

# مقاله‌های کوتاه از

## مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۸)

Duane W. Detemple

غلامرضا یاسی پور

### همگرایی سریعتر به ثابت اویلر

ثابت اویلر،  $\gamma$ ، معمولاً به صورت حد رابطه

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$$

تعریف می‌شود که در آن

$$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

آهنگ همگرایی آن بسیار آهسته است، زیرا:

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

یانگ، Young، اثبات مقدماتی این نامساوی را در [۲] داده است.

همگرایی مورد بحث را می‌توان با قرار دادن

$$R_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n + \frac{1}{2})$$

به جای  $D_n$ ، به مقدار قابل ملاحظه‌ای اصلاح کرد.

واضح است که  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \gamma$ ؛ آنچه که غیرمنتظره است

تأثیر عظیمی است که تغییر مختصر فوق بر آهنگ همگرایی دارد.

قضیه. به ازای جميع عددهای طبیعی  $n$ ،

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}$$

اثبات: کرانه‌های بالا و پایین، هردو، با در نظر گرفتن

تابع  $f$  تعریف شده بر  $x > 0$  توسط

$$f(x) = -(x+1)^{-1} - \log(x + \frac{1}{2}) + \log(x + \frac{3}{2})$$

محاسبه‌هایی کوتاه نشان می‌دهد که

$$R_n - R_{n+1} = f(n)$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-2} (x + \frac{1}{2})^{-1} (x + \frac{3}{2})^{-1}$$

برای به دست آوردن کران بالا، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$-f'(x) < \frac{1}{4} (x + \frac{1}{2})^{-2}$$

بنابراین، از آن‌جا که  $f(\infty) = 0$

$$f(k) = - \int_k^\infty f'(x) dx < \frac{1}{4} \int_k^\infty (x + \frac{1}{2})^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{12} (k + \frac{1}{2})^{-2}$$

از آن‌جا که  $(k + \frac{1}{2})^2 > k(k+1)$ ، نتیجه می‌شود که

$$(k + \frac{1}{2})^{-2} < \frac{1}{12} \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} x^{-2} dx$$

در واقع از لحاظ هندسی از شکل زیر آشکار است که

$$k \leq x \leq k+1 \text{ روی } y = x^{-2} \text{ کوچکر از سطح زیر } y = x^{-2} \text{ است.}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه تکمیل می شود.

مفاهیم به کار رفته در اثبات فوق را می توان برای به دست آوردن برآورد از مرتبه بالاتر زیر پذیرفت.

$$R_n - \gamma - \frac{1}{24(n + \frac{1}{2})^2} = -r_n$$

که در آن:

$$\left( \frac{7}{960} \right) \frac{1}{(n+1)^2} < r_n < \left( \frac{7}{960} \right) \frac{1}{n^2}$$

بسط عمومی به مرتبه ای دلخواه را می توان بر حسب عددهای برنولی یافت. استخراجی را که تنها به حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نیاز دارد، می توان در [۱] یافت.

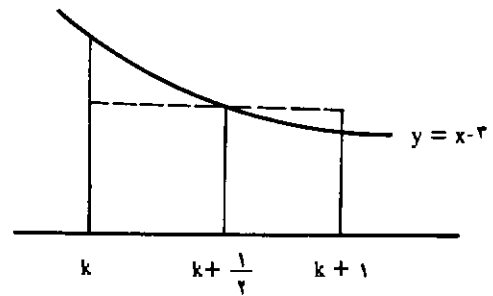
مرجعها:

1. D. W. Detemple and S. H. Wang, Half integer approximations for the partial of the harmonic series, J. Math Analysis and Applic. 160 (1991), 149 - 156.
  2. R. M. Young, Euler's Constant, Math.Gazette 75, No. 472 (1991), 187 - 190
- Department of pure and Applied Mathematics  
Washington State University  
Pullman, Washington 99164 - 3113

## ادب ریاضی

— پاسکال به فیلسوف مذهبی معروف بود؛ و همین دل مشغولی او به مذهب بود که بعدها همه وقت او را اشغال کرد و وی را با بحثهایی در مورد تصادف و وقایع نامعین در زندگی فرد و اجتماع درگیر ساخت.

تاریخ علم کمبریج - حسن افشار



در این صورت، روی هم رفته

$$R_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} (R_k - R_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$$

$$< \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} (k + \frac{1}{2})^{-r} < \frac{1}{12} \int_n^{\infty} x^{-r} dx = \frac{1}{24n^2}$$

برای استخراج کران پایین، به  $x$  نامساوی زیر نیاز داریم:

$$(x + \frac{1}{2}) (x + \frac{3}{2}) = x^2 + 2x + \frac{3}{4} < (x + 1)^2$$

که از آن نتیجه می گیریم که

$$-f'(x) > \frac{1}{4} (x + 1)^{-r}$$

چون مانند قبل عمل کنیم، درمی یابیم که

$$f(k) > \frac{1}{4} \int_k^{\infty} (x + 1)^{-r} dx = \frac{1}{12} (k + 1)^{-r}$$

و سپس به دست می آوریم:

$$R_n - \gamma > \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} (k + 1)^{-r} > \frac{1}{12} \int_{n+1}^{\infty} x^{-r} dx$$

$$= \frac{1}{24(n+1)^2}$$