

نگاشتهای خطی

ترکیب نگاشتهای خطی و ماتریس ترکیب دو نگاشت خطی (قسمت دوم)

• حمیدرضا امیری

نگاشت خطی $\underbrace{fofo\cdots of}_n$

تست: اگر f و g دو نگاشت خطی و $fog: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ تعریف شده باشد، در این صورت، نگاشت f کدام می تواند باشد؟

$$f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r \quad (1) \quad f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s \quad (2)$$

$$f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r \quad (3) \quad f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s \quad (4)$$

حل: گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

بُرد نگاشت fog زیر مجموعه بُرد f و دامنه آن، زیر مجموعه دامنه g است و چون $fog: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ و $R_{fog} \subseteq \mathbb{R}^r$ پس می بایست $g: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ و $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ باشند.

نتیجه مهم (ماتریس تبدیلهای متوالی): با توجه به قضیه ترکیب نگاشتهای، اگر f_1 و f_2 و $\dots$ و f_n نگاشتهای خطی و A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n بترتیب ماتریسهای این نگاشتهای باشند و f_1 روی نقطه x اثر کرده و x_1 حاصل شده، سپس f_2 روی x_1 اثر کند و $\dots$ و f_n روی x_{n-1} اثر کند تا در نهایت، نقطه y حاصل شود، در این صورت، ماتریس ترکیب این نگاشتهای، یعنی ماتریس نگاشت $(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)$ برابر است با $(A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)$ و بنابراین:

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(x) = y$$

$$(A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)x = y \quad \text{یا}$$

مسئله: اگر نگاشت $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ تقارن نسبت به محور y ها

فضیه زیر ارتباط بین ترکیب دو نگاشت خطی و ماتریس این ترکیب با ماتریسهای دو نگاشت را بوضوح بیان می کند.

قضیه: اگر $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ دو نگاشت خطی باشند و A و B به ترتیب ماتریسهای نگاشتهای f و g باشند، در این صورت، اولاً fog نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ بوده و ثانیاً ماتریس این نگاشت خطی $A \times B$ می باشد.

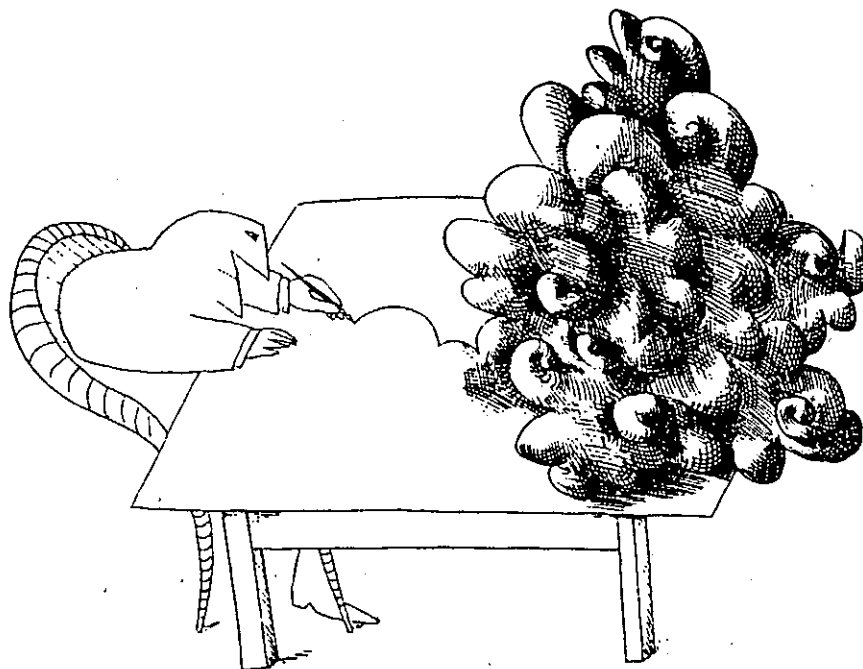
تذکر: درواقع حاصل ضرب دو ماتریس، مشخص کننده ترکیب دو نگاشت خطی است و بعکس، و چون ترکیب نگاشتهای، خاصیت جا به جایی ندارد، لذا ضرب دو ماتریس نیز خاصیت جا به جایی ندارد.

مسئله: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ بترتیب

ماتریسهای نگاشتهای خطی f و g باشند، در این صورت، ماتریس نگاشت خطی gof را به دست آورید.

$$M_{gof} = B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 10 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

تعریف: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ باشد، دراین صورت، f تعریف شده و در صورتی که A ماتریس نگاشت خطی f باشد، A^2 ماتریس نگاشت خطی $f \circ f$ و $\dots$ و A^n ماتریس



حل : گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$\times$ (ماتریس تقارن نسبت به محور x ها) = ماتریس ترکیب دو نگاشت
(ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{تقارن نسبت به محور } y \text{ ها}$$

مسأله : $A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ نقطه دلخواهی در صفحه است، می‌خواهیم

قرینه این نقطه را نسبت به خط $y = mx$ بیابیم. با استفاده از ترکیب نگاشتهای خطی، ماتریس این تبدیل در صفحه را به دست آورید. ($m = \tan \alpha$ ضریب زاویه خط مورد نظر است.)

حل: نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ماتریس A را دوران به اندازه $(-\alpha)$ حول مبدأ و نگاشت $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ماتریس B تقارن نسبت به محور x ها و نگاشت $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ماتریس C دوران به اندازه α حول مبدأ را در نظر می‌گیریم، اگر نقطه A و خط $y = mx$ را ابتدا تحت تأثیر نگاشت f قرار دهیم، خط بر محور x ها منطبق می‌شود و می‌توان در مرحله بعد، قرینه نقطه A را نسبت به محور x ها به دست آورد (توسط نگاشت g) که نقطه حاصل به اندازه $(-\alpha)$ انحراف دارد و بنابراین، توسط نگاشت h این انحراف جبران می‌شود. حال با توجه به ترکیب نگاشتهای، نگاشت (hogof) می‌تواند منظور ما را برآورده کند که ماتریس این نگاشت، برابر است با $D = (CBA)$ و به صورت زیر محاسبه

و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تقارن نسبت به نیمساز ربع اول باشد، ماتریس ترکیب این دو نگاشت را بیابید.

(ماتریس نگاشت f) $\times$ (ماتریس نگاشت g) = ماتریس gof

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = R_{-\frac{\pi}{2}}$$

ماتریس حاصل ماتریس دوران به اندازه $\frac{-\pi}{2}$ است (حول مبدأ)

$$fog = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$$

توجه دارید که اگر نقطه‌ای مانند x تحت تأثیر (gof) قرار گیرد؛ یعنی ابتدا تحت تأثیر نگاشت f و سپس حاصل آن یعنی $f(x)$ ، تحت تأثیر نگاشت g واقع می‌شود، در حقیقت ابتدا نقطه x نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس نسبت به نیمساز ربع اول قرینه می‌شود.

تست: ترکیب دو نگاشت، ابتدا تقارن نسبت به مبدأ مختصات و سپس تقارن نسبت به محور x ها کدام است؟

(۱) تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم

(۲) تقارن نسبت به نیمساز ربع اول

(۳) دوران طول مبدأ به اندازه $\frac{\pi}{2}$

(۴) تقارن نسبت به محور y ها

می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

حل: گزینه (۱) صحیح است: زیرا:

ماتریسهای A و B هر دو ماتریسهای تقارن نسبت به خط

 $y = mx$ می‌باشند؛ زیرا $|A| = |B| = -1$. بنابراین، براساس مطالب قبل داریم:

$$B^{\text{ت}} = (B^{\text{ت}})^{\text{ت}} \times B^{\text{ت}} = I \times B = B \quad \text{و} \quad A^{\text{ت}} = I$$

$$\Rightarrow B^{\text{ت}} \times A^{\text{ت}} = B \times I = B$$

تمرین: با استفاده از ترکیب نگاشتها، ماتریس نگاشت تقارن

نسبت به خط $y = -x$ را بیابید.مثال: قرینه نقطه $A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را نسبت به خط $y + 2x = 0$ به دست

آورید.

$$y + 2x = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \text{tg} \alpha = -2$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \quad \text{و} \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{-4}{5} \quad \text{و} \quad \cos 2\alpha = \frac{-3}{5} \Rightarrow \text{ماتریس تقارن}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

توجه دارید که نقطه داده شده، روی خط $y = -2x$ واقع است، لذا قرینه آن نسبت به خط $y = -2x$ بر خودش منطبق خواهد شد!

یک ویژگی مهم در ماتریسهای دوران حول مبدأ

اگر نقطه A را ابتدا به اندازه α حول مبدأ دوران داده و به A_1 و سپس A_1 را به اندازه β ، حول مبدأ دوران داده و به A_2 تبدیل کنیم، درواقع، نقطه A را به اندازه $(\alpha + \beta)$ حول مبدأ

$$D = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

نکته مهم: ماتریسهای تقارن نسبت به خط $y = mx$ یعنی

$$A = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$
 دارای سه ویژگی زیر می‌باشند که با

مقایسه ویژگیهای ماتریس دوران حول مبدأ، به تفاوت آنها در ویژگی (I) پی خواهید برد.

(I) درمیان ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ برابر با -1 است.

(II) طول هر بردار ستونی در این ماتریسها، برابر واحد است.

$$x = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |x| = |y| = 1$$

(III) بردارهای ستونی، همواره بر هم عمود می‌باشند.

$$x \cdot y = \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow x \perp y$$

تذکر مهم: اگر A ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ باشد، همواره هر نقطه را نسبت به خط $y = mx$ قرینه می‌کند و اگر دوباره روی نقطه حاصل اثر کند، نقطه برخوردش منطبق می‌شود و در حالت کلی اگر تعداد تأثیرهای A روی یک نقطه زوج باشد، نقطه برخوردش منطبق خواهد شد. در واقع $A^{\text{تک}} = I$ و $A^{\text{تک}+1} = A$.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{اگر تست:}$$

زاین صورت حاصل $B^{\text{ت}} \times A^{\text{ت}}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad (۱)$$

کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

اگر ماتریسها را بترتیب، از چپ به راست (بدون در نظر گرفتن توان آنها) A و B و C بنامیم، داریم:

$$A = R_{150^\circ} \quad B = R_{45^\circ} \quad C = R_{-15^\circ}$$

$$\Rightarrow AB^T C = R_{(150^\circ + 135^\circ - 15^\circ)} = R_{270^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مسئله: معادله دوران یافته منحنی به معادله $xy=1$ را حول مبدأ به اندازه (-45°) پیدا کنید.

حل: اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطه دلخواهی از منحنی $xy=1$ باشد، در این صورت:

صورت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = X \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = Y \end{cases}$$

حال x و y را بر حسب X و Y به دست می آوریم:

$$\sqrt{2}y = X + Y \Rightarrow y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}X + \sqrt{2}Y}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}X + \sqrt{2}Y}{2} \right) = X$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{X+Y}{2} = X \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x = X - \left(\frac{X+Y}{2} \right)$$

پس از ساده نمایی

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}X - \sqrt{2}Y}{2}$$

حال در معادله منحنی $xy=1$ به جای x و y تبدیل یافته های آنها بر حسب X و Y را قرار می دهیم که خواهیم داشت:

$$xy=1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}X - \sqrt{2}Y}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}X + \sqrt{2}Y}{2} \right) = 1$$

دوران داده ایم. حال اگر R_α و R_β ماتریس تبدیل دوران به اندازه α و β باشند، طبق مطالب قبل، ماتریس این دو تبدیل متوالی که می بایست دوران به اندازه $(\alpha + \beta)$ یعنی $R_{\alpha+\beta}$ باشد، برابر است با $R_\beta \times R_\alpha$ ، بنابراین $R_\beta R_\alpha = R_{(\alpha+\beta)}$. این رابطه قابل تعمیم بوده و در حالت کلی، با فرض $\alpha = \beta$ داریم:

اگر R_α ماتریس دوران حول مبدأ به اندازه زاویه α باشد، در این صورت:

$$(R_\alpha)^n = (R_{n\alpha}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

مسئله مهم: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ، در این صورت، حاصل

A^{1378} را به دست آورید.

حل: ابتدا متذکر می شویم که $R_{2\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ یعنی

ماتریس دوران به اندازه 2π ، همان ماتریس واحد است (دوران به اندازه 2π تأثیری روی نقطه یا شکل ندارد؛ همان طور که ماتریس واحد عضو خنثی برای عمل ضرب است.)

حال اگر کمی دقت کنیم، مشاهده می کنیم که $A = R_{\frac{\pi}{4}}$ و

می دانیم $A^8 = R_{\frac{\pi}{4} \times 8} = R_{2\pi} = I$ ، از طرفی

$2 + (8 \times 172) = 1378$ را بر ۸ تقسیم می کنیم پس خواهیم داشت:

$$A^{1378} = (A^8)^{172} \times A^2 = (I)^{172} \times A^2 = I \times A^2 = A^2$$

$$= R_{\frac{\pi}{4} \times 2} = R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تست: حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}$$

پس نسبت تجانس ۵ است. (توجه دارید که در ماتریسهای دوران، باید طول هر بردار ستونی، واحد باشد و برای واحد کردن طول یک بردار، کافی است هر مؤلفه آن را بر طول آن بردار تقسیم کنیم، که در این تست، هر مؤلفه بر طول بردار یعنی $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ تقسیم شده است.)

تست: معادله منحنی $x^2 - y^2 = 1$ پس از تبدیل توسط نگاشت

f با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$x^2 + y^2 = -1 \quad (2) \quad x^2 - y^2 = 1 \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = 1 \quad (4) \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

حل: گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:
(روش اول)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = X \\ x = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -X \\ x = Y \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \xrightarrow[x=y]{y=-x} (Y)^2 - (-X)^2 = 1 \Rightarrow Y^2 - X^2 = 1$$

(روش دوم)

منحنی $x^2 - y^2 = 1$ یک هذلولی افقی است و f با توجه به

ماتریس آن، یک دوران حول مبدأ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ است، پس حاصل

اثر این نگاشت بر منحنی مذکور، یک هذلولی قائم است.

در این قسمت، با توجه به شناختی که نسبت به نگاشتهای دوران و تقارن نسبت به خطهای گذرا از مبدأ پیدا کرده ایم، می خواهیم به این مطلب مهم برسیم که:

«نتیجه ترکیب دو تقارن متوالی نسبت به خطهای ماربر مبدأ، یک دوران است.»

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

پس از ساده شدن $\begin{bmatrix} \cos(2\alpha - 2\theta) & -\sin(2\alpha - 2\theta) \\ \sin(2\alpha - 2\theta) & \cos(2\alpha - 2\theta) \end{bmatrix} = R_{(2\alpha - 2\theta)}$

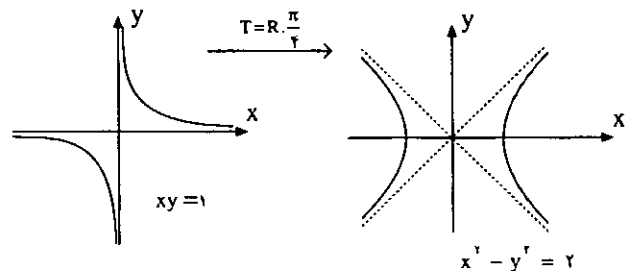
تست: نقطه A را ابتدا نسبت به خط $y = x$ و سپس نسبت به خط $x = \sqrt{3}y$ قرینه می کنیم، ماتریس ترکیب این دو نگاشت

$$\Rightarrow (\sqrt{2}X - \sqrt{2}Y)(\sqrt{2}X + \sqrt{2}Y) = 4$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}X)^2 - (\sqrt{2}Y)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2X^2 - 2Y^2 = 4 \Rightarrow X^2 - Y^2 = 2$$

نمودارهای $xy = 1$ و $x^2 - y^2 = 2$ در زیر رسم شده است.



تست: اگر f نگاشت تقارن نسبت به خط $y = -\frac{2}{5}x$ باشد،

fof کدام نگاشت است؟

(۱) تقارن نسبت به خط $y = \frac{2}{5}x$

(۲) تقارن نسبت به خط $y = \frac{5}{3}x$

(۳) تقارن نسبت به خط $y = x$

(۴) نگاشت همانی

حل: گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

اگر A ماتریس نگاشت f باشد، A^2 ماتریس نگاشت fof بوده و طبق مطالب قبل $A^2 = I$ ، پس $f \circ f = i$ ، که i نگاشت همانی است.

تست: ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ماتریس نگاشت fog است که f

یک تجانس و g دوران است. نسبت تجانس در این تبدیل کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad -\sqrt{5} \quad (2) \quad \sqrt{5} \quad (1)$$

حل: گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} = A$$

ثابت شد که $A^T = A$ ، بنابراین، همواره برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $A^n = A$.



ادب ریاضی

لابد میل دارید بدانید که اراتوستن چگونه برای اندازه گیری زمین اقدام کرد. استدلال او از این قبیل بود: می دانیم که محیط دایره به 360° درجه تقسیم می شود، پس اگر من بتوانم طول یک درجه آن را بر حسب استاد "Stade" معین کنم (هر استاد تقریباً $157/5$ متر است) برای تعیین محیط کره زمین کافی است عدد حاصل را در 360° ضرب کنم، بنابراین مطلب رجوع شده بود به این که طول کمان یک درجه را معین کنند.

تاریخ علوم - پی.یر روسو

کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

حل: گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$y = x \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$$

و طبق مطلب قبل، حاصل این دو تقارن، دورانی است به

$$\text{زاویه } \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

تمرین: خط به معادله $y = mx$ که $m = \operatorname{tg} \alpha$ مفروض است، با توجه به ترکیب نگاشتها، ماتریس نگاشت «تصویر قائم روی خط $y = mx$ را به دست آورید. (راهنمایی: از سه تبدیل دوران به اندازه $-\alpha$ ، تصویر قائم روی محور x ها و دوران به اندازه α استفاده کنید.)

جواب: ماتریس تصویر قائم یک نقطه روی خط $y = x \operatorname{tg} \alpha$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: اگر A ماتریس تصویر قائم روی خط $y = mx$ باشد، داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos \alpha & \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$