

$$ax + by = c$$

$$y = y - \frac{a}{d}t$$

نگاهی به

معادله های سیاله

• علی بختیاری

پس از ازدواج، صاحب بصری شد که چهار سال پیش از پدر درگذشت. سن او در لحظه مرگ، نصف سن (نهایی) پدر بود. (خواننده علاقه مند می تواند سن دیوفانتوس را به دست آورد؛ در این صورت، به عدد ۸۴ خواهد رسید.)

۲. حل معادله سیال درجه اول: معادله سیاله $ax + by = c$ را در نظر می گیریم. منظور از حل این معادله، به دست آوردن جوابهای صحیح آن، در صورت وجود، است؛ یعنی عددهای صحیح x و y را چنان بیابیم که در رابطه $ax + by = c$ صدق کنند. چند سؤال اساسی مطرح می شود:

الف - آیا چنین مقادیری برای x و y وجود دارد؟
ب - آیا می توان تعداد جوابها را به دست آورد و آیا می توان تمام این جوابها را یافت؟
پ - آیا در مسائل کاربردی، تمام این مقادیر و جوابها «مناسب» هستند؟

و سؤالات دیگر. قضیه زیر، راهگشای ما در یافتن پاسخ این پرسشها خواهد بود. ابتدا یک لم را بدون اثبات بیان می کنیم. اثبات این لم معروف، ساده است.

لم. اگر $(a, b) = 1$ و $a|bc$ آن گاه $a|c$ ■

قضیه: فرض کنیم معادله سیاله $ax + by = c$ داده شده باشد و d بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b باشد؛ یعنی $d = (a, b)$. در این صورت، معادله مذکور، جواب (صحیح)

۱. مقدمه و تاریخچه: هندسه و قسمتی از آنچه که امروزه ما آن را تحت عنوان نظریه اعداد می شناسیم، از قدیمی ترین شاخه های ریاضیات محسوب می شوند. این قدمت، به چند هزار سال پیش و به تمدن بابل، یونان و مصر قدیم بازمی گردد. در این میان، یافتن جواب برای معادله هایی که از هندسه به دست آمده، جایگاه ویژه ای دارد. این گونه معادله ها، بیشتر در شاخه دیگر ریاضی، یعنی جبر، بررسی می شود. اما آنچه که در حال حاضر به نظریه اعداد مربوط می شود، مسأله یافتن جوابهای صحیح (و حداکثر گویا) برای این معادله هاست که به بررسی حالت خاصی از آنها می پردازیم.

معادله $ax + by = c$ را در نظر می گیریم. این معادله را در حالتی که a ، b و c ضرایبی صحیح هستند، معادله سیاله خطی (درجه اول) می نامیم. این معادله را گاهی معادله دیوفانتی می نامند. دیوفانتی از نام ریاضیدان یونانی «دیوفانتوس» گرفته شده است. گرچه دیوفانتوس را نخستین کسی می دانند که در صورت بندی معادله های جبری تلاشهایی داشته؛ اما وی اولین کسی نبوده که به حل معادله های سیاله پرداخته است. کتاب «آریتیکا»ی او که مهمترین اثر وی محسوب می شود، شامل حل حدود ۱۳۰ مسأله نظریه اعداد است. با ذکر تنها اطلاعی که از زندگی شخصی دیوفانتوس در دست است، به حل معادله های سیاله می پردازیم: «دیوفانتوس یک ششم زندگی خود را در کودکی، یک دوازدهم آن را در جوانی و یک هفتم دیگر را در تجربه به سر برد. پنج سال

$$\frac{d}{dx}(x - x_0) = 1$$

$$ax + by = c$$

$$dw = ar + bs$$

ثابت می شود. ■

قضیه قبل، علاوه بر این که وجود جوابها را ثابت می کند، روش به دست آوردن آن را نیز بیان می کند. اغلب x_0 و y_0 را جواب اختصاصی و x و y که از روابط بیان شده به دست می آیند، جواب عمومی معادله نامیده می شوند. همچنین می توان گفت (x_0, y_0) یک جواب اختصاصی معادله مذکور است.

مثال. معادله $2x + 5y = 11$ را حل کنید.

حل. داریم $(2, 5) = 1$ و $1|11$ و لذا معادله داده شده، دارای جواب است. بنا به الگوریتم تقسیم اقلیدسی $1 = 2(-2) + 5(1)$ و در نتیجه: $11 = 2(-22) + 5(11)$. بنابراین $x_0 = -22$ و $y_0 = 11$ یک جواب برای معادله مزبور است. کلیه جوابها به شرح زیر خواهد بود:

$$x = -22 + 5t, \quad y = 11 - 2t; \quad (t \in \mathbb{Z})$$

مثال. معادله $19x + 114y = 14$ را حل کنید.

حل. داریم $(19, 114) = 19$ و با توجه به این که $19 \nmid 14$ لذا معادله داده شده، جواب (صحیح) ندارد.

۳. چند حالت خاص: معادله $ax + by = c$ را در نظر

می گیریم. اگر a و b نسبت به هم اول باشند؛ یعنی $(a, b) = 1$ ، آن گاه $1|c$ و لذا معادله جواب خواهد داشت و اگر (x_0, y_0) جواب اختصاصی آن باشد، جوابهای عمومی آن از روابط زیر به دست می آید:

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at; \quad (t \in \mathbb{Z})$$

در کاربرد، اغلب لازم است تنها جوابهای مثبت یا جوابهای که در شرط خاصی صدق کنند، انتخاب شوند. بدین منظور، از روابطی که جوابهای عمومی را بر حسب ضرایب و جوابهای اختصاصی بیان می کنند، استفاده می کنیم؛ لذا ممکن است از تعداد نامتناهی جواب، تنها یک جواب قابل قبول باشد.

مثال. یک فروشنده قصد دارد ۵۱۰ بسته از یکی از کالاهای خود را برای مشتریان خود ارسال کند؛ به طوری که به هر مشتری، ۲۰ یا ۵۰ بسته از این کالا تعلق بگیرد. این توزیع به چند طریق

دارد؛ اگر و تنها اگر $d|c$. در این صورت، یعنی اگر $d|c$ ، آن گاه معادله دارای جوابهای نامتناهی است.

اثبات: فرض کنیم x_0 و y_0 دو عدد صحیح باشند که در رابطه $ax_0 + by_0 = c$ صدق کنند. از طرفی، فرض کرده ایم $d = (a, b)$ ، لذا $d|a$ و $d|b$ و با توجه به ویژگی بخش پذیری داریم $d|ax_0 + by_0$ ؛ یعنی $d|c$. بعکس، فرض کنیم $d|c$. با توجه به الگوریتم اقلیدسی عددهای صحیح r و s چنان وجود دارند که $d = ar + bs$. همچنین عدد صحیح t چنان یافت می شود که $c = dt$. از دو رابطه اخیر داریم: $c = dt = art + bst$. بنابراین $x = rt$ و $y = st$ یک جواب معادله سیاله داده شده اند و لذا مسأله وجود جواب این معادله، حل خواهد شد. برای اثبات نامتناهی بودن تعداد جوابها، ابتدا فرض می کنیم $x = x_0$ و $y = y_0$ یکی از جوابهای معادله مذکور باشد؛ یعنی $ax_0 + by_0 = c$. اگر x و y جواب دیگری برای این معادله باشند، خواهیم داشت:

$$ax + by = c = ax_0 + by_0$$

در نتیجه: $a(x - x_0) = b(y - y_0)$ و لذا

$$(1) \quad \frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y - y_0)$$

از طرف دیگر، از رابطه $d = (a, b)$ ، رابطه زیر به دست می آید:

$$(2) \quad \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

از رابطه (۱) داریم: $\frac{b}{d} \left| \frac{a}{d}(x - x_0) \right|$. رابطه (۲) و لم قبل نشان

می دهند که $\frac{b}{d} | (x - x_0) |$ و لذا عدد صحیحی چون t وجود دارد

که $x - x_0 = \frac{b}{d} t$ ؛ یعنی $x = x_0 + \frac{b}{d} t$. با جایگذاری این مقدار

در (۱) مقدار y به دست می آید: $y = y_0 - \frac{a}{d} t$ ؛ لذا به ازای هر

عدد صحیح t ، مقادیر مختلفی برای x و y حاصل می شود. براحتی دیده می شود x و y که توسط روابط بالا داده شده اند در معادله، صدق می کنند و لذا جواب این معادله هستند؛ پس حکم قضیه

$$ax + by = c \quad y = y - \frac{a}{d}t$$

امکان دارد؟

روشهای دیگری نیز برای حل معادله سیاله $ax + by = c$ وجود دارد؛ یکی از این روشها را با مثال زیر نشان می‌دهیم:

