

هم نهشتی و کاربردهای آن

(حل معادله های هم نهشتی و معادله های سیاله به کمک جدول H.M)

اشاره



در قسمت های قبل، به بسیاری از کاربردهای هم نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد بر این است که روش حل معادله های هم نهشتی و معادله های سیاله را توسط جدول H.M نشان دهیم و کاربرد این جدول را در پیدا کردن وارون ضربی یک عدد در هم نهشتی ارائه دهیم. در انتهای این قسمت نیز تمرین هایی نظیر مسئله های حل شده در متن طرح شده است که می توانید با دیدن مثال ها، آن ها را حل کنید. کاربردهای هم نهشتی در جبر، آنالیز، نظریه ی اعداد و دیگر شاخه های ریاضیات بر هیچ کس پوشیده نیست و این موضوع مقالات فراوانی را طلب می کند. این مقاله به معرفی روش جدید جدول H.M اختصاص دارد.



حل معادله ی هم نهشتی^۱ توسط جدول (H.M)^۲

قرارداد: در معادله ی هم نهشتی

$$ax \equiv c \pmod{n} \quad (۱)$$

عدد n را سنج یا پیمان یا هنگ (mod)، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت هم نهشتی می نامیم. می دانیم، با فرض $(a, n) = 1$ و با توجه به معکوس ضربی a^{-1} یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در هم نهشتی) داریم:

$$a^{-1}.a \equiv 1$$

معادله ی ۱ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x \equiv a^{-1}.c$$

$$x = kn + a^{-1}.c \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین، برای حل معادله ی ۱، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم. می دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادله ی هم نهشتی زیر محاسبه می شود:

$$x_1 = a^{-1}; \quad ax_1 \equiv 1 \pmod{n} \quad (۲)$$

در معادله ی ۲، اگر $a > n$ و r_1 باقی مانده ی حاصل تقسیم

$a: n$ باشد، می توان نوشت:

$$r_1 x_1 \equiv 1 \pmod{n} \quad (۳)$$

معادله ی هم نهشتی ۳ را می توان به صورت معادله ی سیاله زیر نوشت:

$$r_1 x_1 - n x_2 = 1;$$

$$n x_2 - r_1 x_1 = -1;$$

$$n x_2 \equiv -1 \pmod{r_1} \quad (۴)$$

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این که r_2 باقی مانده ی حاصل

تقسیم $n: r_1$ باشد، می توان نوشت:

$$r_2 x_2 \equiv -1 \pmod{r_1} \quad (۵)$$

مطابق مرحله ی پیش، معادله ی هم نهشتی ۵ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1 x_3 \equiv 1 \pmod{r_2} \quad (۶)$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله های پیش، به روش بازگشتی می توان x را حساب کرد (توجه: تمام

عملیات را توسط یک جدول چهار سطری انجام می دهیم).

مثال ۱. معادله ی هم نهشتی زیر را حل کنید:

$$1999x \equiv 1357 \pmod{1378}$$

حل: با فرض $a=1999$ ، $n=1378$ ، $c=1357$ و با

توجه به $1=(1999, 1378)$ ، جواب معادله چنین است:

$$x = 1378k + 1357a^{-1} (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین، برای حل معادله کافی است معکوس (وارون

ضربی) عدد ۱۹۹۹ را از معادله ی زیر حساب کنیم:

$$1999x_1 \equiv 1 \pmod{1378} (x_1 = a^{-1})$$

باقی مانده ی تقسیم عدد ۱۹۹۹ بر ۱۳۷۸ برابر ۶۲۱ است.

بنابراین، با توجه به هم نهشتی:

$$1999 \equiv 621 \pmod{1378}$$

معادله ی مورد نظر را به صورت زیر می نویسیم:

$$621x_1 \equiv 1 \pmod{1378} \quad (1)$$

معادله ی ۱ را با وارد کردن مجهول جدید x_2 ، می توان به

صورت زیر نوشت:

$$1378x_2 \equiv -1 \pmod{621}$$

باقی مانده ی تقسیم ۱۳۷۸ بر ۶۲۱ برابر ۱۳۶ است.

