676 + 225 + 64} = \sqrt{965}$$

$$(\vec{M_A} \times \vec{M_B}) \cdot \vec{M_{M_r}}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \\ -33 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8 - 30) - 2(12 + 198)$$

$$- 1(15 + 66) = -44 - 840 - 81$$

$$= -965, FM = \frac{|-965|}{\sqrt{965}}$$

$$= \frac{965}{\sqrt{965}} = \boxed{\sqrt{965}}$$

ادب ریاضی

در سن یازده سالگی، اقلیدس را آغاز کردم... این یکی از مهمترین حادتهای زندگیم، به خیره کنندگی مهر نخستین بود. تصور نمی کردم که در دنیا چیزی این همه لذت بخش وجود داشته باشد.

برتراند راسل، اتوبیوگرافی

متوازی السطوح برابر است با:

$$S = |\vec{M_K} \times \vec{M_B}| = |\vec{M_A} \times \vec{M_B}|$$

و حجم متوازی السطوح بالا (شکل ۲۰) برابر است با:

$$V = S_{\text{قاعده}} \times HM = |\vec{M_A} \times \vec{M_B}| \times FM$$

$$= |(\vec{M_A} \times \vec{M_B}) \cdot \vec{M_{M_r}}|$$

$$\Rightarrow \boxed{FM = \frac{|(\vec{M_A} \times \vec{M_B}) \cdot \vec{M_{M_r}}|}{|\vec{M_A} \times \vec{M_B}|}}$$

که صورت کسر قدرمطلق دترمینانی می باشد که سطرهای آن به ترتیب تصاویر بردارهای

$$\vec{M_B}(a', b', c') \text{ و } \vec{M_A}(a, b, c)$$

$$\vec{M_{M_r}}(x'_0 - x_0, y'_0 - y_0, z'_0 - z_0)$$

است.

مثال: مطلوب است طول عمود مشترك دو خط متناظر

$$d: x = 2t + 2, y = 2t + 1, z = -t - 1$$

$$d': x = 3t' - 31, y = 2t' + 6, z = 6t' + 3$$

حل:

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$d': \frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}$$

$$M_1(2, 1, -1) \text{ و } M_1(-31, 6, 3) \Rightarrow$$

$$\vec{M_{M_r}}(-33, 5, 2)$$

$$\vec{M_A}(2, 4, -1) \text{ و } \vec{M_B}(3, 2, 6)$$