



و کاربردهای آن (۴)

hashemi – moosavi@yahoo.com

حل : با توجه به قضیه ی کوچک فرما می توان نوشت :

$$J_{p; 2^{p-1}}^p \equiv 1$$

اشاره

قضیه ی کوچک فرما

اگر p عدد اول مفروض و $(a, p) = 1$ آن گاه:

$$a^{p-1} \equiv 1$$

نتیجه: اگر p عدد اول مفروض باشد، آن گاه:

$$a^p \equiv a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \gamma \in \mathbb{P} \text{ (مجموعه اعداد اول)} \\ (\gamma, \gamma) = 1 \end{array} \right. \xrightarrow[p=\gamma]{\text{(فرما)}} \gamma^{\gamma-1} \equiv 1 \pmod{\gamma};$$

$$2^6 \equiv 1 \xrightarrow{(\text{به توان } 14)} (2^6)^{14} \equiv 1$$

$$\gamma^{AF} \equiv 1; \quad \gamma^F \times \gamma^{AF} \equiv \gamma^F; \quad \gamma^{AV} \equiv \Lambda \equiv 1; \quad \gamma^{AV} \equiv 1$$

مثال ۴. باقی مانده‌ی تقسیم 87^{128} بر ۱۹ را بیابید.

حل:

$$87^{19} \equiv 11; 87^{128} \equiv 11^{128} = 11^{18 \times 7} \times 11^2 = (11^7)^{18} \times 11^2$$

$$(11^7)^{19-1} \times 11^2 \equiv 1 \times 7 = 7; 87^{128} \equiv 7 \quad (\text{فرما})$$

مثال ۵. عدد $(v^{15} + k)$ مضرب ۱۷ است. کوچک‌ترین عدد

طبیعی k را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases} 17 \in \mathbb{P} & (\text{فرما}) \\ (v, 17) = 1 \end{cases} \longrightarrow v^{17-1} \equiv 1; v^{16} \equiv 1$$

$$v^{16} \equiv 1 + 2(17) = 35 \Rightarrow v^{15} \equiv 5 \equiv 5 - 17 = -12;$$

$$v^{15} + 12 \equiv 0; k = 12$$

مثال ۶. اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد، ثابت کنید که عدد

$$N = p^{12} - 1 \text{ بر } 105 \text{ بخش پذیر است.}$$

حل: با توجه به برابری $105 = 3 \times 5 \times 7$ و قضیه‌ی کوچک فرما

(p عدد اول بزرگ‌تر از ۷):

$$(p, 3) = 1; p^{3-1} \equiv 1; p^2 \equiv 1; (p^2)^3 \equiv 1; p^{12} \equiv 1$$

$$(p, 5) = 1; p^{5-1} \equiv 1; p^4 \equiv 1; (p^4)^3 \equiv 1; p^{12} \equiv 1$$

$$(p, 7) = 1; p^{7-1} \equiv 1; p^6 \equiv 1; (p^6)^2 \equiv 1; p^{12} \equiv 1$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های اخیر، بدیهی است که ۳، ۵ و ۷ عدد

$N = p^{12} - 1$ را می‌شمارند. بنابراین، حاصل ضرب این سه عدد

$$\text{نیز } N \text{ را می‌شمارد: } 3 \times 5 \times 7 = 105 \mid N = p^{12} - 1.$$

مثال ۷. باقی مانده‌ی عدد $(29^{20} + 31^{28})^{1287}$ بر ۸۹۹ را

تعیین کنید.