بنابراین، با توجه به هم نهشتی:

$$1378 \equiv 136 \pmod{621}$$

معادله ی ۲ را به صورت زیر می نویسیم:

$$136x_2 \equiv -1 \pmod{621} \quad (2)$$

به همین ترتیب می توان نوشت:

$$621x_3 \equiv 1 \pmod{136}$$

$$(621 \equiv 77) \quad 77x_3 \equiv 1 \pmod{136} \quad (3)$$

$$136x_4 \equiv -1 \pmod{77} \quad (4)$$

$$77x_5 \equiv 1 \pmod{59} \quad (5)$$

$$59x_6 \equiv -1 \pmod{18} \quad (6)$$

$$18x_7 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(18 \equiv 3) \quad 3x_7 \equiv 1 \pmod{5} \quad (7)$$

$$5x_8 \equiv -1 \pmod{2} \quad (8)$$

$$2x_9 \equiv 1 \pmod{3} \quad (9)$$

بنابراین: $x_9 = 1$

بازگشت به مرحله های پیش، مقدار x را به روش بازگشتی محاسبه می کنیم:

$$x_8 = \frac{3x_9 - 1}{2} = \frac{3(1) - 1}{2} = 1$$

$$x_7 = \frac{5x_8 + 1}{3} = \frac{5(1) + 1}{3} = 2$$

$$x_6 = \frac{18x_7 - 1}{5} = \frac{18(2) - 1}{5} = 7$$

$$x_5 = \frac{59x_6 + 1}{18} = \frac{59(7) + 1}{18} = 23$$

$$x_4 = \frac{77x_5 - 1}{59} = \frac{77(23) - 1}{59} = 30$$

$$x_3 = \frac{136x_4 + 1}{77} = \frac{136(30) + 1}{77} = 53$$

$$x_2 = \frac{621x_3 - 1}{136} = \frac{621(53) - 1}{136} = 242$$

$$x_1 = \frac{1378x_2 + 1}{621} = \frac{1378(242) + 1}{621} = 537$$

پس، با توجه به $x_1 = a^{-1} = 537$ ، جواب های معادله

چنین است:

$$k \in \mathbb{Z}: x = 1378k + 1357(537) = 1378k + 728409$$

با توجه به هم نهشتی $1125 \equiv 728409 \pmod{1378}$ ، جواب اصلی

معادله $x = 1125$ و جواب عمومی معادله به ازای مقادیر

صحیح k چنین است: $x = 1378k + 1125$

اکنون تمام عملیات فوق را توسط جدول H.M انجام

می دهیم.

جدول (H.M)، چهار سطر دارد که پس از چهار مرحله

کامل می شوند:

$$1999x \equiv 1357 \pmod{1378}$$

$x \cdot n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱
$+a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	-۱
x_i	۵۳۷	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱	۱	-۱

در این مثال، چون $a = 1999 > n = 1378$ ، پس باید باقی مانده ی تقسیم $a:n$ را حساب کنیم و در دومین خانه ی سطر اول (از سمت چپ) کنار n (پیمانه) بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می شویم که برای حل هر معادله ی هم نهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a, n) = 1$ را بررسی کنیم. در معادله ی هم نهشتی $ax \equiv c$ ، اگر $(a, n) = d$ ، در این صورت معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش پذیر باشد ($d|c$).

بنابراین، برای بررسی شرط $(a, n) = 1$ ، ابتدا همیشه تقسیم های متوالی را به صورت زیر انجام می دهیم و باقی مانده های حاصل را به ترتیب در سطر اول جدول می نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان دهنده ی این است که شرط $(a, n) = 1$ برقرار است. و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر عددی بزرگ تر از یک باشد، آن عدد بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک a و n است.

مرحله ی ۱. تقسیم های متوالی را به صورت زیر انجام می دهیم و باقی مانده های حاصل را در سطر اول جدول درج می کنیم:

$$\begin{array}{r} 1999 \overline{) 1378} \quad 1 \quad \text{و} \quad 1378 \overline{) 621} \quad 2 \\ 1378 \quad \quad \quad 1242 \\ \hline 621 \quad \quad \quad 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 621 \overline{) 136} \quad 2 \quad \text{و} \quad 3 \overline{) 2} \quad 1 \\ 544 \quad \quad \quad 2 \\ \hline 77 \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

مرحله ی ۲. عدد ثابت هم نهشتی ها را که به طور متناوب ۱ و -۱ است، در سطر دوم جدول (سطر c_i) از سمت چپ به راست می نویسیم.

مرحله ی ۳. از اولین باقی مانده (۶۲۱) تا آخرین باقی مانده (۱) را بار دیگر در سطر سوم (سطر a_i) نظیر سطر اول (n_i) می نویسیم.

