



ترجمه:
غلامرضا یاسی پور

نظریهٔ مقدماتی ها مجموعه

روش‌های اثبات

بعضی از روش‌های اثبات

در شمارهٔ قبل مجله قسمت اول این مقاله با اظهاراتی روبه‌رو شدیم که به عنوان قضیه (یا لم^۱ یا نتیجه^۲) توصیف شده بودند و پس از آن‌ها توضیحاتی است که مدعی «اثبات» بودن هستند. در این مورد، درست همان‌گونه که رهیافتی شهودی را به مفهوم مجموعه پذیرفتیم، شهودمان را آزاد می‌گذاریم تا به این موضوع مهم که توضیح داده شده، منطقاً پذیرفتنی است یا خیر رهنمون شود. تنظیم مفهوم پذیرفتنی بودن به حوزهٔ بسیار دوری، موسوم به منطق نمادی^۳ می‌کشد. از طرف دیگر، روش‌های معدودی موجودند که غالباً در تشکیل اثبات‌ها به کار می‌روند، و از آن‌جا که گاهی برای دانش‌آموز اشکال تولید می‌کنند، توجه به آن‌ها شاید سودمند باشد. این کار را از طریق چند مثال نقض^۴، که برای ملاحظهٔ اصل منطقی‌ای که در آن‌هاست، به قدر کفایت ساده‌اند، انجام می‌دهیم.

به عنوان نمونه، چگونگی اثبات اظهار زیر را در نظر می‌گیریم:
(۱) اگر x عددی صحیح و فرد باشد، آن‌گاه x^2 نیز عددی

صحیح و فرد است.

احتمالاً خواهید گفت: «بافرض فرد بودن x به ازای $n \in \mathbb{Z}$

مناسبی بنویسیم:

$$x = 2n + 1$$

در این صورت:

$$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

که واضحاً فرد است.»

در این‌جا مستقیماً از این فرض که x فرد است، به این نتیجه که x^2 فرد است، رفته‌ایم. چنین اثباتی را اثبات مستقیم می‌نامیم.

برای مثال دوم، اظهار زیر را در مورد عددهای صحیح x و y در نظر می‌گیریم:

(ii) اگر $x^2 \neq y^2$ ، آن‌گاه $x \neq y$ (۱)

اثبات مستقیم ممکن است: از $x^2 \neq y^2$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$(x - y)(x + y) \neq 0$$

نتیجه می‌شود که: $x - y \neq 0$ و در این صورت $x \neq y$.

اما اثباتی که احتمالاً اغلب شما خواهید داد چنین است:

اگر $x = y$ ، آن گاه $x^2 = y^2$ (۲)، تناقض و از آن نتیجه مورد نظر به دست می آید.

رهیافت فوق، با استفاده از روش اثبات غیر مستقیم^۵، چند نکته منطقی را آشکار می کند. دو نکته ای که می خواهیم توجه شما را به آن ها جلب کنیم، به ساده ترین صورت بر حسب عبارت های منطقی بررسی می شوند. فرض می کنیم A و B ، به ترتیب، به جای « $x^2 \neq y^2$ » و « $x \neq y$ » قرار داشته باشند. باز فرض می کنیم $\sim A$ و $\sim B$ نقیض هائی آن ها را نمایش دهند. به این ترتیب $\sim A$ عبارت است از « $x^2 = y^2$ » و $\sim B$ عبارت از « $x = y$ ». در این صورت، (۱) اظهار زیر است:

اگر A ، آن گاه B . این اظهار را به طور مختصر به صورت $A \Rightarrow B$ نوشته به صورت « A مستلزم B است» می خوانیم. از طرف دیگر (۲)، که در ظاهر منطقاً با (۱) هم ارز است، اظهار $\sim A \Rightarrow \sim B$ است. در واقع، در منطق مقدماتی، نشان داده می شود که اظهار های $A \Rightarrow B$ و $\sim B \Rightarrow \sim A$ نیز جفت $A \Rightarrow B$ و $\sim B \Rightarrow \sim A$ ، هم ارزند. آنچه که واضحاً (در حالت کلی) هم ارز نیستند، اظهار های $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$ اند. [اظهار اخیر، بر حسب مثال ملموسمان به صورت $x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$ خوانده می شود، که آشکارا دروغ است؛ در حالی که (۱) (آشکارا) راست است. [اظهار $B \Rightarrow A$ به عکس^۶ اظهار $A \Rightarrow B$ موسوم است.