حل: در حالت کلی نشان می‌دهیم که اگر p و q دو عدد اول

متمايز و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

$$p^{m(q-1)} + q^{n(p-1)} \equiv 1$$

$$\begin{cases} \text{اول } p, (p, q) = 1; p^{q-1} \equiv 1; q^{p-1} \equiv 1 \longrightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \\ \text{اول } q, (p, q) = 1; q^{p-1} \equiv 1; p^{q-1} \equiv 1 \longrightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \end{cases}$$

از رابطه‌های هم‌نهشتی اخیر:

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1$$

هم چنین:

مثال ۲. باقی مانده‌ی تقسیم $5^{12} + 6^{12} + \dots + 17^{12}$ بر N را بر

بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما:

$$\begin{cases} 13 \in \mathbb{P} & (\text{فرما}) \\ (5, 13) = 1 \end{cases} \longrightarrow 5^{13-1} \equiv 1; 5^{12} \equiv 1$$

چون ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ و هم چنین ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲

$$N \equiv 346(21) + 12 \equiv (6-4+3)(10) + 1 = 51$$

$$N \equiv 51 \equiv 7; N \equiv 7$$

مثال ۱۰. باقی مانده ی تقسیم عدد زیر را بر ۴۱ بیابید.

$$N = 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + \dots + 2^{1287}$$

حل: با توجه به این که ۴۱ عدد اول است و $(2, 41) = 1$ ، از

قضیه ی کوچک فرما، داریم:

$$2^{41-1} \equiv 1; 2^{40} \equiv 1; 2^{40k} \equiv 1$$

با توجه به این که اگر $n \geq 5$ باشد، آن گاه $n!$ مضرب ۴۰ خواهد

بود:

$$n \geq 5: 2^{n!} = 2^{40k} \equiv 1$$

بنابراین:

$$N = 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + \dots + 2^{1287}$$

$$\equiv 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{1287-4=1283} \equiv 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 1283$$

$$N \equiv 2 + 4 + 64 + 16 + 1283 = 1469 \equiv 34; N \equiv 34$$

$$*(2^7 = 128 \equiv 5; (2^7)^2 \equiv 5^2; 2^{14} \equiv 125 \equiv 2; 2^{14} \equiv 16)$$

مثال ۱۱. اگر باقی مانده ی تقسیم عدد $x51y$ بر ۷۲ برابر صفر

شود، تقسیم $N = (y^x + x^y)^{1287}$ بر $N = (y^x + x^y)$ چه باقی مانده ای خواهد داشت؟

حل. بدیهی است که با توجه به $72 = 8 \times 9$ ، عدد $x51y$ بر ۸ و ۹

بخش پذیر است؛ پس:

$$\begin{cases} \overline{x51y} \equiv 0; \overline{51y} \equiv 0; 510 + y \equiv 0 \\ \overline{x51y} \equiv 0; x + 5 + 1 + y \equiv 0; x + y + 6 \equiv 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق مقادیر x و y به دست می آید:

$$510 + y \equiv 0; y \equiv -510; y \equiv -510 + 8(64) = 2; y \equiv 2$$

چون y یک رقمی است، بنابراین از هم نهشتی بالا جواب $y = 2$

حاصل می شود.

$$x + y + 6 \equiv 0; x + 2 + 6 \equiv 0; x \equiv -8; x \equiv -8 + 9 = 1; x \equiv 1$$

چون x یک رقمی است، بنابراین از هم نهشتی بالا جواب $x = 1$

حاصل می شود.

$$N = (2^1 + 1^2)^{1287} = 3^{1287}; 3^4 = 81 \equiv 1; (3^4)^{321} \equiv 1$$

$$3^{1287} \equiv 1; 3^2 \times 3^{1285} \equiv 3^2; 3^{1287} \equiv 27; N \equiv 27$$

مثال ۱۲. اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید که

$$M = \left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^2}{3} + \frac{7n}{15} \right)^{2009}$$

نیز عددی صحیح است.

$$\begin{cases} (p, q) = 1; p^{q-1} \equiv 1; p^{m(q-1)} \equiv 1, q^{p-1} \equiv 1; q^{n(p-1)} \equiv 1 \\ (p, q) = 1; q^{p-1} \equiv 1; p^{n(q-1)} \equiv 1, p^{q-1} \equiv 1; p^{m(q-1)} \equiv 1 \end{cases}$$

از جمع هم نهشتی ها:

$$p^{m(q-1)} + q^{n(p-1)} \equiv 1, p^{m(q-1)} + q^{n(p-1)} \equiv 1$$

از دو هم نهشتی فوق:

$$p^{m(q-1)} + q^{n(p-1)} \equiv 1, p^{m(q-1)} + q^{n(p-1)} \equiv 1$$

$$p = 29, q = 31: (29^{30} + 31^{28})^{1287} \equiv 1 (899 = 29 \times 31)$$

مثال ۸. باقی مانده ی تقسیم عدد زیر را بر ۱۵ تعیین کنید.