مرحله ی ۴. آخرین خانه ی سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت (۱ یا -۱) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اول با شرط $(a, n) = 1$ ، عدد ۱ ظاهر می شود و در نتیجه عمل تقسیم به پایان می رسد. برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به

شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکان ها) به این ترتیب عمل می کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$\frac{(1)3-1}{2} = 1, \quad \frac{1(5)+1}{3} = 2, \quad \frac{2(18)-1}{5} = 7, \\ \frac{7(59)+1}{18} = 23, \dots, *$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (۵۳۷) را در عدد ثابت هم نهشتی ضرب می کنیم:

$$\frac{*242(1378)+1}{621} = 537, \quad 537(1357) = 728709 \equiv 1125$$

به بیان دیگر، باقی مانده ی حاصل از تقسیم عدد $537(1357)$ یا 728709 بر 1378 ، جواب معادله ی هم نهشتی است:

$$x = 1125 \quad (\text{جواب اصلی معادله})$$

بدیهی است که جواب عمومی معادله به ازای مقادیر صحیح دل خواه k چنین است:

$$x = 1378k + 1125 \quad (\text{جواب عمومی معادله})$$

مثال ۲. معادله ی هم نهشتی زیر را حل کنید.

$$26x \equiv 17$$

حل: چون $a = 26 > n = 19$ ، ابتدا باقی مانده ی حاصل از تقسیم $26 \div 19$ را در سمت راست سنج ۱۹ می نویسیم. سپس تقسیم های متوالی را انجام می دهیم و باقی مانده های حاصل را در سطر اول جدول درج می کنیم:

$$(-8) \times 17 = -136 \equiv 16$$

$x n_i$	۱۹	۷	۵	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$+a_i$	۷	۵	۲	۱	
x_i	-۸	-۳	-۲	-۱	

با توجه به هم نهشتی بالا، جواب اصلی معادله چنین است:

$$x = 16$$

مثال ۳. وارون عدد ۱۹۹۹ به پیمانه ی ۱۹۸۰ را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسئله، معادله ی هم نهشتی زیر است:

$$1999x \equiv 1$$

چون $a = 1999 > n = 1980$ ، باقی مانده ی تقسیم $1999 \div 1980$ را در سمت راست پیمانه (۱۹۸۰) می نویسیم. سپس تقسیم های متوالی را انجام می دهیم.

مثال ۵. معادله‌ی هم نهشتی زیر را حل کنید:

$$441x \equiv 21$$

حل: با تقسیم‌های متوالی و درج باقی مانده‌های حاصل،

ابتدا (۴۴۱، ۲۷۳) را تعیین می‌کنیم:

xn_i	۲۷۳	۱۶۸	۱۰۵	۶۳	۴۲	۲۱	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	

معادله را به ۲۱ ساده می‌کنیم:

$$21x \equiv 1$$

در این جا، معادله را به کمک جدول H.M حل می‌کنیم.

xn_i	۱۳	۸	۵	۳	۲	۱	
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱		
$+a_i$	۸	۵	۳	۲	۱		
x_i	۵	۳	۲	۱			

با توجه به جدول، یک (۲۱ ≡ ۸) جواب اصلی معادله

$$x = 5$$

(از بی شمار جواب) چنین است:

مثال ۶. معادله‌ی هم نهشتی زیر را از نظر داشتن یا عدم

جواب بررسی کنید.

$$2680x \equiv 176$$

حل: ابتدا با تقسیم‌های متوالی و درج باقی مانده‌ها،

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۲۶۸۰ و ۳۹۵۳ را به

دست می‌آوریم.

xn_i	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	۶۷	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	

با توجه به جدول داریم: $(2680, 3953) = 67$.

چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش پذیر نیست،

معادله جواب ندارد.

مثال ۷. معادله‌ی هم نهشتی زیر را حل کنید.

$$1378x \equiv 7$$

حل: با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم:

$$(1378 \equiv 69)$$

xn_i	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	
$+a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	-۲۹	-۲۶	-۳	-۲	-۱		

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله مورد نظر است،

بنابراین کافی است عدد سنج (۱۹۸۰) را به عدد (۵۲۱) -

بفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

xn_i	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱	
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱		
$+a_i$	۱۹	۴	۳	۱		
x_i	-۵۲۱	-۵	-۱	-۱		

$$x = 1980 - 521 = 1459 \text{ (جواب)}$$

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانه‌ی ۱۹۸۰، عدد

۱۴۵۹ است.