به طور خلاصه: برای اثبات این که نتیجه اظهار شده B از فرض A حاصل می شود، شخص می تواند مستقیماً عمل کند یا به طور هم ارز، ثابت کند $\sim A$ از فرض B استنتاج پذیر است. این نوع اثبات غیر مستقیم به اثبات با استفاده از عکس نقیض^۸ موسوم است و $\sim B \Rightarrow \sim A$ عکس نقیض^۹ $A \Rightarrow B$ است.

روش غالباً پذیرفته شده دیگر، برهان خلف^{۱۰} یا اثبات با استفاده از تناقض^{۱۱} است. در این مورد نشان می دهیم نقیض نتیجه مورد نظر به تناقض (یا باطل بودن)^{۱۲} می انجامد. شاید اولین استفاده از این روش، در اثبات قضیه زیر بوده باشد:

قضیه. اگر $x \in \mathbb{R}$ و $x^2 = 2$ ، آن گاه $x \notin \mathbb{Q}$ ؛ به عبارت دیگر، $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست.

اثبات. فرض می کنیم $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ، بنابراین می توان نوشت $x = m/n$ ، که در آن $m, n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$.

واضحاً می توان فرض کرد m, n در $\mathbb{Z}$ مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از ۱ ندارند؛ مقسوم علیه مشترکی چنین را می توان پیش از آغاز کار حذف کرد. در این صورت از $x = m/n$ نتیجه می گیریم $m^2/n^2 = 2$ ؛ یعنی:

$$m^2 = 2n^2$$

نتیجه می گیریم m^2 و در نتیجه m ، زوج است. با نوشتن $m = 2l$ به دست می آوریم:

$$4l^2 = 2n^2$$

یعنی $n^2 = 2l^2$. اما در این صورت - و در نتیجه n ، زوج است. به این ترتیب، فرضمان، یعنی $\sqrt{2} = x = m/n \in \mathbb{Q}$ ، به این تناقض (باطل بودن) انجامیده است که عددهای m و n بدون مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از ۱، هر دو، زوج اند. در نتیجه $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

اکنون به بررسی دو اظهار زیر می پردازیم.

(i) هر عدد صحیح و مثبت، مجموع مربع های چهار عدد صحیح (مثبت) است.

(ii) هر عدد صحیح و مثبت، مجموع مکعب های هشت عدد صحیح و مثبت است.

بررسی این موضوع که (i) به طور قطع به ازای هر مثبت $n \leq 100$ برقرار است، خیلی مشکل نیست. به عنوان مثال:

$$75 = 8^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$$

$$86 = 9^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$$

اما باید توجه داشته باشیم که (i) حتی اگر به ازای جمیع عددهای صحیح و مثبت، مثلاً تا 10^{5000} نیز بررسی شود، همچنان به ازای هر عدد صحیح و مثبت n به اثبات نرسیده است؛ در واقع، با توجه به تمام این اطلاعات، باز هم ممکن است (i) به ازای $1 + 10^{5000} = n$ برقرار نباشد. آری، برای



تمرین‌ها

۱. کدام یک از اظهارات زیر راست است؟

$$(الف) \quad \frac{3}{5} \in \mathbb{Z} \quad (ب) \quad (\pi + i)^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$$

$$(پ) \quad e - \pi \in \mathbb{R}^+ \quad (ت) \quad (e - \pi)^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$$

$$(ث) \quad \pi^e - e^\pi \in \mathbb{R}^+$$

۲. فرض می‌کنیم: $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1, \phi\}, \mathbb{V}\}$

کدام یک از موارد زیر راست است؟

$$(i) \quad \phi \in A \quad (ii) \quad \{\phi\} \in A$$

$$(iii) \quad \{1\} \in A \quad (iv) \quad \{\mathbb{V}, \phi\} \subsetneq A$$

$$(v) \quad \mathbb{V} \subseteq A \quad (vi) \quad \{\mathbb{V}\} \not\subseteq A$$

$$(vii) \quad \mathbb{V} \subsetneq A \quad (viii) \quad \{\mathbb{V}, \{1\}\} \not\subseteq A$$

$$(ix) \quad \{\phi, \{\phi\}, 1, \phi\} \subseteq A \quad (x) \quad \{\{\phi\}\} \subseteq A$$

۳. فرض می‌کنیم: $A = \{x: x \in \mathbb{R}^+, x^2 > \mathbb{V}\}$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{3, \text{لوتیز کارول}\}$$

موردهای زیر را بیابید:

$$A \cap B, B \cap C, A \cap B \cap C, A \cup B, (A \cup B) \cap C,$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C)$$

نمودار ونی شامل A ، B و C را رسم کنید.