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1288}$$

حل:

از هم نهشتی $2^2 \equiv 1$ نتایج زیر حاصل می شود:

$$\underbrace{2^{2n} \equiv 1}_{\text{باقی مانده ۱}} \xrightarrow{(\times 2)} \underbrace{2^{2n+1} \equiv 2}_{\text{باقی مانده ۲}} \xrightarrow{(\times 2)} \underbrace{2^{2n+2} \equiv 4}_{\text{باقی مانده ۴}} \xrightarrow{(\times 2)} \underbrace{2^{2n+3} \equiv 8}_{\text{باقی مانده ۸}}$$

بنابراین:

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1285} + 2^{1286} + 2^{1287} + 2^{1288}$$

$$N \equiv 2 + 4 + 8 + 1 + \dots + 2 + 4 + 8 + 1 = \frac{1288}{4} (2 + 4 + 8 + 1) = 347 \times 15$$

دستی باقی مانده های دوره ی آخر / دستی باقی مانده های دوره ی اول

پس:

$$N \equiv 347 \times 15 \equiv 0$$

بنابراین، N بر ۱۵ بخش پذیر است:

$$N \equiv 0$$

مثال ۹. باقی مانده ی تقسیم عدد

$$N = 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + \dots + 2^{1287}$$

حل: از هم نهشتی بدیهی $2^{21} \equiv 4$ به نتایج زیر می رسیم:

$$(2^2)^{21} \equiv 5^2, (2^2)^{21} \equiv 5^2, (2^2)^{21} \equiv 5^2$$

$$2^{42} \equiv 25 \equiv 3, (2^2)^{21} \equiv 3^2; 2^{63} \equiv 9, (2^2)^{21} \equiv 9^2;$$

$$2^{84} \equiv 81 \equiv 4, \dots$$

از تقسیم متوالی جمله ها بر ۱۱ به ترتیب باقی مانده های تکراری

۴، ۵، ۳ و ۹ حاصل می شوند؛ پس:

$$N = 2^{21} + 2^{22} + 2^{23} + 2^{24} + \dots + 2^{1287} \equiv$$

$$\underbrace{(4+5+3+9)}_{12} + \dots + \underbrace{(4+5+3)}_{12}$$

تعداد ۳۴۶ پراکنش چهار جمله ای

حل : با توجه به برابری زیر :

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^7}{7} + \frac{7n}{15} = \frac{3n^5 + 5n^7 + 7n}{15}$$

کافی است ، نشان دهیم برای هر n داریم :

$$15 \mid (3n^5 + 5n^7 + 7n)$$

و یا برای هر n ، عدد $3n^5 + 5n^7 + 7n$ بر 5 و 3 بخش پذیر است . هم نهشتی های زیر بدیهی هستند :

$$3n^5 + 5n^7 + 7n \equiv 3n^5 + n \equiv 2n^5 - 2n = 2(n^5 - n) \equiv 0 \quad (\text{فرما})$$

$$3n^5 + 5n^7 + 7n \equiv 3n^5 + 2n \equiv 3n^5 - 2n = 3(n^5 - n) \equiv 0 \quad (\text{فرما})$$

بنابراین ، طبق قضیه ی فرما ($a^p \equiv a$) ; $(a, p) = 1$ نتیجه می شود که M عددی صحیح است .

مثال ۱۳ . با استفاده از قضیه ی کوچک فرما ، معادله ی هم نهشتی زیر را حل کنید :

$$(x^{25} + 22x^{19} + 28x^7)^{1288} \equiv 0$$

حل : با توجه به قضیه ی فرما ($x^{17} \equiv x$) ، هم نهشتی های زیر

برای هر x بدیهی است :

$$x^{17} \equiv x ; x^{24} \equiv x^7 ; x^{25} \equiv x^8$$

$$22x^{19} \equiv 5x^{19} \equiv 5x^2 \cdot x^{17} \equiv 5x^2 \cdot x = 5x^3 , 28x^7 \equiv 11x^7$$

بنابراین :

$$(x^{25} + 22x^{19} + 28x^7)^{1288} \equiv (x^8 + 5x^3 + 11x^7)^{1288} =$$

$$(17x^7)^{1288} \equiv 0 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

معادله ی هم نهشتی ، در واقع یک اتحاد همیشه برقرار است و به ازای هر x ، صحیح و درست است . روش دیگر این است که معادل عبارت را بر $(x^{17} - x)$ تقسیم کنیم :

$$(x^{25} + x^{19} + x^7)^{1288} \equiv [(x^{17} - x)(x^{8} + 6x^2 + 17x^7)]^{1288}$$

مثال ۱۴ . با استفاده از قضیه ی کوچک فرما نشان دهید که برای

هر عدد اول $p > 5$ ، بی نهایت عدد به صورت $N = 999 \dots 999$ وجود دارند که بر p بخش پذیرند .

حل : در واقع باید نشان دهیم ، هم نهشتی $1 \equiv 10^p$ برای بی نهایت عدد مثبت صحیح برقرار است .

از آن جا که $p > 5$ و $(p, 10) = 1$ و بنابر قضیه ی کوچک فرما ،

$10^{p-1} \equiv 1$ ، پس هر عدد صحیح n که مضربی از $(p-1)$ است ، جواب مسئله خواهد بود : $n = k(p-1)$

مثال ۱۵ . اگر p عددی اول باشد و $x^p + y^p = z^p$ ، توسط

قضیه ی کوچک فرما ثابت کنید که p عبارت $(x + y - z)$ را می شمارد .

حل : بر طبق قضیه ی فرما ($x^p \equiv x$) ، بلافاصله نتیجه می شود :

$$x^p + y^p - z^p \equiv x + y - z$$

بنابراین ، اگر $x^p + y^p \equiv z^p$ باشد ، آن گاه :

$$x + y - z \equiv 0$$

$x^p \equiv x$ ، $y^p \equiv y$ و $z^p \equiv z$ می توان نوشت :

$$x^p + y^p - z^p \equiv x + y - z$$

از فرض اول بودن p و برابری $x^p + y^p = z^p$:

$$\underbrace{x^p + y^p - z^p}_{z^p} \equiv z^p - z^p = 0$$

بنابراین :

$$x + y - z \equiv 0 \quad (p \mid (x + y - z))$$

تعیین رقم یکان عدد

برای تعیین رقم یکان هر عد مانند N ، کافی است باقی مانده ی تقسیم آن عدد را بر 10 تعیین کنیم :

$$N \equiv r \pmod{10}$$

نتیجه : اگر $n \geq 5$ باشد ، آن گاه : $n! \equiv 0$

در واقع اگر $n \geq 5$ ، رقم یکان عدد $n!$ برابر صفر است .

مثال ۱۶ . رقم یکان عدد $1! + 2! + 3! + \dots + 1388!$ را

تعیین کنید .

حل : کافی است باقی مانده ی تقسیم N بر 10 را تعیین کنیم که در واقع همان رقم یکان است :

$$N = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 1388! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$N \equiv 33 \equiv 3 \quad \text{و} \quad N \equiv 3 \pmod{10} \quad (\text{رقم یکان } N)$$

مثال ۱۷ . رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید .

$$N = 1389^1 + 1389^2 + 1389^3 + \dots + 1389^{1389}$$

حل : کافی است باقی مانده ی تقسیم عدد N را بر 10 تعیین کنیم .

$$N = 1389^1 + 1389^2 + 1389^3 + \dots + 1389^{1389} \equiv (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{1389}$$

$$N \equiv 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 \equiv 9 \quad N \equiv 9$$

بنابراین ، رقم یکان عدد N برابر ۹ است .