مثال ۴. آیا معادله‌ی هم نهشتی زیر دارای جواب است؟ در

صورت وجود آن را بیابید.

$$1313x \equiv -26$$

حل: ابتدا حاصل (۱۳۱۳، ۱۰۲۷) را به دست می‌آوریم:

xn_i	۱۰۲۷	۲۸۶	۱۶۹	۱۱۷	۵۲	۱۳	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	

با تقسیم‌های متوالی و ثبت باقی مانده‌های حاصل،

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۳۱۳ و ۱۰۲۷ به دست

می‌آید. چون سطر اول جدول به صفر ختم شده است، عدد

پیش از آن (۱۳)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

مورد نظر است:

$$(1313, 1027) = 13$$

بنابراین، شرط وجود جواب برای معادله این است که عدد

ثابت معادله (۲۶) بر ۱۳ بخش پذیر باشد. چون

$(-26) = 13(-2)$ ، پس معادله دارای جواب است و برای تعیین

آن، معادله را به عدد ۱۳ ساده می‌کنیم:

$$101x \equiv -2$$

اکنون چون $(101, 79) = 1$ ، معادله را به کمک جدول H.M

$$(101 \equiv 22)$$

حل می‌کنیم:

xn_i	۷۹	۲۲	۱۳	۹	۴	۱	
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱		
$+a_i$	۲۲	۱۳	۹	۴	۱		
x_i	۱۸	۵	۳	۲	۱		

با توجه به جدول، یک جواب اصلی معادله (از بی شمار

جواب) چنین است:

$$x = 79 + 18(-2) = 79 - 36 = 43; \quad x = 43$$

یکی از جواب های معادله از بی شمار جواب چنین است :

$$x_1 = (-29)(7) = -203$$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین، ضریب

مثبتی از سنج را به این جواب می افزاییم :

$$x = 3(77) - 203 = 231 - 203 = 28 ; \boxed{x = 28 \text{ (جواب اصلی)}}$$

مثال ۸. معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانه ی ۴۱ را بیابید.

حل: این مسئله با هم نهشتی زیر معادل است :

$$34x \equiv 1 \pmod{41}$$

با تشکیل جدول H.M معادله را حل می کنیم : با توجه به

جدول، جواب $x_1 = -6$ به دست می آید که برای یافتن جواب

مثبت، کافی است عدد سنج را به آن بیفزاییم :

xn_i	۴۱	۳۴	۷	۶	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$+a_i$	۳۴	۷	۶	۱	
x_i	-۶	-۵	-۱	-۱	

$$x = 41 - 6 = 35 ; \boxed{x = 35}$$

بنابراین، معکوس عدد ۳۴ به پیمانه ی ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین. معادله های هم نهشتی زیر را حل کنید.

$$1) 79x \equiv 1$$

$$2) 1378x \equiv -9$$

$$3) 1999x \equiv 2000$$

حل معادله های سیاله خطی چند مجهولی به کمک جدول H.M

$$ax + by + cz + \dots = d$$

معادله ی سیاله ی دو مجهولی به صورت عمومی زیر را در

نظر می گیریم :

$$(a, b) = 1 ; ax + by = c \quad (1)$$

معادله ی ۱ را به صورت معادله ی هم نهشتی زیر

می نویسیم :

$$(x, y \in Z) ; ax \equiv c \pmod{b} \quad (2)$$

اینک معادله ی ۲ را از طریق جدول H.M حل و از آن جا

مقدار x را تعیین می کنیم. سپس از رابطه ی $y = \frac{c-ax}{b}$

مقدار y را نیز به دست می آوریم.

مثال ۱. معادله ی سیال زیر را حل کنید.

$$25x - 17y = 3 \quad (1)$$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله ی هم نهشتی زیر

می نویسیم :

$$25x \equiv 3 \pmod{17} \quad (2)$$

حال در این جا، معادله ی هم نهشتی ۲ را توسط جدول H.M

حل می کنیم :

xn_i	۱۷	۸	۱
$+c_i$	۱	-۱	
$+a_i$	۸	۱	
x_i	-۲	-۱	

$$x_1 = 3(-2) = -6$$

$$x = 17 - 6 = 11$$

$$x = 11 ; y = 16$$

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادله ی

۱، می توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم. زیرا اگر

$\alpha, \beta \in Z$ یک جواب اختصاصی معادله باشد، در این صورت :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases}$$

