

کاربردهای آن

قسط ۲

اشاره

در قسمت اول، با هم نهشتی و تعریف‌ها، روابط و تعدادی از قوانین و مسأله‌های مربوط به آن آشنا شدیم. در این قسمت می‌کشیم، ابتدا به برخی دیگر از مسأله‌های طرح شده در رابطه با موضوع پاسخ دهیم. سپس به ارایه‌ی کاربردهای هم نهشتی در سطوح گوناگون می‌پردازیم.

۹. باقی مانده ی تقسیم عدد زیر را با فرض $n \geq 5$ بر ۴۸ را

بیایید .

$$N = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

حل: می دانیم $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$ ، پس :

$$1! \equiv 1, 2! \equiv 2, 3! \equiv 6, 4! \equiv 24, 5! \equiv 24, 6! \equiv 0.$$

با فرض $n > 5$ ، خواهیم داشت:

$$n > 0 : n! \equiv 0 \pmod{p}$$

بنابراین، با فرض $n \geq 5$ ، می‌توان نوشت:

$$N = 1! + 2! + 3! + \dots + n! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots + 0 = 57$$

$$N \equiv 57 \equiv 9 \Rightarrow N \equiv 9 \pmod{9} ; r = 9 \text{ (باقی مانده ی تقسیم } N \text{ بر } 9)$$

۱۰. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت
 $M = 5^{2n} \times 9^{n+1} + 2^{1 \cdot n+2}$ بر ۱۷ بخش پذیر است.
 حل:

$$25^{17} \equiv -2; (25)^{2n} \equiv (-2)^{2n};$$

$$2^{1 \cdot n} \times 2^2 \equiv (-2)^{2n} \times 2^2 = 2^{2n} \times 8$$

$$2^{1 \cdot n+2} \equiv 8 \times 2^{2n}, \quad 5^{2n} \times 9^{n+1} \equiv 15^{2n} \times 9$$

$$\equiv (-2)^{2n} \times 9 = 2^{2n} \times 9$$

از جمع دو رابطه ی اخیر:

$$2^{1 \cdot n+2} + 5^{2n} \times 9^{n+1} \equiv 8 \times 2^{2n} + 9 \times 2^{2n} = 17 \times 2^{2n} \equiv 0;$$

$$M = 5^{2n} \times 9^{n+1} + 2^{1 \cdot n+2} \equiv 0.$$

۱۱. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت
 $N = 4^{2n} + 18n - 1$ بر ۹ بخش پذیر است.
 حل:

$$4^{2n} = (4^2)^n = (16)^n \equiv (1)^n = 1; \quad 4^{2n} \equiv 1, \quad 18n \equiv 0.$$

از جمع دو رابطه ی اخیر:

$$4^{2n} + 18n \equiv 1 + 0; \quad 4^{2n} + 18n \equiv 1; \quad N = 4^{2n} + 18n - 1 \equiv 0.$$

۱۲. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت
 $S = 7^{6n+2} + 7^{2n+2} - 12$ بر ۱۹ بخش پذیر است.
 حل:

$$7^2 = 49 \equiv 1; \quad (7^2)^{2n} \times 7^2 \equiv 1; \quad 7^{6n+2} \equiv 1,$$

$$7^{2n+2} \equiv 7^2 \equiv 1; \quad 7^{2n+2} \equiv 1$$

از جمع دو رابطه ی اخیر:

$$7^{6n+2} + 7^{2n+2} \equiv 1 + 1; \quad S = 7^{6n+2} + 7^{2n+2} - 12 \equiv 0.$$

۱۳. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $6^{2n-1} + 7$ بر ۴۳ بخش پذیر است.
 حل:

$$6^2 = 36 \equiv 1; \quad 6^{2n} \equiv 1, \quad 6^{2n-1} + 7 = 6^{2n-2} \times 6^2 + 7,$$

$$(6^2)^{n-1} \equiv 1; \quad 6^{2n-2} \equiv 1, \quad 6^{2n-1} + 7 \equiv (1)6^2 + 7 = 43;$$

$$6^{2n-1} + 7 \equiv 0.$$

۱۴. ثابت کنید به ازای هر مقدار طبیعی n و اعداد صحیح a و b داریم:

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n$$

حل: با توجه به بسط دو جمله ای:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n \quad (1)$$

از برابری ۱ نتیجه می شود:

$$(a+b)^n - a^n - b^n = kab \quad (2)$$

برابری ۲ را می توان به صورت هم نهشتی نشان داد:

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n$$

۱۵. اگر $a \equiv b$ و $m|n$ ، آن گاه $a^m \equiv b^m$.