۴. فرض می‌کنیم:

$$A = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$B = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y^2 = 4x\}$$

$$C = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y^2 = x^2\}$$

اشتراک‌ها و اجتماع‌های سؤال شده در تمرین ۳ را بیابید.

۵. (الف) در مورد مجموعه‌های A و B نشان دهید

$$A \cup B = B \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad A \subseteq B \quad \text{و} \quad A \cap B = A$$

تنها اگر $A \subseteq B$.

(ب) به ازای مجموعه‌های A ، B و C ثابت کنید:

$$(i) \quad (A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(ii) \quad (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$$

نتیجه بگیرید که $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (iii)

اثبات (i) باید اثباتی به دست دهیم که جمع عددهای صحیح و مثبت n را پوششاند.

درواقع، (i) راست است و برای اولین بار توسط لاگرانژ^{۱۳}

در ۱۷۷۰ به اثبات رسید. از طرف دیگر (ii) دروغ است؛

چنین نیست که جمع عددهای صحیح و مثبت را بتوان به

صورت اظهار شده بیان کرد. به عنوان نمونه، ۲۳۹ نمی‌تواند

چنین بیان شود و به این ترتیب ۲۳۹ مثال نقض^{۱۵}ی به اظهار

(ii) است. در واقع، تنها یک عدد صحیح و مثبت دیگر وجود

دارد که به صورت مجموع هشت مکعب بیان پذیرفت. آیا

می‌توانید آن را بیابید؟ این عدد کوچک‌تر از ۵۰ است: نکته

در این جاست که هر چند تنها دو عدد از بی‌نهایت عدد صحیح

و مثبت در (ii) صدق نمی‌کنند، وجود حتی یک چنین عدد

صحیح «ناجوری» برای از بین بردن درستی اظهار (ii) کفایت

می‌کند. در این حالت، یافتن عدد صحیح «ناجور» دیگر چیزی

را تغییر نمی‌دهد و مسأله مزبور تنها برای تفریح مطرح شد.

کار را با یکی، دو تبصره در مورد اصطلاحات و نمادنویسی

خاتمه می‌دهیم. قبلاً ملاحظه کردیم اظهار «اگر A ، آن‌گاه B »

به صورت $A \Rightarrow B$ نوشته و « A مستلزم B است» خوانده

می‌شود و نیز می‌گوییم « A شرط کافی^{۱۶} برای B است» (زیرا

A ، به خودی خود، برای استنتاج B کافی است) یا « B شرط

لازم^{۱۷} برای A است» (زیرا B لزوماً و خواهی نخواهی - از A

نتیجه می‌شود). ریاضیدانان به طریق دیگر می‌گویند « B اگر

A یا « A تنها اگر B ». اگر بدانیم $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$ ، می‌گوییم

« A اگر و تنها اگر B »؛ اظهاری که آن را به طور مختصر به

صورت $A \Leftrightarrow B$ می‌نویسیم.

در منطق نمادی، استفاده زیادی از نشانه‌های $\exists$ (وجود

دارد^{۱۷}) و $\forall$ (به ازای هر^{۱۸}) به عمل می‌آید؛ هر چند در این جا

اغلب آن‌ها را به کار نمی‌بریم. به عنوان مثال، توجه داشته

باشید که یکی از ویژگی‌های رابطه برابری بر $\mathbb{Z}$ ، را می‌توان به

ایجاز به صورت زیر بیان کرد:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow xz = yz)$$

سرانجام توجه کنید که نفیض $(\exists x)(p(x))$ ، یعنی

$$((\exists x)(p(x))) \sim ((\forall x)(\sim p(x)))$$

$$\sim ((\forall x)(p(x))) \Rightarrow (\exists x)(\sim p(x))$$

۶. به ازای هر $r \in \mathbb{R}^+$ و هر $n \in \mathbb{Z}^+$ قرار دهید:

$$T_r = \left\{ x: x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{r} \leq x \leq \frac{1}{r} \right\}$$

$$R_n = \left\{ x: x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{n} < x \leq n \right\}$$

$$\text{و پیدا کنید: } \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} T_r$$

۷. فرض می‌کنیم U مجموعه‌ای با زیر مجموعه‌های A و B باشد. تعریف می‌کنیم $A^c = U \setminus A$ و غیره. نشان دهید:

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c \quad (i)$$

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad (ii)$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (iii)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (iv)$$

((iii) و (iv) به قوانین دمورگن^{۱۹} موسوم‌اند.)

۸. $[a, b]$ را به صورت مجموعه $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ تعریف

می‌کنیم. نشان دهید $[a, b] = [c, d]$ اگر و تنها $a=c$ و $b=d$.

۹. (i) نشان دهید اگر A و B نا تهی باشند، آن‌گاه

$$A \times B = B \times A, \text{ اگر و تنها اگر } A=B. \quad (ii) \text{ فرض می‌کنیم}$$

$$S \subseteq A \times B. \text{ آیا نیاز هست که } S \text{ به صورت } C \times D \text{ باشد،}$$

که در آن $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ ؟

۱۰. $p(A)$ چند عنصر دارد؟ اگر: (i) A دارای ۱۰ عنصر

باشد؟ (ii) $A = \emptyset$ ؟

۱۱. فرض می‌کنیم $m \in \mathbb{Z}$. ثابت کنید: اگر m^2 زوج باشد،

آن‌گاه m زوج است.

۱۲. مثالی دیگر از اظهارات A و B به دست دهید که در آن‌ها

$$A \Rightarrow B \text{ راست؛ اما } B \Rightarrow A \text{ دروغ باشد.}$$

$$13. \text{ ثابت کنید: } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

چنان‌که می‌آید، گنگ است. فرض می‌کنیم $e = \frac{m}{n}$

$$\text{آن‌گاه: } t = n!(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!}) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{لذا: } t = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n}$$

که تناقض است. در این مورد چه نوع اثباتی به کار برده‌ایم؟

۱۴. در اثبات این‌که به ازای هر مجموعه A ، $\emptyset \subseteq A$ چه نوع

اثباتی به کار برده‌ایم؟

۱۵. فرض می‌کنیم: $x, y, z \in \mathbb{Z}$

نشان دهید $x^2 + y^2 + z^2$ نمی‌تواند به صورت $8k+7$

باشد؛ وقتی که: (i) دقیقاً یکی از موارد x, y, z فرد باشد؛ و

(ii) هر سه مورد x, y, z فرد باشند. نشان دهید هیچ عدد

صحیح به صورت $8k+7$ به صورت مجموع مربعات سه عدد

صحیح قابل بیان نیست. در این جا از چه روش اثباتی استفاده

کرده‌ایم؟

۱۶. اظهار زیر را، که در آن $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ، با استفاده از کلمات

$$\text{بنویسید: } (\forall x)(\forall y)(\exists x)(xy = z^2)$$

آیا این اظهار راست است؟ به صورت نمادی بنویسید: به

ازای هر x و y واقع در $\mathbb{Z}^+$ که در مورد آن‌ها $x < y$ ، zy چنان

وجود دارد که $x+z=y$.

۱۷. اظهارهای زیر را، که در آن‌ها $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ، با استفاده از

کلمات بنویسید:

$$(ii) (\exists x)(\forall x)(y > x) \quad (i) (\forall x)(\exists x)(y > x)$$

نتیجه بگیرید که بدون ایجاد خطر تغییر معنی، نمی‌توان

لزوهای $\forall$ و $\exists$ را با هم عوض کرد.

زیر نویس

* مجموعه عددهای حقیقی مثبت را نمایش می‌دهد.

* آگوستوس دمورگن «Augustus de Morgan» (۲ ژوئن ۱۸۰۶ - ۱۸ مارس ۱۸۷۱)

1. Lemm
2. corollary
3. symbolic logic
4. counter example
5. indirect proof
6. negations
7. converse
8. proof by contraposition
9. contra positive
10. reductionad absurdum
11. proof by contradiction
12. absurdcty
13. lagrange
14. counterexample
15. sufficient condition
16. necessary condition
17. there exists
18. for all
19. De morgan's Laws