با فرض $(a, b) = 1$ ، از تفاضل دو معادله ی دستگاه خواهیم

داشت :

$$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

برای این که $y \in Z$ ، لازم است داشته باشیم :

$$\frac{x - \alpha}{b} = t \in Z ; x = \alpha + bt$$

بنابراین، با فرض $t \in Z$ ، جواب های معادله ی ۱ از

معادله های زیر به دست می آید :

$$x = \alpha + bt , y = \beta - at \quad (3)$$

بنابر معادله های ۳، جواب عمومی معادله ی

$$25x - 17y = 3 \text{، چنین است :}$$

$$x = 11 + (-17)t = 11 - 17t , y = 16 - 25t \quad (t \in Z)$$

مثال ۲. معادله ی سیاله ی زیر را حل کنید :

$$1340x - 3953y = 469$$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله ی هم نهشتی زیر

می نویسیم :

$$1340x \equiv 469 \pmod{3953} \quad (1)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$7 + 11 + 26z \leq 130; z \leq 4$$

پس می توان نوشت:

$$z_1 = 1: 7x_1 + 11y_1 = 104; 7x_1 \equiv 104 \quad (2)$$

با تشکیل جدول H.M، خواهیم داشت:

$$x_1 = (-3)(104) = -312$$

$x n_i$	11	7	4	3	1
$+c_i$	1	-1	1	-1	
$+a_i$	7	4	3	1	
x_i	-3	-2	-1	-1	

با توجه به هم نهشتی زیر:

$$-312 \equiv 7$$

مقادیر x_1 و y_1 چنین است:

$$x_1 = 7 \text{ و } y_1 = 5$$

به همین ترتیب:

$$z_2 = 2: 7x_2 + 11y_2 = 78; 7x_2 \equiv 78 \quad (3)$$

در این معادله ی هم نهشتی، ضریب مجهول x_2 برابر ۷ و پیمانه ی هم نهشتی برابر ۱۱ مطابق با هم نهشتی ۲ است. بنابراین، جواب معادله ی ۳ با توجه به جدول H.M اخیر چنین است:

$$x_2 = (-3)(78) = -234 \equiv 8, y_2 = 2$$

معادله ی ۱ به ازای $z_2 = 3$ و $z_2 = 4$ ، جواب صحیح ندارد. پس معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی $(7, 5, 1)$ و $(8, 2, 2)$ است که می توان با استفاده از این جواب های اختصاصی، جواب های عمومی معادله را نیز به دست آورد.

حال باید حاصل $(3953 \text{ و } 1340)$ را به دست آوریم:

$x n_i$	3953	1340	1273	67	0
$+c_i$	1	-1	1	-1	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ هستند:

$$(1340, 3953) = 67$$

از طرف دیگر، چون $67 \div 67 = 1$ ، بنابراین معادله ی ۱ را می توان به ۶۷ ساده کرد:

$$20x \equiv 7 \quad (2)$$

در این جا، برای حل معادله ی ۲، جدول H.M را تشکیل می دهیم:

$x n_i$	59	20	19	1
$+c_i$	1	-1	1	
$+a_i$	20	19	1	
x_i	3	1	1	

با توجه به جدول می توان نوشت:

$$x = 3 \times 7 = 21$$

با داشتن مقدار x ، می توان مقدار y را محاسبه کرد:

$$y = \frac{20x - 7}{59} = \frac{20(21) - 7}{59} = \frac{413}{59} = 7$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x = 21 - 59t, y = 7 - 20t$$

مثال: جواب های صحیح و مثبت معادله ی سیاله ی زیر را به دست آورید:

$$7x + 11y + 26z = 130 \quad (1)$$

حل: بزرگ ترین ضریب مجهول ها، ضریب z است.

تمرین

۱. با فرض $d = (399, 589)$ ، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادله ی زیر برقرار باشد:

$$399r + 589s = d$$

$$\text{الف) } 7x + 5y = 19$$

$$\text{ب) } 10x + 86y = 500$$

$$\text{ج) } 4x + 3y - 5z = 2$$

۲. معادله های سیاله ی زیر را حل کنید.



۱. سازگاری، موافقت و تطبیق یک شیء با شیء دیگر (Congruence)

۲. این نام گذاری به دو منظور است: یکی مخفف (Hashemi Moosavi)، نام مبتکر آن و دیگر روش عمل جدول به صورت H.M.