حل: با توجه به فرض مسأله، یعنی $a \equiv b$ ، می توان نوشت:

$$n|(a-b)$$

از طرفی چون $m|n$ ، پس با توجه به خاصیت تعدی می توان نوشت:

$$m|(a-b); \quad a^m \equiv b^m$$

۱۶. باقی مانده ی تقسیم عدد زیر بر ۷ را بیابید.

$$N = 3^{557} + 4^{557} + 7^{557} + 77^{557} + 777^{557}$$

حل: هم نهشتی های زیر واضح اند:

$$7^{557} \equiv 0, \quad 77^{557} \equiv 0, \quad 777^{557} \equiv 0.$$

$$3^{557} + 4^{557} = (3+4)(3^{556} - 3^{555} \times 4 + \dots + 4^{556}) = 7k;$$

$$3^{557} + 4^{557} \equiv 0.$$

از جمع هم نهشتی های اخیر خواهیم داشت:

$$N \equiv 3^{557} + 4^{557} + 7^{557} + 77^{557} + 777^{557} \equiv 0.$$

(باقی مانده ی تقسیم صفر است.)

۱۷. نشان دهید $k = 5^n - 3^n - 2^n$ بر ۶ بخش پذیر است.

حل: با توجه به رابطه ی $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$ و فرض $a = 3$ و $b = 2$ ، خواهیم داشت:

$$(3+2)^n \equiv 3^n + 2^n; \quad 5^n \equiv 3^n + 2^n$$

پس:

$$k = 5^n - 3^n - 2^n \equiv 0.$$

۱۸. ثابت کنید $N = m^n - m^{n-1} - m + 1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی m و n بر $(m-1)^2$ بخش پذیر است.

حل:

$$N = m^n - m^{n-1} - m + 1 = m^{n-1}(m-1) - (m-1)$$

$$= (m-1)(m^{n-1} - 1)$$

از طرف دیگر:

$$4^2 = 64 = 63 + 1 = 7(9) + 1 \equiv 1$$

پس:

$$(4^2)^{4^7} \times 4^2 = 4^{142} \equiv 16 = 9 + 7 \equiv 7$$

بنابراین:

$$4^{142n} \equiv 7^n; 4^{142n} - 7^n \equiv 0$$

در نتیجه، باقی مانده‌ی تقسیم $4^{142n} - 7^n$ ، به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹، برابر صفر است.

۲۲. ثابت کنید عدد $5 - 17 \times 2^{39} + 2^{76}$ بر ۲۱ بخش پذیر است.

حل: با توجه به برابری $64 = 63 + 1$ ، خواهیم داشت:

$$2^6 = 3(21) + 1 \equiv 1; 2^{36} \equiv 1; 2^{38} \equiv 4 \equiv -17$$

پس:

$$(2^{38})^2 \equiv (-17)^2 = 289 = 13(21) + 16 \equiv 16$$

بنابراین:

$$2^{76} + 17 \times 2^{39} - 5 \equiv 16 + 17 \times 2^2 - 5$$

$$= 16 + 136 - 5 = 147 = 7(21) \equiv 0$$

۲۳. ثابت کنید عدد $5^{201} + 2^{104} + 2^{101}$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

حل: با توجه به برابری $5 \times 5^{200} = 5 \times 25^{100} = 5 \times 2^2 \times 5^{100}$ و هم‌نهشتی $25 \equiv 2$ ، می‌توان نوشت:

$$5^{201} \equiv 5 \times 2^{100}$$

از طرف دیگر:

$$2^{104} + 2^{101} = 2^{100} \times 2^4 + 2^{100} \times 2 = 18 \times 2^{100}$$

پس:

$$5^{201} + 2^{104} + 2^{101} \equiv 5 \times 2^{100} + 18 \times 2^{100} \equiv 23 \times 2^{100} \equiv 0$$

۲۴. ثابت کنید عدد $8^{12} + 9^{21}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

حل: با توجه به برابری $8^2 = 64 = 73 - 9$ و هم‌نهشتی

$9^2 \equiv 8$ ، می‌توان نوشت:

$$9^{20} \equiv 8^{10}; 9^{21} \equiv 9 \times 8^{10}$$

پس:

$$9^{21} + 8^{12} \equiv 9 \times 8^{10} + 64 \times 8^{10} \equiv 73 \times 8^{10} \equiv 0$$

۲۵. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $2^{300} - 3^{300}$ بر ۳۵ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $8 - 35 = -27$ و هم‌نهشتی