تعیین رقم یکان اعداد توان دار

برای تعیین رقم یکان اعداد توان دار ، کافی است توان عدد را بر

$$M = 1387^{11} + 1387^{14} + 1387^{17} + \dots + 1387^{1388}$$

حل: تعداد جملات عدد M برابر $(\frac{1388-11}{3} + 1)$ یا ۴۶۰

است و با توجه به هم نهشتی $1387^k \equiv 7^k$ ، برای تعیین رقم یکان M می توان رقم یکان مجموع زیر را تعیین کرد:

$$M \equiv 7^{11} + 7^{14} + 7^{17} + \dots + 7^{1388}$$

از طرف دیگر، با توجه به هم نهشتی $7^3 \equiv 3$ یا $7^n \equiv 3(7^{n-1})$ ، می توان نوشت $(7^{11} \equiv 3)$:

$$M \equiv \underbrace{(7^{11} + 7^{14} + 7^{17} + \dots + 7^{1388})}_{\text{برابر چهار جمله ای}} \equiv 115$$

$$M \equiv 115 \times 2 \equiv 0 \pmod{10} \quad (\text{رقم یکان } M)$$

مثال ۲۱. رقم یکان عدد

$$N = (1!)^1 + (2!)^2 + \dots + (2008!)^{2008}$$

حل: با توجه به این نکته که باقی مانده ی تقسیم عدد $n!$ برای هر $n \geq 5$ بر ۱۰ برابر صفر است:

$$N \equiv 1 + 2^2 + 6^2 + 24^2 + \dots + 0 + \dots + 0$$

$$N \equiv 1 + 4 + 6 + 6 = 17 \equiv 7 \pmod{10} \quad (\text{رقم یکان } N)$$

مثال ۲۲. رقم یکان عدد

$$N = (1388)^{2008!} + (1389)^{2009!}$$

حل: اعداد ۲۰۰۸! و ۲۰۰۹! بر ۴ بخش پذیرند. بنابراین به جای هریک ۴ قرار می دهیم:

$$N \equiv (-2)^4 + (-1)^4 = 16 + 1 = 17 \equiv 7 \pmod{10} \quad (\text{رقم یکان } N)$$

مثال ۲۳. رقم یکان عدد

$$M = (1387)^{88k+3} + (2007)^{44k+2}$$

حل:

$$M \equiv 7^{88k+3} + 7^{44k+2} \equiv 7^3 + 7^2 \equiv 7(-1) + (-1)^2 \pmod{10} \quad (\text{رقم یکان } M)$$

$$M \equiv -7 + 1 = -6 \equiv 4 \pmod{10}; \quad M \equiv 4$$

مثال ۲۴. رقم یکان عدد $N = 1387^{77^k}$ را بیابید.

حل: رقم یکان N معادل رقم یکان M است؛ بنابراین:

$$7^7 \equiv 1^7 = 1; \quad 7^8 \equiv 2 + 1; \quad 7^9 \equiv 7^{2+1} = (7^2)^1 \times 7 = 49^1 \times 7$$

$$7^{7^k} \equiv (1)^1 (3) = 3; \quad 7^{7^k} = 4k + 3; \quad M = 7^{4k+3}$$

$$M \equiv 7^3 = 7^2 \times 7 \equiv (-1)(-3) = 3; \quad M \equiv 3; \quad N \equiv 3$$

(رقم یکان N)

۴ تقسیم کنیم که در این صورت دو حالت برای باقی مانده پیش می آید. حالت اول این است که باقی مانده صفر شود. در این حالت به جای توان، عدد ۴ را جایگزین می کنیم. حالت دوم باقی مانده ی غیر صفر است که در این حالت به جای توان عدد، همان عدد باقی مانده ی غیر صفر را قرار می دهیم.

$$a^n \equiv \begin{cases} a^4 & \text{بر } n \text{ بخش پذیر باشد} \\ a^r & \text{بر } n \text{ باقی مانده ی } r \text{ ناقص } r \text{ دهد} \end{cases}$$

نکته: اگر رقم یکان عددی یکی از اعداد ۱ یا ۵ یا ۶ باشد، تمام توان های طبیعی آن عدد نیز دارای همان رقم یکان خواهند بود:

$$a \equiv 0; \quad a^n \equiv 0; \quad a \equiv 1; \quad a^n \equiv 1$$

$$a \equiv 5; \quad a^n \equiv 5; \quad a \equiv 6; \quad a^n \equiv 6$$

برای تعیین رقم یکان یک عدد، از هم نهشتی های زیر نیز می توان استفاده کرد:

$$a \equiv 3; \quad a^{2n} \equiv 1, \quad a \equiv 4 \text{ یا } 8; \quad a^{4n} \equiv 6$$

$$a \equiv 9; \quad a^n \equiv \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ 9 & \text{فرد } n \end{cases}; \quad a \equiv 4; \quad a^n \equiv \begin{cases} 4 & \text{فرد } n \\ 6 & \text{زوج } n \end{cases}$$

مثال ۱۸. رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید.

$$M = 101^{1389} + 102^{1389} + \dots + 989^{1389}$$

حل: باقی مانده ی تقسیم عدد ۱۳۸۹ بر ۴ برابر ۱ است. پس:

$$M \equiv \underbrace{101^1 + 102^1 + \dots + 989^1}_{\text{تعداد جملات } = 889} = \frac{889}{2} (2 \times 101 + 888(1))$$

$$M \equiv \frac{889}{2} \times 1090 = 889 \times 545 \equiv 9 \times 5 = 45 \equiv 5 \pmod{10}; \quad M \equiv 5$$

(رقم یکان M)

مثال ۱۹. رقم یکان عدد زیر را بیابید.

$$N = (1388)^{2!} + (1388)^{4!} + \dots + (1388)^{1000!}$$

حل: با توجه به $a^n \equiv a^4$ (بر n بخش پذیر)، می توان نوشت:

$$N \equiv \underbrace{(-2)^2 + (-2)^4 + (-2)^6 + \dots + (-2)^{1000}}_{\text{۴۹۹ جمله}} =$$

$$2^2 + 499 \times 2^4 \equiv 4 + (-1)(-4)$$

$$N \equiv 8 \pmod{10} \quad (\text{رقم یکان } N)$$

مثال ۲۰. رقم یکان عدد M را بیابید.

مثال ۲۵. با فرض

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \dots + (1387!)^{1387}, \text{ رقم}$$

یکان $S = M^{MM}$ را بیابید.

حل:

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + (4!)^4 + \dots + (1387!)^{1387} \equiv 1 + 2^2 + 6^3 + 0 + 0 + \dots + 0;$$

$$M \equiv 1; M^M \equiv 1; M^M = 4k + 1$$

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \dots + (1387!)^{1387} \equiv 1 + 2^2 + 6^3 + 0 + 0 + \dots$$

$$M \equiv 1 + 4 + 6 + 6 = 17 \equiv 7; S = M^{M^M} \equiv 7^{4k+1} \equiv 7; S \equiv 7 \text{ (رقم یکان S)}$$

تمرین

۱. باقی مانده‌ی تقسیم عدد 4^{1001} بر 2003 را توسط قضیه‌ی کوچک فرما بیابید.

۲. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$M = (7^{12} + 8^{12} + 9^{12} + \dots + 19^{12})^{1289}$$

۳. باقی مانده‌ی تقسیم عبارت

$$N = (x^{2000} + y^{900} + z^{800})^{2009}$$

بر z و 11 بخش پذیر نباشند، چه عددی است؟

$$4. \text{ باقی مانده‌ی تقسیم عدد } M = (38^{88} + 87^{128})^{89}$$

۱۹ بیابید.

$$5. \text{ عدد } N = 7^{2008} + k \text{ مضرب } 17 \text{ است. کوچک ترین عدد}$$

طبیعی k را بیابید.

۶. اگر p عدد اول بزرگ تر از 7 باشد، ثابت کنید که عدد

$$M = p^{12} - 1 \text{ بر اعداد } 15, 21, 35 \text{ و } 105 \text{ بخش پذیر است.}$$

$$7. \text{ باقی مانده‌ی تقسیم عدد } N = (29^{30} + 31^{28} - 2)^{2009}$$

بر 899 بیابید.

$$8. \text{ باقی مانده‌ی تقسیم عدد } M = (5^{2010} + 7^{2012})^{2009}$$

بر 35 تعیین کنید.

۹. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$N = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 4004^{2003}$$

2003 بیابید.

۱۰. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$M = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2009}$$

بر 8 بیابید.

۱۱. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}$$

روش.

۱۲. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$M = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2009} \text{ را بر } 11 \text{ بیابید.}$$

۱۳. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$N = 3^1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{2009} \text{ را بر } 13 \text{ بیابید.}$$

۱۴. باقی مانده‌ی تقسیم عدد

$$M = 2^{11} + 2^{21} + 2^{31} + 2^{41} + \dots + 2^{20091}$$

۱۵. اگر باقی مانده‌ی عدد $M = x51y$ را بر 72 برابر صفر

شود، باقی مانده‌ی عدد $N = (y^{x^{2009}} + x^y)^{1289}$ را بر 80 بیابید.

$$16. \text{ رقم یکان عدد } N = 1! + 2! + 3! + \dots + 2009! \text{ را تعیین}$$

کنید.}

$$17. \text{ رقم یکان عدد } M = (1 + 2 + 3 + \dots + 2009)! \text{ را بیابید.}$$

۱۸. رقم یکان عدد

$$N = (2009^1 + 2009^2 + 2009^3 + \dots + 2009^{2009})^{2009}$$

بیابید.

$$19. \text{ رقم یکان عدد } M = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2009}$$

بیابید.

۲۰. رقم یکان عدد

$$N = 10^{12009} + 10^{22009} + \dots + 989^{2009}$$

۲۱. رقم یکان عدد

$$M = (2008)^{2!} + (2008)^{4!} + \dots + (2008)^{1000!}$$

بیابید.

۲۲. رقم یکان عدد

$$N = (2007)^{1!} + (2007)^{14} + (2007)^{17} + \dots + (2007)^{2009}$$

را بیابید.

۲۳. رقم یکان عدد

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \dots + (1388!)^{1388}$$

۲۴. اگر داشته باشیم:

$$N = 2! + 4! + 6! + \dots + 2008!; M = 1! + 3! + 5! + \dots + 2009!$$

رقم یکان عدد $S = (M^N + N^M)^{1289}$ را تعیین کنید.

$$25. \text{ رقم یکان عدد } N = (2008)^{1288!} + (2009)^{1289!}$$

بیابید.

$$26. \text{ رقم یکان عدد } M = (2007)^{88k+2} + (1387)^{44k+2}$$

تعیین کنید.

$$27. \text{ رقم یکان عدد } N = 1387^{77} + 2007^{77}$$

۲۸. رقم یکان عدد $S = M^{MM}$ را با فرض

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + \dots + (2009!)^{1289}$$

۲۹. رقم سمت راست عدد

$$N = (1! + 3! + \dots + 2009!)(2! + 4! + \dots + 2008!)$$

۳۰. با استفاده از قضیه‌ی فرما، یک سری از جواب‌های عمومی

$$x^p + y^p = z^m \text{ را با فرض } (p, m) = 1 \text{ به دست آورید.}$$

(p اول است). (رجوع شود به رشد برهان ۵۴)