مثال. معادله سیاله $6x - 21y = 15$ را حل کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم $3 \mid 15 = (6, 21)$. پس معادله داده شده، دارای جواب (صحیح) می‌باشد. قدرمطلق ضریب x ، یعنی ۶ از قدرمطلق ضریب y ، یعنی ۲۱ کوچکتر است. پس معادله را برحسب x حل می‌کنیم. داریم: $x = \frac{15 + 21y}{6}$ و به دنبال مقادیر

صحیح برای x هستیم. عددهای ۱۵ و ۲۱ را برحسب مضربی از ۶ می‌نویسیم و مقادیر صحیح را جدا می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$x = \frac{12 + 3 + 18y + 3y}{6} \quad \text{و لذا} \quad x = 2 + 3y + \frac{1+y}{2} \quad (*)$$

برای صحیح بودن x ، باید $\frac{y+1}{2}$ مقدار صحیح داشته باشد. به این منظور، لازم است y مقداری فرد باشد؛ یعنی $y = 2k + 1$ که $k \in \mathbb{Z}$. با قرار دادن این مقدار در $(*)$ داریم: $x = 7k + 6$. در نتیجه، جوابهای عمومی معادله، به صورت زیر است:

$$x = 7k + 6, \quad y = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(توجه می‌کنیم که این مقادیر، در معادله صدق می‌کنند.)

این روش در برخی موارد، از روش قبلی کاراتر است؛ بویژه در حالتی که ضریب یکی از مجهولها برابر یک باشد، این روش توصیه می‌شود.

۴. تعمیم معادله سیاله درجه اول: آنچه تاکنون مطالعه کردیم، در واقع حالت خاصی از معادله‌های سیاله به‌شمار می‌آید. با دقت نظر بیشتر، یک معادله سیاله عبارت است از معادله‌ای با بیش از یک مجهول و ضرایب صحیح که جوابهای صحیح آن مورد نظر باشد. بنابراین، معادله‌های $x^2 + y^2 = z^2$ و

$$2x + 7y + 6z = 4 \quad \text{و حتی} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$$

نیز معادله‌های سیاله

هستند. توجه کنید که معادله اخیر را می‌توان به صورت $xy = 14x + 14y$ نوشت. در این بخش، به بررسی معادله سیاله

حل. معادله $20x + 50y = 510$ را تشکیل می‌دهیم. با حل این معادله، مسأله حل خواهد شد. برای حل این معادله، جواب اختصاصی $(-102, 51)$ به دست می‌آید. رابطه‌های زیر، جواب عمومی معادله را تعیین می‌کنند:

$$x = -102 + 5t, \quad y = 51 - 2t; \quad (t \in \mathbb{Z})$$

از طرفی x و y تعداد خریداران کالا را نشان می‌دهند و لذا نمی‌توانند منفی باشند. بنابراین، نامعادله‌های $x \geq 0$ و $y \geq 0$ به دست می‌آید. از حل این نامعادله‌ها برحسب t داریم:

$$20/4 = \frac{204}{10} \leq t \leq \frac{51}{2} = 25/5 \quad (t \in \mathbb{Z})$$

و در نتیجه مقادیر زیر، برای t قابل قبول خواهند بود:

$$t = 21, 22, 23, 24, 25$$

بنابراین، به پنج روش می‌توان توزیع مورد نظر را انجام داد. توجه می‌کنیم که منظور از جواب صحیح و مثبت، جوابی است که x و y هر دو مثبت باشند.

مثال. تمام جوابهای صحیح و مثبت معادله $2x + 5y = 11$ را در صورت وجود، بیابید.

حل. در نخستین مثال بخش قبل، دیدیم جوابهای عمومی معادله داده شده، به صورت زیر است:

$$x = -22 + 5t, \quad y = 11 - 2t, \quad (t \in \mathbb{Z})$$

لذا برای این x و y هر دو مثبت باشند، باید داشته باشیم:

$$4/4 = \frac{22}{5} \leq t \leq \frac{11}{2} = 5/5$$

لذا این معادله، تنها یک جواب مثبت $x = 3$ و $y = 1$ دارد که به ازای $t = 5$ حاصل می‌شود.

مثال. جوابهای صحیح و مثبت معادله $7x + 16y = 209$ را به دست آورید.

حل. از حل معادله داده شده، جوابهای عمومی زیر حاصل می‌شوند:

$$x = 7 + 16t, \quad y = -3 - 7t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

با در نظر گرفتن $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ، داریم: $-\frac{7}{16} \leq t \leq -\frac{3}{7}$ و با توجه به این که $t \in \mathbb{Z}$ ، لذا معادله داده شده، دارای جواب صحیح

$$\frac{d}{dx}(ax+by) = a + b \frac{dy}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

خطی می‌پردازیم و بررسی سایر معادله‌ها را به وقت دیگری موکول می‌کنیم.
الف. معادله‌های زیر را حل کرده، در صورت وجود جوابهای مثبت آن را مشخص کنید:

۱) $17x + 13y = 100$

۲) $101x + 102y + 103z = 1$

۳) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$

ب. جوابهای صحیح دستگاه معادله‌های سیالیه زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+6y+21z=121 \end{cases}$$

(راهنمایی. برای حل این دستگاه، می‌توانید از هر معادله، یک معادله با دو مجهول به دست آورید و دستگاه جدیدی تشکیل دهید.)

تمرین زیر برای دانش‌آموزانی که با برنامه‌نویسی کامپیوتر آشنایی دارند، در نظر گرفته شده است:

ب. برنامه‌ای بنویسید که معادله سیالیه درجه اولی با دو مجهول را حل کند و سپس تمام جوابهای مثبت آن را در صورت وجود پیدا کند.

پاورقی:

۱. Diophantus

۲. Arithmetica

منابع:

۱. Kenneth H. Rosen, Elementary Number Theory and Its Application (2nd ed.), ADDISON-WESLEY Pub., 1988

۲. هاردر. و. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول و دوم)، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۷۲، ۱۳۷۳).

۳. ویلیام ج. لوک، مبانی نظریه اعداد، ترجمه محمد تقی دیبایی، انتشارات مبتکران، (۱۳۷۲).

(*) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

معادله (*) جواب (صحیح) دارد؛ اگر و تنها اگر $d|b$ ، که در آن d بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای صحیح $a_1, a_2, \dots, a_n$ است؛ یعنی $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. اثبات این حکم، به کمک استقرا و با استفاده از این رابطه که $(a, b, c) = (a, (b, c))$ انجام می‌گیرد و ما از اثبات آن خودداری می‌کنیم؛ زیرا اثبات مانند حالت دو مجهولی انجام می‌گیرد. در این جا با ذکر یک مثال، روش کلی حل چنین معادله‌هایی را بیان می‌کنیم.
مثال. معادله $2x + 3y + 4z = 5$ را حل کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم $1 \mid 5$ ؛ زیرا $(2, 3) = 1$ و لذا معادله داده شده دارای جواب می‌باشد. برای حل این معادله سه مجهولی، ابتدا آن را به معادله دو مجهولی تبدیل کرده و مانند قبل، آن را حل می‌کنیم. به این منظور، قرار می‌دهیم $2x + 3y = w$ (در حالت کلی قرار می‌دهیم $ax + by = dw$ که در آن $d = (a, b)$) بنابراین، معادله داده شده، به صورت $w + 4z = 5$ تبدیل می‌شود. این معادله را به روش دوم ذکر شده در بخش قبل، حل می‌کنیم؛ یعنی قرار می‌دهیم $w = 5 - 4z$ و لذا به ازای $z = t$ داریم $w = 5 - 4t$ و توجه می‌کنیم که $t \in \mathbb{Z}$ حال، معادله $2x + 3y = 5 - 4t$ را حل می‌کنیم. این معادله، جواب صحیح دارد؛ زیرا $1 \mid 5 - 4t$. با حل این معادله، جواب کلی زیر به دست می‌آید:

$$x = -5 + 4t + 3t', \quad y = 5 - 4t - 2t'; \quad (t' \in \mathbb{Z})$$

لذا جواب عمومی معادله داده شده، به صورت زیر می‌باشد:
 $x = -5 + 4t + 3t', \quad y = 5 - 4t - 2t', \quad z = t; \quad (t, t' \in \mathbb{Z})$
توجه می‌کنیم که به ازای $t = 1$ و $t' = -1$ ، یک جواب معادله مذکور، عبارت است از: $x = -4$ و $y = 3$ و $z = 1$.

به همین ترتیب، می‌توان دستگاه معادله‌های سیالیه را تشکیل داده و آنها را حل کرد. این مطالب را به خواست خدا در مقاله‌ای دیگر بررسی خواهیم کرد. مطلب این شماره را با ذکر چند تمرین