

هم نهشتی

و کاربردهای آن

اشاره:

در قسمت قبل به بسیاری از کاربردهای هم نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد داریم برخی از کاربردهای هم نهشتی را در حل مسئله‌های گوناگون و مطرح در المپیادهای ریاضی مورد کنکاش قرار دهیم تا قوت مطلب از این جنبه نیز نشان داده شود. بنابراین، ابتدا به حل تعدادی از مسئله‌های المپیادهای کشورهای متفاوت که در رابطه با موضوع هستند، می‌پردازیم و سپس تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده ارائه می‌دهیم که با توجه به مثال‌ها می‌توانید آن‌ها را حل کنید.

حل مسئله‌هایی از المپیادهای کشورهای گوناگون به کمک هم نهشتی

مسئله ۱. اگر A مجموع ارقام عدد $N = ۴۴۴۴۴۴۴۴$ و B مجموع ارقام A باشد، مجموع ارقام B را تعیین کنید (هفدهمین IMO، ۱۹۷۵).

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که مجموع ارقام B بسیار کوچک است:

$$N = ۴۴۴۴۴۴۴۴ < ۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^۷$$

N کوچک‌تر از یک عدد ۲۰۰۰۰ رقمی است. اگر همه‌ی ارقام را ۹ در نظر بگیریم:

$$A < ۹ \times ۲۰۰۰۰ = ۱۸۰۰۰$$

عددی کوچک‌تر از ۱۸۰۰۰ که دارای بزرگ‌ترین مجموع ارقام باشد، عدد ۱۷۹۹۹۹ است. پس:

$$B \leq ۴۴ = ۱ + ۷ + ۹ + ۹ + ۹ + ۹$$

در بین اعداد کوچک‌تر از ۴۴ عدد ۳۹ از نظر مجموع ارقام (۳+۹=۱۲) بزرگ‌ترین عدد است، بنابراین جواب مسئله عددی نایبتر از ۱۲ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم هر عددی

با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت است. بنابراین، عددی که مورد نظر است با N به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت خواهد بود. از طرف دیگر:

$$N = ۴۴۴۴۴۴۴۴ \equiv ۷^{۹۴۴۴} \equiv (۷^۳)^{۱۲۸۱} \times ۷ \equiv ۱ \times ۷ = ۷$$

پس با توجه به $۷^۳ \equiv ۱$ می‌توان نوشت:

$$N \equiv ۷$$

بنابراین، جواب مسئله عدد ۷ خواهد بود، زیرا تنها عددی است که کوچک‌تر از ۱۲ و با ۷ به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت است. در واقع از ابتدا می‌توانستیم بنویسیم:

$$N = ۴۴۴۴۴۴۴۴ \equiv A \equiv B \leq ۱۲$$

و از هم نهشتی $N \equiv ۷$ و نامعادله‌ی $B \leq ۱۲$ ، به جواب بدیهی $B = ۷$ برسیم.

زیرا از این نکته استفاده کردیم که: «هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت است.»

مسئله ۲: رقم پنجم از سمت راست عدد $M = ۵۵۵۵۵$ را تعیین کنید (بخارست، ۱۹۸۶).



و چون: $7 \equiv 19^{19} \pmod{17}$ و $7 \equiv x^2 + y^4 \pmod{17}$ ، در این جا اثبات کامل می شود.

تمرین ۳. تحقیق کنید که آیا می توان عدد $N = 19^{19}$ را به صورت مجموعی از یک مکعب کامل، توان چهارم کامل و توان پنجم کامل نوشت؟

راهنمایی: واضح است که در واقع باید معادله ی $19^{19} = x^2 + y^4 + z^5$ را در Z از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنیم. با توجه به برابری $60 = 3 \times 4 \times 5$ ، کافی است معادله را به پیمانه ی ۶۱ در نظر بگیریم و مانند مسئله ی ۴ عمل کنیم (در میدان Z_{61} با مرتبه ی ۶۰).

مسئله ی ۵: اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به طوری که داشته باشیم: $2^p + 3^p = w^n$ ، ثابت کنید: $n = 1$ (ایرلند، ۱۹۹۶).

حل: در حالت $p = 2$ داریم: $w^n = 2^2 + 3^2 = 13$ و برابری $n = 1$ بدیهی است. اگر $p > 2$ ، آن گاه p عددی فرد است؛ بنابراین:

$$2^p + 3^p = (2 + 3)(2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots + 3^{p-1})$$

$$5 \mid (2^p + 3^p)$$

پس در این حالت $5 \mid w$ و اگر $n > 1$ ، آن گاه:

$$5 \mid (2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots + 3^{p-1}) = \frac{2^p + 3^p}{2 + 3} = \lambda$$

چون به ازای هر k داریم: $3^k \equiv (-2)^k \pmod{5}$ ، پس می توان نوشت:

$$(-1)^k 2^{p-k-1} 3^k \equiv 2^{p-1}$$

با توجه به هم نهشتی بالا می توان نوشت:

$$\lambda = \frac{2^p + 3^p}{2 + 3} = 2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots$$

$$+ (-1)^k 2^{p-k-1} 3^k + \dots + 3^{p-1} \equiv (2^{p-1})p$$

بنابراین، λ با $(2^{p-1})p$ به پیمانه ی ۵ هم نهشت است، ولی

$$5 \mid p(2^{p-1}) \text{ و این وقتی ممکن است که: } p = 5.$$

برای $p = 5$ داریم: $2^5 + 3^5 = 275$ و در این حالت نیز

$$n = 1$$

تمرین ۱. تمام زوج های صحیح مثبت (x, y) را بیابید که در معادله ی زیر صدق می کنند:

$$x^2 = y! + 2001$$

راهنمایی: برای y بزرگ تر از ۵، همواره $y!$ بر ۹ بخش پذیر است و طرف دوم معادله $(y! + 2001)$ به پیمانه ی ۹ باقی مانده ی ۳ را می دهد که بدیهی است از نوع باقی مانده ی درجه ی دوم نیست. $(x = 45, y = 4)$.

تمرین ۲. ثابت کنید که دستگاه معادله های زیر هیچ جواب صحیح غیر بدیهی ندارد.

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$$

راهنمایی: فرض می کنیم که دستگاه جوابی غیر صفر داشته باشد. با تقسیم کردن بر مقسوم علیه مشترک x, y, z می توانیم فرض کنیم که این چهار عدد هیچ مقسوم علیه مشترکی ندارند. از جمع دو معادله و کار به پیمانه ی ۷ به نتیجه برسید.

مسئله ی ۴: ثابت کنید که عدد $N = 19^{19}$ را نمی توان به صورت مجموعی از یک مکعب کامل و توان چهارم کامل نوشت (بخارست، ۱۹۸۶).

حل: در واقع مسئله معادل این است که ثابت کنیم معادله ی زیر در مجموعه ی اعداد صحیح جواب ندارد:

$$x^2 + y^4 = 19^{19} \quad (1)$$

با توجه به قضیه ی فرما و برابری $3 \times 4 = 12$ ، معادله ی (۱) را به پیمانه ی ۱۳ در نظر می گیریم. چون: $1 \equiv x^2 \pmod{13}$ یا $3 \equiv x^2 \pmod{13}$ ، در نتیجه: $8 \equiv y^4 \pmod{13}$ یا $1 \equiv y^4 \pmod{13}$ یا $8 \equiv y^4 \pmod{13}$.

از طرف دیگر داریم: $9 \equiv y^4 \pmod{13}$ یا $1 \equiv y^4 \pmod{13}$ (یعنی به پیمانه ی ۱۳، یک مکعب، باقی مانده های ۱، ۵، ۸ و ۱۲ و یک توان چهارم باقی مانده های ۱، ۵، ۸ و ۱۲ را خواهند داشت). به این ترتیب، مجموع یک مکعب و یک توان چهارم به پیمانه ی ۱۳ هم نهشت با ۱، ۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ خواهد بود و عدد ۷ در این فهرست ظاهر نمی شود. هم چنین داریم:

$$19^{19} \equiv 19^{12} \times 19^7 \equiv 1 \times 6^7 \equiv 6^7 \pmod{13}$$



تمرین ۴. مسئله‌ی ۵ را برای برابری‌های زیر تحقیق کنید:

الف) $2^p + 1 = w^n$ ب) $3^p + 4^p = w^n$

ج) $3^p + 4^p + 5^p = w^n$ د) $5^p + 6^p = w^n$

راهنمایی: تحقیق عدم درستی حکم برای (الف)،

(ب) و (ج) واضح است؛ به برابری‌های عددی

$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ ، $2^3 + 1 = 9 = 3^2$ و

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 216 = 6^3$ توجه کنید. پس کافی

است فقط برابری (د) را به طریق حل مسئله‌ی ۵

بررسی کنید.

مسئله‌ی ۶: تمام مقادیر ممکن برای مجموع

ارقام یک مربع کامل را مشخص کنید

(آمریکا، ۱۹۹۵).

حل: می‌دانیم که «مجموع ارقام یک عدد به پیمانه‌ی ۹ با آن

عدد هم نهشت است».

بنابراین، یک مربع کامل باید به پیمانه‌ی ۹ با ۰، ۱، ۴ یا ۷

هم نهشت باشد. نشان می‌دهیم: هر عددی مثل N را که یک

باقی مانده‌ی درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۹ باشد، می‌توان به عنوان

مجموع ارقام یک مربع کامل محسوب کرد. حالت‌های $n = 1$

و $n = 4$ بدیهی هستند. بنابراین فرض می‌شود $n > 4$ و با این

فرض، اگر $n = 9m$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام

$1 + 10^m \times 2 - 10^{2m} = (10^m - 1)^2$ است که عددی به صورت

$4 \dots 96 \dots 9$ خواهد بود. هم‌چنین اگر $n = 9m + 4$ ، آن‌گاه

n مجموع ارقام $9 + 10^m \times 6 - 10^{2m} = (10^m - 3)^2$ است که

عددی به صورت $9 \dots 94 \dots 9$ خواهد بود. و سرانجام اگر

$n = 9m - 2$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام زیر است:

$25 + 10^{m+1} - 10^{2m} = (10^m - 5)^2$

که عددی به صورت $25 \dots 90 \dots 9$ خواهد بود.

مسئله‌ی ۷: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n \geq 0}$ به این صورت تعریف می‌شود:

a . یک عدد گویای مثبت کوچک‌تر از $\sqrt{1998}$ است و اگر به

ازای اعداد صحیح نسبت به هم اول p_n و q_n ، $a_n = \frac{p_n}{q_n}$

باشد، آن‌گاه: $a_{n+1} = \frac{p_n + 5}{p_n q_n}$. ثابت کنید که برای هر n

داریم: $a_n < \sqrt{1998}$ (IMO، ۱۹۹۸).

حل: کافی است نشان دهیم که اگر: $\frac{p}{q} < \sqrt{1998}$

آن‌گاه: $\frac{p}{q} + \frac{5}{pq} < \sqrt{1998}$

از فرض $\frac{p}{q} < \sqrt{1998}$ ، نتیجه می‌شود $(p, q > 0)$:

$\frac{p^2}{q^2} < 1998$; $p^2 < 1998q^2$; $1998q^2 - p^2 > 0$.

در نظر می‌گیریم: $n = 1998q^2 - p^2$ و نشان می‌دهیم که:

$n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ، به طوری که اگر $n > 0$ ، آن‌گاه: $n \geq 11$.

با توجه به برابری $1998 = 2 \times 27 \times 37$:

$n \equiv -p^2 \equiv 0, -1, -4, -7$

بنابراین: $n \neq 1, 3, 4, 6, 7, 10$. اکنون کافی است

$n = 2, 5, 8$ را منفی کنیم که به پیمانه‌ی ۳۷ این کار را انجام

می‌دهیم (قضیه فرما: $(a, p) = 1$; $a^{p-1} \equiv 1$):

$n = 2$, $p = 37$: $1 \equiv p^{36} \equiv (p^2)^{18} \equiv (-2)^{18} \equiv 6^2 \equiv -1$

(تناقض)

$n = 5$, $p = 37$: $1 \equiv p^{36} \equiv (p^2)^{18} \equiv (-5)^{18} \equiv 11^2 \equiv -1$

(تناقض)

$n = 8$, $p = 37$: $1 \equiv p^{36} \equiv (p^2)^{18} \equiv (-8)^{18} \equiv (-10)^9 \equiv -1$

(تناقض)

بنابراین در این جا ثابت می‌شود: $n \geq 11$ ، به طوری که برای

$p > 5$

$p^2(1998q^2) \geq p^2(p^2 + 11) = p^4 + 11p^2 = p^4 + 10p^2$

$+ p^2 > p^4 + 10p^2 + 25$

پس می‌توان نوشت:

$1998p^2q^2 > (p^2 + 5)^2$

و یا:

$\sqrt{1998} > \frac{p}{q} + \frac{5}{pq}$

برای $p \leq 5$ داریم: $\frac{p}{q} + \frac{5}{pq} \leq \frac{10}{q} < \sqrt{1998}$ و به این

ترتیب برقراری حکم واضح است. لازم به ذکر است که

$n = 11$ ، کوچک‌ترین مقداری است که نمی‌تواند توسط

هم نهشتی به پیمانه‌ی ۱۹۹۸ منفی شود؛

چون: $11 + (787)^2 \equiv 1998 \pmod{1998}$. از طرف دیگر، با بسط کسر

مسلل $\sqrt{1998}$ ، می‌توان نشان داد که کوچک‌ترین مقدار

دست‌یافتنی $n = 26$ است که به ازای $p = 134$ و $q = 3$ واقع

می‌شود.

مسئله‌ی ۸: ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که

برای آن‌ها برابری:

$x^2 + 3xy - 2y^2 = 112$



برقرار باشد (پوتنام، ۱۹۵۴).

حل: ابتدا معادله را به یک معادله ی ساده از نوع پل

$$(x^2 - Ry^2 = 1) \text{ تبدیل می کنیم:}$$

$$4(x^2 + 3xy - 2y^2) = 4(112)$$

$$(4x^2 + 12xy + 9y^2) - 17y^2 = 448$$

$$(2x + 3y)^2 - 17y^2 = 448$$

اکنون معادله را به پیمانه ی ۱۷ ساده می کنیم. باقی مانده های

درجه ی دوم به پیمانه ی ۱۷ برابر ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۸، ۲، ۱۵ و ۱۳ هستند، در حالی که داریم:

$$448 \equiv 6 \pmod{17}$$

چون عدد ۴۴۸ نمی تواند اختلاف یک مربع و مضربی از

۱۷ باشد، معادله هیچ جواب صحیحی ندارد.

مسئله ی ۹: اگر n عددی صحیح بزرگ تر از ۱ باشد، احکام

زیر را ثابت کنید:

(الف) $k = 1! + 2! + \dots + n!$ یک توان کامل است، اگر و تنها

اگر: $n = 3$.

(ب) $S = (1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2$ یک توان کامل است،

اگر و تنها اگر: $n = 3$.

حل: بدیهی است که به ازای $n = 3$ داریم:

$$k = 1! + 2! + 3! = 3^2 \text{ و } S = (1!)^2 + (2!)^2 + (3!)^2 = 15^2$$

اکنون باید نشان دهیم که این تنها امکان است. به این منظور

فرض می کنیم که n دیگری وجود دارد که برای $m > 1$:

$$k = 1! + 2! + \dots + n! = t^m$$

از طریق آزمایش می توان نشان داد که n باید بزرگ تر یا برابر

با ۹ باشد. برای $n \geq 5$ ، عدد k به ۳ ختم می شود و به این ترتیب

m نمی تواند برابر با ۲ باشد (می دانیم که مربع ها تنها می توانند

به ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ یا ۴۹ ختم شوند) و این مطلب یعنی: $n \geq 3$.

هم چنین، برای $n \geq 9$ عبارت k بر ۳ بخش پذیر است و در

نتیجه: $3 | t^m$ و یا $27 | t^m$. بنابراین، باید $k \equiv 27 \pmod{27}$ ولی چون $n!$ به

ازای $n \geq 9$ بر ۲۷ بخش پذیر است:

$$n \geq 9: k = 1! + 2! + \dots + n! \equiv 1! + 2! + \dots + 8! \equiv 9$$

این تناقض ثابت می کند که $n = 3$ تنها جواب مسئله است.

به همین ترتیب، عبارت $S = (1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2$

یک توان کامل برای $n = 2, 4, 5, 6$ نیست. برای $n \geq 7$:

چون: $49 | n!$ ، پس:

$$S = (1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2 \equiv (1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (6!)^2 \equiv 7$$

چون ۷ باقی مانده ی یک توان کامل نیست، بنابراین

$n = 3$ ، تنها جواب مسئله است.

تمرین ۵. تحقیق کنید که عبارت

$$T = (1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2$$

مربع کامل است.

تمرین ۶. تحقیق کنید که آیا به ازای $n > 1$ ، عبارت زیر

می تواند توان کامل شود:

$$M = (1!)^5 + (2!)^5 + \dots + (n!)^5$$

مسئله ی ۱۰: می دانیم:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab000000$$

رقم های a, b, c, d را تعیین کنید (انگلستان، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲).

حل: می دانیم اگر n عدد طبیعی و $1 \leq n$ عددی اول باشد،

$$t_p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots \text{ از دستور } n! \text{ در } p \text{ های}$$

می شود. چون تعداد صفرهای $n!$ بستگی به تعداد ۵های موجود

در آن دارد، پس تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر با

$$t_5 = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{25} \right\rfloor + \dots = 7 \text{ است و در نتیجه: } b = 0.$$

از طرف دیگر، اگر صفرهای سمت راست $34!$ را حذف

کنیم، عدد حاصل یعنی $\frac{34!}{10^7}$ بر ۸ بخش پذیر است (زیرا:

$$t_2 = \left\lfloor \frac{34}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + \dots = 32 \text{ و } 2^{32} | 34!). \text{ بنابراین عدد}$$

سه رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{35a}$ ، باید بر ۸ بخش پذیر و

زوج باشد. پس a می تواند یکی از اعداد زوج بین صفر و ۱۰

باشد که با امتحان این چهار عدد، فقط عدد ۳۵۲ بر ۸ بخش پذیر

است و در نتیجه: $a = 2$.

برای یافتن c و d توجه می کنیم که $34!$ باید بر ۹ و ۱۱

بخش پذیر باشد. از بخش پذیری آن بر ۹ نتیجه می شود که

مجموع ارقام آن بر ۹ بخش پذیر است و با یک محاسبه ی ساده

به دست می آید:

$$c + d = 9k - 6$$

$$0 \leq c + d \leq 18 \text{ چون } 141 + c + d \equiv 6 + c + d \pmod{9} \text{ پس:}$$

$$k = 1 \text{ یا } 2. \text{ بنابراین: } c + d = 3 \text{ یا } 12 (*)$$

$$(c, d) = (4, 8) \text{ یا } (3, 9) \text{ یا } (3, 0) \text{ یا } (2, 1) \text{ یا } (1, 2) \text{ یا } (0, 3) = (c, d)$$

$$(6, 6) \text{ یا } (5, 7)$$

$$(c + d = 3 \text{ یا } 12): \text{ حالت های ممکن}$$

(۹ و ۳) یا (۸ و ۴) یا (۷ و ۵) هم چنین، می دانیم عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که داشته باشیم:

$$(k \text{ زوج}) \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + \dots + a_{k-1} - a_k$$

$$(k \text{ فرد}) \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + \dots - a_{k-1} + a_k$$

بنابراین، چون عدد ۳۴! دارای ۳۹ رقم است ($k=39$),

$$34! \equiv 0 - 0 + d - c + \dots + 2 = 19 + d - c$$

پس:

$$11 \equiv d - c - 3 \equiv 0;$$

$$d - c \equiv 3; \quad d - c = 11s + 3,$$

$$0 \leq d - c \leq 8; \quad d - c = 3$$

تنها جوابی که در این شرایط صدق می کند، $d=3$ و $c=0$ است.

راهنمایی: با توجه به ارقام حاصل ۳۴!، بدیهی است که عدد تکراری a فقط ۰ یا ۹ می تواند باشد؛ زیرا بقیه ی عددها در طرف دوم دیده می شوند و حداقل دو بار هم تکرار شده اند. a غیر از ۹ نمی تواند باشد، زیرا نشان می دهیم که ۳۴! به هفت صفر ختم می شود و در واقع عدد b نیز صفر است. می دانیم که صفرهای $n!$ ، در واقع از ضرب عامل های ۵ و ۲ حاصل می شوند. بدیهی است که تعداد صفرهای ۳۴! همان تعداد ۵های موجود در ۳۴! است:

$$t_5 = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{25} \right\rfloor = 6 + 1 = 7$$

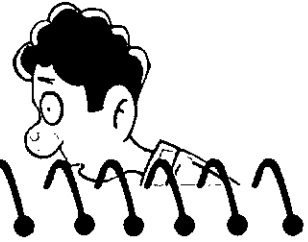
تمرین ۷. می دانیم:

$$34! = 2a52327aaadea6b414b8476186$$

$$ba6435cb \times 10^6$$

رقم های a, b, c, d, e را تعیین کنید.

بنابراین هفت رقم سمت راست ۳۴! صفر است. برای تعیین c از خاصیت بخش پذیری بر ۸ و برای تعیین d و e از خاصیت بخش پذیری بر ۹ و ۱۱ (مطابق مسئله ی ۱۰) استفاده می کنیم.



تمرین

۱. اگر $N = 4444$ ، A مجموع ارقام عدد N^N ، B مجموع ارقام A و C مجموع ارقام B باشد، مجموع ارقام C را بیابید.

۲. رقم پنجم از سمت راست عدد $M = 5^{5555} + 25! + 99999^{55555}$ را تعیین کنید.

۳. تحقیق کنید که آیا معادله ی $2y^2 = x^5 - 128$ در مجموعه ی اعداد صحیح دارای جواب است؟

۴. تمام زوج های صحیح مثبت (x, y) را بیابید که در معادله ی زویه رو صدق کنند: $2025x^2 - 2001 = (4y)!$

۵. تحقیق کنید که آیا دستگاه زیر جواب صحیح غیر بدیهی دارد؟

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 2z^2 \\ 24x^2 + y^2 = 4t^2 \end{cases}$$

۶. تحقیق کنید که آیا عدد $N = 19^{19}$ می تواند به صورت مجموعی از یک مربع کامل و یک مکعب کامل نوشته شود؟

۷. اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به طوری که داشته باشیم:

$$6^p + 7^p = w^n$$

تحقیق کنید که n برابر با چه عددهایی می تواند باشد.

۸. تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مکعب کامل را مشخص کنید.

۹. ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن ها برابری زیر برقرار باشد: $2x^2 + 3xy - y^2 = 56$

۱۰. به ازای چه مقادیری از n ، عبارت N یک توان کامل است؟ $N = (1!)^4 + (2!)^4 + \dots + (n!)^4$