

نگرشی به چند مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها

(ریاضی ۱ و ریاضیات جدید سال اول)

● شهرام صدر

مثال:

۱- فرض کنیم مجموعه M روزهای هفته باشد. آنگاه M متناهی است.

$M = \{\text{جمعه، پنج‌شنبه، چهارشنبه، سه‌شنبه، دوشنبه، یکشنبه، شنبه}\}$

۲- فرض کنیم x رودخانه‌ای در دنیا $P = \{x\}$ اگر چه شمردن رودخانه‌های دنیا مشکل است، اما با توجه به تعریف، مجموعه P متناهی است.

۳- مجموعه انسانهای روی کره زمین مجموعه متناهی است.

۴- مجموعه دایره‌هایی که از مبدا مختصات می‌گذرند، مجموعه‌ای نامتناهی است.

۵- مجموعه جوابهای معادله $x^2 - 10x^2 + 9 = 0$ متناهی است.

زیرا معادله دارای مجموعه جواب $\{-3, -1, 1, 3\}$ می‌باشد.

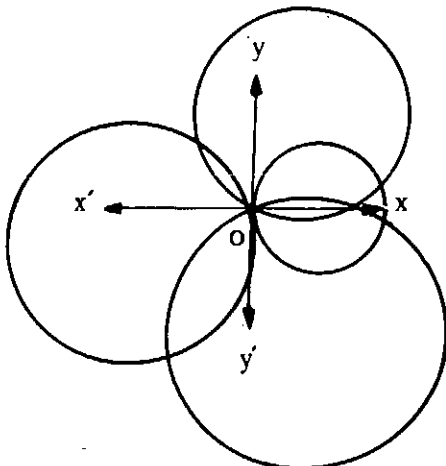
۶- مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه خطوط گذرنده از یک نقطه ثابت مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند.

آنچه امروز به نام «ریاضیات جدید» خوانده می‌شود، همان علم ساختمانهای ریاضی است و زبان ریاضیات جدید تئوری مجموعه‌ها می‌باشد. ریاضیات جدید در واقع چندان جدید نیست، زیرا قسمت عمده‌ای از آن از حدود یک قرن پیش به وجود آمده است؛ بلکه تأثیر عمیق آن در امر تعلیم و تعلّم ریاضیات در سالهای اخیر سبب گشته تا آن را «ریاضیات جدید» بنامند. نظریه مجموعه‌ها که نزدیک به یک قرن پیش به وسیله زرزکانتور (۱۸۴۵-۱۹۱۸) پایه‌گذاری شد، به بررسی خواص کلی مجموعه، بدون توجه به طبیعت اشیایی که مجموعه را تشکیل داده‌اند، می‌پردازد.

نظریه مجموعه‌ها، اساس تجزیه و تحلیل ریاضی جدید شناخته شده است و اطلاع در مورد آن برای هر ریاضیدانی لازم است. نظریه مجموعه‌ها پایه و اساس بسیاری از گرایشهای ریاضی، از جمله احتمالات، آنالیز، توپولوژی و جبر مجرد می‌باشد. در این مقاله سعی بر آن است که چند مفهوم اساسی نظریه مجموعه‌ها مطرح شود.

۱- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

نما با اصطلاحات مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی آشنایی دارید. مجموعه انگشتان یک دست خود را مجموعه‌ای متناهی و مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی می‌شمارید. در حالت کلی مجموعه‌ای متناهی است که با نهی و یا به طور دقیق شامل n عضو باشد، که n عدد صحیح مثبت می‌باشد؛ یا به عبارت دیگر مجموعه‌ای متناهی است که شامل تعداد معینی عضو مختلف باشد و در شمارش عضوهای مختلف مجموعه کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.



عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم، A مجموعه‌ای متناهی باشد؛ با توجه به تعریفی که از مجموعه متناهی بیان شد؛ اعضای مجموعه A قابل شمارش می‌باشد. تعداد اعضای مجموعه A را عدد اصلی مجموعه A گوئیم و با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱: فرض کنیم A مجموعه اعداد اول بزرگتر از ۳۰ و کوچکتر از ۵۰ باشد:

$$A = \{31, 37, 41, 43, 47\}$$

مجموعه متناهی A دارای ۵ عضو می‌باشد. بنابراین عدد اصلی مجموعه A برابر با ۵ می‌باشد؛ یعنی $n(A) = 5$.

مثال ۲: عدد اصلی مجموعه انگشتان دست راست شما برابر با ۵ می‌باشد.

مثال ۳: عدد اصلی مجموعه وجوه یک مکعب مستطیل برابر با ۶ می‌باشد، زیرا هر مکعب مستطیل دارای ۶ وجه یا شش مستطیل است.

عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های $\{a_1\}$ ، $\{a_1, a_2\}$ ، $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و ... به ترتیب برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ و ... می‌باشد. بنابراین عدد اصلی هر مجموعه متناهی مانند A ، عدد صحیح و نامنفی $n(A)$ می‌باشد. به طوری که $0 \leq n(A) \leq K$; $K \in \mathbb{N}$

درباره عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی به طور مفصل در مبحث مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» گفتگو خواهیم کرد.

مجموعه‌های هم عدد

برای بیان این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید دو بسته مداد داشته باشیم. در یکی مدادهای قرمز و در دیگری مدادهای سیاه باشد، از هر بسته یک مداد بر می‌داریم (یعنی یک مداد قرمز و یک مداد سیاه) و کنار می‌گذاریم. دوباره یک مداد از هر بسته خارج می‌کنیم و کنار می‌گذاریم. اگر به همین ترتیب از هر بسته یک مداد خارج کنیم، یا هر دو بسته مداد با هم خالی می‌شوند یا یکی از بسته‌ها خالی می‌شود، در حالی که در دیگری هنوز مداد باقی مانده است. واضح است که حالت اول تنها هنگامی رخ می‌دهد که در دو قوطی به تعداد مساوی مداد وجود داشته باشد و در حالت دوم بسته‌ای که خالی شده است شامل تعداد کمتری مداد بوده است.

بنابراین دو مجموعه را هم عدد گوئیم، هرگاه تعداد اعضای آنها با هم برابر باشند. به این ترتیب بدون شمردن عضوهای دو مجموعه،

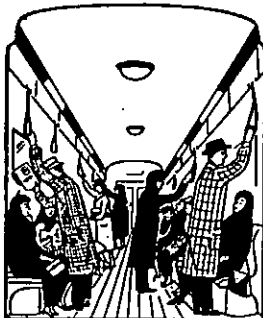
می‌توانیم معلوم کنیم که آیا دو مجموعه هم عدد هستند یا نه؟ کافی است به طور متوالی از هر مجموعه یک عضو انتخاب کرده، با هم جفت کنیم. دو مجموعه را تنها وقتی «هم عدد» گوئیم که اگر به طور متوالی یک عضو از هر مجموعه انتخاب و با هم جفت شوند، عضوهای دو مجموعه با هم تمام شوند. نتیجه‌ای که به دست می‌آید بستگی به ترتیب انتخاب عضوها در هر یک از دو مجموعه ندارد.

مجموعه‌های هم ارز

فرض کنید کلاسی که شما در آن درس می‌خوانید ۳۰ دانش‌آموز دارد. یک روز معلم ریاضی وارد کلاس می‌شود و به هر یک از دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ را نسبت می‌دهد؛ به طوری که اگر هر عددی بین ۱ تا ۳۰ انتخاب شود، دانش‌آموزی هست که متناسب به آن عدد باشد. و بر عکس اگر دانش‌آموزی را در نظر بگیریم، یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ متناسب به آن دانش‌آموز باشد. در این حالت می‌گوئیم، مجموعه دانش‌آموزان و مجموعه اعداد ۱ تا ۳۰ هم ارز می‌باشند. بنابراین مجموعه نانهی A را هم ارز با مجموعه نانهی B گوئیم هرگاه هر عضو A فقط و فقط با یک عضو B و هر عضو B فقط و فقط با یک عضو A مرتبط باشد. و می‌نویسیم $A \sim B$.

مثال: مجموعه ماشینهای سواری موجود در سطح شهر تهران با مجموعه شماره پلاکهای آنها هم ارز می‌باشند.

مثال: شکل زیر نشان می‌دهد که مجموعه صندلیهای اتوبوس و مجموعه مسافران هم ارز نیستند زیرا تعدادی از مسافران ایستاده‌اند و صندلی خالی برای نشستن موجود نمی‌باشد.



مثال: اگر فرض کنیم $\mathbb{N}_K = \{1, 2, 3, \dots, K\}$ طبق تعریف داریم:

$$A \sim \mathbb{N}_K \Leftrightarrow A = \emptyset \vee A \sim \mathbb{N}_K$$

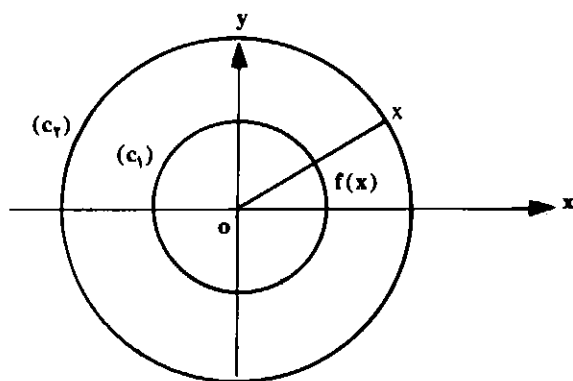
اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا در مورد هر دو مجموعه دلخواه می‌توان گفت تعداد عضوهایشان مساوی است یا نه. در مورد

مجموعه‌های متناهی با شمردن اعضا و یا جفت کردن اعضای آن می‌توان به این سؤال پاسخ داد اما در مورد مجموعه‌های نامتناهی، جواب سؤال بستگی به این دارد که تعداد مساوی عضو داشتن را چگونه تعریف کنیم تا بگوییم دو مجموعه «هم‌عددند». با تعریفی که گذشت می‌توان هم ارزی بین دو مجموعه متناهی را بررسی کرد. اکنون وقت آن رسیده است که برای بررسی هم ارزی بین دو مجموعه نامتناهی تعریف زیر را که نظریه مجموعه‌ها را دگرگون کرده است، و به ریاضیدان آلمانی ژرژ کانتور منسوب است، مطرح کنیم.

۴- فرض کنیم $I\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ و $I\mathbb{E} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ تابع $f: I\mathbb{N} \rightarrow I\mathbb{E}$ با ضابطه $f(x) = 2x$ هم یک به یک و هم پوششی می‌باشد پس $I\mathbb{N} \sim I\mathbb{E}$. با توجه به مثال ۴ درمی‌یابیم که مجموعه نامتناهی اعداد طبیعی با مجموعه اعداد زوج که زیرمجموعه $I\mathbb{N}$ می‌باشد، هم‌ارز است. بنابراین یک مجموعه نامتناهی می‌تواند با زیرمجموعه‌ای نامتناهی از خود هم‌ارز باشد. این خاصیت، ویژه مجموعه‌های نامتناهی است.

۵- دو دایره متحد‌المرکز را در نظر بگیرید. تناظری یک به یک بین نقاط روی دو دایره به طریق هندسی برقرار کنید.

حل: دو دایره (C_1) و (C_2) را به مرکز مبدا مختصات و شعاعهای دلخواه و نابرابر در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x نقطه‌ای بر دایره (C_2) باشد یعنی $x \in (C_2)$ تابع $f: C_2 \rightarrow C_1$ را در نظر می‌گیریم. اگر از مرکز، شعاعی به x وصل کنیم، دایره (C_1) را در نقطه $f(x)$ قطع خواهد کرد (مطابق شکل). بنابراین f هم یک به یک است و هم پوششی پس f تناظری یک به یک بین (C_1) و (C_2) برقرار می‌کند.



۶- تابع $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ هم یک به یک و پوشا می‌باشد. بنابراین بازه $(-1, 1)$ هم‌ارز مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد یعنی مجموعه اعداد حقیقی و بازه $(-1, 1)$ «هم‌عدد» می‌باشند. چون تابع $f(x)$ دارای قدر مطلق می‌باشد، بنابراین $f(x)$ تابعی دو ضابطه‌ای، به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

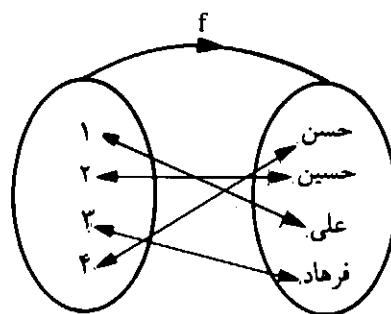
مجموعه A هم‌ارز با مجموعه B است اگر تابعی چون $f: A \rightarrow B$ موجود باشد به طوری که f هم یک به یک و هم پوششی^۱ باشد. در این صورت می‌گویند تابع f تناظری یک به یک بین مجموعه‌های A و B تعریف می‌کند.

مثال:

۱- فرض کنیم

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{\text{فرهاد و علی و حسین و حسن}\}$$

نمودار زیر تابعی از A به B تعریف می‌کند که یک به یک و پوششی است. پس $A \sim B$.



$$\begin{aligned} f(1) &= \text{علی} \\ f(2) &= \text{حسین} \\ f(3) &= \text{فرهاد} \\ f(4) &= \text{حسن} \end{aligned}$$

۲- فرض کنیم $M = \{1, 2, 3\}$ و $N = \{1, 2\}$ ، اگر همه تابعهایی که از M در N است را بنویسیم، هیچ‌یک از آنها یک به یک و پوششی نیست، زیرا M و N «هم‌عدد» نیستند پس $M \not\sim N$.

از بررسی این دو مثال به آسانی می‌توان دریافت که به طور کلی، یکی از شرایطی که دو مجموعه متناهی را هم‌ارز می‌کند، این است که تعداد عضوهای یکی با دیگری برابر باشد.

۳- فرض کنیم $G = [0, 1]$ و $H = [2, 5]$ ملاحظه می‌کنیم که دو مجموعه G و H نامتناهی می‌باشند؛ تابع $f: G \rightarrow H$ با ضابطه

۲- مجموعه‌های یک به یک و پوشا را می‌توانید از کتاب ریاضیات جدید سال دوم ریاضی و یا مجله‌های برهان به شماره‌های ۴ و ۶ مطالعه فرمایید.

۱۰ - بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند توسط تابع f تناظری یک به یک موجود می باشد.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی مجذور کامل

$$f: \mathbb{N} \rightarrow A$$

$$f(x) = x^2$$

تابع f با ضابطه فوق یک به یک و پوششی می باشد لذا:

$$\mathbb{N} \sim A$$

منابع

- ۱ - نظریه مجموعه ها نوشته سیمور لپ شوتس، ترجمه محمود مهدی زاده.
- ۲ - نظریه مجموعه ها نوشته واستلا و سربینکی، ترجمه پرویز شهریاری.
- ۳ - آنالیز ریاضی تألیف دکتر غلامحسین مصاحب.
- ۴ - توبولوجی عمومی (مبحث نظریه مجموعه ها) نوشته سیمور لپ شوتس، ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده.
- ۵ - تئوری مسائل احتمالات (مبحث نظریه مجموعه ها) نوشته سیمور لپ شوتس - ترجمه عادل ارشقی
- ۶ - مقدمه ای بر منطق و نظریه مجموعه ها، تألیف محمد رجبی طرخورانی.

۷ - INTRODUCTION, TO THE THEORY OF SETS . JOSEPH BREUER



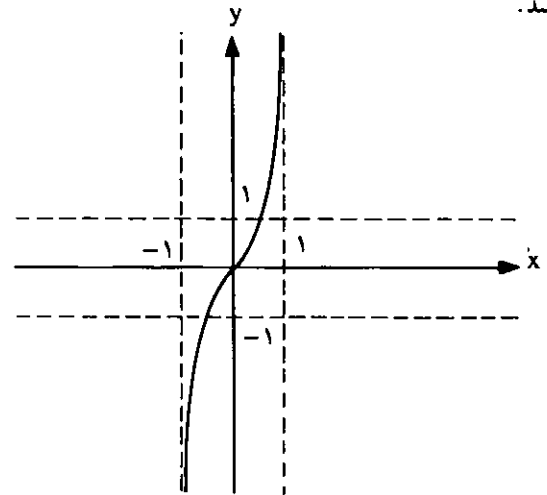
۲ - مجموعه های شمارا و ناشمارا (شمارش پذیر و شمارش ناپذیر)

● حمید رضا امیری

فرض کنید می خواهیم اعضای مجموعه $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ را شماره گذاری کرده، به طور مثال بر روی آنها برجسب بزنیم. برای این کار برجسب هایی که اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ... روی آنها نوشته شده اند در اختیار داریم، واضح است که برجسب های شماره ۱ تا ۵ را برای اعضای این مجموعه مصرف می کنیم.

با توجه به دامنه و ضوابط تابع f نمودار آن به شکل زیر می باشد.

با توجه به نمودار به آسانی ملاحظه می شود که f یک به یک و پوششی می باشد.



۷ - برای برقرار کردن تناظر یک به یک بین همه عددهای مثبت فرد و همه عددهای زوج بزرگتر از صد، کافی است هر عدد فرد n را متناظر با عدد زوج $n+101$ قرار دهیم.

$$1 \xrightarrow{f} 1+101$$

$$3 \xrightarrow{f} 3+101$$

$$5 \xrightarrow{f} 5+101$$

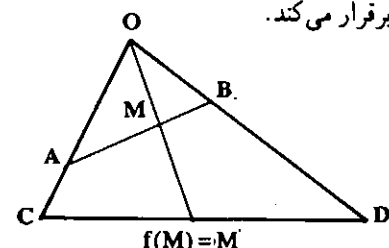
$$\vdots$$

$$n \xrightarrow{f} n+101$$

$$\vdots$$

۸ - مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $M = \{1, 10, 100, 1000, \dots\}$ مفروضند برای برقراری تناظر یک به یک بین M و $\mathbb{N}$ تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ را با ضابطه $f(n) = 10^{n-1}$ که یک به یک و پوششی می باشد، در نظر می گیریم. بنابراین: $\mathbb{N} \sim M$.

۹ - فرض کنیم AB پاره خط مستقیمی به طول یک سانتیمتر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دلخواه باشد. مطابق شکل زیر، تابع f را بر مجموعه نقاط AB با این ضابطه تعریف می کنیم که $f(M)$ یا M' نقطه تقاطع خط OM با CD می باشد. به وضوح می توان دید که f تناظر یک به یک بین مجموعه نقاط پاره خط AB و مجموعه نقاط پاره خط CD برقرار می کند.

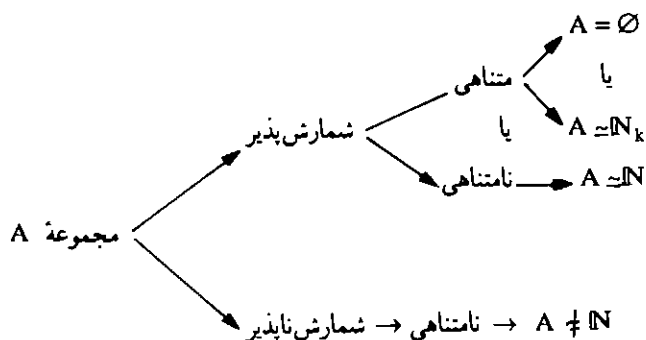


هم‌ارز نباشد». پس:

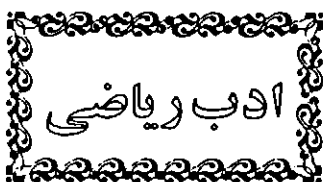
$$A \neq \mathbb{N} \wedge (A \text{ نامتناهی است}) \Leftrightarrow A \text{ شمارش ناپذیر است.}$$

مثال: مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $A = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (که نقاط ابتدایی و انتهایی مجموعه A تأثیری در «ناشمارایی» ندارند.) و مجموعه اعداد گنگ «ناشمارا» یا شمارش ناپذیر هستند.

با توجه به این تعریفها و مثالها، می‌توان نمودار زیر را رسم کرد:



در انتها فقط به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که عدد اصلی مجموعه‌های شمارش پذیر نامتناهی و عدد اصلی مجموعه‌های شمارش ناپذیر با هم برابر در نظر گرفته نمی‌شوند.



تعمق در استدلالهای ریاضی برای پی‌بردن به کنه آنها و به عمق احکام ریاضی نیز منتهای ضرورت را دارد از این راه است که تیزبین می‌شوید و فکر شما بیدار می‌شود، و صاحب نیروی ابتکار و آماده برای تحقیق می‌گردید.

مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب

حال اگر بخواهیم مجموعه اعداد طبیعی زوج یعنی مجموعه $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را برچسب‌گذاری (شمارش) کنیم، برچسب شماره ۱ را به ۲ اختصاص می‌دهیم و برچسب شماره ۲ را به ۴ و ۳ را به ۶ و ۴ را به ۸ و ... یعنی تمام اعضای $2\mathbb{N}$ را می‌توان با خیال راحت برچسب‌گذاری کرد، منظور از خیال راحت این است که ما اطمینان داریم بین عدد ۲ و ۴، عدد زوج دیگری وجود نداشته و براحتی برچسب شماره ۲ را برای ۴ در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب پیش می‌رویم، البته تا هر کجا که دلمان بخواهد و محدودیت زمانی به ما اجازه دهد!

بنابراین اصطلاحاً می‌گویند مجموعه $2\mathbb{N}$ قابل شمارش یا شمارش‌پذیر یا شمارا می‌باشد.

حال فرض کنیم مجموعه اعداد حقیقی بین ۲ و ۳ (شامل خود ۲ و خود ۳) در دست باشد و بخواهیم این مجموعه یعنی، $A = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 3\}$ را برچسب‌گذاری کنیم، واضح است که اولین عضو این مجموعه را می‌توان عدد ۲ در نظر گرفت و برچسب شماره ۱ را به عدد ۲ اختصاص داد، بلافاصله به دنبال دومین عدد بعد از ۲ می‌گردیم تا برچسب شماره ۲ را که آماده کرده‌ایم روی آن بچسبانیم، آیا می‌توان یک عدد حقیقی بلافاصله بعد از ۲ نام برد؟ جواب منفی است، ما نمی‌توانیم عدد حقیقی بلافاصله پس از ۲ را معرفی یا پیدا کنیم. که بین آن عدد و عدد ۲ هیچ عدد حقیقی دیگری وجود نداشته باشد. زیرا ثابت شده که «همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایزه بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد» بنابراین همچنان در به کار بردن برچسب شماره ۲ ناتوان مانده‌ایم، پس، مجموعه فوق شمارش‌ناپذیر یا ناشمارا می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم با توجه به این مثالها و تعریفهایی که پیش از این خواندید، مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» را دقیقتر تعریف کنیم:

تعریف: مجموعه A را شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه متناهی بوده یا با مجموعه اعداد طبیعی، یعنی $\mathbb{N}$ ، تناظر یک به یک داشته باشد پس:

$$A \text{ شمارش پذیر است} \Leftrightarrow (A \text{ متناهی است}) \vee A \cong \mathbb{N}$$

(در حقیقت $\mathbb{N}$ همان مجموعه برچسب‌گذار است)

مثال: تعدادی از این مجموعه‌های شمارش‌پذیر و نامتناهی عبارتند از، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و تمام زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$.

تعریف: مجموعه A را شمارش‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه، شمارش‌پذیر نباشد به عبارت دیگر «متناهی نباشد و با $\mathbb{N}$ معادل یا