$3^2 \equiv -8$ ، می‌توان نوشت:

$$3^{300} \equiv 8^{150}; 3^{300} \equiv 2^{300}$$

$$m \equiv 1; m^{n-1} \equiv 1; m^{n-1} - 1 = k(m-1)$$

پس:

$$N = m^n - m^{n-1} - m + 1 = k(m-1)^2$$

۱۹. ثابت کنید عدد فرمای $F_n = 2^{2^n} + 1$ به ازای $n = 5$

مرکب و بر ۶۴۱ بخش پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم عدد F_5 دارای عامل ۶۴۱ است:

$$2^{32} + 1 \equiv 0$$

با توجه به برابری عددی $640 = 5 \times 2^7$ ، می‌توان نوشت:

$$5 \times 2^7 \equiv -1$$

دو طرف این رابطه را به توان ۴ می‌رسانیم:

$$5^4 \times 2^{28} \equiv 1$$

از برابری $641 - 16 = 625 = 5^4$ داریم $5^4 \equiv -2^4$.

پس:

$$-2^4 \times 2^{28} \equiv 1; 2^{32} \equiv -1$$

بنابراین:

$$F_5 = 2^{32} + 1 \equiv 0$$

۲۰. ثابت کنید $2^{37n} - 1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳

بخش پذیر است.

حل: با توجه به برابری $2^{33} + 33 = 256 = 2^8$ ، می‌توان

نوشت:

$$2^8 \equiv 2^{33}; (2^8)^2 \equiv (2^{33})^2$$

از طرف دیگر:

$$33^2 \equiv 1089 = 5(223) - 26 \equiv -26$$

پس:

$$2^{16} \equiv -26; (2^{16})^2 \equiv (-26)^2$$

با توجه به برابری $676 = 26^2$ و تقسیم ۶۷۶ بر ۲۲۳، خواهیم

داشت:

$$2^{32} \equiv 26^2 = 676 = 3(223) + 7 \equiv 7$$

بنابراین:

$$2^5 \times 2^{32} \equiv 32 \times 7 = 224 = 223 + 1$$

پس:

$$2^{37n} \equiv 1; 2^{37n} \equiv 1$$

۲۱. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $4^{142n} - 7^n$ به ازای جمیع مقادیر

طبیعی n بر ۹ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $64 = 63 + 1$ ، می‌توان نوشت:

پس:

$$= 8 \times 3^{10} + 15^{10} \times 9$$

و با توجه به $3^2 \equiv 15^{17}$ ، می توان نوشت:

$$5^{53} + 5^{10} \times 3^{12} \equiv 8 \times 15^{10} + 15^{10} \times 9 \equiv 17 \times 15^{10} \equiv 0$$

۲۹. نشان دهید برای هر n طبیعی داریم:

$$3^{4n} \equiv 4^{2n}$$

حل: با توجه به برابری های $13 + 4(17) = 81 = 3^4$ و

$$13 + 3(17) = 64 = 4^3$$
 خواهیم داشت:

$$3^{4n} = (3^4)^n \equiv (13)^n, \quad 4^{2n} = (4^2)^n \equiv (17)^n$$

پس:

$$3^{4n} \equiv 4^{2n} \equiv 13^n$$

۳۰. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$4^n + 6n \equiv 1$$

حل: با توجه به صورت مسأله، به ترتیب:

$$1) \quad n=1: 4^1 + 6(1) \equiv 1; 10 \equiv 1$$

$$2) \quad n=k: 4^k + 6k \equiv 1 \quad (\text{فرض استقرا})$$

$$3) \quad n=k+1: 4^{k+1} + 6(k+1) \equiv 1 \quad (\text{حکم استقرا})$$

دو طرف فرض استقرا را در ۴ ضرب می کنیم:

$$4^{k+1} + 24k \equiv 4; \quad 4^{k+1} + 6k + 18k + 6 \equiv 10;$$

$$4^{k+1} + 6(k+1) + 18k - 9 \equiv 1$$

با توجه به $18k - 9 \equiv 0$ ، می توان نوشت:

$$4^{k+1} + 6(k+1) \equiv 1$$

پس، حکم برقرار است.

۳۱. ثابت کنید برای هر n طبیعی داریم:

$$16^n + 96^n \equiv 3^n + 5^n$$

حل: برابری $31 \times 2 = 62$ بدیهی است. بنابراین کافی است

نشان دهیم که طرف های اول و دوم هریک زوج و بر ۳۱ بخش پذیر است. طرف اول زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد زوج است. طرف دوم نیز زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد فرد است. در این جا کافی است هم نهشتی زیر را ثابت کنیم:

$$16^n + 96^n \equiv 3^n + 5^n$$

با توجه به هم نهشتی های $16 \equiv 5$ یا $16^n \equiv 5^n$ و $96 \equiv 3$ یا

$96^n \equiv 3^n$ ، درستی هم نهشتی اخیر واضح است.

۳۲. باقی مانده ی تقسیم عدد $(6^{29} + 7)(6^{24} + 7)$ بر k بر ۴۳

را بیابید.

$$3^{200} - 2^{200} \equiv 0$$

بنابراین، باقی مانده ی تقسیم عدد $3^{200} - 2^{200}$ بر ۳۵ برابر صفر

است.

۲۶. ثابت کنید عدد $2^{29} \times 7^{10} + 3^{27}$ ، بر ۲۹ بخش پذیر

است.

حل: با توجه به برابری های $27^9 = 3^{27}$ و

$$28 \times 7^9 \times 8^9 = 28 \times 56^9$$

$$28 \equiv -1, 27 \equiv -2, 56 \equiv -2 \text{ خواهیم داشت:}$$

$$3^{27} + 7^{10} \times 2^{29} \equiv (-2)^9 + (-1)(-2)^9 \equiv -2^9 + 2^9 \equiv 0$$

تمرین: ثابت کنید عدد $3^{202} \times 2^{40} + 3$ بر ۱۳

بخش پذیر است.

راهنمایی: ابتدا برابری زیر را نتیجه بگیرید و سپس $27 \equiv 1$ ،

$$-1 \equiv 64 \equiv -1 \text{ و } 25 \equiv 1 \text{ را به کار ببرید.}$$

$$3^{202} \times 2^{42} \times 2^{40} = 36 \times (27)^{100} (64)^{20} (25)^{20}$$

۲۷. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n و برای هر عدد صحیح

فرد مثل a داریم:

$$a^{2^n-1} \equiv 1$$

حل: این مسأله را با روش استقرای ریاضی ثابت می کنیم:

$$1) \quad n=1: a^{2^1-1} \equiv 1$$

واضح است که برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a \equiv 1$$

پس، حکم به ازای $n=1$ درست است.

$$2) \quad n=k: a^{2^k-1} \equiv 1 \quad (\text{فرض استقرا})$$

$$3) \quad n=k+1: a^{2^{k+1}-1} \equiv 1 \quad (\text{حکم استقرا})$$

با استفاده از اتحاد مزدوج:

$$a^{2^k} - 1 = (a^{2^{k-1}} - 1)(a^{2^{k-1}} + 1)$$

بنابر فرض استقرا داریم: $a^{2^{k-1}} - 1 = 2^k s$. هم چنین با توجه

به فرد بودن a می توان نوشت:

$$a^{2^{k-1}} + 1 = 2t: \quad a^{2^k} - 1 = (2^k s)(2t) = 2^{k+1} st$$

پس:

$$a^{2^k} - 1 \equiv 0; \quad a^{2^{k+1}} \equiv 1$$

۲۸. ثابت کنید عدد $5^{10} \times 3^{12} + 2^{53}$ بر ۱۷ بخش پذیر است.

حل: با توجه به برابر های:

$$2^{53} + 5^{10} \times 3^{12} = 2^2 \times 2^{50} + 5^{10} \times 3^2 \times 3^{10}$$

$$4^{k+1} + 5 \equiv 1 + 5 = 6 \equiv 0$$

بنابراین حکم برقرار است:

$$2 \times 16^{k+1} - 4^{k+1} - 1 \equiv 0$$

تمرین

۱. باقی مانده ی تقسیم $N = 1! + 2! + 3! + \dots + (1387)!$ بر

۴۲ را بیابید.

۲. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $M = 5^{2n} \times 9^{2n+1} + 2^{2n+2}$ بر ۱۷ بخش پذیر است.

۳. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $N = 4^{6n} + 3 \cdot 6n$ بر ۹ بخش پذیر است.

۴. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $S = 7^{12n+3} + 7^{6n+2} - 12$ بر ۱۹ بخش پذیر است.

۵. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $k = 6^{12n-1} + 7$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

۶. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، باقی مانده ی تقسیم $N = 13^n - 7^n - 6^n + 41$ بر ۴۲ برابر ۴۱ است.

۷. باقی مانده ی تقسیم عدد زیر بر ۱۲ را تعیین کنید.

$$N = 3^{1282} + 4^{1282} + 13^{1282} + 11^{1282}$$

۸. نشان دهید عدد $k = 25^n - 9^n - 4^n$ بر ۶ بخش پذیر است.

۹. ثابت کنید عبارت $N = 2^{2n} - 2^{2n-2} - 7$ به ازای هر n طبیعی بر ۴۹ بخش پذیر است.

۱۰. ثابت کنید عدد فرمای $F_5 = 2^{22} + 1$ مرکب است.

۱۱. ثابت کنید عدد $N = 2^{74n} - 1$ به ازای جمع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش پذیر است.

۱۲. باقی مانده ی تقسیم عدد $N = 2^{572n} - 49^n$ را به ازای هر عدد طبیعی n بر ۹ به دست آورید.

۱۳. ثابت کنید عدد $k = 2^{76} - 2^{41} + 16$ بر ۲۱ بخش پذیر است.

۱۴. ثابت کنید عدد $N = 125^{67} + 4^{52} + 2^{101}$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

۱۵. ثابت کنید عدد $k = 3^{42} + 2^{36}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

۱۶. ثابت کنید عدد $N = 2^{52} + 25^5 \times 9^6$ بر ۱۷ بخش پذیر است.

۱۷. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عبارت $N = 3^{4n} - 4^{2n}$ بر

۱۷ بخش پذیر است.

۱۸. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید، باقی مانده ی

$N = 2^{2n} + 6n$ بر ۹ برابر ۱ است.

۱۹. باقی مانده ی تقسیم عدد $N = 2^{362} + 10^{11} + 5$ بر ۹ را

تعیین کنید.

حل: با توجه به هم نهشتی $6^2 \equiv 1$ ، می توان نوشت:

$$6^{29} + 7 \equiv 0; 6^{29} \times 36 \equiv -7; (6^2)^9 \times 36 \equiv -7; 6^{27} \times 6^2 = 6^{29}$$

هم چنین:

$$6^{44} + 7 \equiv 0; 6^{44} \times 36 \equiv -7; (6^2)^{14} \times 36 \equiv -7; 6^{42} \times 6^2 = 6^{44}$$

بنابراین، باقی مانده ی تقسیم عدد k بر ۴۳ برابر صفر است.

۳۳. باقی مانده ی تقسیم عدد زیر را بر ۹ بیابید.

$$N = (4^{181} + 10^{11} + 5)(4^{91} + 10^6 + 4)$$

حل: با توجه به هم نهشتی های $4 \equiv -1$ و $10 \equiv 1$ ، می توان

نوشت:

$$4^{181} = 2^{362} = (2^2)^{181} \times 4 = 8^{181} \times 4 \equiv (-1)^{181} \times 4 = -4;$$

$$10^{11} \equiv 1; 10^6 \equiv 1; 4^{91} = 4 \times (2^2)^{45} = 4 \times 8^{90} \equiv$$

$$4 \times (-1)^{90} = 4$$

پس:

$$4^{181} + 10^{11} + 5 \equiv -4 + 1 + 5 \equiv 1; 4^{91} + 10^6 + 4 \equiv 4 + 1 + 4 \equiv 9$$

بنابراین، باقی مانده ی تقسیم عدد N بر ۹ برابر ۱ است.

۳۴. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$9 \mid M = 2 \times 16^n - 4^n - 1$$

حل: باید نشان دهیم:

$$M = 2 \times 16^n - 4^n - 1 \equiv 0$$

به ترتیب:

$$1) n=1: 2 \times 16^1 - 4^1 - 1 = 27 \equiv 0$$

$$2) n=k: 2 \times 16^k - 4^k - 1 \equiv 0 \text{ (فرض استقرا)}$$

$$3) n=k+1: 2 \times 16^{k+1} - 4^{k+1} - 1 \equiv 0 \text{ (حکم استقرا)}$$

دو طرف فرض استقرا را در ۱۶ ضرب می کنیم:

$$2 \times 16^{k+1} - 16 \times 4^k - 16 \equiv 0;$$

$$2 \times 16^{k+1} - 4 \times 4^{k+1} - 16 \equiv 0;$$

$$2 \times 16^{k+1} - 4^{k+1} - 1 - (12 \times 4^k + 15) \equiv 0$$

در این جا، برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$12 \times 4^k + 15 \equiv 0; 3(4^{k+1} + 5) \equiv 0$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$4^{k+1} + 5 \equiv 0$$

با توجه به هم نهشتی $4^2 \equiv 1$ ، می توان نوشت: