



نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

✪ مرتضی بیات و مهدی حسینی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه (زنجان)

اشاره

تفهم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{2}$ ، e و π ، به مراتب راحت‌تر از درک عمیق آن است که آنها چه نوع اعدادی هستند. در این مقاله کوتاه، کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اکنون پس از نکاتی که در بخش اول این مقاله ذکر شد، حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ و چند قضیه ساده دربارهٔ اعداد گنگ و همچنین بررسی قضیه هالموس (صورت ساده مسأله هفتم هیلبرت) و قضیه بیته، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۳. حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ

منطق نباشد، در این صورت روی آن دایره، حداکثر دو نقطه منطق وجود دارد.

حل: مسأله را با برهان خلف حل می‌کنیم. فرض کنیم تعداد نقاط گویا روی محیط دایره بیش از سه نقطه باشد و فرض کنیم:
 $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$
سه نقطه گویای روی محیط دایره باشند. معادلات خطوط عمود منصف وارد بر وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را با l_1 و l_2 به شرح زیر نمایش می‌دهیم:

$$l_1: y - \frac{b_2 + c_2}{2} = -\frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2} \left(x - \frac{c_1 + b_1}{2} \right)$$

$$l_2: y - \frac{a_2 + b_2}{2} = -\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2} \right)$$

خطوط l_1 و l_2 همدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند، لذا مرکز دایره دارای مختصات گویا می‌باشد که این مخالف

اینک با استفاده از گنگ بودن $\sqrt{2}$ مسأله زیر را حل می‌کنیم:
مسأله ۱. فرض کنیم نیم خطی از مبدأ مختصات رسم شده باشد. اگر این نیم خط از نقطه گنگی مانند $(1, \sqrt{2})$ ، عبور کند، آیا این نیم خط، از نقطه صحیح دیگری عبور می‌کند؟
حل: فرض کنیم که این نیم خط از نقطه‌ای بگذرد که هر دو مؤلفه x و y اعداد صحیح p و q باشند. در این صورت، با توجه به مثلث‌های متشابه داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{q} = \frac{1}{p},$$

اما نتیجه اخیر، غیر ممکن است؛ زیرا $\sqrt{2}$ گنگ است.
مسأله ۲ (مسابقه ریاضی دانشجویی ۱۳۵۷). در صفحه XOY نقطه‌ای را منطق (گویا) خوانیم که هر دو مختصاتش گویا باشند. ثابت کنید که اگر دایره‌ای در صفحه داده شده باشد که مرکزش

فرض است.

در مسأله زیر نشان می‌دهیم که اعداد گویا و گنگ به طور بسیار پیچیده‌ای در هم آمیخته‌اند و نباید به اشتباه تصور کرد که آنها روی خط حقیقی به طور «متناوب» هستند.

اعداد گویا را می‌توان اعدادی دانست که بسط اعشاری آن‌ها به فواصل منظم تکرار می‌شود (از اثبات این مطلب صرف نظر می‌کنیم). با بیان دقیق‌تر، گوئیم یک بسط اعشاری، تکراری است، هرگاه از رقمی به بعد، دنباله ثابتی از ارقام به طور نامتناهی تکرار شود. مثلاً:

$$1/5432174174174174... = 1/5432174$$

یک بسط اعشاری تکراری است.

مسأله ۳ (مسابقه ریاضی دانشجویی ۱۳۵۲). ثابت کنید عدد: $0/1234567891011121314151617181920...$

که در فرم اعشاری ارقامش، اعداد طبیعی پشت سرهم هستند، گنگ است.

حل: فرض کنیم که دوره تناوب وجود داشته باشد و از n رقم تشکیل شود. در رشته طبیعی عددها، وقتی به اندازه کافی جلو برویم، می‌توانیم به عددی برسیم که در آن n رقم متوالی مساوی صفر باشد؛ بنابراین دوره تناوب باید از رقم‌های مساوی صفر تشکیل شده باشد. به همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که دوره تناوب باید از رقم‌های مساوی واحد تشکیل شده باشد و این دو نتیجه متناقض یکدیگر را رد می‌کنند. بنابراین x، یک عدد گنگ است.

مسأله ۴: ثابت کنید در صفحه مختصات دکارتی، مثلثی متساوی الاضلاع وجود ندارد که طول ضلعش عددی گویا باشد و مختصات سه رأسش هم اعدادی گویا باشند.

حل: فرض کنید مثلثی با ویژگی‌های مورد نظر وجود داشته باشد؛ طول ضلعش ۱ باشد و مختصات سه رأسش:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

باشند. در این صورت مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_1 y_1 + y_1 x_3 + y_1 x_2]$$

که عددی گویاست. از طرف دیگر، مساحت مثلثی

متساوی الاضلاع به طول ضلع ۱ برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است، که با

توجه به گنگ بودن $\sqrt{3}$ و گویا بودن $\frac{1}{4}$ عددی گنگ است

(چرا؟). بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و حکم مسأله درست است.

۴. چند قضیه ساده درباره اعداد گنگ

همان‌طوری که دیدیم، عدد $\sqrt{2}$ گنگ است. بسیاری از اعداد دیگر هم گنگ هستند. اثبات گنگ بودن یک عدد، همیشه ساده نیست (خواهیم دید برای e نسبتاً ساده است و برای π مشکل‌تر؛ اعداد جالب بسیاری هم وجود دارند که قرن‌هاست ریاضیدانان به گنگ بودنشان متقاعد هستند؛ ولی هرگز به اثباتشان دست نیافته‌اند). ولی تنها از این واقعیت که $\sqrt{2}$ گنگ است، نتیجه می‌گیریم که بین هر دو عدد گویا، عددی گنگ وجود دارند. ابتدا به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱. اگر $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ گویا باشند و $\frac{r}{s} \neq \frac{m}{n}$ ، آن‌گاه $\frac{m}{n} + \frac{r}{s} \sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات. فرض کنیم $\frac{m}{n} + \frac{r}{s} \sqrt{2}$ عددی گویا و برابر با $\frac{p}{q}$ باشد

که p و q اعداد صحیح هستند، آن‌گاه با معادله زیر برای $\sqrt{2}$ داریم:

$$\sqrt{2} = \frac{pn - mq}{qnr}$$

که گویاست و متناقض گنگ بودن $\sqrt{2}$ است.

قضیه ۲. بین هر دو عدد گویای متمایز، عددی گنگ وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم اعداد گویای مفروض $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ باشند

$$\frac{m}{n} < \frac{r}{s} \quad \text{آن‌گاه:}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n} \right) < \frac{r}{s}$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \right)$ و عدد میانی بنا به لم قبل گنگ است.

با تعویض «گویا» و «گنگ» قضیه متناظر به دست می‌آید:

قضیه ۳. بین هر دو عدد گنگ متمایز، عددی گویا وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم اعداد گنگ مفروض a و b باشند و $a < b$.

بسط آنها را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم n امین رقم اعشاری،

اولین رقمی باشد که در این دو متفاوت است. آن‌گاه:

استفاده قرار داد و به کمک آن توانست برای نخستین بار، π را تا ۱۹ رقم اعشاری به دست آورد.

۶. قضیه هالموس

همان طوری که دیدیم، π و e اعداد گنگ هستند؛ ولی درباره ماهیت اعدادی چون $\sqrt[3]{2}$ یا $\sqrt[4]{2}$ و ... اطلاع نداریم. همواره این حکم به طور نادرست در ذهن ها تداعی می شود که اگر α و β اعداد گنگ باشند، آن گاه $\alpha\beta$ نیز گنگ است. این موضوع در حالت کلی برقرار نیست. قضیه زیر که دارای اثباتی ساده و ظریف است، به این سؤال جواب خواهد داد.

قضیه ۵ (هالموس)

(۱) عدد گنگی به توان عدد گنگ، ممکن است حاصل عددی گویا باشد.

(۲) عدد گنگ به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

(۳) عدد گویا به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

اثبات (۱). اتحاد زیر را در نظر می گیریم:

$$\left(\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}\right)^{\sqrt[4]{2}} = 2,$$

اگر $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}$ گویا باشد، حکم تمام است و بنابراین $\sqrt[4]{2}$ ، مثالی از حالت مورد نظر ما خواهد بود.

