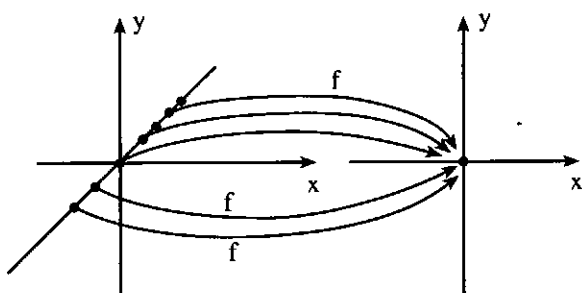


هسته^۱ نگاشتهای خطی

نگاشت خطی f به صورت
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$

تعریف شده است. واضح است که $f(1, 1) = (0, 0)$ ، $f(0, 0) = (0, 0)$ و... و $f(x, x) = (0, 0)$ یعنی در واقع اگر در زوج مرتب (x, y) ، $y = x$ باشد، همواره آن زوج روی $(0, 0)$ تصویر می‌شود. به عبارت دیگر، هر نقطه روی خط به معادله $y = x$ روی $(0, 0)$ تصویر می‌شود، مطابق شکل زیر:



حال دو سؤال مطرح می‌شود:

(I) اگر نگاشت $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ مفروض باشد، چه نقاطی از $\mathbb{R}^m$ را به صفر فضای $\mathbb{R}^n$ می‌برد؟

(II) آیا ممکن است نگاشت خطی f هیچ عضوی از $\mathbb{R}^m$ را به بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ تصویر نکند؟

جواب سؤال (II) براحتی به دست آمده و منفی است؛ زیرا اگر f یک نگاشت خطی باشد، قبلاً ثابت کردیم که $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ، لذا همواره لااقل بردار صفر $\mathbb{R}^m$ ، به بردار صفر $\mathbb{R}^n$ بُرده خواهد شد.

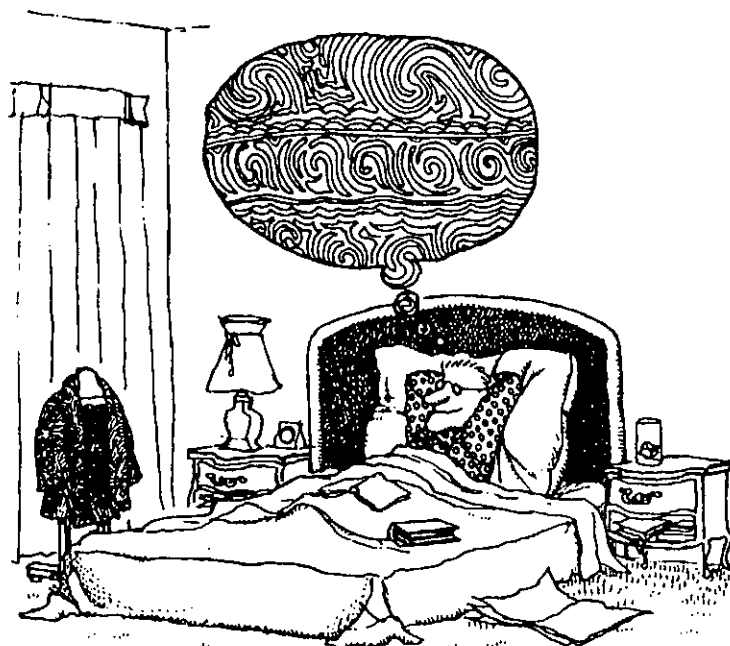
اما پیش از بررسی سؤال (I) به معرفی زیر مجموعه‌ای از دامنه f می‌پردازیم که در واقع مورد نظر سؤال (I) است:

تعریف هسته^۱ یک نگاشت خطی

اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، به تمام اعضای $\mathbb{R}^m$ که توسط f روی صفر فضای $\mathbb{R}^n$ نگاشته می‌شوند، هسته^۱ نگاشت خطی f گفته می‌شود. این مجموعه از اعضای $\mathbb{R}^m$ (دامنه^۱ f) را با k_f نمایش داده و داریم:

$$k_f = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = \vec{0}\}$$

توجه دارید که همواره $k_f \subseteq \mathbb{R}^m$ ، پس هسته همیشه جزء



نگاشتهای خطی

ترکیب نگاشتهای خطی و

ماتریس ترکیب دو نگاشت خطی

(قسمت سوم)

• حمیدرضا امیری

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$$

دامنه یک نگاشت خطی است.

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y, 2x - 2y) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

بنابراین، هسته f ، نیمساز ربع اول و سوم، یعنی خط به معادله $y = x$ بوده و بعد آن یک است.

مثال ۴: نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (0, 0)$

مفروض است، هسته f و بعد هسته f را مشخص کنید.

با توجه به ضابطه نگاشت f ، واضح است که f به طور ثابت همه $\mathbb{R}^2$ را روی $(0, 0)$ می نگارد، لذا $k_f = \mathbb{R}^2$ و بعد هسته، برابر ۲ است.