(۲). اتحاد $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2+1} = \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$ را در نظر می گیریم. اگر $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}$ گنگ باشد، برهان تمام است؛ در غیر این صورت، $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}$ گویاست؛ پس $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}$ ، گنگ است و در نتیجه $\sqrt[4]{2+1}$ ، مثالی از حالت مورد بحث است.

(۳). اگر $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}$ گنگ باشد، حکم تمام است و اگر گویا

باشد، عدد $\frac{\sqrt[4]{2}}{(2\sqrt[4]{2})^{\frac{\sqrt[4]{2}}{4}}}$ را در نظر می گیریم. با توجه به این که:

$$\left(2\sqrt[4]{2}\right)^{\frac{\sqrt[4]{2}}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

پس $\left(2\sqrt[4]{2}\right)^{\frac{\sqrt[4]{2}}{4}}$ ، گنگ است.

۷. قضیه بیٹی

در سال ۱۹۲۶ م. سام بیٹی از دانشگاه تورنتو کشف مهمی در مورد دنباله اعداد گنگ کرد. فرض کنیم X یک عدد گنگ مثبت،

$$a = a_0.a_1...a_{n-1}a_n...$$

$$b = a_0.a_1...a_{n-1}b_n...$$

و $a_n \neq b_n$ ، فرض کنیم $x = a_0.a_1...a_{n-1}b_n$ ، آن گاه

گویاست و باید داشته باشیم $a < x < b$. (واضح است که

$a < x < b$ ، ولی چون b گنگ است، $x \neq b$).

قضیه ۴. عدد e گنگ است.

اثبات. بنا به تعریف داریم:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

فرض کنیم e گویا باشد؛ بنابراین داریم $e = \frac{a}{b}$ ، که در آن a و

b اعداد صحیح هستند. اگر $k \geq b$ قرار می دهیم:

$$\alpha = k! \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{k!} \right)$$

پس $k!b$ و α عدد صحیح است. اما:

$$0 < \alpha = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots = \frac{1}{k}$$

در نتیجه $0 < \alpha < 1$ و این تناقض است.

۵. روش غیاث الدین جمشید کاشانی برای محاسبه

تقریبی عدد π

اگر P_n و P'_n به ترتیب محیط های n -ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در دایره به شعاع واحد باشند، بدیهی است که:

$$P_n = 2n \sin(x) < 2\pi < P'_n = 2n \tan(x).$$

حال اگر n را برابر ۶ بگیریم، به دست می آید:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3.46.$$

یعنی مقدار درست عدد π برابر با ۳ است، که اگر n را

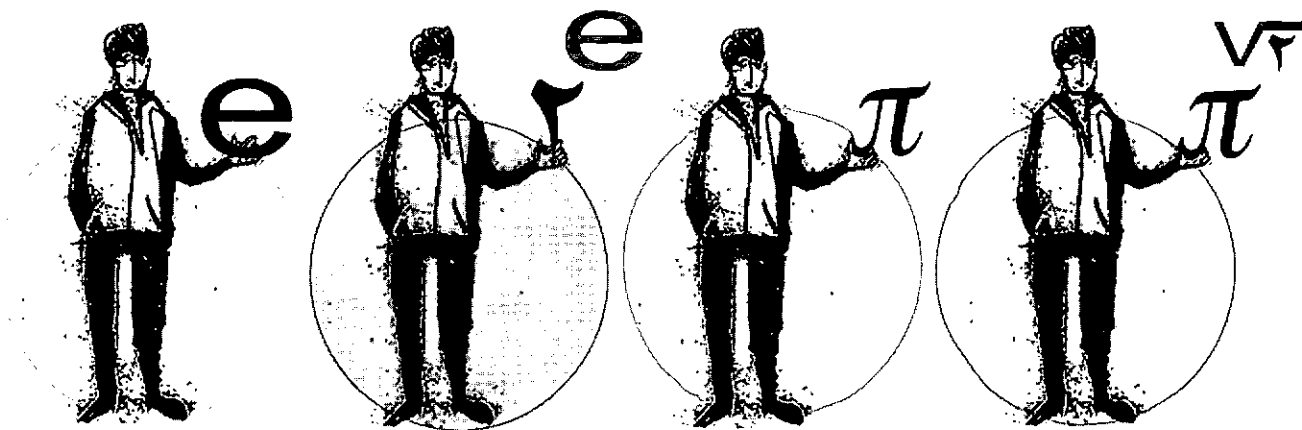
عددهای بزرگ تری بگیریم، به همین ترتیب، می توانیم با توجه به رقم های مشترک دو طرف نابرابری ها، مقدار π را تا هر چند رقم دلخواه به دست آوریم. به ازای $n=60$ ، به دست می آید:

$$60 \sin(3) < \pi < 60 \tan(3)$$

$$3.1402 < \pi < 3.1445$$

بنابراین، $\pi \approx 3.14...$

این شیوه محاسبه عدد π ، یعنی انتخاب چند ضلعی های محاطی و محیطی به جای دایره و افزایش تعداد ضلع های آنها، همان شیوه هایی است که غیاث الدین جمشید کاشانی هم، مورد



اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که، چون X و Y گنگ هستند، هر یک از جمله‌های دنباله‌های مورد نظر، گنگ است. این مطلب مخصوصاً به این معناست که هیچ جمله‌ای عدد صحیح نیست. اکنون، محاسبه تعداد مضرب‌های $X+1$ که کوچک‌تر از یک عدد صحیح مثبت مفروض N هستند، بسیار آسان است. این تعداد که کوچک‌تر از N هستند، برابر است با $\left[\frac{N}{1+X} \right]$ که در آن $[z]$ نشان دهنده بزرگ‌ترین عدد صحیح نایب‌تر از z است.

همین‌طور تعداد جمله‌هایی که در دنباله دوم (مضرب‌های $1+Y$) بین 1 و N واقع‌اند، برابر است با $\left[\frac{N}{1+Y} \right]$.

پس روی همه رفته، $\left[\frac{N}{1+X} \right] + \left[\frac{N}{1+Y} \right]$ جمله از دنباله‌های ما بین 1 و N قرار دارند. چون $\frac{N}{1+Y}$ و $\frac{N}{1+X}$ عدد صحیح نیستند، داریم:

$$\frac{N}{1+X} - 1 < \left[\frac{N}{1+X} \right] < \frac{N}{1+X}$$

و

$$\frac{N}{1+Y} - 1 < \left[\frac{N}{1+Y} \right] < \frac{N}{1+Y}$$

با جمع کردن طرفین نابرابری‌ها و ملاحظه این که:

مثلاً $\sqrt{2}$ باشد. عکس X را Y می‌نامیم؛ در این صورت $Y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$. با افزودن 1 به هر یک از X و Y به دست می‌آوریم:

$$1+Y \approx 1.7 \quad 1+X \approx 2.4$$

حال جدولی از مضرب‌های تقریبی $1+X$ و $1+Y$ تشکیل می‌دهیم و این مضرب‌ها را در جدولی مطابق زیر مشخص می‌کنیم. اکنون می‌بینیم که در هر بازه $[n, n+1]$ ، یعنی بین هر جفت از اعداد صحیح مثبت متوالی، دقیقاً یکی از اعداد جدول وجود دارد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$n(1+X)$	۲/۴	۴/۸	۷/۲	۹/۶	۱۲	۱۴/۴	۱۶/۸	...
$n(1+Y)$	۱/۷	۳/۴	۵/۱	۶/۸	۸/۵	۱۰/۲	۱۱/۹	...

به طور کلی، قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۶ (بیتی). فرض کنیم X عدد گنگ مثبتی و Y عکس آن باشد؛ در این صورت دو دنباله:

$$1+X, 2(1+X), 3(1+X), \dots$$

$$1+Y, 2(1+Y), 3(1+Y), \dots$$

همراه با هم دقیقاً یک عدد در هر یک از بازه‌های $[n, n+1]$ که $n = 1, 2, 3, \dots$ قرار دارند.

در سال ۱۹۲۷ م. اثبات زیبایی از این قضیه را اوستروسکی و آتیکن انتشار دادند.

منابع

1. J.P. Toporowiskis, Irrational Numbers, Amer. Math. Monthly, 50 (1973) 423-424.
2. I. Stewart % D. Tall, The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1977.
3. G.H. Hardy % E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition, Clarandoon Press, Oxford 1960.
4. I. Niven, A Simple Proof of the Irrationality of π , Bulletin of the Amer. Math. Society, 53 (1947) 509.
5. D.M. Bloom, A One - Sentence Proof Taht $\sqrt{2}$ Is Irrational, Mat. Magazine 68 (1995) 286.
6. آدینه محمد نارنجانی: برهان‌هایی از اصیت $\sqrt{2}$ ، مجله رشد ریاضی، ۴۱-۴۳ (۱۳۶۳) ۴.
7. غلامحسین اخلاقی نیا: اعداد گنگ و گویا، (تألیف: ایوان نیون)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۶۷).
8. بیژن کاووس: محاسبه عدد π ، مجله آشنایی با ریاضیات، ۱۱ (۱۳۶۵) ۴۶۹-۴۷۰.
9. اسداله نیکنام و ابوالقاسم بزرگ‌نیا: مبانی ریاضی (تألیف: ک. جی. بین مور)، انتشارات بنیاد فرهنگی رضوی (۱۳۷۰).
10. غلامحسین مصاحب: آنالیز ریاضی جلد اول، چاپ ششم، مؤسسه انتشارات امیرکبیر تهران (۱۳۶۳).
11. فریبرز آذرپناه و علی رضایی: برآورد گنگ با گویا، مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۱۸ (۱۳۷۶) ۲۱-۲۸.
12. سیامک کاظمی: ابتکارهایی در ریاضیات (تألیف: راس هانسبرگ)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۷۱).

$$\frac{1}{1+X} + \frac{1}{1+Y} = \frac{1}{1+X} - \frac{1}{1+\frac{1}{X}} = 1$$

به دست می آوریم:

$$N-2 < \left[\frac{N}{1+X} \right] + \left[\frac{N}{1+Y} \right] < N$$

چون $\left[\frac{N}{1+X} \right] + \left[\frac{N}{1+Y} \right]$ عدد صحیح است، نتیجه

می گیریم:

$$\left[\frac{N}{1+X} \right] + \left[\frac{N}{1+Y} \right] = N-1.$$

این مطلب بدین معناست که تعداد کل جمله های ما که کوچک تر از عدد صحیح N هستند، $N-1$ است. همین طور، تعداد کل جمله ها تا $N+1$ برابر با N است؛ یعنی اگر N را به اندازه ۱ افزایش دهیم، جمله دیگری از یکی از دنباله ها پذیرفته می شود و در نتیجه، دقیقاً یک جمله بین N و $N+1$ واقع است. از این قضیه نتیجه می شود که اگر قسمت های اعشاری جمله های این دنباله ها را کنار بگذاریم، هر جمله عدد صحیحی به دست می دهد و هر عدد طبیعی، دقیقاً یک بار ظاهر می شود. نتیجه. دنباله های $[n(1+X)]$ و $[n(1+Y)]$ ، که به دنباله های بی‌پای متناظر با عدد گنگ X موسوم اند، همراه با هم، هر عدد طبیعی را دقیقاً یک بار در بردارند.

معمای فکری و منطقی



معمای فکری و منطقی

خانم A و خانم B در دوران دبیرستان به یک مدرسه می رفته اند؛ در حالی که دبیرستان های دیگران مختلف بوده است. F پدر معلم فرانسه است. معلم انگلیسی چه در سن و چه در سال های خدمت، مسن ترین این شش نفر است. در واقع زمانی که آنان دانش آموز دبیرستان S بودند، وی معلم ریاضیات و تاریخ را در کلاس خود داشته است. خانم A از معلم لاتین مسن تر است.

در دانشکده S دروس اقتصاد، انگلیسی، فرانسه، تاریخ، لاتین و ریاضیات توسط خانم A، خانم B، خانم C، آقای D، آقای E و آقای F، نه لزوماً به این ترتیب، تدریس می شود. معلم ریاضیات و معلم لاتین در دانشکده هم اتاق بوده اند. E از F مسن تر است؛ اما به اندازه معلم اقتصاد تدریس نکرده است.

برای دانش آموزان دوره متوسطه