مثال ۵: نگاشت $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y, z) = (x - y, 2y + z)$ مفروض است، هسته f و بعد هسته f را مشخص کنید.

$$k_f = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid (x - y, 2y + z) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) \mid x - y = 0, 2y + z = 0\}$$

دستگاه دو معادله و سه مجهولی $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ همواره دارای

بی شمار جواب غیر صفر نیز هست. در واقع، جواب دستگاه، محل تلاقی دو صفحه است که یک خط گذرنده از مبدأ می باشد.

$$\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ 2y + z = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow 2x = -z \quad (2)$$

از طرفی طبق (۱)، $y = x$ ، پس با توجه به (۲) $y = -\frac{z}{2}$ ، پس

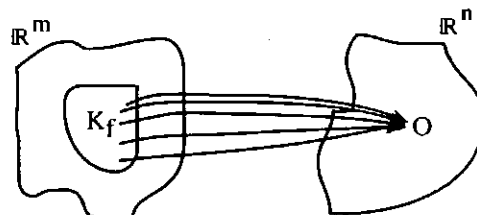
داریم:

$$k_f = \{(x, y, z) \mid x = y = -\frac{z}{2}\}$$

یعنی k_f خطی است در $\mathbb{R}^3$ که بعد آن ۱ است.

مثال ۶: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y) = (x, y + x, 0)$ مفروض است، هسته و بعد هسته نگاشت f را مشخص کنید.



تذکر: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ که $1 \leq n \leq 3$ ، همواره نقطه یا مجموعه ای از نقاط متاهی یا نامتناهی و ناپیوسته، دارای بعد صفر بوده و خط دارای بعد ۱ و صفحه دارای بعد ۲ و فضای $\mathbb{R}^3$ ، سه بعدی است.

حال با توجه به تعریف هسته و تذکر فوق، می خواهیم هسته نگاشتها و بعد آنها را شناسایی کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱: فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (0, y)$ یک نگاشت خطی باشد، می خواهیم هسته و بعد آن را معین کنیم.

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, y) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

همان طور که مشاهده می کنید، هسته این نگاشت خط $y = 0$ یا محور x هاست و بعد این خط ۱ است.

مثال ۲: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (2x, y - 3x)$ مفروض است، هسته و بعد هسته را

بیابید.

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x, y - 3x) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = 0\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(0, 0)\}$$

و بعد هسته، برابر صفر است.

مثال ۳: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$ مفروض است، هسته f و بعد هسته f را مشخص کنید.

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) | x = 0\}$$

و مجموعه نقاطی از فضای سه بُعدی که طول آنها صفر است، صفحه yoz را تشکیل می دهند.

تست: هسته نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(x, y, z) = (x, z, 0)$ کدام است؟

- (۱) محور z ها
(۲) محور x ها
(۳) محور y ها
(۴) صفحه xoz
حل: گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$k_f = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) | (x, z, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) | x = z = 0\}$$

و مجموعه نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ که طول و ارتفاع آنها صفر است، محور عرضها یا y ها می باشد.

یک ویژگی مهم برای هسته نگاشتهای خطی

از آن جا که در نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، همواره $k_f \subseteq \mathbb{R}^m$ ، این سؤال پیش می آید که آیا هسته f که زیر مجموعه $\mathbb{R}^m$ است، زیر فضای برداری $\mathbb{R}^m$ نیز هست یا خیر؟ جواب مثبت است که به صورت قضیه زیر بیان و اثبات خواهد شد:

قضیه: اگر $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، همواره هسته f زیر فضای برداری $\mathbb{R}^m$ است.

اثبات: فرض کنیم k_f هسته نگاشت خطی f باشد، برای اثبات زیر فضای برداری بودن k_f ، باید ثابت کنیم مجموعه k_f نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

$$k_f = \{x \in \mathbb{R}^m | f(x) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\}$$

فرض کنیم $x, y \in k_f \Rightarrow f(x) = f(y) = \vec{0}$
خطی است f

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow f(x+y) = \vec{0} \Rightarrow x+y \in k_f$$

فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, x \in k_f \Rightarrow f(x) = \vec{0}$
خطی است f

$$f(rx) = rf(x) = r\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow f(rx) = \vec{0} \Rightarrow rx \in k_f$$

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y+x, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y = 0\} = \{(0, 0)\}$$

پس بُعد هسته f صفر است.

مثال ۷: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه

$f(x, y) = (0, y, 2y)$ مفروض است، هسته و بُعد هسته را مشخص کنید.

$$k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (0, y, 2y) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$$

بنابراین هسته f ، محور x ها بوده که بُعد آن یک می باشد.

مثال ۸: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f(x, y, z) = (0, z)$ مفروض است، هسته f و بُعد هسته f را

مشخص کنید.

$$k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (0, z) = (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$$

بنابراین هسته f عبارت است از صفحه xoy ($z = 0$) که بُعد آن ۲ است.

مثال ۹: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y, z) = 0$

مفروض است، هسته و بُعد هسته f را مشخص کنید.

از آن جا که نگاشت خطی f به صورت ثابت، همه اعضای $\mathbb{R}^3$ را به صفر تبدیل می کند، پس $k_f = \mathbb{R}^3$ و بُعد آن ۳ می باشد.

$$k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 0\} = \mathbb{R}^3$$

تست: هسته نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه

$f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ کدام است؟

- (۱) محور x ها
(۲) صفحه xoz
(۳) صفحه $yozy$
(۴) صفحه xoy

حل: گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$k_f = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) | (x, 0, 0) = (0, 0, 0)\}$$

کاربرد هسته یک نگاشت خطی در تشخیص یک به یک بودن

قضیه زیر، ملاکی بسیار مهم برای تشخیص یک به یک بودن نگاشتهای خطی بوده و همواره در حل مسائل و پاسخ گویی به پرسشهای چندگزینه ای، می توان از آن بخوبی بهره برد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که نگاشت خطی f ، یک به یک باشد، آن است که هسته f فقط شامل بردار صفر باشد یا $k_f = \{\vec{0}\}$.

اثبات: ابتدا فرض کنیم $k_f = \{\vec{0}\}$ ، ثابت می کنیم f یک به یک است.

فرض کنیم $x_1, x_2 \in D_f$ ، $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \vec{0}$$

تعریف هسته f خطی است

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = \vec{0} \Rightarrow x_1 - x_2 \in k_f = \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f \text{ یک به یک است}$$

حال فرض کنیم f یک به یک باشد، ثابت می کنیم $k_f = \{\vec{0}\}$. قبلاً دیدیم که $k_f \neq \emptyset$ و همواره $\vec{0} \in k_f$ ، حال اگر $k_f \neq \{\vec{0}\}$ (فرض خلف) و مثلاً $x \in k_f$ و $x \neq \vec{0}$ ، پس طبق تعریف هسته داریم $f(x) = \vec{0}$ و چون $f(\vec{0}) = \vec{0}$ ، پس f یک به یک نیست که با فرض تناقض دارد؛ بنابراین $k_f = \{\vec{0}\}$.

مثال: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y) = (x, y + x, x - 2y)$ مفروض است، آیا این نگاشت یک به یک است؟

برای تعیین یک به یکی، کافی است هسته f را بیابیم و از قضیه فوق کمک بگیریم:

$$\begin{aligned} k_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (\vec{0}, \vec{0})\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, x + y, x - 2y) = (\vec{0}, \vec{0})\} \\ &= \{(x, y) \mid x = 0, x + y = 0, x - 2y = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid x = y = 0\} = \{(\vec{0}, \vec{0})\} \end{aligned}$$

بنابراین، f یک به یک است.

مثال: آیا نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y, z) = (x, x + z)$ یک به یک است؟ هسته f را معین می کنیم:

$$k_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (\vec{0}, \vec{0})\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid (x, x + z) = (\vec{0}, \vec{0})\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid x = 0, x + z = 0\}$$

$$\Rightarrow k_f = \{(x, y, z) \mid x = z = 0, y \in \mathbb{R}\} = \text{محور } y \text{ ها}$$

و چون $k_f \neq \{(\vec{0}, \vec{0}, \vec{0})\}$ ، پس نگاشت f یک به یک نیست. به عنوان مثال:

$$f(\vec{0}, \vec{2}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{0}) \quad \text{و} \quad (\vec{0}, \vec{2}, \vec{0}) \neq (\vec{0}, \vec{8}, \vec{0})$$

$$f(\vec{0}, \vec{8}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{0})$$

تست: اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی یک به یک باشد و داشته باشیم: $k_f = \{(a + b, 2a - b + 1)\}$ ، در این صورت، حاصل $(a^2 + b - 1)$ کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad (1) \quad \frac{-5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3) \quad \frac{1}{9} \quad (4)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا f یک به یک است، پس طبق قضیه باید $k_f = \{(\vec{0}, \vec{0})\}$ ؛ بنابراین،

$$(a + b, 2a - b + 1) = (\vec{0}, \vec{0}) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3} \Rightarrow a^2 + b - 1 = -\frac{5}{9}$$

تست: کدام یک از نگاشتهای زیر یک به یک است؟

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = (x + y, y, \vec{0}) \quad f(x, y) = (\vec{0}, \vec{0})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = (x + y, z, 2z) \quad f(x, y, z) = (x, y)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

در گزینه (۱)، داریم $k_f = \mathbb{R}^2$ و در گزینه (۳) داریم $k_f = \{(x, y, z) \mid x = y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ ، که همان محور z هاست و در گزینه (۴) داریم $k_f = \{(x, y, z) \mid x + y = 0, z = 0\}$ ، که همان خط $x + y = 0$ است؛ ولی در گزینه (۲) داریم $k_f = \{(x, y) \mid x = y = 0\}$ ، یعنی $k_f = \{(\vec{0}, \vec{0})\}$ ، پس f یک به یک است.

یادداشتها: